

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE GRIETAS A FATIGA BAJO CARGAS DE AMPLITUD VARIABLE

J. Domínguez* y J. Zapatero**

*Universidad de Sevilla
 Departamento de Ingeniería Mecánica y de los Materiales
 E.T.S.I.I., Camino de los Descubrimientos, s/n, 41092 Sevilla

**Universidad de Málaga
 Departamento de Ingeniería Mecánica
 E.T.S.I.I., Pl. El Ejido, s/n, 29013 Málaga

Resumen. Este trabajo presenta una introducción al comportamiento de grietas a fatiga ante cargas de amplitud variable, y muestra algunos métodos para la predicción de la velocidad de crecimiento de grietas por fatiga ante cargas de amplitud variable. Se analiza brevemente un aspecto importante, característico del comportamiento de los metales ante cargas de este tipo, como es el efecto de secuencia. Se dedica especial atención al cierre de grieta y su efecto sobre el crecimiento. Así mismo, se presentan algunos modelos numéricos empleados en la simulación del efecto de secuencia y se muestran algunos métodos de análisis del crecimiento de grietas ante cargas de amplitud variable. Entre los métodos presentados se incluyen, tanto procedimientos ciclo a ciclo, como otros con tratamiento global de la vida a fatiga, empleando técnicas estadísticas.

Abstract. This paper shows an introduction to fatigue crack growth under variable amplitude loading. Some methods to predict the fatigue crack growth under variable amplitude loading in metals are briefly described. First of all it is analysed a very important aspect that makes different the fatigue crack growth in metals under variable amplitude loading. It is the sequence effect. Special attention is paid to crack closure and its effect fatigue crack growth. Some numerical models to simulate the sequence effect are also considered. Finally, some methods to analyse the fatigue crack growth under irregular and random loading, either cycle by cycle or global statistical methods, are described.

1. INTRODUCCIÓN

Los datos de crecimiento de grietas por fatiga de que se dispone normalmente para la mayoría de los materiales se han obtenido en ensayos con carga de amplitud constante. Sin embargo, las condiciones a que está sometida una estructura real son distintas a las de los ensayos. Las cargas aplicadas sobre las estructuras son normalmente de amplitud variable y la mayoría de las veces aleatorias. Para el análisis de la integridad estructural de estos sistemas es necesario, por tanto, realizar predicciones de crecimiento de grietas ante este tipo de cargas. Para ello, entre otras cosas, será necesario extrapolar los datos obtenidos con cargas de amplitud constante al caso de las cargas reales de servicio, de amplitud normalmente variable.

La predicción del comportamiento de una grieta en casos reales de carga a partir de los datos experimentales obtenidos con carga de amplitud constante no es un problema sencillo. Por un lado, si las cargas son aleatorias o semialeatorias, éstas deberán definirse estadísticamente. Además, durante el crecimiento de una grieta con cargas de amplitud variable, el incremento de longitud en cada ciclo de carga no es igual al que se

produce para las mismas cargas con amplitud constante. Dicho incremento depende, no sólo de los valores máximo y mínimo del ciclo y de la longitud de la grieta, sino también de las amplitudes y valores medios de los ciclos previos de carga: se produce lo que se denomina efecto de secuencia o de interacción.

Para predecir el comportamiento de una grieta en una estructura, el primer paso será, por tanto, predecir las solicitaciones a que va a estar sometida y disponer de un registro de cargas de las mismas características que la esperada durante la vida del sistema objeto de análisis. Dicho registro debe incluir ciclos de distintos niveles en la misma proporción en que se espera van a producirse en la realidad. Además, si los efectos de secuencia son significativos, estos ciclos deben ordenarse en secuencias que produzcan los mismos efectos que la esperada. En muchos casos, para reducir la duración del proceso de cálculo o ensayo, es importante conseguir que la historia representativa produzca los mismos efectos, pero con un número de ciclos muy inferior al real.

Para determinados tipos de sistemas mecánicos y estructuras, como es el caso de aviones, aerogeneradores, helicópteros, estructuras "offshore", o automóviles,

existen registros estandarizados representativos de las cargas producidas [1-4]. Éstos se emplean, unas veces de forma restringida, para determinados tipos de comparaciones de materiales o diseños posibles, y otras, de forma más general, para el análisis previo del comportamiento de los sistemas. Sin embargo, durante el proyecto y desarrollo de un nuevo prototipo, siempre será necesario el empleo de registros específicos del sistema de que se trate. Su obtención requiere un proceso complejo, que incluye simulación y medida experimental de las cargas, así como el análisis estadístico y la manipulación de las mismas. Una descripción de las técnicas empleadas para la obtención de registros representativos de distintos tipos de procesos de carga, así como el análisis de algunos aspectos importantes a considerar durante la generación de éstos puede encontrarse en la bibliografía [5-9].

Definido el registro representativo del proceso de cargas a que estará sometido el sistema, el paso siguiente es la definición de un modelo que represente el comportamiento de una grieta ante este tipo de carga. Para un gran número de tipos de procesos de cargas con amplitud irregular, esto requiere la inclusión del efecto de secuencia en los modelos. Por ello, esta introducción al análisis del comportamiento de grietas ante cargas de amplitud variable comienza tratando diversos aspectos del efecto de secuencia. Seguidamente se describirán brevemente algunos modelos de simulación ciclo a ciclo del comportamiento de las grietas a fatiga con cargas irregulares. Finalmente, se describirán también algunas aproximaciones al análisis del comportamiento ante cargas aleatorias mediante aproximaciones estadísticas.

2. EFECTO DE SECUENCIA

En crecimiento de grietas ante cargas de amplitud constante, el efecto de secuencia se manifiesta cuando durante el proceso de carga se produce un ciclo de amplitud muy superior al resto, una sobrecarga, o un pico negativo muy inferior a los mínimos del resto de los ciclos. En esos casos se produce un transitorio en el crecimiento. A partir del ciclo diferente, la velocidad de crecimiento ante ciclos iguales a los previos será distinta. Este transitorio en el comportamiento de la grieta se mantiene durante cierto intervalo del crecimiento hasta que, de forma progresiva, la grieta vuelve comportarse como en los ciclos previos a la sobrecarga o ciclo diferente.

El efecto de la secuencia de aplicación de las cargas sobre la velocidad de crecimiento de las grietas fue puesto de manifiesto a principios de los años sesenta [10]. Diversos trabajos experimentales [11] demostraron que la aplicación de una sobrecarga origina una velocidad de crecimiento en los ciclos posteriores a ella mucho menor que la que se produce si no existe la sobrecarga. En determinadas condiciones, la sobrecarga puede llegar a

detener completamente el crecimiento de la grieta [12]. Igualmente, se comprobaron transitorios en el comportamiento cuando se aplican bloques de carga de amplitud constante, en los ciclos siguientes a los cambios de amplitud.

La figura 1 muestra esquemáticamente el comportamiento de una grieta sometida a ciclos de carga de amplitud constante cuando se aplica una sobrecarga durante el proceso. Antes de la sobrecarga, la velocidad de crecimiento es constante $(da/dN)_1$ como corresponde a un incremento del factor de intensidad de tensiones (ΔK) constante. Al producirse la sobrecarga (ΔK_{OL}) , se produce una modificación progresiva de la velocidad de crecimiento de la grieta. Durante la sobrecarga e inmediatamente después de ella, con ciclos de amplitud constante iguales a los iniciales, se produce un incremento de la velocidad de crecimiento. La extensión de la grieta sobre la que se produce el aumento de velocidad y el valor de dicho incremento depende de diversos factores, entre los que sobresale el nivel de tensiones, la relación de sobrecarga r_{OL} y si las condiciones de propagación son de tensión plana o de deformación plana [13,14]. En casos de deformación plana no suele detectarse este incremento en la velocidad, o es muy reducido. Seguidamente, comienza a producirse una reducción progresiva de la velocidad de crecimiento hasta llegar a un mínimo. Dicha reducción de velocidad continúa hasta que la grieta ha crecido cierta distancia d a través de la zona plástica producida por la sobrecarga, denominada "delay distance". Este fenómeno de disminución progresiva de la velocidad durante el crecimiento posterior a la sobrecarga se denomina "delayed retardation".

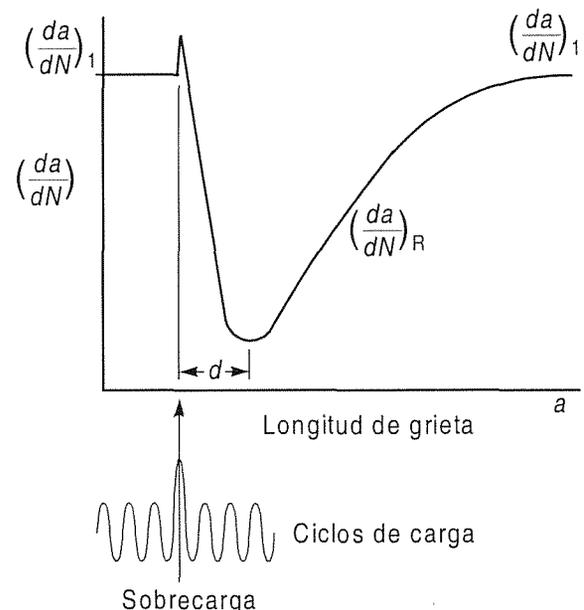


Figura 1. Evolución de la velocidad de crecimiento por fatiga ante una sobrecarga.

Una vez alcanzado el mínimo, la velocidad de crecimiento comienza a aumentar hasta llegar de nuevo al valor previo a la sobrecarga $(da/dN)_1$, estabilizándose en dicho valor. La distancia sobre la que se producen los efectos transitorios de la sobrecarga Δa^* , hasta estabilizarse la velocidad de crecimiento, depende de diversos factores, entre los que se incluyen: estado de tensiones, ΔK , R , r_{OL} , microestructura del material y condiciones ambientales [15]. Incluso, en una probeta de determinado espesor, la extensión de crecimiento sobre la que afecta la grieta puede ser distinta en el centro, donde predominan condiciones de deformación plana y en la superficie, donde el estado es de tensión plana [13].

Otros aspectos destacables del efecto de secuencia producido por sobrecargas son:

- Valores de r_{OL} suficientemente altos, normalmente entre 2 y 3, pueden llegar a producir la detención de la grieta.
- Varias sobrecargas consecutivas aumentan el efecto de retardo. En estas circunstancias se reduce también el "delayed retardation", pudiendo llegar a desaparecer [16].
- El aumento del valor de R produce generalmente una reducción del efecto de retardo. Valores negativos de R reducen también el efecto de secuencia, siendo menor la influencia de la sobrecarga a medida que disminuye R [17].
- El incremento de longitud producido por la sobrecarga es superior al generado por el mismo ΔK con carga de amplitud constante.
- En el caso de grietas pequeñas, el efecto de secuencia indicado es menos acusado. Incluso, dependiendo de la longitud de la grieta y condiciones de carga, puede desaparecer por completo.

