FACULTAD DE FILOSOFÍA

GRADO EN FILOSOFÍA

TRABAJO FIN DE GRADO:

INTUICIÓN Y LÓGICA EN LAS MATEMÁTICAS:

LA VISIÓN DE H. POINCARÉ

Trabajo Fin de Grado presentado por Clara Hernández Herrera, siendo el tutor del mismo el profesor José Ferreirós Domínguez.

Clara Hernández Herrera

Sevilla, Septiembre de 2021

INTUICIÓN Y LÓGICA EN LAS MATEMÁTICAS: LA VISIÓN DE H. POINCARÉ

Resumen: En este trabajo trataremos la problemática de los fundamentos de las matemáticas a principios del s. XX. Nos centraremos en la visión de Henri Poincaré y la escuela de los logicistas. Abordaremos la crítica principal que hace este autor, en concreto la imposibilidad de reducir la matemática, específicamente la aritmética, a la lógica. Para ello, trataremos su defensa de la intuición desde un punto de vista epistemológico y su oposición a las definiciones impredicativas; posteriormente, expondremos las críticas concretas que hace a los logicistas en base a esta postura. En concreto, desaprobará las definiciones que caen en un círculo vicioso, y también rechazará el intento de reducir la inducción a bases puramente lógicas.

Palabras clave: Logicismo; Poincaré; Intuición; Predicatividad; Inducción.

INTUITION AND LOGIC IN MATHEMATICS: THE POINCAREAN PERSPECTIVE

Abstract: In this paper, we will deal with the problem of the foundations of mathematics at the beginning of the 20th century. We will focus on the vision of Henri Poincaré and the logicist school. Namely, we will approach the main criticism made by this author: the impossibility of reducing mathematics, specifically arithmetic, to logic. To do so, we will discuss his defence of intuition, from an epistemological point of view, and his opposition to impredicative definitions; in particular, we will expose, based on this position, the specific criticism he makes to the logicians. Specifically, he will disapprove of definitions which leads to a vicious circle, and he will also reject the attempt to reduce induction to purely logical grounds.

Key words: Logicism; Poincaré; Intuition; Predicativity; Induction.

ÍNDICE

1 INTRODUCCIÓN

1.1 TEMA

En este trabajo intentaremos acercarnos al debate, que tuvo lugar en la primera década de 1900, entre el matemático francés Henri Poincaré y la escuela de los logicistas. Esta temática es desbordantemente amplia, sin embargo, nosotros nos centraremos en las críticas de Poincaré al intento de este grupo de reducir la aritmética a la lógica. Concretamente, trataremos la defensa que hace de la intuición y su crítica al uso de definiciones impredicativas. Para esto, introduciremos unos antecedentes que nos ayudarán a entender este debate, una aproximación a la figura del autor que vamos a tratar y su postura filosófica. Posteriormente, plantearemos la cuestión como un debate epistemológico para comprender la importancia de la intuición para nuestro autor. Y, finalmente, nos adentraremos en las críticas concretas que realiza a los logicistas, guiándonos por su negación a aceptar el infinito actual que le llevará a denunciar las definiciones logicistas que caen en un círculo vicioso.

Como objetivo principal nos hemos propuesto tratar de exponer, brevemente, de manera clara y asequible a un público general, el debate anteriormente mencionado. En particular, queremos aproximarnos a una serie de conceptos clave e intentar mostrar su correlación en el pensamiento de este matemático: intuición, infinito actual, círculo vicioso, impredicatividad. A nivel específico, hemos intentado consultar bibliografía variada y en su idioma original para facilitar la comprensión del tema tratado. Nos hemos también propuesto ilustrar las cuestiones con los ejemplos propios del autor, aunque hemos recurrido a bibliografía secundaria para abarcar de manera amplia las cuestiones trabajadas.

