

## ESTUDIO CON EF DEL MÉTODO ASINTÓTICO PARA LA PREDICCIÓN DE VIDA A FATIGA BAJO FRETTING DE UNIONES CON CONTACTO CONFORME

Luis Bohórquez Jiménez, Javier García-Lomas Jung, Jaime Domínguez Abascal

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales, Universidad de Sevilla  
Camino de los Descubrimientos s/n, 41092- Sevilla.

**Resumen:** La concordancia, bajo determinados supuestos, del campo tensional elástico en las inmediaciones de una entalla aguda (soluciones de Williams) con el existente en el borde de un punzón deslizando sobre un sustrato del mismo material sugiere la posibilidad de emplear las soluciones de Williams para el cálculo de vida a fatiga bajo fretting de uniones a presión. De corroborarse esta afinidad, esta analogía entre el comportamiento de piezas entalladas y contactos conformes permitiría realizar ensayos con probetas entalladas en lugar de los complicados ensayos de fretting. El objetivo del presente artículo es analizar mediante elementos finitos la validez de dicha analogía, dejando una herramienta preparada para el estudio de la influencia que puedan tener otros factores entre los que se encuentra la plastificación de la zona gobernada por la singularidad.

**Abstract:** The resemblance between the elastic stress field in a sharp V-notch and a sliding punch on a substrate of the same material, provided some requirements are fulfilled, suggests the possibility of using the former in fretting-fatigue life predictions of complete locally slipping contact problems. In case that this analogy between both stress fields be corroborated, it will allow to test sharp V-notch specimens instead of doing complex fretting-fatigue tests, much more difficult to handle with. In this paper, a finite element analysis is carried out in order to evaluate the validity of such an analogy, getting a ready tool for studying the influence that further factors could have on it, as is the case of cyclic yielding near the punch corners.

### 1. INTRODUCCIÓN

El campo de tensiones en la vecindad del borde de la zona de contacto entre dos piezas unidas por presión y sometidas a cargas tangenciales cíclicas es de mucha importancia a la hora de predecir la vida de dicha unión a fatiga por fretting. Dado que la zona crítica está muy próxima al borde de contacto y que las soluciones elásticas de la mecánica de contacto (MC) para estas configuraciones son similares a las soluciones asintóticas de la mecánica de la fractura (MF) para grietas y entallas agudas, varios autores (Giannakopoulos et al. [1], Mugadu y Hills [2-3]) han propuesto analogías entre la MF y la MC para el cálculo de tensiones. Uno de los objetivos de estas analogías es poder ensayar problemas de fretting usando probetas con grietas o entallas agudas, ensayos hoy en día bastante controlados, en lugar de realizar ensayos de fretting propiamente dicho que son mucho más difíciles de llevar a cabo. Estas analogías se basan en un comportamiento elástico del material y se proponen para problemas con plasticidad a pequeña escala.

Pero esta analogía conlleva unas suposiciones que ponen en entredicho su validez: ajuste del campo tensional en la unión con sólo la componente simétrica de las tensiones en la entalla (único estado tensional fácilmente reproducible en el laboratorio) no teniendo en cuenta la componente antimétrica; existencia para cada geometría de la unión de un único valor definido del coeficiente de rozamiento que permite el encaje de ambas soluciones; posible falta de semejanza entre los

campos tensionales plásticos cíclicos de la entalla y la unión a presión. En este trabajo se pone a punto un modelo de elementos finitos que permitirá estudiar la influencia de la plasticidad en el problema a la vez que sirve para validar numéricamente la analogía dentro del campo de la elasticidad.

Se propone también una solución cerrada al campo tensional plano en las esquinas de un punzón cuadrado sometido a una carga normal a la superficie de contacto y otra tangencial a la misma actuando en ella (sin provocar momento) bajo condiciones de deformación plana, o lo que es igual, se dan los valores de los factores de intensidad de tensiones generalizados (F.I.T.G.) de la solución para una entalla aguda de Williams (Barber [4]). Además, se hace un estudio del rango de validez, en función de la relación carga tangencial-carga normal, de la preponderancia de la componente simétrica de la solución de Williams.

Para ello, en los apartados 2 y 3 se presentan las soluciones analíticas para la entalla y el punzón particularizadas para las geometrías del presente caso. En el apartado 4 se describen los modelos de elementos finitos empleados para determinar los F.I.T.G. de la solución analítica. En el apartado 5 se presentan los valores de los F.I.T.G. obtenidos, se hace un análisis de la bondad de las soluciones numéricas y se comparan las soluciones para la entalla y el punzón. Por último, en el apartado 6 se exponen las conclusiones.