Cuando durante un proceso de carga de amplitud constante se aplica una descarga con el mínimo inferior a los mínimos de amplitud constante, se produce el efecto contrario: la velocidad de crecimiento de la grieta aumenta [18]. Este efecto de aceleración es menor que el de retardo producido por una sobrecarga. Su importancia dependerá del valor de la tensión en el valle de carga aplicado. Igualmente, se ha comprobado que un valle inferior a los del resto de los ciclos aplicado inmediatamente después de una sobrecarga, reduce el efecto de ésta, en mayor o menor medida, dependiendo de los valores de ellas [19]. Si este valle está inmediatamente antes de la sobrecarga, puede no tener influencia o puede reducir el efecto que produce la sobrecarga, dependiendo de las condiciones de carga. Estos efectos se representan en la figura 2.

Si, después de un bloque de ciclos de carga de amplitud constante se aplica otro de menor amplitud, se produce un efecto de retardo muy similar al generado por varias sobrecargas consecutivas (Figura 3a) [20]. Cuando los bloques de carga tienen igual valor máximo pero distinto valor mínimo, el efecto de secuencia es menor que el

producido cuando lo que varía es el máximo. Dependerá de los valores de ΔK y de los mínimos de ambos bloques.

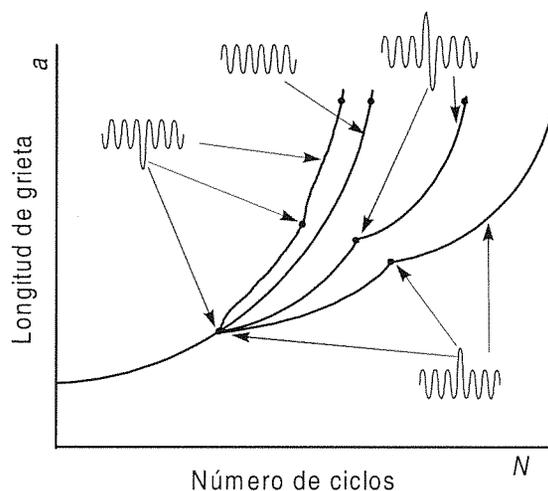


Figura 2. Esquema del comportamiento de una grieta ante diversos tipos de carga.

Cuando las cargas del primer bloque son menores que las del segundo, el efecto es el contrario, produciéndose durante los primeros ciclos del segundo bloque una velocidad de crecimiento mayor de la que ocurre con las mismas cargas y amplitud constante. La aceleración del crecimiento de la grieta se estabiliza en un menor número de ciclos que en los casos de efecto de retardo, volviendo la velocidad de crecimiento a los valores correspondientes a cargas de amplitud constante (Figura 3b) [21]. Sin embargo, considerando el incremento de longitud de grieta necesario para producir la estabilización, este es similar al requerido en casos de sobrecargas o bloques con amplitud decreciente.

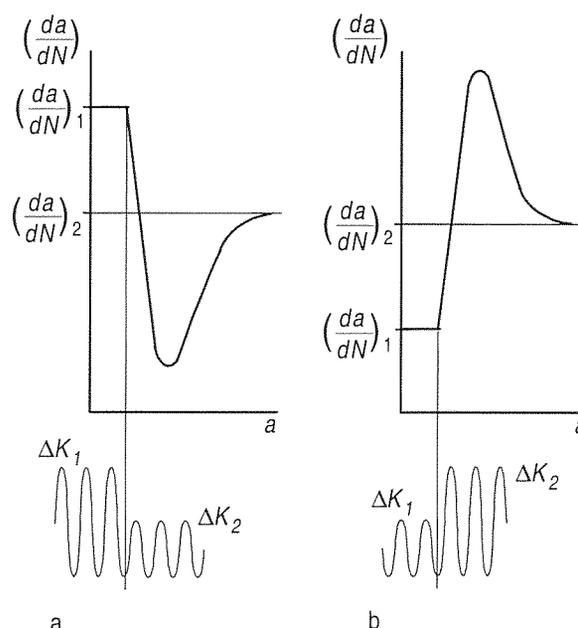


Figura 3. Crecimiento de la grieta ante bloques de carga.

3. MECANISMOS ASOCIADOS CON EL COMPORTAMIENTO TRANSITORIO.

Desde que se observó la existencia del efecto de secuencia, se han propuesto diversos mecanismos como responsables del mismo. En 1967, Rice [22] propuso el redondeado del fondo de la grieta ("crack tip blunting") como responsable del retardo. Posteriormente, Elber [23] introdujo el término cierre de grieta, denominando así al cierre de grieta producido por deformación plástica, al que consideró responsable del efecto de secuencia. Posteriormente se han propuesto otros mecanismos que participan también en la generación del efecto de secuencia, como son la deflexión o la bifurcación de la grieta, producida por una sobrecarga, la rugosidad superficial debida a la irregularidad en el crecimiento, el cierre de grieta inducido por el óxido formado en la superficie, el endurecimiento por deformación, etc. Una descripción de estos mecanismos y discusión sobre la importancia de cada uno de ellos en la producción del efecto de secuencia puede verse en la bibliografía [21]. A continuación se describen brevemente los que más afectan en el caso de materiales metálicos.

3.1. Cierre de grieta inducido por plasticidad.

Como se ha indicado anteriormente, el concepto de cierre de grieta fue introducido por Elber [23] para explicar ciertas anomalías en el comportamiento de una grieta sin carga. Mientras una grieta ideal sometida a carga positiva cierra cuando se descarga totalmente, las grietas producidas por fatiga cierran durante la descarga antes de llegar a ser nula la tensión. Igualmente, durante la carga posterior, la grieta no se abre hasta que el valor de la misma alcanza determinado valor.

Esta diferencia de comportamiento puede explicarse considerando la plasticidad que se forma en el frente de la grieta durante el proceso de crecimiento por fatiga (Figura 4). Cuando la grieta crece, el frente va dejando detrás de sí una zona de material deformado plásticamente (estela plástica), con deformación residual de tracción. La deformación residual acumulada en dicha zona actúa como una cuña, generando sobre la grieta unas tensiones residuales de compresión.

Elber, midiendo la evolución del desplazamiento entre dos puntos P-P' durante un ciclo de carga, en una probeta con una grieta de fatiga (Figura 5a), determinó las tensiones a las que se producía la apertura completa de la grieta durante la carga y aquella a la que se producía el cierre durante la descarga. La figura 5b muestra esquemáticamente la relación carga aplicada-desplazamiento durante una descarga. Pueden distinguirse básicamente tres zonas. Entre A y B, la grieta está abierta y el comportamiento es lineal. Entre B y C, se produce el cierre de la misma, con variación de la rigidez debido al cambio de geometría. Entre C y D, la grieta está totalmente cerrada, el comportamiento es lineal y la

rigidez es igual a la de una probeta sin grieta. La tensión correspondiente al punto B, en el que comienza el contacto entre las superficies se denomina tensión de cierre S_{cl} . Con carga nula, δ_0 es el desplazamiento residual producido por la estela plástica.

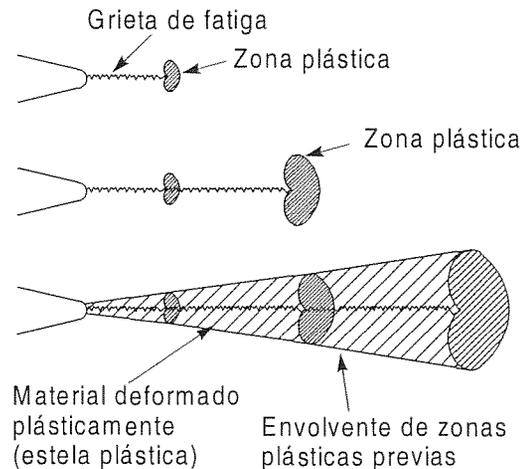
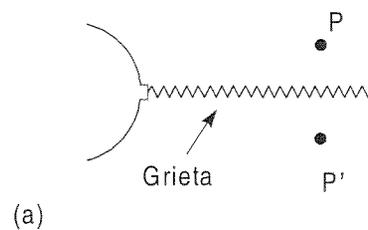
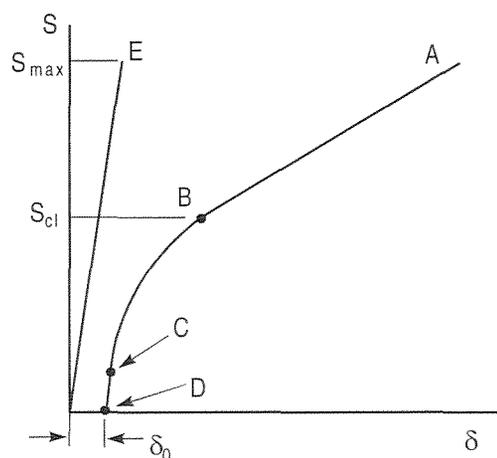


Figura 4. Estela plástica creada al crecer grieta.



(a)



(b)

Figura 5. Gráfico tensión-desplazamiento en una grieta.

Durante la carga, la curva tensión aplicada-desplazamiento es muy similar. Debido a las deformaciones plásticas producidas en cada ciclo y al rozamiento entre las superficies de la grieta durante el

cierre, las curvas de carga y descarga no coinciden exactamente, produciéndose un ciclo de histéresis. El valor de la tensión a la que la grieta se abre completamente durante la carga se denomina tensión de apertura de grieta S_{op} . Debido al aplastamiento plástico que se produce entre las superficies de la grieta en la zona próxima al borde de la misma durante el cierre, S_{op} y S_{cl} no coinciden exactamente. No obstante, a efectos prácticos suele considerarse que son idénticas.