Nos parece importante señalar como dificultad que el pensamiento del autor en el que nos vamos a centrar, Poincaré, no es sistemático y en algunos puntos llega incluso a ser confuso. Sus reflexiones fueron cambiando a lo largo del tiempo y eso hace que, ideas que manejaba en sus primeras obras a veces no coincidan con las que manejaba al final de su vida. Es por esto por lo que algunos apartados pueden resultar complejos e incluso algunas citas contradictorias. Señalaremos los casos en los que esta circunstancia se dé.

1.2 REFERENCIAS

En este punto queremos especificar que nuestro trabajo se circunscribe concretamente al ámbito de la filosofía de las matemáticas. Es por esto por lo que, a pesar de la numerosa bibliografía que existe acerca de Henri Poincaré como científico e incluso como filósofo de la ciencia (véase *Poincaré, philosopher of science*), nosotros nos hemos centrado en las que tratan a este autor desde el punto de vista de la filosofía de la matemática. Aquí podemos destacar la obra de Javier de Lorenzo (1973) en español, y en otros idiomas la de Janet Folina (1992), J.J. A. Mooij (1966) …

En cuanto a la actualidad de esta cuestión parece que, mientras que la figura de Henri Poincaré como filósofo de la ciencia (en concreto, como precursor del convencionalismo) está teniendo bastante popularidad en estos últimos años, la faceta que tratamos en este trabajo (su postura más filosófica acerca de los fundamentos de la aritmética) no está dando lugar a muchas publicaciones. Puede ser debido a que estuvo en auge en la última década de 1900 y principios de los 2000 y se escribió numerosa bibliografía, que de hecho es la que vamos a tratar, sobre el tema.

La bibliografía principal de nuestro trabajo será la obra de Poincaré, en concreto, *Ciencia e hipótesis*, *Ciencia y método*, *El valor de la ciencia* y *Últimos pensamientos*. A pesar de trabajar la totalidad de los libros (publicados como tal) de Henri Poincaré, cabe destacar que solo nos hemos centrado en las partes relevantes para esta investigación.

Como bibliografía secundaria destacada, hemos utilizado una variedad de obras diferenciadas según los puntos del trabajo: para los antecedentes hemos recurrido a las obras de Giaquinto (2002), Kline (1982) y Benacerraf-Putnam (1983), para plantear el debate nos hemos basado en el artículo de Deftlefsen (1992), la obra de Janet Folina (1992) para centrarnos en el tema de la intuición y su parecido o desencuentro con Kant. Por último, para la cuestión de la predicatividad usaremos los artículos de Goldfarb (1988) y McLarty (1997).

2 MARCO TEÓRICO

En la primera parte de este trabajo comentaremos los hechos más significativos que se dieron desde la segunda mitad del s. XIX, con la rigorización de las matemáticas, hasta llegar a la primera parte del siglo XX, momento en el que Poincaré realiza su obra. Con estos antecedentes pretendemos facilitar la comprensión del pensamiento de este autor y de los debates que tiene con sus contemporáneos.

2.1 Rigorización de la matemática en el s. XIX

Durante la segunda mitad del siglo XIX, los matemáticos se percataron de la falta de rigor que había dominado su disciplina. A pesar de haber hecho grandes avances en la misma, éstos eran imprecisos y vagos en términos lógicos. Incluso el ideal de rigor matemático, como era la geometría de Euclides, empezaba a generar problemas[1]. Así, se proponen embarcarse en el intento de rigorizar las matemáticas, es decir, fundamentar las matemáticas en unas bases lógicas. Para ello deberán suprimir las definiciones inexactas, los conceptos justificados intuitivamente… Con este programa pretendían que las matemáticas se dirigiesen hacia un rigor lógico: axiomas bien definidos, demostraciones explícitas… La intuición como base para la justificación era inaceptable, de hecho, incluso los teoremas de los que nadie dudaba, debido a su carácter intuitivo, fueron objeto de este examen[2], ya que de otra manera no podrían formar parte de los sólidos fundamentos desde los que se quería reconstruir la matemática (Kline, 1982).