2. SOLUCIONES DE WILLIAMS

Williams (Barber, [4]) desarrolló las soluciones analíticas del campo elástico de tensiones en las inmediaciones de una entalla aguda como la mostrada en la figura 1.

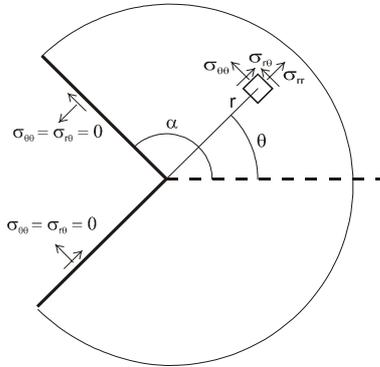


Fig. 1. Entalla aguda. Problema de Williams

Estas soluciones pueden escribirse de la forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{bmatrix}^{sim} + \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{bmatrix}^{ant} = \frac{A_1}{r^{1-\lambda_s}} \cdot F^s(\lambda_s, \theta) + \frac{A_2}{r^{1-\lambda_a}} \cdot F^a(\lambda_a, \theta) \quad (1)$$

con:

$$F^s = \lambda_s(\lambda_s + 1) \begin{bmatrix} -\cos(\lambda_s + 1)\theta + \frac{\lambda_s - 3}{\lambda_s + 1} \psi \cos(\lambda_s - 1)\theta \\ \cos(\lambda_s + 1)\theta - \psi \cos(\lambda_s - 1)\theta \\ \text{sen}(\lambda_s + 1)\theta - \frac{\lambda_s - 1}{\lambda_s + 1} \psi \text{sen}(\lambda_s - 1)\theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$F^a = \lambda_a(\lambda_a + 1) \begin{bmatrix} -\text{sen}(\lambda_a + 1)\theta + \frac{\lambda_a - 3}{\lambda_a + 1} \xi \text{sen}(\lambda_a - 1)\theta \\ \text{sen}(\lambda_a + 1)\theta - \xi \text{sen}(\lambda_a - 1)\theta \\ -\cos(\lambda_a + 1)\theta + \frac{\lambda_a - 1}{\lambda_a + 1} \xi \cos(\lambda_a - 1)\theta \end{bmatrix}$$

$$\psi = \frac{\cos(\lambda_s + 1)\alpha}{\cos(\lambda_s - 1)\alpha} \quad \xi = \frac{\text{sen}(\lambda_a + 1)\alpha}{\text{sen}(\lambda_a - 1)\alpha}$$

Donde  $\lambda_s$  y  $\lambda_a$  han de cumplir las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lambda_s \text{sen} 2\alpha + \text{sen} 2\lambda_s \alpha &= 0 \\ \lambda_a \text{sen} 2\alpha - \text{sen} 2\lambda_a \alpha &= 0 \\ \lambda_s, \lambda_a &\in (0,1) \end{aligned} \quad (3)$$

Adimensionalizando la ecuación (1) y aplicando los principios de superposición y de proporcionalidad al caso particular mostrado en la figura 2 se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{N \hat{A}_1^N + Q \hat{A}_1^Q}{a \rho^{1-\lambda_s}} \cdot F_{ij}^s + \frac{N \hat{A}_2^N + Q \hat{A}_2^Q}{a \rho^{1-\lambda_a}} \cdot F_{ij}^a \\ \rho &= \frac{r}{a} \\ \hat{A}_1^N &= \frac{a^{\lambda_s} A_1^N}{N}; \hat{A}_2^N = \frac{a^{\lambda_s} A_2^N}{N}; \hat{A}_1^Q = \frac{a^{\lambda_s} A_1^Q}{N}; \hat{A}_2^Q = \frac{a^{\lambda_s} A_2^Q}{N} \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $A_1^N, A_2^N$  son los F.I.T.G. para un estado de carga normal N y lado a, y  $A_1^Q, A_2^Q$  los mismos para un estado de carga tangencial Q más el momento  $Q \cdot 2a$ , siendo por tanto  $\hat{A}_1^N, \hat{A}_2^N, \hat{A}_1^Q, \hat{A}_2^Q$  los F.I.T.G. para los casos de carga  $N/a = 1$  y  $Q/a = 1$ .