Elber, considerando que sólo puede producirse propagación de la grieta durante la parte del ciclo de carga en que la grieta está totalmente abierta, propuso el empleo de la S_{op} como tensión de referencia para definir un rango efectivo de tensiones ΔS_{eff} y un rango efectivo del factor de intensidad de tensiones ΔK_{eff} :

$$\Delta S_{eff} = S_{max} - S_{op} = U \Delta S \quad (1)$$

$$\Delta K_{eff} = K_{max} - K_{op} = U \Delta K \quad (2)$$

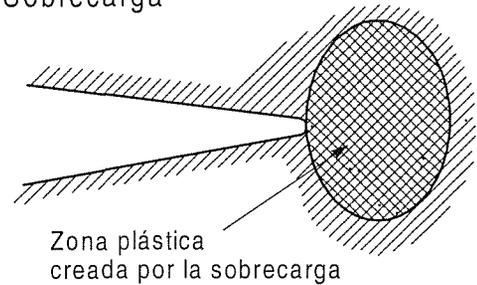
Midiendo las S_{op} en ensayos de amplitud constante y empleando ΔK_{eff} en la ecuación de crecimiento:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{eff})^m = C(U \Delta K)^m \quad (3)$$

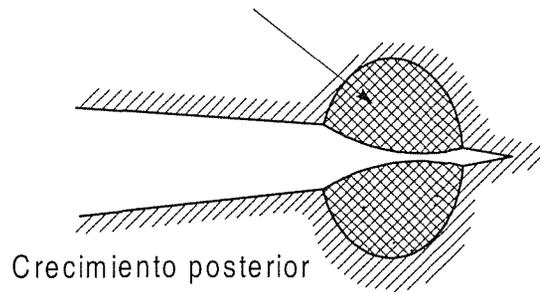
obtuvo un buen ajuste de los resultados experimentales generados con carga de amplitud constante y diferentes valores de $R=(K_{min}/K_{max})$, en probetas de aleación de aluminio 2024-T3. Mientras que la representación de $da/dN-\Delta K$ produce diferentes curvas en el rango de aplicación de la ecuación de Paris, los mismos datos de crecimiento representados en función de ΔK_{eff} producen una sola curva.

En casos de aplicación de una sobrecarga o bloques de cargas con dos amplitudes distintas, Elber comprobó que S_{op} variaba de forma que permitía considerar el cierre de grieta como uno de los principales causantes del efecto de secuencia. Al producirse una sobrecarga durante un proceso de carga con amplitud constante, justo delante del borde de la grieta se genera una zona plástica mayor con deformaciones plásticas residuales de tracción mayores (figura 6). Al volver a aplicarse los ciclos de menor amplitud, inicialmente, el redondeado del borde producido por la sobrecarga hace que S_{op} disminuya inicialmente, aumentando la velocidad de crecimiento de la grieta respecto a los valores producidos antes de la sobrecarga. Cuando la grieta crece a través de esta zona plástica con mayores deformaciones acumuladas, se generan mayores presiones entre las superficies de la grieta, aumentando S_{op} con la consiguiente disminución de la velocidad de crecimiento [13]. Igualmente, entre dos bloques de carga, al producirse un cambio de amplitud de los ciclos se produce un cambio no instantáneo de las tensiones de cierre que permite explicar, al menos en parte, los efectos de secuencia producidos.

Sobrecarga



Zona plástica
creada por la sobrecarga



Crecimiento posterior

Figura 6. Esquema de la zona plástica creada por la sobrecarga

Un modelo analítico del cierre de grieta producido por plasticidad durante el crecimiento estacionario por fatiga ha sido propuesto por Budiansky y Hutchinson [24]. Este modelo, que supone comportamiento elasto-plástico, en condiciones de tensión plana, permite entender la formación de las zonas plásticas monótona y cíclica, permite comprender también el efecto de R y del endurecimiento por deformación en las tensiones de cierre. Su uso para determinar las tensiones de cierre en casos reales, presenta el inconveniente de que se limita al caso de tensión plana y que no es aplicable a condiciones carga de amplitud variable. Se han propuesto otros modelos para simular el comportamiento de una grieta creciendo en distintas condiciones y determinar así las tensiones de cierre [25-29].

En general, puede decirse que el cierre de grieta producido por plasticidad es el principal causante de los efectos de secuencia [13,21]. Sin embargo, no permite explicar toda la variedad de comportamiento producido con distintos materiales, condiciones ambientes, niveles y tipos de carga y longitudes de grieta. Otros aspectos relativos al cierre de grieta pueden encontrarse en la bibliografía [30].

3.2. Bifurcación y deflexión de la grieta.

En algunas aleaciones metálicas con tendencia a deformación por acumulación de dislocaciones en planos de deslizamiento, durante una sobrecarga e inmediatamente después de ella puede producirse una bifurcación o una deflexión de la grieta [15,31,32], volviendo posteriormente, después de cierto avance, a la dirección de propagación previa a la sobrecarga. La variación de orientación de la grieta y el avance a lo largo

de una trayectoria inclinada hace que el crecimiento se produzca en modo mixto, con combinación de los modos I y II, produciéndose una reducción del factor de intensidad de tensiones. Diversos análisis permiten decir que la reducción puede ser del orden del 25% [15].

Algunos autores, a la vista de la reducción del factor de intensidad de tensiones y de los resultados de los ensayos de crecimiento después de sobrecargas, consideran que la deflexión de la grieta es uno de los causantes del efecto de secuencia. Sin embargo, se ha comprobado experimentalmente que, mientras unas veces se detecta retardo durante el avance de la grieta con trayectoria inclinada [31], otras la grieta crece a mayor velocidad durante el avance con esta trayectoria, comenzando el retardo una vez que vuelve a la trayectoria original, perpendicular al eje de carga [33]. En este último caso, no está clara la razón por la que, habiéndose producido una reducción del factor de intensidad de tensiones factor se produce una aceleración en el crecimiento de la grieta.

Fleck [13], a partir del análisis de diversos resultados experimentales obtenidos por él mismo y otros autores, llega a la conclusión que este fenómeno no es una causa dominante de retardo cuando los valores de ΔK son altos. Con niveles bajos de ΔK , si se produce deflexión de la grieta, ésta puede ser una de las causas de retardo, conjuntamente con otros mecanismos como el cierre producido por plasticidad u otras formas de cierre que se describen posteriormente. En cualquier caso, la aparición o no de deflexión o bifurcación de una grieta con una sobrecarga depende de diversos factores, entre los que se incluye el nivel de la sobrecarga, el de las tensiones previas a ésta, la microestructura y el estado de tensiones.

3.3. Cierre de grieta inducido por óxido.

La observación de ciertas anomalías en el crecimiento de las grietas en determinados ambientes con valores de ΔK próximos al umbral de crecimiento por fatiga, llevó a diversos investigadores [34,35] a plantear la posibilidad de que se produjera un efecto de cierre de grieta debido a la oxidación de las superficies de la misma. En efecto, la presencia de una atmósfera corrosiva produce la oxidación de las nuevas superficies generadas durante el crecimiento de la grieta (figura 7a). Con valores de ΔK próximos al umbral de crecimiento por fatiga, la apertura de la grieta en modo mixto, la rugosidad de las superficies y el cierre de grieta inducido por plasticidad producen una continua rotura y nueva formación de la capa de óxido mediante un mecanismo de fretting. Las partículas de óxido desprendidas producen un efecto de cuña, aumentando el factor de intensidad de tensiones a que se produce el cierre K_{cl} , reduciendo el valor de ΔK_{eff} . La consecuencia, de acuerdo con la ecuación (3), es una reducción de la velocidad de crecimiento.

El cierre de grieta inducido por óxido se ve potenciado en determinadas condiciones, como son: ambientes

corrosivos, pequeños valores de R y ΔK , superficies de grieta rugosas, bajo límite elástico del material y cualquier otra que potencie la oxidación, contacto y deslizamiento entre las superficies [36]. Su efecto sobre la tensión de cierre y la velocidad de crecimiento de la grieta es importante para valores de ΔK próximos al umbral y pequeños valores de R , donde es mayor el cierre producido y menor la parte de éste debida a la plasticidad; además, cualquier variación de K_{op} tiene mayor influencia sobre da/dN . Por ello, su efecto sobre la vida a fatiga, normalmente sólo es significativo con estas condiciones de carga.

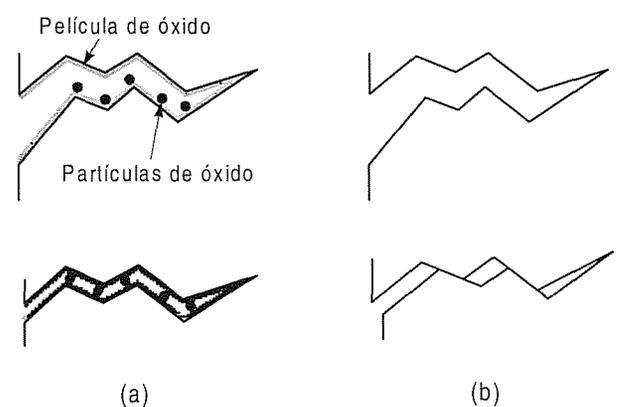


Figura 7. Cierre de grieta por óxido (a), y cierre de grieta por rugosidad.

En cuanto al efecto de secuencia producido por este mecanismo, sólo se presenta adicionalmente a otros que hagan descender la velocidad de crecimiento a valores próximos al umbral después de una sobrecarga. En estos casos, al producirse la sobrecarga, la disminución de ΔK_{eff} a valores próximos al umbral ΔK_{th} , activa los mecanismos de crecimiento que incrementan el valor del cierre de grieta inducido por óxido [15].

3.4. Cierre de grieta inducido por rugosidad.

Con niveles bajos de tensión, como ocurre con niveles próximos al umbral, la zona plástica tiene dimensiones menores que una dimensión microestructural característica, por ejemplo, el tamaño de grano. En estas condiciones, el crecimiento de grieta se suele producir a lo largo de un solo sistema de deslizamiento: mecanismo típico del crecimiento de grietas pequeñas (estado I de crecimiento de grieta por fatiga). Esta forma de crecimiento da origen a una morfología altamente irregular en la superficie que, conjuntamente con el desplazamiento de las superficies de la grieta en modo II y el desajuste entre las irregularidades de las superficies (figura 7b), da origen a un aumento del valor de K_{cl} [37,38].

Entre los factores que potencian el cierre inducido por rugosidad pueden citarse: zona plástica menor que el

tamaño de grano, que induce mecanismos de crecimiento por deslizamiento en un solo sistema; tamaño grande de grano y microestructura con tendencia a producir deslizamiento en un solo plano, lo que generará mayores asperezas, y deflexiones frecuentes, provocadas por bordes de grano, partículas de segunda fase o cambios bruscos de carga [36].

Este tipo de cierre de grieta, como en el caso del inducido por óxido, puede influir apreciablemente en el efecto de secuencia cuando una sobrecarga haga descender la velocidad de crecimiento a valores próximos al umbral. Entonces, se activan los mecanismos de crecimiento que incrementan el valor del cierre inducido por rugosidad de la superficie de la grieta, además de hacer mayor su valor en relación al total de las tensiones de cierre [15].

