La resolución de problemas en la asignatura de "Matemáticas Específicas para Maestros"

Martín-Molina, Verónica

Departamento de Didáctica de las Matemáticas

Universidad de Sevilla

veronicamartin@us.es

González-Regaña, Alfonso J.

Departamento de Didáctica de las Matemáticas

Universidad de Sevilla

agonzalez@us.es

Gavilán-Izquierdo, José María

Departamento de Didáctica de las Matemáticas

Universidad de Sevilla

gavilan@us.es

Sánchez-Matamoros, Gloria

Departamento de Didáctica de las Matemáticas

Universidad de Sevilla

gsanchezmatamoros@us.es

RESUMEN

En esta comunicación se presenta una experiencia desarrollada en las clases prácticas de la asignatura de "Matemáticas Específicas para Maestros" del 1º curso del Grado en Educación Primaria. En estas clases se introdujo un modelo de resolución de problemas como medio para facilitar este proceso de construcción de conocimiento matemático. El modelo adoptado fue el propuesto por George Polya, que estructuró el proceso de resolución de problemas en cuatro fases. Este modelo permitió a los alumnos explicitar los pasos necesarios para la resolución de un problema matemático de forma sistemática.

Palabras clave: resolución de problemas de matemáticas; futuros profesores de Primaria; método de Polya

Problem resolution in the subject "Specialized mathematics for elementary teachers"

ABSTRACT

In this paper we present an experience developed in the lab classes of the subject "Specialized mathematics for elementary teachers" in the first year of the undergraduate degree of Elementary Education. We introduced in these classes a problem solving model in order to help students in this process of construction of mathematical knowledge. This adopted model was proposed by George Polya, who structured this problem solving process in four steps. This model allowed the students to make explicit the steps that are necessary for the systematic solving of a mathematical problem.

Keywords: mathematical problem solving; pre-service elementary teachers; Polya's method

1. INTRODUCCIÓN. ANTECEDENTES

La resolución de problemas de matemáticas es un aspecto fundamental en el aprendizaje de los estudiantes de matemáticas a todos los niveles (NCTM, 2000). Sin embargo, tradicionalmente esta resolución se ha considerado transparente, es decir, se ha incluido en todos los currículos, planes de estudio y libros de texto, pero no se ha hecho explícita la forma de llevarla a cabo.

En la orden por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía (Orden del 17 de marzo de 2015), se afirma que "El trabajo en este área en la etapa Educación Primaria estará basado en la experiencia; los contenidos de aprendizaje partirán de lo cercano y se deberán abordar en contextos de identificación y resolución de problemas y de contraste de puntos de vista.” (p. 2). Además, se añade que:

Los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje a lo largo de la etapa, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática. En la resolución de un problema se requieren y se utilizan muchas de las capacidades básicas: leer, reflexionar, planificar el proceso de resolución, establecer estrategias y procedimientos, revisarlos, modificar el plan si es necesario, comprobar la solución si se ha encontrado y comunicar los resultados.

> Para estos fines, la resolución de problemas debe concebirse como un aspecto fundamental para el desarrollo de las capacidades y competencias básicas en el área de matemáticas y como elemento esencial para la construcción del conocimiento matemático. Es por ello fundamental su incorporación sistemática y metodológica a los contenidos de dicha materia. (p. 3)

Sin embargo, no se explica explícitamente cómo llevar a cabo esta incorporación “sistemática y metodológica” de la resolución de problemas en el área de matemáticas. Diversos autores han propuesto modelos sobre cómo desarrollar el proceso de resolución de problemas de matemáticas (Mason et al., 1988; Polya, 1945; Schoenfeld, 1985). En la experiencia desarrollada que aquí explicamos hemos complementado la formación de los futuros maestros de Primaria mediante la introducción del método de resolución de problemas de George Polya (1945).

Este método consiste en identificar cuatro fases en el proceso de resolución de un problema: Comprender el problema, Elaborar un plan, Ejecutar el plan y Mirar atrás. En la primera de estas fases, el profesor ayuda al alumno, usualmente mediante preguntas, a comprender los datos del problema, qué se pide y las relaciones (implícitas y explícitas) entre ambos. Este paso a veces se obvia en clase y constituye la razón por la que muchos alumnos no saben cómo comenzar a resolver el problema.