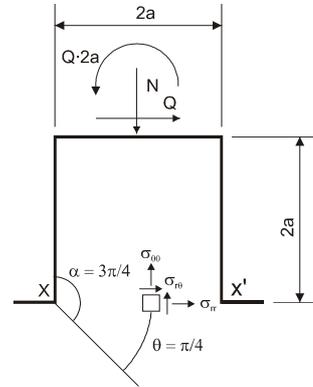


Fig. 2. Configuración del problema

Para la comparación con las tensiones obtenidas en la zona de contacto entre un punzón y un sustrato se va a estudiar el campo de tensiones en la línea X-X' de unión entre las dos entallas del elemento en estudio (figura 2). Los autovalores  $\lambda_s$  y  $\lambda_a$  se obtendrán de resolver las ecuaciones (3) particularizadas para  $\alpha = 3\pi/4$  y  $\theta = \pi/4$ .

$$\text{sen}\left(\frac{3\pi\lambda_a}{2}\right) - \lambda_a = 0 \quad \text{sen}\left(\frac{3\pi\lambda_s}{2}\right) + \lambda_s = 0 \quad (5)$$

cuyas raíces son:  $\lambda_s = 0.545, \lambda_a = 0.909$  con lo que se obtienen las tensiones:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \frac{N \hat{A}_1^N + Q \hat{A}_1^Q}{a \rho^{0.456}} \begin{bmatrix} 2.012 \\ 1.745 \\ 0.948 \end{bmatrix} + \frac{N \hat{A}_2^N + Q \hat{A}_2^Q}{a \rho^{0.091}} \begin{bmatrix} -1.106 \\ 2.298 \\ -0.503 \end{bmatrix} \quad (6)$$

3. SOLUCIONES DE TENSIONES PARA UN PUNZÓN SOBRE UN SUSTRATO DEL MISMO MATERIAL.

Los campos elásticos de tensiones y desplazamientos alrededor de la esquina de un punzón de ángulo  $\phi$  deslizando sobre un sustrato con rozamiento de Coulomb de coeficiente  $\mu$  han sido analizados por Conminou [5], y Gdoutos y Theocaris [6]. Aplicando la transformada de Mellin (Tranter, [7]) al problema elástico definido por las ecuaciones:

$$\nabla^4 \phi = \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right]^2 \phi(r, \theta) = 0 \quad (7)$$

Con las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}
 \sigma'_{r\theta}(r, -\pi) &= \sigma'_{\theta\theta}(r, -\pi) = 0 \\
 \sigma''_{r\theta}(r, \varphi) &= \sigma''_{\theta\theta}(r, \varphi) = 0 \\
 \sigma'_{r\theta}(r, 0) &= -\mu \sigma'_{\theta\theta}(r, 0) \\
 \sigma''_{r\theta}(r, 0) &= -\mu \sigma''_{\theta\theta}(r, 0) \\
 \sigma'_{\theta\theta}(r, 0) &= \sigma''_{\theta\theta}(r, 0) \\
 u'_\theta(r, 0) &= u''_\theta(r, 0)
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

donde  $\phi'(r, \theta)$ ,  $u'(r, \theta)$ ,  $\sigma'_{ij}(r, \theta)$  son la función de Airy, los campos de desplazamientos y tensiones del sustrato respectivamente, y  $\phi''(r, \theta)$ ,  $u''(r, \theta)$ ,  $\sigma''_{ij}(r, \theta)$  los del punzón. Las condiciones de contorno están expresadas para el punzón desplazándose hacia la derecha según la figura 3.