3.5. Otras consideraciones.

Los mecanismos descritos previamente son generalmente los más influyentes en metales dúctiles. Hay otros mecanismos que, en ciertos materiales, pueden también afectar al comportamiento producido después de una variación de la amplitud de la carga. Entre ellos puede mencionarse el endurecimiento por deformación, o a veces, en determinados ambientes corrosivos, la corrosión-fatiga. En materiales no metálicos hay otros mecanismos, como es el microagrietado, la transformación de fase, etc. Respecto a los descritos en los apartados anteriores, como conclusión, pueden hacerse los siguientes comentarios:

- a. El cierre de grieta inducido por plasticidad es el principal responsable del efecto de secuencia producido en metales. Con niveles de carga suficientemente por encima del umbral, en materiales dúctiles, la influencia del resto de los mecanismos es normalmente despreciable.
- b. Si se produce deflexión o bifurcación de la grieta, su efecto sólo será apreciable con valores de ΔK bajos. Incluso en estos casos, unas veces se produce el efecto de retardo y otras no se ha podido apreciar experimentalmente. En cualquier caso, su efecto es muy difícilmente cuantificable.
- c. El cierre de grieta inducido por óxido o rugosidad de la superficie solo tiene una influencia destacable cuando ΔK_{eff} alcanza valores próximos a ΔK_{th} . En estos casos, una vez que el cierre producido por plasticidad ha producido la reducción de ΔK_{eff} a valores próximos a ΔK_{th} , los mecanismos citados aumentan el cierre de grieta, superponiendo su efecto al cierre plástico. Por ello, estos mecanismos pueden considerarse más una consecuencia que una causa del retardo producido por una sobrecarga.
- d. La cuantificación del incremento de la tensión de cierre provocada por estos dos mecanismos es difícil, aunque existen algunos modelos que intentan aproximar el incremento de tensión de cierre producida por estos mecanismos [38,39]

- e. El desfase en el retardo de crecimiento (“delay effect”) observado después de una sobrecarga puede atribuirse, al menos en parte, al redondeado del frente de la grieta producido por la sobrecarga, que hace disminuir el K_{op} inmediatamente después de ella. Este es fácilmente observado en estados de tensión plana, pero disminuye su importancia al cambiar al estado de tensiones a situaciones próximas a deformación plana.
- f. En grietas pequeñas, emanando de una superficie o de un concentrador de tensiones, el cierre de grieta es menor que en grietas largas. A medida que crece la grieta va aumentando el cierre, hasta que, a partir de determinada longitud, se estabiliza el valor de K_{op} , y normalmente deja de depender de la longitud de la grieta.
- g. Se han propuesto muchos métodos de medida de la tensión de cierre, unos globales, basados en medidas de la flexibilidad o las deformaciones en algún punto alejado del borde de la grieta, y otros locales, que la determinan en la superficie del elemento objeto de ensayo [40].

4. MODELOS DE CRECIMIENTO DE GRIETA QUE INCLUYEN EL EFECTO DE SECUENCIA.

Se han propuesto numerosos modelos de crecimiento de grieta que consideran el efecto de secuencia producido en el crecimiento de una grieta cuando se aplican cargas de amplitud variable. Hay modelos tanto numéricos como analíticos o semianalíticos, basados en medidas experimentales del comportamiento de un material específico ante diversos tipos de cargas variables. Entre ellos destacan, sobre todo por ser los más utilizados y haber servido de base para otros muchos, los propuestos por Wheeler [41] y por Willemborg [42] y los basados en el concepto de cierre de grieta, ya sean determinando la tensión de cierre mediante análisis del comportamiento del material ante la secuencia de cargas [25-28] o proponiendo una expresión aproximada de la evolución de la tensión de cierre, determinada a partir de ensayos y/o análisis numéricos [29,30]. A partir de ellos se han desarrollado otros más sofisticados. Unos permiten incluir otros efectos, como la aceleración y los efectos de cargas de compresión; otros se ajustan mejor a determinados materiales y tipos de carga; otros permiten disminuir el número de parámetros del modelo a determinar experimentalmente; o incluyen la posibilidad de tratamiento de grietas cortas; etc. [26, 43-48].

El modelo de Wheeler [41], parte de la ecuación de crecimiento de Paris o alguna de sus modificaciones. En un ciclo cualquiera, considera el efecto de retardo producido por una sobrecarga previa mediante la multiplicación por un parámetro ϕ :

$$\frac{da}{dN} = \phi f(\Delta K) \quad (4)$$

Donde $f(\Delta K)$ es la ley de crecimiento con carga amplitud constante y ϕ es función de la sobrecarga, el incremento de longitud producido a partir de la misma, la tensión aplicada en el ciclo en cuestión y las características del material. En un ciclo cualquiera de carga, se define mediante la expresión:

$$\phi = \left(\frac{r_i}{a_o + r_{OL} - a_i} \right)^m \quad (5)$$

Donde r_i es el tamaño de la zona plástica asociada a dicho ciclo (figura 8), r_{OL} es el tamaño de la zona plástica producida por la sobrecarga, a_o es la longitud de grieta en el instante en que se produjo la sobrecarga, a_i es la longitud en el instante de aplicación del ciclo en cuestión y m es un exponente obtenido experimentalmente en función del material, geometría y tipo de carga. Cuando $r_i + a_i > a_o + r_{OL}$, el valor de ϕ se considera igual a la unidad.

La falta de sentido físico, la dificultad para determinar experimentalmente el parámetro ϕ y la existencia de otros modelos más fáciles de aplicar que producen iguales o mejores resultados, han hecho caer en desuso el modelo de Wheeler.

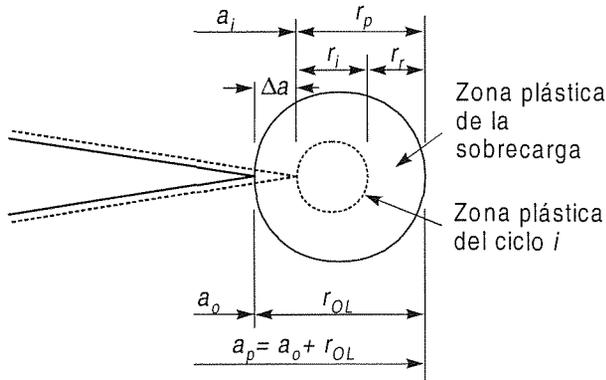


Figura 8. Definición de parámetros para los modelos de retardo.

El modelo de Willemborg [42] emplea un enfoque distinto. Establece la magnitud del retardo en un ciclo cualquiera i como una función del factor de intensidad de tensiones, $K_{max\ r}$, necesario para obtener una zona plástica de tamaño r_p tal que $a_p = a_i + r_p = a_o + r_{OL}$. (Figura 8). A partir de este valor, define un factor de intensidad de tensiones residual de compresión, K_r , como la diferencia entre ese valor y el máximo del factor de intensidad de tensiones producido en el citado ciclo, $K_{max\ i}$:

$$K_r = K_{max\ r} - K_{max\ i} \quad (6)$$

Utilizando K_r , define unos factores de intensidad de tensiones efectivos K_{eff} máximo y mínimo de cada ciclo, $K_{max\ eff}$ y $K_{min\ eff}$, se obtienen restando K_r de los valores $K_{max\ i}$ y $K_{min\ i}$:

$$K_{max\ eff} = K_{max\ i} - K_r \quad (7)$$

$$K_{min\ eff} = K_{min\ i} - K_r \quad (8)$$

Valores que serán positivos o nulos. Es decir, $K_{max\ eff}$ y $K_{min\ eff}$ se harán iguales a cero si se obtienen valores negativos.

De acuerdo con esto, teniendo en cuenta que se resta el mismo valor a ambos factores de intensidad de tensiones, el incremento efectivo del factor de intensidad de tensiones del ciclo i a aplicar en la ecuación de crecimiento no variará:

$$\Delta K_{eff} = K_{max\ eff} - K_{min\ eff} = K_{max} - K_{min} \quad (9)$$

haciéndolo, sin embargo, el coeficiente efectivo de asimetría del ciclo:

$$R_{eff} = \frac{K_{min\ eff}}{K_{max\ eff}} \quad (10)$$

Por tanto, el efecto de la tensión residual y del factor de intensidad de tensiones residual del modelo sobre la velocidad de crecimiento se produce a través de R_{eff} al aplicar una ecuación de crecimiento de la grieta que incluya el efecto del coeficiente de asimetría de los ciclos. Willemborg propuso el empleo de la ecuación de Forman:

$$\frac{da}{dN} = A \frac{(\Delta K_{eff})^n}{(1 - R_{eff})K_c - \Delta K_{eff}} \quad (11)$$

Nótese que en este modelo, si $a_i + r_i \geq a_p$, K_r se anula y el efecto del retardo desaparece.

El modelo de Willemborg tiene la ventaja respecto al de Wheeler de no necesitar el ajuste experimental de ningún parámetro. Sólo es necesario conocer el límite de fluencia del material, σ_{ys} , para determinar el tamaño de zona plástica.

Posteriormente al modelo original de Willemborg se han propuesto otros muchos, basados en la idea de las tensiones residuales [49] en los que se plantean diferentes formas de definirlos y de determinar su evolución al ir creciendo la grieta. Entre las variantes más interesantes que incluyen la posibilidad de considerar aceleración y/o efectos de sobrecargas de compresión posteriores a las de tracción, están los modelos propuestos por Johnson [45] y Chang et al. [50]. Estos, sin embargo, exigen la determinación experimental de algunos parámetros no necesarios en el modelo de Willemborg y otros derivados. Aunque estos modelos son fáciles de aplicar, la falta de sentido físico de los mismos y los errores que producen, que en muchas ocasiones son bastante mayores que los que se obtienen con modelos basados en el cierre de grieta, han hecho que su uso aplicación sea cada vez menos frecuente.

Los modelos basados en la consideración del cierre de grieta como factor fundamental para determinar los transitorios de los ciclos de carga son actualmente los más empleados en la simulación del crecimiento ante cargas de variación irregular. La ecuación de crecimiento de grieta por fatiga la expresan en función del factor efectivo de intensidad de tensiones, definido mediante la ecuación:

$$\Delta K_{eff} = K_{max} - K_{op} \quad (12)$$

La ley de crecimiento es, por tanto:

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K_{eff}) \quad (13)$$

donde la función $f(\Delta K_{eff})$ puede ser la ley de Paris, la ecuación de Forman u otra cualquiera de las generalmente aceptadas.