En la segunda fase, el alumno debe trazar un plan explicitando qué estrategia va a aplicar. Aquí es importante dotar a los alumnos del mayor número de estrategias posibles que les ayuden en un futuro a enfrentarse a cualquier tipo de problema. Entre las estrategias más comunes están la algebraica (usar ecuaciones, funciones, etc.), la de representar gráficamente el problema, el pensar en un problema más sencillo que nos dé la pauta de cómo resolver el problema general, etc.

En la tercera fase del método de Polya, el alumno debe ejecutar el plan que se trazó en la fase anterior, obteniendo así la solución al problema. El profesor debe insistir en esta fase en que el alumno compruebe cada paso del plan que ejecuta para convencerse de que es correcto. Finalmente, en la cuarta fase el alumno comprueba si la solución verifica todas las exigencias establecidas en el enunciado del problema y si el argumento usado ha sido correcto. Si es posible, busca una forma alternativa de resolver el problema que sirva de comprobación. En esta fase, el profesor debe preguntar si la estrategia utilizada sería útil en otros problemas, si el problema puede resolverse mediante otra estrategia distinta, si se les ocurre a los alumnos otro tipo de problema similar, si existen otras posibles soluciones o esta es única, etc.

2. DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

El método de Polya se introdujo en las clases prácticas de la asignatura de “Matemáticas Específicas para Maestros” del primer curso del Grado en Educación Primaria en el 2014/15. En ellas, se trabajó durante una hora con grupos de estudiantes de unas 30 a 40 personas, divididos en equipos de trabajo de 4 o 5.

En la primera clase del curso, se les explicó el método de Polya y se les presentó algunas de las estrategias más comunes utilizadas en la resolución de problemas. A continuación, en el resto de las sesiones del curso, a estos grupos se les planteó un problema a principio de la clase y se les animó a que lo resolviesen por equipos usando el método de Polya anteriormente explicado. A continuación, el profesor revisó el trabajo que estaban realizando cada uno de los equipos y ayudó a los que tenían dificultades mediante preguntas que diesen pistas para la resolución del problema.

En todo momento, se enfatizó la importancia de aplicar el método, su utilidad y la necesidad de hacer explícito dicho uso. Al final de la clase, siempre se corrigió el problema en la pizarra con la participación activa del grupo completo. De hecho, en muchas ocasiones, fueron alumnos los que explicaron a sus compañeros cómo resolvieron el problema, lo que les ayudó en su aprendizaje en matemáticas y en su formación como maestros.

El criterio seguido por los profesores de la asignatura para elegir los problemas planteados en clase fue el de que se pudieran trabajar con ellos el mayor número de estrategias posible.

3. METODOLOGÍA

3.1. Modelo metodológico

En el modelo de enseñanza-aprendizaje aplicado en esta asignatura, profesor y alumno tienen un papel activo. El estudiante aprende construyendo y reconstruyendo a partir de lo que sabe e interactuando con las nuevas informaciones y experiencias proporcionadas por el profesor. Se trata por tanto de un modelo *alternativo*, de carácter *constructivista*, ya que parte de la idea de que hay que darle protagonismo al que aprende, pero el que tiene más saber, más conocimiento, tiene que generar situaciones en las que el estudiante pueda ir construyendo su propio proceso de enseñanza-aprendizaje.

Este modelo pretende crear en clase un entorno para el "aprendizaje crítico natural"; conseguir la atención del estudiante y no perderla a lo largo de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje (plantear la resolución de un problema); comenzar con los estudiantes en lugar de con la disciplina (preguntándoles por ideas previas, antes de empezar en las clases teóricas con el estudio del tema); buscar compromisos (los estudiantes escucharán, pensarán y responderán en grupo al problema planteado); ayudar a los estudiantes a aprender fuera de clase (que sean capaces de enfrentarse a situaciones nuevas); y que los estudiantes sean explícitamente conscientes de ese proceso (Bain, 2005).

3.2. Participantes

En este estudio han participado un total de 100 estudiantes de la asignatura "Matemáticas Específicas para Maestros", del primer curso del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Sevilla. La asignatura es anual y consta de 9 créditos, 6 de ellos teóricos y de actividad académica dirigida y los otros 3 prácticos. Estos 3 créditos prácticos se imparten en clases semanales de una hora donde el grupo de teoría está dividido en dos y son el objeto de estudio de este trabajo.

3.3. Contexto

Se realizaron un total de 28 clases prácticas (una por semana) de una hora de duración en el curso 2014/15. Durante estas clases, el grupo contaba con aproximadamente 30 alumnos divididos en equipos de trabajo de 4 o 5 personas, lo que favorecía y facilitaba el debate entre ellos.