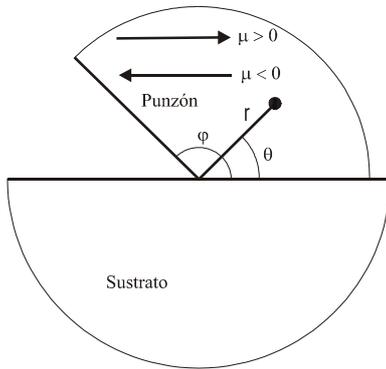


Fig 3. Punzón deslizándose sobre un sustrato

Introduciendo artificialmente un valor negativo de  $\mu$  se reproduce el desplazamiento hacia la izquierda. Esta configuración de geometría y desplazamiento coincide con la existente en la esquina izquierda de la figura 2. Para la esquina derecha, las ecuaciones (7) y (8) son válidas si se adopta un valor negativo de  $\mu$  (punzón desplazándose hacia la zona del sustrato no cubierta por él) y se cambia el signo a  $\sigma_{r\theta}$  (en la figura 3,  $\sigma_{r\theta}$  es positiva apuntando hacia el interior del punzón mientras que en la figura 2, para la entalla derecha,  $\sigma_{r\theta}$  es positiva apuntando hacia el exterior del punzón). Continuando con el caso mostrado en la figura 3, el campo de tensiones y desplazamientos queda de la forma:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{bmatrix} &= \frac{-\lambda(\lambda+1)K}{r^{1-\lambda_\mu}} \begin{bmatrix} S_+ + b C_+ + c \eta S_- + d \eta C_- \\ -S_+ - b C_+ - c S_- - d C_- \\ C_+ - b S_+ + c \chi C_- - d \chi S_- \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{bmatrix} &= \frac{-(\lambda+1)K r^{\lambda_\mu}}{2G} \begin{bmatrix} S_+ + b C_+ + c \kappa S_- + d \kappa C_- \\ C_+ - b S_+ + c \zeta C_- - d \zeta S_- \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_+ &= \text{sen}(\lambda+1)\theta & C_+ &= \text{cos}(\lambda+1)\theta; \\
 S_- &= \text{sen}(\lambda-1)\theta & C_- &= \text{cos}(\lambda-1)\theta \\
 \eta &= \frac{\lambda-3}{\lambda+1} & \chi &= \frac{\lambda-1}{\lambda+1} & \kappa &= \frac{\lambda-3+4\nu}{\lambda+1} & \zeta &= \frac{\lambda+3-4\nu}{\lambda+1}
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

donde  $\lambda_\mu$  será raíz de la ecuación:

$$\begin{aligned}
 \Delta(\lambda) &= \text{cos}(\lambda\pi) [\text{sen}^2(\lambda\varphi) - \lambda^2 \text{sen}^2(\varphi)] \\
 &+ \frac{1}{2} \text{sen}(\lambda\pi) [\text{sen}(2\lambda\varphi) - \lambda \text{sen}(2\varphi)] \\
 &+ \mu \lambda (1 + \lambda) \text{sen}(\lambda\pi) \text{sen}^2(\varphi) = 0
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

La ecuación (10) viene de sustituir (9) en (8), lo que da un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con las incógnitas  $A'=K$ ,  $B'=Kb'$ ,  $C'=Kc'$ ,  $D'=Kd'$ ,  $A''=Ka''$ ,  $B''=Kb''$ ,  $C''=Kc''$ ,  $D''=Kd''$ , e imponer que el determinante de dicho sistema sea nulo. Una vez hallado  $\lambda_\mu$ , las incógnitas  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ ,  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  y  $D''$  se obtienen en función de  $K$ , o lo que es lo mismo, los valores numéricos de  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$ ,  $a''$ ,  $b''$ ,  $c''$  y  $d''$  quedan perfectamente determinados.

Como ya se ha indicado, al desplazarse el punzón hacia la derecha (figura 2), a la esquina izquierda (marcada con X) le corresponde  $\mu$  positivo, mientras que a la esquina derecha (X') le corresponde un  $\mu$  negativo.

Para la esquina izquierda no hay raíz de (10), indicando que en dicha esquina no existe singularidad de tensiones, mientras que para la derecha se obtiene una raíz en  $\lambda_\mu = 0.544$ , que junto con los datos del problema ( $E = 72$  GPa;  $\nu = 0.3$ ;  $\varphi = \pi/2$ ;  $\mu = -0.543$ ) hacen que las constantes tomen los siguientes valores:  $b' = -0.374$ ;  $c' = 0.688$ ;  $d' = -1.842$ ;  $a'' = 1.000$ ;  $b'' = -0.374$ ;  $c'' = 0.688$ ;  $d'' = -1.841$

Estamos interesados en la solución en el sustrato en la zona de contacto ( $\theta = 0$ ), por lo que el campo resultante de tensiones, teniendo en cuenta los criterios de signos ya comentados, es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{bmatrix} = \frac{K}{r^{0.456}} \begin{bmatrix} -2.148 \\ -1.863 \\ 1.012 \end{bmatrix}
 \tag{11}$$

#### 4. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS.

Se ha empleado el programa ABAQUS/Standard. Se han creado dos modelos bidimensionales en deformación plana, ambos con elementos cuadriláteros y triangulares, propiedades elásticas lineales ( $E = 72$  GPa;  $\nu = 0.3$ ) y misma malla (figura 4), pero en el primero (al que se denomina "entalla") hay continuidad entre las zonas A y B, mientras que en el segundo (llamado "punzón-sustrato") ambas zonas están separadas y conectadas mediante superficies de contacto. Para el modelo "entalla" se han empleado elementos cuadráticos (CPE8, CPE6). Para el modelo "punzón-sustrato" se han empleado elementos lineales (CPE4, CPE3) por estar desaconsejado el uso de elementos cuadráticos en problemas de contacto [8].