Los primeros modelos propuestos se basan en la determinación experimental del factor de intensidad de tensiones, K_{op} , asociado a la tensión de apertura, S_{op} , con ensayos de amplitud constante y otros ensayos con una sobrecarga y con bloques de ellas, realizados para cada material. A partir de esos ensayos, determinan expresiones aproximadas de K_{op} después de una sobrecarga y su evolución después de una sobrecarga. Un ejemplo de aproximación al valor de S_{op} producido por cargas de amplitud constante es la propuesta por Elber [23] para el aluminio 2024-T3 con el coeficiente de asimetría de los ciclos, R , entre -0.1 y 0.7 :

$$S_{op} = (0.5 + 0.1R + 0.4R^2) S_{max} \quad (14)$$

Otras muchas aproximaciones se han propuesto para distintos materiales [49], en unos casos distinguiendo entre las tensiones de cierre producidas por cargas de amplitud constante y por sobrecargas simples [51]. En cuanto a evolución de la tensión de cierre con posterioridad a la sobrecarga, de los primeros modelos fue el de Bell y Wolfman [52]. Para el transitorio entre dos bloques de ciclos de carga con valores máximos S_1 y S_2 , proponen la siguiente expresión de variación de S_{op} (Figura 8):

$$S_{op} = S_{op_1} - (S_{op_1} - S_{op_2}) \left(\frac{\Delta a}{r_{OL}} \right)^b \quad (15)$$

para $0 \leq \Delta a \leq r_{LO}$. Donde b es un coeficiente a ajustar experimentalmente, que depende del tipo de material.

Posteriormente, se han desarrollado otros modelos que incluyen procedimientos numéricos más complicados para determinación de la tensión de cierre de grieta ciclo a ciclo, con cargas de amplitud variable [26,29] Estos emplean diversas ecuaciones de crecimiento en función de ΔK_{eff} , definiendo las tensiones de cierre y su evolución a partir de modelos simplificados del comportamiento de la grieta. Quizás uno de los métodos más prometedores para la determinación de las tensiones de cierre ante

cargas de amplitud variable es el denominado en inglés "strip yield model" [26,47,48], desarrollado inicialmente por Newman [26], basado en el modelo de Dugdale. Este modelo permite buenas aproximaciones incluso para el caso de grietas pequeñas [46].

Dicho método, discretizando la zona plástica del borde de grieta con elementos monodimensionales rígido-plásticos, permite obtener una aproximación de las deformaciones residuales de tracción producidas en dicha zona y en la estela plástica, y a partir de ellas, las tensiones de cierre. Una descripción más detallada de alguna de sus variantes puede verse en la bibliografía mencionada [26,46-48].

5. MÉTODOS DE PREDICCIÓN DEL CRECIMIENTO BAJO CARGAS DE AMPLITUD VARIABLE.

En la metodología para el cálculo de la evolución de una grieta ante cargas de amplitud variable deben incluirse una serie de datos básicos, tales como condiciones de carga, material, geometría de la grieta, etc. Conocidos estos datos habrá que definir una ley de crecimiento, que en general puede escribirse:

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K, R, \dots) \quad (16)$$

A partir de ella, se hará el cálculo del número de ciclos necesarios para extender la grieta desde una longitud inicial a_o hasta una longitud a_f , que vendrá dado por:

$$N = \int_{a_o}^{a_f} \frac{da}{f(\Delta K, R, \dots)} \quad (17)$$

El problema será calcular la integral anterior. Este cálculo depende del tipo de carga. Así, para el caso de carga de amplitud constante, la integración resulta directa y sólo será más o menos complicada dependiendo de la expresión del factor de intensidad de tensiones en función de la longitud de grieta. En muchos casos esta información sólo está disponible mediante tablas o gráficos, por lo que la integración habrá que realizarla de forma numérica.

Con carga de amplitud variable, el proceso de integración se hace más complejo, ya que habrá que considerar la variabilidad de los ciclos de carga, la existencia de ciclos superpuestos que puede hacer necesario el uso de un método de contar ciclos y la consideración del efecto de secuencia. De forma general, los procedimientos se pueden clasificar en dos grupos: aquellos que emplean aproximaciones basadas en determinación ciclo a ciclo del crecimiento, y los que a partir de una definición estadística de las cargas, determinan el valor esperado de la vida a fatiga.

5.1. Aproximación ciclo a ciclo

La aproximación ciclo a ciclo consiste en calcular el incremento de longitud de grieta que se produce en cada ciclo, e ir sumando sucesivamente los incrementos para obtener la evolución de la longitud de la grieta con el número de ciclos.

Entre los métodos ciclo a ciclo pueden distinguirse a su vez dos grupos: los que hacen la integración lineal, sin tener en cuenta el efecto de secuencia, y los que consideran algún tipo de efecto de secuencia. Entre los más empleados que consideran estos efectos, pueden mencionarse los derivados del modelo de Willemborg y los que aplican el concepto de cierre de grieta.

Un programa de ordenador para el análisis ciclo a ciclo debe incluir una serie de pasos o módulos, que genéricamente se indican a continuación (figura 9):

- Definición de la geometría del elemento y longitud inicial de la grieta a_0 .
- Determinación, para la geometría considerada, de la función $f(a)$ que permitirá determinar K en función de la longitud de grieta y de la tensión nominal S .
- Definición de la ley de crecimiento y del modelo de retardo a emplear.
- Definición de los parámetros del modelo de crecimiento, por ejemplo, el factor crítico de intensidades de tensiones, K_c , el umbral de crecimiento, ΔK_{th} , el exponente y la constante de la ecuación de crecimiento, etc., y los del modelo de retardo, si se aplica.
- Obtención del registro de carga. Incluirá en caso necesario una subrutina para contar ciclos a partir de historias de carga suministradas y para la generación ciclo a ciclo de la señal a considerar en el análisis. La salida de esta subrutina serán los distintos valores de S_{min} y S_{max} a aplicar secuencialmente al modelo de crecimiento.
- Determinación de K_{max} e ΔK a partir de $f(a)$, longitud de la grieta, ΔS y S_{max} .
- Aplicación del modelo de retardo en caso necesario. Incluirá el cálculo ciclo a ciclo de los parámetros del modelo a incluir en la ecuación de crecimiento. Por ejemplo, en los modelos basados en el cierre de la grieta, habrá que calcular K_{op} , y de ahí, los otros parámetros a incluir en la ecuación de crecimiento correspondiente, por ejemplo, ΔK_{eff} .
- Determinación del incremento de longitud producido en cada ciclo en función de los parámetros calculados, y cálculo de la nueva longitud.
- Comprobación de que $a_i < a_f$ y vuelta al punto 5 para continuar el proceso.

Este proceso puede considerarse general para cualquier método de análisis empleado. Los programas numéricos generales pueden no incluir alguno de los bloques mencionados, por ejemplo el de determinación de $f(a)$, o no incluir método alguno de contar ciclos. En el primer

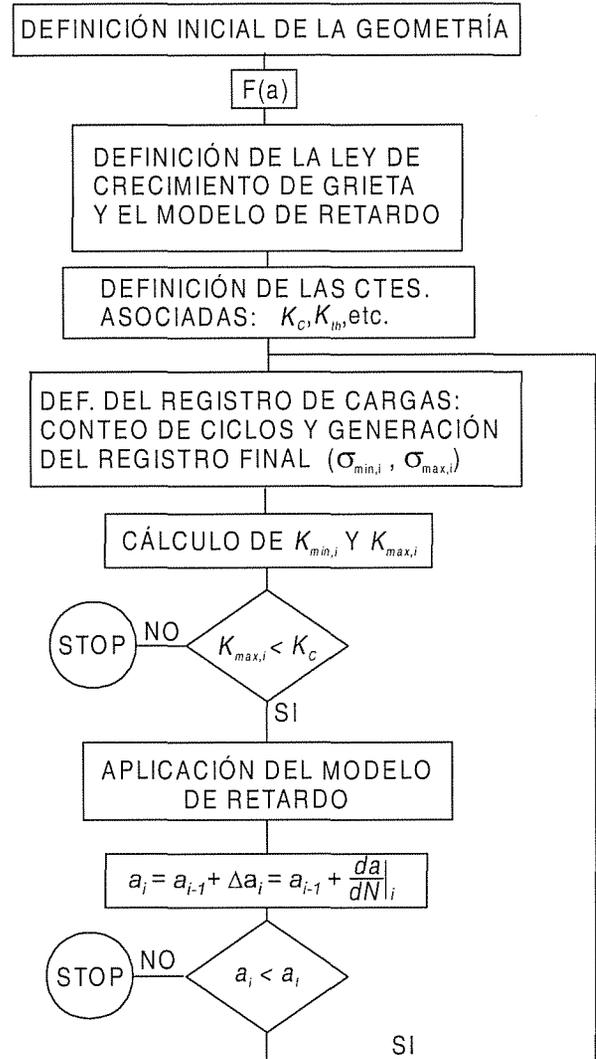


Figura 9. Esquema del proceso de cálculo ciclo a ciclo del crecimiento de grietas.

caso, será necesario suministrarle una tabla de valores entre los que interpolará para obtener $f(a)$. Si no incluye método alguno de contar ciclos, admitirá directamente una secuencia de picos y valles. En otros casos, puede incluir módulos más completos, con varios métodos de contar ciclos y generar el espectro, permitiendo la elección del que se considere más adecuado o el tratamiento directo del registro. Igualmente, pueden no incluir ningún método de consideración del efecto de secuencia o permitir la elección entre varios de ellos o distintas variantes de uno mismo. Puede emplear también distintos tipos leyes de crecimiento, aunque, a veces, éstas van asociadas directamente al método de consideración del efecto de secuencia.

5.1.1. Análisis mediante acumulación lineal.

De los métodos de de análisis del crecimiento, el más simple es la la acumulación lineal, sin consideración del efecto de secuencia. En ese caso debe emplearse un

método de contar ciclos, por ejemplo "rain-flow" [53]. Organizada la secuencia de ciclos de rain-flow a aplicar, solo habrá que determinar ciclo a ciclo los valores K_{max} y K_{min} y el incremento de longitud producido en el ciclo (da/dN), en el orden mostrado en la figura 9.