3.4. Instrumento

Se les pidió a los estudiantes para maestro de Educación Primaria que resolvieran el siguiente problema de la forma que les pareciese más adecuada y que entregaran dicha solución por escrito. Se recogieron soluciones dos días distintos: en una sesión de ideas previas (recogida por equipos) y en una sesión final después de haber utilizado el método de resolución de problemas de Polya y haber estado trabajando diversos problemas haciendo uso de dicho método (recogida individual).

En las sesiones inicial y final los estudiantes tuvieron que resolver el siguiente problema:

> *Juan reparte entre sus amigos una bolsa de caramelos. Si le diera 25 caramelos a cada uno le sobrarían 5, pero como a su amiga Ana no le gustan los caramelos, le da 5 bombones, y reparte los caramelos entre el resto de los amigos correspondiéndole 28 caramelos a cada uno, y aún le sobran 6 caramelos. ¿Cuántos caramelos había en la bolsa?*

Se eligió este problema para la sesión inicial porque en su resolución no son necesarios conocimientos matemáticos avanzados y puede ser abordado con diferentes procedimientos. Incluimos a continuación dos estrategias diferentes de resolución del problema mediante el método de Polya.

Problema resuelto mediante estrategia algebraica

Fase 1: el alumno debe recoger aquí los datos e incógnitas del problema y las posibles relaciones entre ellos. Por tanto, debe señalar que se desconocen dos datos: el número total de caramelos (por lo que pregunta el enunciado) y el número de amigos. Además, debe darse cuenta de que el número total de caramelos debe ser un número que, al dividirlo por el número de amigos, dé un cociente de 25 y un resto de 5; y que, al dividirlo por el número de amigos menos 1, dé un cociente de 28 y un resto de 6. El número de bombones que recibe Ana es un dato irrelevante.

Fase 2: en la estrategia algebraica, el estudiante debe señalar qué variables usará para designar el número total de caramelos y el número de amigos. Por ejemplo, "x" e "y". A continuación, debe decir que va a traducir las relaciones contenidas en el enunciado a ecuaciones algebraicas que deberá resolver.

Fase 3: el alumno debe ejecutar el plan elaborado, comprobando cada paso para asegurarse de que es correcto. Como el alumno eligió la estrategia algebraica, aquí deberá escribir las dos ecuaciones que obtiene:

$$\begin{cases} x = 25y + 5 \\ x = 28(y-1) + 6 \end{cases}$$

De dicho sistema se deduce que $25y + 5 = 28(y-1) + 6$, y por tanto que $y = 9$. Sustituyendo en la primera ecuación, se concluye que $x = 25 \cdot 9 + 5 = 230$.

La solución sería por tanto que Juan repartió 230 caramelos (entre 9 amigos).

Fase 4: el alumno debe comprobar que su solución satisface las condiciones del enunciado (no es suficiente con sustituirla en el sistema de ecuaciones). Efectivamente, si dividimos 230 caramelos entre 9 amigos, cada uno recibiría 25 y sobrarían 5; y si los dividimos entre 8 amigos (todos menos Ana), cada uno recibiría 28 y sobrarían 6.

Problema resuelto mediante estrategia de Ensayo y error

Fase 1: coincide con la descrita en la resolución mediante estrategia algebraica.

Fase 2: en la estrategia de ensayo y error, el estudiante debe ir probando con distintos números de amigos para ver si se satisfacen las condiciones del enunciado, es decir, que al repartir los caramelos obtenga los cocientes y restos buscados.

Fase 3: como el alumno eligió la estrategia de ensayo y error, deberá hacer una tabla o similar en la que recoja sus ensayos hasta obtener la solución correcta. En ella deberá ir probando con distintos números de amigos y verificando si los dos repartos que realiza Juan darán el mismo número de caramelos.

Nº de amigos	Nº de caramelos si reparte 25 a cada amigo y sobran 5	Nº de caramelos si reparte 28 a todos menos a Ana y sobran 6
6	6x25+5=155	5x28+6=146
7	7x25+5=180	6x28+6=174
8	8x25+5=205	7x28+6=202
9	9x25+5=230	8x28+6=230

Tabla 1. Tabla de ensayo y error

De la tabla se deduce que Juan repartió 230 caramelos (entre 9 amigos).

Fase 4: coincide con la descrita en la resolución mediante estrategia algebraica.