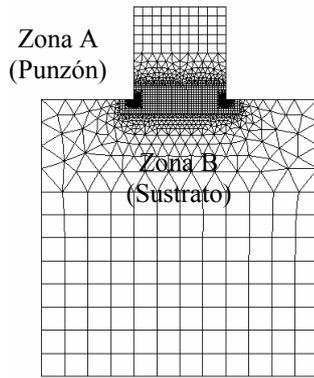


Fig. 4. Malla de elementos finitos

5. RESULTADOS

Para poder comparar las soluciones analíticas de la entalla y el punzón se necesitan los F.I.T.G. de las mismas. Estos factores se han determinado mediante ajuste de mínimos cuadrados de las soluciones analíticas (ecuaciones (6) y (11)) con los valores numéricos obtenidos con EF en la zona de transición entre A y B (figura 4).

A continuación se presentan los resultados (a) para la entalla, (b) el punzón y (c) una comparación entre ambas soluciones (analizando en cada caso la bondad de las soluciones obtenidas).

(a) Entalla.

Se ha sometido al modelo “entalla” a dos estados de carga independientes: 1) Presión uniforme  $p$  sobre la cara superior del modelo tal que  $N = 2a \cdot p = 800 \text{ N}$ ; 2) Carga  $Q = 300 \text{ N}$ , paralela a la línea  $X-X'$  aplicada sobre la cara superior del modelo, repartida en tres puntos, más un momento  $2a \cdot Q$  (esta carga es equivalente a una carga  $Q$  actuando según la línea  $X-X'$  (Figura 2)).

En la tabla 1 se muestran los valores de los F.I.T.G. obtenidos para la entalla mediante el ajuste mencionado.

Tabla 1. F.I.T.G. para el modelo “entalla”

Carga	Caso	$A_i$	Ajuste
N	Simétrico	$\hat{A}_1^N$	-0.080
	Antimétrico	$\hat{A}_2^N$	-0.065
Q	Simétrico	$\hat{A}_1^Q$	$\mp 0.096$
	Antimétrico	$\hat{A}_2^Q$	$\pm 0.101$

Sustituyendo dichos f.i.t.g en (6) se obtienen las soluciones analíticas para la entalla.

En las figuras 5 (para la entalla izquierda) y 6 (para la derecha) se muestra la razón valor numérico-valor analítico de las tensiones para  $0 \leq \rho \leq 22 \cdot 10^{-4}$ .

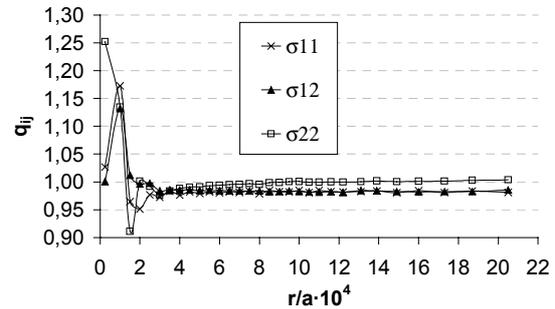


Fig 5.  $q_{ij}$  = razón valor numérico/valor analítico de las tensiones en la entalla izquierda

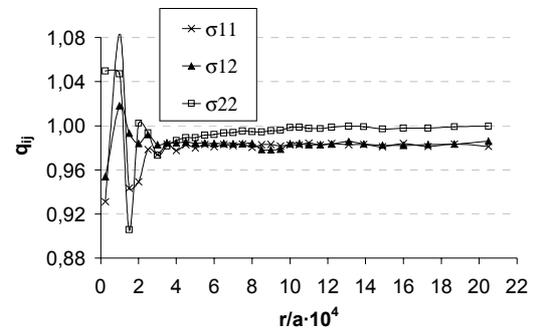


Fig. 6.  $q_{ij}$  = razón valor numérico/valor analítico de las tensiones en la entalla derecha

Como se observa, el ajuste es bueno en ambas entallas a partir de  $\rho \geq 2 \cdot 10^{-4}$ , siendo  $\sigma_{\theta\theta}$  la componente que mejor se ajusta de las tres. En la zona cercana al vértice el ajuste empeora por la propia naturaleza de éste (no se tienen en cuenta los puntos muy cercanos a la esquina), no obstante, en la esquina derecha (la única en donde la analogía entalla-punzón tiene sentido, ya que en la izquierda no existe singularidad, como se vio en el apartado 3) el cociente entre los valores numéricos y analíticos no se desvía en demasía de la unidad ( $0.90 < \sigma_{ij}^{num}/\sigma_{ij}^{ana} < 1.08$ ).