La ley de crecimiento debe ser aquella que mejor se adapte al material y tipo de carga aplicada. Entre las más empleadas puede mencionarse la de Walker:

$$\frac{da}{dN} = C \left(\frac{\Delta K}{(1-R)^{1-m}} \right)^n \quad (16)$$

una modificación de la de Forman:

$$\frac{da}{dN} = C \frac{\Delta K}{(1-R)K_c - \Delta K} \quad (17)$$

o una más general [54]:

$$\frac{da}{dN} = C \frac{(1-R)^n \Delta K^n (\Delta K - \Delta K_{th})}{((1-R)K_c - \Delta K)^q} \quad (18)$$

Donde ΔK_{th} es el el incremento de factor de intensidad de tensiones umbral de crecimiento, ΔK_c es el factor de intensidad de tensiones crítico de fractura, C es el coeficiente de la ecuación de la velocidad de crecimiento y m , n , p y q son exponentes que dependen del material.

Los métodos que no incluyen el efecto de secuencia tienden a producir resultados conservativos en general [50,55], con vidas menores que las obtenidas experimentalmente. Cuando las historias de carga producen efectos de secuencia poco importantes, los resultados suelen ser suficientemente aproximados en comparación con los de modelos que incluyen efecto de secuencia y normalmente, aunque no siempre, más conservativos [56]. Si los efectos de secuencia producidos por la historia de carga son importantes, las duraciones predichas pueden ser bastante distintas a las reales: menores, si el efecto predominante es retardo, que es lo usual; y mayores, si existen sobrecargas importantes de compresión que produzcan un efecto de aceleración más acusado que el de retardo generado por las de tracción, que es mucho menos frecuente.

Si, previamente a la utilización de un método de acumulación lineal, no se emplea algún método de contar ciclos, los resultados serán menos conservativos. El aumento de vida obtenido en este caso respecto al producido con un método de contar ciclos, dependerá de la historia de carga de que se trate y de la ley de crecimiento de grieta considerada.

Debido a que los resultados producidos son generalmente conservativos, que los errores, si no hay sobrecargas importantes, no son muy grandes, y que son de fácil aplicación e implementación en un ordenador, su uso con cargas aleatorias sin sobrecargas importantes es bastante

frecuente. En estos casos, los resultados obtenidos, incluso sin aplicar un método de contar ciclos pueden ser aceptables [50]. En cualquier caso, es difícil conocer previamente el grado de precisión alcanzado por la predicción. Por ello, antes de adoptarlo como método de análisis en un caso determinado, debe comprobarse la importancia del efecto de secuencia producido por el tipo de historia de carga a aplicar, comparando los resultados con los de otros métodos que incluyan dicho efecto o con ensayos con el mismo material y cargas similares. Dicha comparación puede servir para ajustar los parámetros del modelo de crecimiento al material y tipo de carga, mejorando las predicciones.

5.1.2. Análisis mediante métodos basados en el modelo de Willemborg.

En general, el esquema de funcionamiento de estos procedimientos es como el mostrado en la figura 9. La diferencia con los procedimientos de acumulación lineal radica en los módulos e y g del proceso, correspondientes a la generación de la historia de carga, incluyendo el método de contar ciclos, y a la aplicación del modelo de retardo, respectivamente.

En lo que a la generación de la secuencia de ciclos a analizar respecta, la única diferencia con los procedimientos de acumulación lineal se presenta en el método de contar ciclos. Al igual que en ellos, debe emplearse algún método, por ejemplo "rain-flow". Sin embargo, para poder considerar el efecto de secuencia, los ciclos deben aplicarse al modelo de retardo en el mismo orden en que se producen. Por ello, el método empleado debe almacenar los ciclos de forma que permitan su aplicación posterior manteniendo el orden indicado.

Entre los métodos más completos que emplean el concepto de tensiones residuales del modelo de Willemborg, pueden citarse el propuesto por Chang [50] y el modelo MPYZ [56], propuesto por Johnson. Ambos son modificaciones del modelo de Willemborg generalizado [57]. Incluyen el efecto de las sobrecargas de compresión para reducir la influencia de las sobrecargas. El modelo MPYZ permite representar además el mayor incremento de longitud que se produce ante una sobrecarga en relación a los datos de amplitud constante. El principal inconveniente para la aplicación de estos modelos es la necesidad de introducir varios parámetros, que deben ajustarse experimentalmente para cada material.

5.1.3. Análisis basado en el concepto de cierre de grieta.

Existen varios modelos numéricos para el análisis del crecimiento de grietas mediante métodos basados en el concepto de cierre de grieta. Unos emplean modelos

empíricos para determinar la tensión de cierre en cada ciclo [58], mientras otros hacen uso de alguna de las distintas variantes del “strip yield model” [26,47].

Los códigos de ordenador que ejecutan los modelos pueden ser programas más o menos completos de análisis del crecimiento, formados por los módulos indicados en la figura 9, incluyendo el tratamiento de las historias de carga con generación ciclo a ciclo de las mismas, o no lo incluyen y deben recibir como dato la historia de carga ciclo a ciclo. El uso de estos métodos elimina la necesidad de aplicación de un método de contar ciclos, ya que pueden calcular directamente el crecimiento a partir de ciclos que durante el semiciclo de carga incluyan otros menores [26,47]. Estos métodos, respecto a los basados en tensiones residuales, tienen la ventaja de necesitar un número menor de parámetros a definir experimentalmente, especialmente los que aplican el “strip yield model”.

Las leyes de crecimiento empleadas pueden ser de cualquier tipo, bien sea una relación da/dN definida por puntos en función de ΔK_{eff} , con interpolación lineal entre los puntos definidos, la propuesta por Elber [23], o más complicada, como la propuesta por Newman [26].

En los métodos basados en modelos empíricos, además de una expresión para S_{op} del tipo de las propuestas por de Koning [58], dependientes de las tensiones máximas y mínimas producidas en cada ciclo y los precedentes, es necesario definir la ley de evolución de dicha S_{op} cuando la grieta crece dentro de la zona plástica. Si la historia de carga tiende a producir una tensión de apertura aproximadamente constante durante el crecimiento de la grieta y el incremento de longitud de la grieta entre sobrecargas es bastante menor que el tamaño de zona plástica producido por la sobrecarga, la ley de evolución de S_{op} con el avance de la grieta dentro de la zona plástica tiene poco efecto en el resultado. En ese caso, la precisión de la ley definida no es crítica. Como ya se ha mencionado, las expresiones de las tensiones de apertura en función de los valores máximos y mínimos de los ciclos se obtienen normalmente a partir de ensayos con cargas de amplitud constante o de la simulación del crecimiento con cargas de amplitud constante empleando algún modelo numérico: “strip yield model”, elementos finitos, etc.

Los métodos basados en el “strip yield model” son los que producen generalmente mejores resultados y necesitan menor número de parámetros y funciones a ser determinadas experimentalmente. Además, sin nuevos parámetros, permiten obtener buenas aproximaciones del crecimiento de grietas cortas. Sin embargo, tienen dos inconvenientes en relación a los otros procedimientos citados. Por un lado, es necesario conocer previamente las expresiones que definen el desplazamiento de las caras de la grieta en función de la geometría y forma de carga de que se trate [59], lo que no ocurre en muchos

casos. Por otro lado, el tiempo de cálculo ciclo a ciclo de la evolución de S_{op} hace excesivamente lento el análisis. El primer problema va resolviéndose progresivamente con el desarrollo de aproximaciones para nuevos casos, siendo actualmente posible la solución de variadas geometrías y formas de carga [60,61]. El segundo también va resolviéndose progresivamente, bien sea por el incremento de velocidad de los ordenadores o bien por el desarrollo de procedimientos simplificados de cálculo de la evolución de la tensión de cierre en cada ciclo. Estos últimos métodos permiten reducir el tiempo en uno o dos órdenes de magnitud, con una mínima variación en la predicción [26, 61].

Existen otros muchos métodos de análisis de crecimiento ciclo a ciclo. Algunos incluyen modelos de retardo distintos a los mencionados. Otros son modificaciones de los modelos descritos previamente, bien sea simplificándolos [62] o ampliándolos, incluyendo efectos de secuencia adicionales como el cierre de grieta inducido por óxido [63] u otros [64].

5.2. Análisis global estadístico del crecimiento de la grieta.

Una alternativa al análisis ciclo a ciclo del crecimiento de grietas con cargas de amplitud variable es el análisis global, basado en la descripción estadística de las cargas y determinando el incremento de longitud esperado para un número de ciclos determinado, la velocidad media de crecimiento o la vida esperada hasta la rotura.

Los primeros intentos de caracterizar estadísticamente una historia de carga para el análisis del crecimiento de grieta, trataron de definir un rango equivalente (ΔK_{eq} o ΔS_{eq}) que aplicado con amplitud constante produjera una velocidad de crecimiento igual a la media producida con la historia de carga de amplitud variable. Barsom [65], a partir del análisis del crecimiento de grietas con cargas de amplitud variable con $S_{min} = 0$, en varios aceros, definió una ley de crecimiento tipo Paris en función de la raíz media cuadrática del incremento del factor de intensidad de tensiones en los ciclos de carga, ΔK_{rms} . Posteriormente se han propuesto otras variantes de esta aproximación empleando otro parámetro para definir el valor de ΔS_{eq} , por ejemplo el rango medio del proceso [66], definido como la diferencia entre la media de los picos y la media de los valles de carga. Más recientemente, Hudson [67] propuso un modelo en el que la velocidad media puede aproximarse por la ecuación de Forman, en la que ΔK y R se sustituyen por unos valores equivalentes, ΔK_{rms} y R_{rms} , obtenidos a partir de las raíces medias cuadráticas de los máximos $(S_{max})_{rms}$ y de los mínimos $(S_{min})_{rms}$, en lugar de S_{max} y S_{min} . Para determinados tipos de carga empleados en aeronáutica, Hudson obtuvo unos resultados comparables a los obtenidos con procedimientos ciclo a ciclo que incluyen efectos de secuencia [68]. De 11 casos analizados con diferentes registros de carga, obtuvo

valores cuya relación con los obtenidos en ensayos estaba en un rango comprendido entre 0.82 y 2.13.

En el caso de procesos aleatorios de carga, estos modelos - incluido el de Barsom con $S_{min} = 0$ - tienen la ventaja de permitir la determinación de las ΔS_{eq} a partir de las distribuciones de máximos y mínimos, que son más fáciles de obtener que la distribución de rangos, directa o después de aplicar un método de contar ciclos, que son necesarias para otros modelos que se describen a continuación. Sin embargo, tienen el inconveniente de no relacionar directamente el crecimiento de las grietas con los rangos, obtenidos antes o después de "contar los ciclos", junto con la tensión de cierre, son los que producen los rangos efectivos de carga.