3.5. Análisis de los datos obtenidos

Al final de la experiencia, disponíamos de dos tipos de datos: problemas resueltos por equipos antes de haber recibido instrucción sobre el método de Polya y problemas resueltos individualmente usando el método de Polya al final del curso académico.

En los problemas resueltos por equipos, se comprobaron varios aspectos: la corrección de la solución, la estrategia utilizada y las explicaciones dadas a lo largo del proceso de resolución. En los problemas resueltos individualmente, el primer paso para analizarlos fue comprobar si el estudiante había identificado correctamente las fases del método de Polya. A continuación se comprobó si cada una de dichas fases había sido desarrollada de manera adecuada, y por tanto si el problema estaba bien resuelto.

4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

A continuación presentamos algunos de los resultados obtenidos en las dos recogidas de datos realizadas en esta experiencia de innovación docente.

4.1. Sesión inicial

En esta primera sesión los estudiantes no utilizaron el método de Polya en el proceso de resolución del problema porque aún no habían tenido ninguna sesión teórica sobre dicho método.

En esta sesión inicial hubo equipos que fueron capaces de llegar a la resolución correcta del problema pero en su respuesta no explicaban cómo habían resuelto el problema, es decir, qué procedimiento habían utilizado o por qué la respuesta obtenida era correcta. Esto se puede apreciar en la Figura 1, en la que aparece la resolución del problema por la estrategia de ensayo y error.

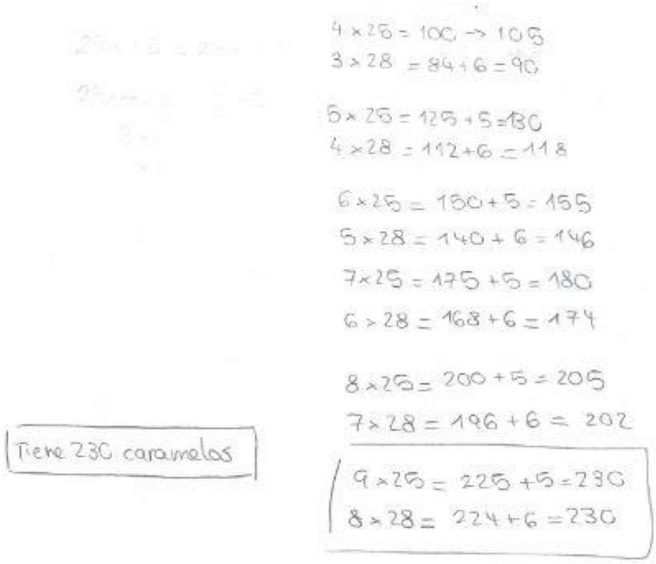

Figura 1. Resolución del problema en la sesión inicial

El no ser consciente de la utilización de un procedimiento de resolución de un problema, y de qué pasos están llevando a su resolución, conlleva el riesgo de no llegar a la solución correcta. Esto se puede apreciar en la resolución de otro de los equipos que, usando la misma estrategia de ensayo y error, intentó hacer lo mismo que el equipo anterior (Figura 1) y no llegó al resultado buscado (Figura 2).

Figura 2. Resolución incompleta del problema en la sesión inicial

4.2. Sesión final

Posteriormente, y tras la realización de la tarea en la sesión final (en la que se recogieron las respuestas de forma individual), hubo un mayor número de alumnos que resolvieron correctamente el problema. El método de Polya les permitió abordarlo y resolverlo, además de permitirles una mayor claridad en la exposición de su resolución. Esto puede apreciarse en la respuesta de uno de los alumnos recogida en la Figura 3.