La analogía entalla-punzón deslizante está apoyada en la constancia de la razón  $\tau_{r\theta}/\sigma_{\theta\theta}$  de las componentes simétrica, por un lado, y antimétrica, por otro, de la solución de Williams. Esto es así por ser dicha razón igual al coeficiente de rozamiento en el caso de un punzón deslizante sobre un sustrato. Pero la solución de Williams para una entalla aguda, en general, no es ni simétrica ni antimétrica por lo que formalmente no existe tal constancia. Para las geometrías habituales en contactos conformes, la singularidad de la componente simétrica es mucho mayor que la de la componente antimétrica ( $1-\lambda_s = 0.456$ ,  $1-\lambda_a = 0.091$  en el presente caso) lo que lleva a suponer que en general el estado de tensiones reinante es casi simétrico y por tanto válida la analogía. Sin embargo, el peso relativo de ambas componentes también depende de la razón  $Q/N$ . Cabe

preguntarse para qué valores del cociente Q/N deja de ser válida la suposición de que la solución completa es aproximadamente igual a su componente simétrica y por tanto pierda validez la analogía. Llamando  $\gamma_{ij} = \sigma_{ij}^s / \sigma_{ij}$  al cociente entre parte simétrica y total de la componente ij, de (6) se obtiene:

$$\gamma_{ij}(\rho, \frac{Q}{N}) = \frac{1}{1 + \beta_{ij} \rho^{0.364} \frac{\hat{A}_2^N + \hat{A}_2^Q \frac{Q}{N}}{\hat{A}_1^N + \hat{A}_1^Q \frac{Q}{N}}} \quad (12)$$

con:

$$\begin{bmatrix} \beta_{rr} \\ \beta_{\theta\theta} \\ \beta_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.106/2.012 \\ 2.298/1.745 \\ -0.503/0.948 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.550 \\ 1.317 \\ 0.531 \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde los signos  $\pm$  y  $\mp$  corresponden a las entallas derecha e izquierda respectivamente. Con objeto de clarificar la influencia de Q/N se empleará la envolvente de las tres  $\gamma_{ij}$  en una determinada zona cercana a las esquinas del punzón ( $10^{-4} \leq \rho \leq 5 \cdot 10^{-4}$ ). Así pues definiendo como dichas envolventes a:

$$\begin{aligned} \gamma_{\max}(\frac{Q}{N}) &= \max\{\gamma_{ij} ; ij \in (rr, r\theta, \theta\theta) ; 1 \leq \rho \cdot 10^4 \leq 5\} \\ \gamma_{\min}(\frac{Q}{N}) &= \min\{\gamma_{ij} ; ij \in (rr, r\theta, \theta\theta) ; 1 \leq \rho \cdot 10^4 \leq 5\} \end{aligned} \quad (14)$$

se tiene que si, para un determinado valor de Q/N, los valores de sendas envolventes son muy próximos a 1, el tensor simétrico de tensiones es prácticamente igual al total en la zona evaluada,  $10^{-4} \leq \rho \leq 5 \cdot 10^{-4}$ , o lo que es lo mismo, la solución total es prácticamente igual a su componente simétrica.