Por ello, se han propuesto otros modelos que, a partir de la función de densidad de probabilidad de rangos $p(\Delta S)$, determinan: bien ΔS_{eq} , si la ley de crecimiento puede expresarse separando los términos dependiente de las tensiones de los dependientes de la geometría [69-71]; o una expresión de la velocidad media de crecimiento, cuando no es posible la separación de términos. En este caso, expresando de una forma general la ley de crecimiento

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta S, a, \dots) \quad (19)$$

el valor esperado de da/dN cuando la grieta tiene una longitud a_i puede expresarse [72]:

$$\left. \frac{da}{dN} \right|_{a_i} = \int_0^{\infty} f(\Delta S, a_i, \dots) p(\Delta S) d(\Delta S) \quad (20)$$

Resolviendo esta ecuación puede obtenerse el número de ciclos para el crecimiento de la grieta desde una longitud inicial a_0 hasta otra a_f

$$N = \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{\int_0^{\infty} f(\Delta S, a, \dots) p(\Delta S) d(\Delta S)} \quad (21)$$

Ecuación que puede ser integrada numéricamente.

Si la ley de crecimiento $da/dN = f(\Delta S, a, \dots)$ permite la separación de los términos dependientes de las tensiones de aquellos que dependen de la longitud de la grieta, como ocurre en la ley de Paris, la ecuación anterior puede expresarse

$$N = \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{g(a) \int_0^{\infty} (\Delta S)^n p(\Delta S) d(\Delta S)} = \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{g(a) (\Delta S_{eq})^n} \quad (22)$$

con

$$\Delta S_{eq} = \sqrt[n]{\int_0^{\infty} (\Delta S)^n p(\Delta S) d(\Delta S)} \quad (23)$$

que es la raíz media n de ΔS (ΔS_{mn}).

La aproximación general anterior (ecuación (21)) permite emplear cualquier ley de crecimiento $da/dN = f(\Delta S, a, \dots)$, incluso considerando el cierre de grieta [73].

Los procedimientos globales expuestos exigen la determinación de la función de densidad de probabilidad de rangos $p(\Delta S)$. Tanto si ΔS representa los rangos derivados del método de contar ciclos como si representa las diferencias entre mínimos y máximos consecutivos, $p(\Delta S)$ puede aproximarse a partir de los histogramas obtenidos del análisis de los registros de carga [72]. Con algunos tipos de procesos aleatorios, puede aproximarse directamente, a partir de la densidad espectral u otras características estadísticas de los mismos [74-76].

El principal inconveniente de este tipo de modelos es la dificultad de considerar el efecto de secuencia. En muchos casos, esta dificultad puede ser parcialmente resuelta definiendo una tensión de cierre o de apertura de grieta equivalente ($S_{op,eq}$), constante durante todo el proceso de crecimiento, que tenga en cuenta de alguna forma este efecto [77]. Cuando los efectos de secuencia proceden de sobrecargas de tracción de distribución irregular, exógenas al proceso aleatorio, no es posible fácil ningún tipo de $S_{op,eq}$, ya que ésta será función del espaciado entre las sobrecargas. La suposición de espaciado regular puede ser no conservativa.

En cualquier caso, son muchos los casos de cargas de amplitud variable en que los efectos de interacción no son importantes, por ejemplo en vibraciones aleatorias, donde los picos más altos de tensión proceden del mismo proceso que el resto. En estas circunstancias, los métodos globales producen resultados tan buenos como otros que emplean simulación ciclo a ciclo, que consumen más tiempo de ordenador y, en muchos casos, necesitan además la determinación experimental de varios parámetros del modelo.

6. REFERENCIAS

- [1] Schütz W., "Standardized Stress-Time Histories - An Overview", Development of Fatigue Loading Spectra", J. M. Potter y R. T. Watanabe Eds., ASTM STP 1006, pp 3-16, 1989.
- [2] Van Dijk G. M., De Jonge J. B., "Introduction to a Fighter Aircraft Loading Standard for Fatigue Evaluation «FALSTAFF». Part I", NLR MP 75017 U, 1975.
- [3] Ten Have A. A., "HELIX and FELIX: Loading Standards for Use in Fatigue Evaluation of Helicopter Rotor Components", NLR MP 82041 U, 1982.
- [4] Pook, L.P. y Dover, W.D., "Progress in the Development of a Wave Action Standard History (WASH) for Fatigue Testing Relevant to Tubular

- Structures in the North Sea", Development of Fatigue Loading Spectra, J.M. Potter y R.T. Watanabe, Eds., ASTM STP 1006, pp. 99-120, 1989.
- [5] Potter, J.M. y Watanabe, R.T., Eds., Development of Fatigue Loading Spectra, ASTM STP 1006, 1989.
- [6] Ten Have A. A., "European Approaches in Standard Spectrum Development", Development of Fatigue Loading Spectra, J. M. Potter y R. T. Watanabe Eds., ASTM STP 1006, pp 17• 35, 1989
- [7] Fowler, K.R. y Watanabe, R.T., "Development of Jet Transport Airframe Fatigue Test Spectra", Development of Fatigue Loading Spectra, J.M. Potter y R.T. Watanabe, Eds., ASTM STP 1006, pp. 36-64, 1989.
- [8] Broek, D., The Practical Use of Fracture Mechanics, Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [9] Bishop, N.W.M. y Sherratt, F., "A Theoretical Solution for the Estimation of "Rainflow" Ranges from Power Spectral Density Data", Fatigue Fract. Engng Mater. Struct., Vol. 13, 1990, pp. 311-326.
- [10] Hudson C. M. y Hardrath M. F., "Effect of the Changing Stress Amplitude on the Rate of Fatigue Crack Propagation in Two Aluminum Alloys", NASA TN-D-960, 1961.
- [11] Schijve J., "Fatigue Crack Propagation in Light Alloy Sheet Material and Structures", Report MP-195, National Aerospace Labs., The Netherlands, 1960.
- [12] Probst E. P. y Hillberry, B. M., "Fatigue Crack Delay and Arrest Due to Single Peak Tensile Overloads", AIAA Paper No. 73-325, 1973.
- [13] Fleck, N., Influence of Stress State on Crack Growth Retardation. *Basic Questions in Fatigue: Volume I*, ASTM STP 924, Eds. J. T. Fong y R. J. Fields. American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1988, 157-183.
- [14] Shuter, D. M. y Geary, W., Some Aspects of Fatigue Crack Growth Retardation Behaviour Following Tensile Overloads in a Structural Steel, *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, 1996, **19**, 185-199.
- [15] Suresh, S., Fatigue of Materials, Cambridge University Press, 1998.
- [16] Corbly, D. M. y Packman, P. M., "On the Influence of Single and Multiple Peak Overloads on Fatigue Crack Propagation in 7075-T6511 Aluminum", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 5, pp. 479-497, 1973.
- [17] Stephens, R. I., Chen, D. K. y Hom, B. W., "Fatigue Crack Growth with Negative Stress Ratio Following Single Overloads in 2024-T3 and 7075-T6 Aluminum Alloys," Fatigue Crack Growth Under Spectrum Loads, ASTM STP 595, pp. 27-40, 1976.
- [18] Topper T. H. y Yu, M. T., "The Effect of Overloads on Threshold and Crack Growth", International Journal of Fatigue, Vol. 7, pp. 159-164, 1985.
- [19] Marissen, R., Trautman, K. H. y Nowack, H., "The Influence of Compression Loads and of dK/da on the Crack Propagation Under Variable Amplitude Loading," Engineering Fracture Mechanics, Vol. 19, pp. 863-879, 1984.
- [20] Mc Millan, J.C. y Pelloux, R.M.N., "Fatigue Crack Propagation Under Program and Random Loads", Fatigue Crack Propagation, ASTM STP 415, pp. 505-535, 1967.
- [21] Ward-Close, C.M., Blom, A.F. y Ritchie, R.O., "Mechanisms Associated with Transient Fatigue Crack Growth Under Variable-Amplitude Loading: an Experimental and Numerical Study", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 32, pp. 613-638, 1989.
- [22] Rice, J.R., "Mechanics of Crack Tip Deformation and Extension by Fatigue", Fatigue Crack Propagation, ASTM STP 415, pp. 247-309, 1967.
- [23] Elber, W., "The Significance of Fatigue Crack Closure", Damage Tolerance in Aircraft Structures, ASTM STP 486, pp. 230-242, 1971.
- [24] Budiansky, B. y Hutchinson, J.W., "Analysis of Closure in Fatigue Crack Growth", Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, pp. 267-276, 1978.
- [25] Fühling, H. y Seeger, T., "Dugdale Crack Closure Analysis of Fatigue Crack Under Constant Amplitude Loading", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 11, pp. 99-122, 1979.
- [26] Newman, J.C., "A Crack Closure Model for Predicting Fatigue Crack Growth Under Random Loading", Methods and Models for Predicting Fatigue Crack Growth under Random Loading, J. B. Chang y C. M. Hudson (Eds.), ASTM STP 748, 1981, pp 53-84.
- [27] McClung, R.C. y Sehitoglu, H., "On the Finite Element Analysis of Fatigue Crack Closure", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 33, pp. 237-272, 1989.
- [28] Chermahini, R.G., Shivakumar, K.N., Newman, J.C. y Blom, A.F., "Three- dimensional Aspects of Plasticity Induced Fatigue Crack Closure, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 34, pp. 393-402, 1989.
- [29] De Koning, A.U., "A Simple Crack Closure Model for Prediction of Fatigue Crack Growth Rates Under Variable Amplitude Loading, NLR MP 8006 U, 1980.
- [30] Newman, J.C. y Elber, W., (Eds.), Mechanics of Fatigue Crack Closure, ASTM STP 982, 1988.
- [31] Vecchio, K.S., Hertzberg, R.W. y Jaccard, R., "On the Overload Induced Fatigue Crack Propagation Behavior in Aluminum and Steel Alloys", Fatigue of Engineering Materials and Structures, Vol. 7, pp.181-194, 1984.
- [32] Suresh, S., Vasudevan, A.K., Tosten, M.H. y Howell, P.R., "Microscopic and Macroscopic Aspects of Fracture in Lithium-containing Aluminum Alloys", Acta Metallurgica, Vol. 35, pp. 25-46, 1987.
- [33] Lankford, J. y Davidson, D.L., "The Effect of Overloads Upon Fatigue Crack Tip Opening Displacement and Crack Tip Opening/Closing Loads in Aluminum Alloys", Advances in Fracture