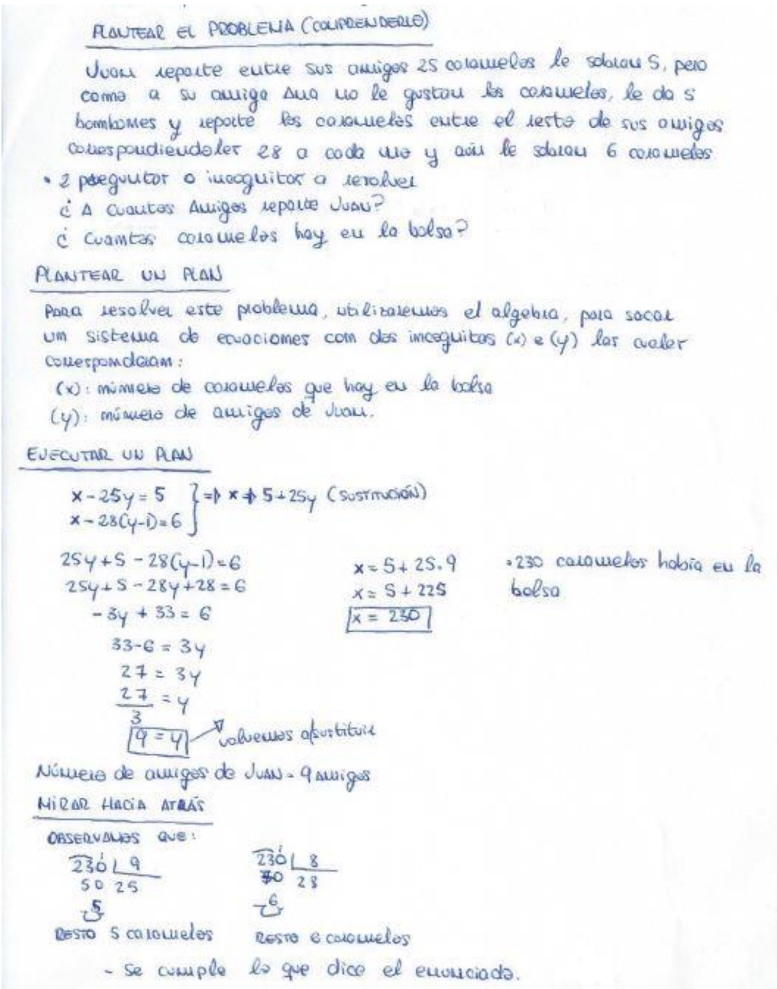

Figura 3. Resolución individual del problema en la sesión final

Como puede observarse en la Figura 3, aparece de forma explícita el procedimiento de resolución en el que se ha aplicado el método de Polya. En cada una de las fases se explica qué se está haciendo, llegando a una resolución correcta del problema.

Haciendo una revisión de todos los problemas recogidos, hemos observado que en mayor o menor medida todos ellos han tenido en cuenta las distintas fases del método de Polya.

4.3. Evaluación del diseño puesto en práctica

La resolución de un problema para introducir las clases prácticas de la asignatura y retomarla en diferentes momentos del proceso de enseñanza-aprendizaje ha sido de gran utilidad para mantener la atención del estudiante para maestro en todo el proceso. Además, les ha permitido aprender construyendo y reconstruyendo a partir de lo que sabían en interacción con las nuevas informaciones proporcionadas en las sesiones centrales. El hecho de tener esta información ha ayudado a la mayoría de los futuros maestros a aplicar las fases de Polya para resolver el problema que se les planteaba en cada una de las sesiones y ver la utilidad de este procedimiento para enfrentarse a la resolución de problemas y a explicar explícitamente el proceso seguido.

4.4. Conclusiones

La innovación de introducir un modelo teórico del proceso de resolución de problemas se ha revelado como positiva. En primer lugar, ha proporcionado a los estudiantes una manera de afrontar los problemas de matemáticas, de alejar “el pánico a la hoja en blanco” y ha puesto a su disposición estrategias con las que abordar el proceso de resolución.

El uso del método de Polya para resolver problemas de matemáticas obliga a los estudiantes a ir haciendo explícitos todos los pasos que van realizando para resolverlo, así como los razonamientos o argumentos que justifiquen dichos pasos. Asimismo, el método hace revisar su papel al profesor, que pasa de ser el principal sujeto a ser un organizador que facilita el recorrido de los estudiantes por las distintas fases de Polya.

Finalmente, el método permite a los estudiantes aprender contenido matemático durante la resolución de problemas y obtener un conocimiento sobre cómo se aprende a resolver problemas de matemáticas. Esto es útil para los futuros maestros porque la didáctica de las matemáticas es una parte fundamental de su conocimiento profesional.

BIBLIOGRAFÍA

Andalucía, (2007). Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 27 de marzo del 2015, núm. 60, pp. 9-696.

Bain, K. (2005). Lo que hacen los mejores profesores de universidad. Traducido por Óscar Barberá. València: Publicacions de la Universitat de València. (1ª ed. inglesa 2004).

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988). Pensamiento matemático. Madrid: MEC, Labor.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston: NCTM.

Polya, G. (1945). How to solve it. New Jersey: Princeton University Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical Problem Solving. Orlando: Academic Press Inc.