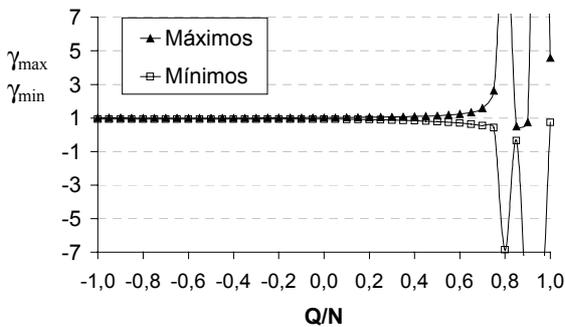


Fig. 7.  $\gamma_{\max}$ ,  $\gamma_{\min}$  para la entalla izquierda

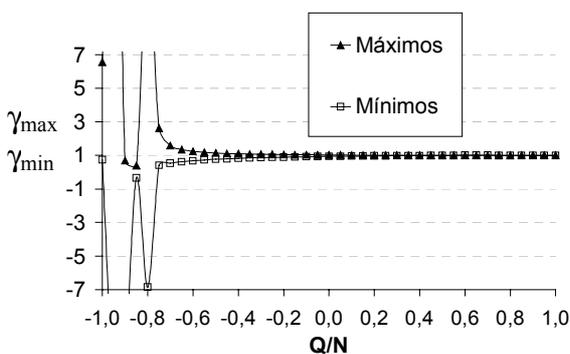


Fig. 8.  $\gamma_{\max}$ ,  $\gamma_{\min}$  para la entalla derecha

En las figuras 7 y 8 se muestra la evolución de  $\gamma_{\max}$  y  $\gamma_{\min}$  para  $Q/N \in [-1,1]$  en las entallas izquierda y derecha respectivamente. Teniendo presente que Q/N positivo implica carga tangencial Q apuntando hacia la derecha para ambas entallas (figura 2), se ve que en las cercanías de  $Q/N = -\hat{A}_1^N / \hat{A}_1^Q \approx \pm 0.8$  (+ para la entalla izquierda, - para la derecha) la componente simétrica deja de parecerse a la tensión total. Dado que se considera el modelo cargado siempre en sentido X-X' solo tienen valores de Q/N positivos, para los cuales la entalla derecha siempre está bajo un estado de tensiones simétrico mientras que la entalla izquierda puede alejarse considerablemente de dicho estado para un rango de Q/N apreciable. No obstante, como se vio en el apartado 3, para la esquina izquierda del punzón no existe singularidad en tensiones, por lo que la analogía entalla-punzón, de partida, no tiene sentido, como ya se ha expuesto por Mugadu y Hills [3].

(b) Punzón-sustrato

Para obtener, por un lado el deslizamiento del punzón sobre el sustrato en las esquinas del punzón, y por otro, la convergencia del análisis estático evitando el deslizamiento global del punzón, se ha sometido el modelo a las siguientes cargas: N = 800 N; Q/N = 0.541, valor muy cercano al coeficiente de rozamiento  $\mu$  igual a 0'543. Este coeficiente de rozamiento es el necesario para ajustar la singularidad de la solución del punzón con la singularidad de la componente simétrica de la entalla (ecuación 10). Para evitar la imprecisión resultante del desplazamiento del punzón sobre el sustrato, no coincidiendo la esquina con un nodo de éste último, se empleará las presiones de contacto en el punzón.

Se ha obtenido un valor de  $K = 26.16 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{0.456}$ . En la figura 9 se representa, para la esquina derecha, el cociente entre los valores numéricos de las presiones de contacto normal y tangencial obtenidas numéricamente y las analíticas ( $p = -\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\tau = \tau_{r\theta}$ ) según la ecuación (11), con el valor de K ajustado. En la figura 10 se muestran las presiones de contacto en la esquina izquierda.

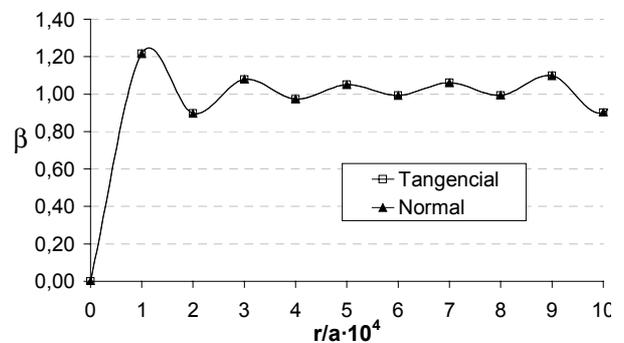


Fig 9.  $\beta$  = razón valor numérico/valor analítico para las tensiones en la esquina derecha del punzón

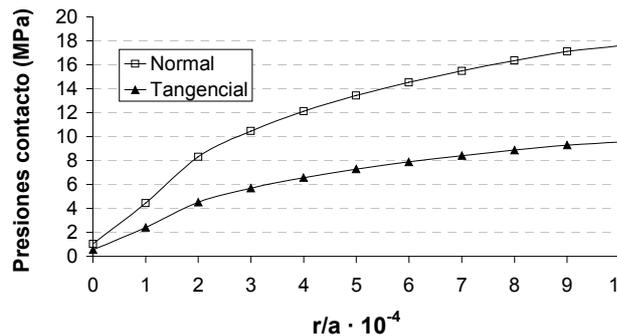


Fig 10. Presiones de contacto en la esquina izquierda del punzón.