- Research, D. François (Ed.), Vol. 2, pp. 899-906, Pergamon Press, 1981.
- [34] Suresh, S., Zamiski, G.F. y Ritchie, R.O., "Oxide-induced Crack Closure: an Explanation for Near-threshold Corrosion Fatigue Crack Growth Behavior", *Metallurgical Transactions*, Vol. 12 A, pp. 1435-1443, 1981.
- [35] Liaw, P.K., Leax, T.R. y Logsdon, W.A., "Near-threshold Fatigue Crack Growth Behavior in Metals", *Acta Metallurgica* Vol. 31, pp. 1581-1587, 1983.
- [36] Liaw, P.K., "Overview of Crack Closure at Near-Threshold Fatigue Crack Growth Levels", *Mechanics of Fatigue Crack Closure*, J.C. Newman, Jr. y W. Elber, Eds., ASTM STP 982, pp. 62-92, 1988.
- [37] Gray, G.T., Williams, J.C. & Thompson, A.W., "Roughness-induced Crack Closure: an Explanation for Microstructurally Sensitive Fatigue Crack Growth", *Metallurgical Transactions*, Vol. 14A, pp. 421-433, 1983.
- [38] Suresh, S. & Ritchie, R.O., "A Geometric Model for Fatigue Crack Closure Induced by Fracture Surface Morphology", *Metallurgical Transactions*, Vol. 13A, pp. 1627-1631, 1982.
- [39] Suresh, S. y Ritchie, R.O., "Near-Threshold Fatigue Crack Propagation: a Perspective on the Role of Crack Closure", *Fatigue Crack Growth Threshold Concepts*, D. Davidson y R.O. Ritchie, Eds., The Metallurgical Society of AIME, pp. 227-261, 1984.
- [40] Fleck, N.A., "An Investigation of Fatigue Crack Closure", Ph. D. thesis, Cambridge University, Cambridge, England, 1984.
- [41] Wheeler, O.E., "Spectrum Loading and Crack Growth", *Journal of Basic Engineering*, *Transactions of the ASME*, Vol. 94, pp. 181-186, 1972.
- [42] Willemborg J. D., Engle R. M. y Wood H. A., "A Crack Growth Retardation Model Using an Effective Stress Concept. AFFDL-TM-FBR-71-1, 1971.
- [43] Gray, T.D. y Gallagher, J.P., "Predicting Fatigue Crack Retardation following a Single Overload using a Modified Wheeler Model", *Mechanics of Crack Growth*, ASTM STP 590, pp. 331-334, 1976.
- [44] Dill, H. D. y Saff, C.R., "Spectrum Crack Growth Prediction Method Based on Crack Surface Displacement and Contact Analyses", *Fatigue Crack Growth Under Spectrum Loads*, ASTM STP 595, pp. 306-319, 1976.
- [45] Johnson, W.S., "Multi-Parameter Yield Zone Model for Predicting Spectrum Crack Growth", *Methods and Models for Predicting Fatigue Crack Growth Under Random Loading*, J.B. Chang y C.M. Hudson, Eds., ASTM STP 748, pp. 85-102, 1981.
- [46] Newman J. C. Jr., "A Nonlinear Fracture Mechanics Approach to the Growth of Small Cracks", *Behavior of Short Cracks in Airframe Components*, AGARD-CP-328, 1983.
- [47] De Koning, A.U. y Liefiting, G., "Analysis of Crack Opening Behavior by Application of a Discretized Strip Yield Model", *Mechanics of Fatigue Crack Closure*, J.C. Newman, Jr. y W. Elber, Eds., ASTM STP 982, pp. 437-458, 1988.
- [48] Wang, G.S. y Blom, A.F., "A Strip Model for Fatigue Crack Growth Predictions under General Load Conditions", *Engng Fracture Mech*, Vol. 40, pp. 507-533, 1991.
- [49] Rudd, J.L. y Engle, R.M., Jr. "Crack Growth Behavior of Center-Cracked Panels under Random Spectrum Loading", *Methods and Models for Predicting Fatigue Crack Growth Under Random Loading*, J.B. Chang y C.M. Hudson, Eds., ASTM STP 748, pp. 103-114, 1981.
- [50] Chang, J.B., Szamossi, M., y Liu, K-W., "Random Spectrum Fatigue Crack Life Predictions With or Without Considering Load Interactions", *Methods and Models for Predicting Fatigue Crack Growth under Random Loading*, J.B. Chang y C.M. Hudson, Eds., ASTM STP 748, pp. 115-132, 1981.
- [51] Baudin, G., Labourdette, R. y Robert, M., "Prediction of Crack Growth Under Spectrum Loadings with Onera Model", *Fatigue Crack Growth Under Variable Amplitude Loading*, J. Petit, D. L. Davidson, S. Suresh y P. Rabbe (Eds.), Elsevier, 1988.
- [52] Bell, P.D. y Wolfman, A., "Mathematical Modeling of Crack Growth Interaction Effects", *Fatigue Crack Growth Under Spectrum Loads*, ASTM STP 595, pp. 157-171, 1976.
- [53] ASTM E 1049-85, Standard Practices for Cycle Counting in Fatigue Analysis, 1985.
- [54] Fatigue Crack Growth Computer Program, "Nasa/Flagro", L.B. Johnson Space Center, JSC-22267, 1986.
- [55] De Koning, A.U., "Optimized Approach to Damage Tolerance, Part II, Crack Growth Prediction Methods", NLR TR 86123 L, 1986.
- [56] Johnson, W.S., "Multi-Parameter Yield Zone Model for Predicting Spectrum Crack Growth", *Methods and Models for Predicting Fatigue Crack Growth Under Random Loading*, J.B. Chang y C.M. Hudson, Eds., ASTM STP 748, pp. 85-102, 1981.
- [57] Gallagher, J.P., "A Generalized Development of Yield Zone Models", AFFDL-TM-FBR-74-28, Air Force Flight Dynamics Laboratory, 1974.
- [58] de Koning, A.U. y Van Der Wekken, A.J.P., "Corpus: A Program for Analysis of Fatigue Crack Growth and Failure of Centrally Cracked Sheet Specimens -User Manual-", NLR TR 86097 L, 1986.
- [59] Domínguez, J., "Fatigue Crack Growth under Variable Amplitude Loading", *Handbook of Fatigue Crack Propagation in Metallic Structures*, A. Carpinteri, Ed., Elsevier, 1994.
- [60] Newman, J.C., Jr., "Fastran II - A Fatigue Crack Growth Structural Analysis Program", Nasa Tech. Mem. 104159, 1992.

- [61] Wang, G.S. y Blom, A.F., "A Strip Model for Fatigue Crack Growth Predictions under General Load Conditions", *Engng Fracture Mech*, Vol. 40, pp. 507-533, 1991.
- [62] Aliaga, D., Davy, A., y Schaff, H., "A Simple Crack Closure Model for Predicting Fatigue Crack Growth Under Flight Simulation Loading", *Mechanics of Fatigue Crack Closure*, ASTM STP 982, J.C. Newman, Jr. y W. Elber, Eds., pp. 491-504, 1987.
- [63] Nakamura, H. y Kobayashi, H., "Analysis of Fatigue Crack Closure Caused by Asperities Using the Modified Dugdale Model", *Mechanics of Fatigue Crack Closure*, ASTM STP 982, J.C. Newman Jr., y W. Elber, Eds., pp. 459-474, 1988.
- [64] Dougherty, D.J., de Koning, A.U., y Hillberry, B.M., "Modeling High Crack Growth Rates under Variable Amplitude Loading", *Advances in Fatigue Lifetime Predictive Techniques*, ASTM STP 1122, pp. 214-233, 1992.
- [65] Barsom, J.M., "Fatigue Crack Growth Under Variable-Amplitude Loading in Various Bridge Steels", *Fatigue Crack Growth Under Spectrum Loads*, ASTM STP 595, pp.217-235, 1976.
- [66] Sobczyk, K y Spencer, B.F., Jr., *Random Fatigue: From Data to Theory*, Academic Press, 1992.
- [67] Hudson, C.M., "A Root-Mean_square Approach for Predicting Fatigue Crack Growth under Random Loading", *Methods and Models for Predicting Fatigue Crack Growth under Random Loading*, ASTM STP 748, J.B. Chang y C.M. Hudson, Eds., pp. 3-40, 1981.
- [68] "Round-Robin Crack Growth Predictions on Center-Cracked Tension Specimens under Random Spectrum Loading", *Methods and Models for Predicting Fatigue Crack Growth under Random Loading*, ASTM STP 748, J.B. Chang y C.M. Hudson, Eds., pp. 3-40, 1981.
- [69] Bignonnet, A., Sixou, Y. y Verstavel, J.C., "Equivalent Loading Approach to Predict Fatigue Crack Growth under Random Loading", *Fatigue Crack Growth under Variable Amplitude Loading*, J. Petit, D.L. Davidson, S. Suresh y P. Rabbe, Eds., Elsevier Sci. Publ., 1988, pp. 372-383.
- [70] Kam, J y Dover, W., "Fatigue Crack Growth in Offshore Welded Tubular Joints under Real Life Variable Amplitude Loading", *Fatigue Crack Growth under Variable Amplitude Loading*, J. Petit, D.L. Davidson, S. Suresh y P. Rabbe, Eds., Elsevier Sci. Publ., 1988, pp. 384-397.
- [71] Zapatero, J. y Domínguez, J., "A Statistical Approach to Fatigue Crack Growth under Random Loading", *Fracture Control of Engineering Structures*, H.C. van Elst y A. Bakker, Eds., EMAS, 1986, pp. 889-902.
- [72] Zapatero, J. y Domínguez, J., "A Statistical Approach to Fatigue Life Predictions under Random Loading", *Int. J. Fatigue*, Vol. 12, 1990, pp. 107-114.
- [73] Veers P. S., Winterstein, R., Nelson, D.V. y Cornell, C.A., "Variable- Amplitude Load Models for fatigue Damage Crack Growth", *Development of Fatigue Loading Spectra*, J.M. Potter y R.T. Watanabe, Eds., ASTM STP 1006, 1989, pp 172• 197.
- [74] Rice, J.R. y Beer, F.P., "On the Distribution of Rises and Falls in a Continuous Random Process", *J. Basic Engng*, Vol. 87, 1965, pp. 398-404.
- [75] Lindgren, G. y Rychlik, I., "Rain Flow Cycle Distributions for Fatigue Life Prediction under Gaussian Load Process", *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, Vol. 10, 1987, pp. 251-260.
- [76] Bishop, N.W.M. y Sherratt, F., "A Theoretical Solution for the Estimation of "Rainflow" Ranges from Power Spectral Density Data", *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, Vol. 13, 1990, pp. 311-326.
- [77] Domínguez, J., Zapatero, J. y Moreno, B., "A Statistical Model for Fatigue Crack Growth under Random Loads Including Retardation Effects," *Engineering Fracture Mechanisms*, 1999 (en imprenta).