Para la esquina derecha se obtiene un cociente muy cercano a la unidad denotando un buen ajuste. En la esquina izquierda, se observa que no hay singularidad tal y como sale del desarrollo analítico.

### (c) Comparación entalla-punzón

Con los resultados anteriores se dispone de la solución analítica para ambos casos (entalla y punzón-sustrato) lo que permite su comparación. Para ello basta con expresar ambas soluciones (ecuación (6) para la entalla y ecuación (11) para el punzón) en función de  $r^{0.456}$  y compararlas, una vez sustituidos los valores de los correspondientes F.I.T.G., las cargas N y Q y la longitud a, obteniéndose las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{bmatrix}_{\text{punzón}} = \frac{26.16}{r^{0.456}} \begin{bmatrix} -2.148 \\ -1.863 \\ -1.012 \end{bmatrix} = \frac{1}{r^{0.456}} \begin{bmatrix} -56.192 \\ -48.736 \\ -26.474 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{bmatrix}_{\text{ent.}}^{\text{sim}} = \frac{92.8}{10 \left(\frac{r}{10}\right)^{0.456}} \cdot \begin{bmatrix} 2.012 \\ 1.745 \\ 0.948 \end{bmatrix} = \frac{1}{r^{0.456}} \begin{bmatrix} -53.355 \\ -46.275 \\ -25.139 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Como se puede comprobar, la diferencia relativa entre ambas soluciones es del 5.2%.

## 6. CONCLUSIONES

- 1) Con el presente trabajo se ha puesto a punto un modelo de elementos finitos que es capaz de recoger con suficiente aproximación el comportamiento elástico de un punzón sobre un sustrato del mismo material.
- 2) Se han obtenido los coeficientes para la solución de Williams con una buena aproximación aplicados a la configuración geométrica mostrada en la figura 2, para cualquier valor de N, Q y el tamaño del punzón a.
- 3) Se ha mostrado que en entallas agudas con ángulo externo de 90°, sometidas a carga normal constante (N)

y tangencial ( $\pm Q$ ) en régimen elástico, cuando la carga se dirige hacia la entalla aparece un estado singular de tensiones simétrico respecto al eje de simetría de la entalla para cualquier valor de Q/N, mientras que cuando la carga se aleja de la entalla la simetría se pierde si Q/N está próximo a 0.8.

4) La analogía punzón-entalla, tal y como la presentan Mugadu y Hills [2], es válida para el caso de punzón con esquinas a 90° para cualquier estado de carga con  $Q/N \in [-1,1]$  y comportamiento elástico del material en las condiciones que los autores señalan.

5) Dado que el modelo se comporta adecuadamente en el caso elástico, se cree que será válido para evaluar la importancia que la plastificación cíclica tiene sobre el estado de deformaciones (variables físicas más influyentes en la nucleación y crecimiento de grietas por fatiga) en la zona singular, permitiendo comparar éstas en los casos de la entalla y el punzón deslizando sobre un sustrato, viendo si dichas deformaciones son parecidas o no, y por tanto, comprobando la validez del uso de entallas en los ensayos de fretting.

## BIBLIOGRAFÍA.

- [1] Giannakopoulos, A.E., Lindley, T.C., Suresh, S., "Aspects of equivalence between contact mechanics and fracture mechanics: theoretical connections and a life prediction methodology for fretting-fatigue". MIT Report No: AFOSR/2/1997 Lexcom, November, 1997
- [2] Mugadu, A., Hills, D.A. "An asymptotic approach to crack initiation in fretting fatigue of complete contacts". Journal of Mechanics and Physics of Solids 50 (2002) 531-547.
- [3] Mugadu, A., Hills, D.A. "Characterising the process zone in complete fretting contacts using plain fatigue sharp V-notch specimens". Journal of Mechanics and Physics of Solids 50 (2002) 1417-1429
- [4] Barber, J.R., "Elasticity". Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [5] Conminou, M. "Stress singularity at a sharp edge in contact problems with friction". J. Appl. Math. Phys. (1976) 27, 493-499
- [6] Gdoutos, E.E., Theocaris, P.S. "Stress concentration at the apex of a plane indenter acting on an elastic half-plane". J. Appl. Mech. 42 (1975), 688-692.
- [7] Tranter, C.J., The use of the Mellin transform in finding the stress distribution in an infinite wedge". Quart. J. Mech. Appl. Math. 1 (1948), 125-130
- [8] H.K.S Inc. "ABAQUS/Standard User's Manual