El punto de partida de esta empresa fue intentar rigorizar el cálculo. Para eso, se basaron en el concepto de número, es decir, en la aritmética. Cauchy fue el primero (en los años 1820), al menos con suficiente éxito y reconocimiento, en trabajar este proyecto. Se basó en la noción de límite y consiguió definir los conceptos básicos del cálculo, aunque su lenguaje no era lo suficientemente preciso. Posteriormente, advirtieron que para conseguir que el análisis fuera una rama plenamente rigurosa no solo hacía falta rigorizar el cálculo, sino también el sistema de los números reales. Para lograr esto Weierstrass, Dedekind y Cantor, en 1870, empezaron definiendo y estableciendo las propiedades de los números irracionales. Esto lo consiguieron dando por sentadas las propiedades de los racionales; no fue hasta 1889 que Peano consiguió desarrollar los números racionales basándose en los axiomas de los números enteros positivos. Así, a finales del siglo XIX, se consiguió rigorizar el análisis. Esto también hizo que se consiguiera rigorizar el álgebra (Kline, 1982).

[1] Con el descubrimiento por parte de Riemann y Lobachevski de las geometrías no euclidianas a principios del s. XIX.

[2] Ejemplos de esto son el axioma de elección de Zermelo y la hipótesis del continuo de Cantor (Kline, 1982).

Un punto que nos interesará, de cara a entender una de las escuelas de pensamiento que trataremos, será la rigorización de la lógica que se lleva a cabo también en esta época. Plantearemos resumidamente los autores más importantes con sus respectivas aportaciones.

Leibniz planteó la necesidad de una lógica universal y trabajó en una lógica simbólica, posteriormente, Boole siguió desarrollando este tipo de lógica e introdujo la lógica de proposiciones. No fue hasta 1847 que De Morgan propuso que la lógica debe tratar con relaciones más allá de las que surgen a partir del verbo ser (como había hecho Aristóteles). Peirce fue uno de los personajes más importantes en esta tarea, ya que introdujo las funciones proposicionales (y también los cuantificadores ("$\exists x$" y "$\forall x$")). Por último, Frege fue quien consumó el proyecto de matematizar la lógica incluyendo el símbolo que denota la verdad de una proposición ($\vdash x$), distinguiendo los conceptos de pertenencia y de inclusión, y empleando la implicación material. A pesar de esto, su lenguaje era demasiado complicado y fue Peano el que simplificó el lenguaje de la lógica simbólica. Así, la lógica había conseguido coronarse como el lenguaje matemático por excelencia (Kline, 1982).

No querríamos terminar este punto sin mencionar brevemente la geometría, que en esta época también tuvo un interesante desarrollo. En concreto, las geometrías no euclidianas seguían creciendo con éxito mientras que no se conseguía demostrar la consistencia de la geometría de Euclides. Incluso se llegó a una sorprendente conclusión: si la geometría de Euclides es consistente, las no euclidianas también lo son. Será más tarde, con Hilbert, cuando se consiga rigorizar la geometría sobre la base de varios axiomas sobre puntos, líneas… (Kline, 1982). No nos extenderemos más acerca de la geometría, aunque sería interesante, porque este trabajo se enfoca fundamentalmente en la aritmética.

Como conclusión de esta sección, creemos oportuna la cita del autor que vamos a exponer en este trabajo, Poincaré (1918): "Se puede decir que hoy en día el rigor absoluto se ha alcanzado[3]" (pág. 23). La comunidad matemática estaba de enhorabuena, se había conseguido un gran avance en su disciplina (sin contar la geometría) y parecía que sus fundamentos, una vez rigorizados, serían inamovibles. A pesar de esto, de aquí se sigue un debate que será crucial para la postura de nuestro filósofo: ¿es el rigor lo único

[3] "On peut dire qu'aujourd'hui la rigueur absolue est attainte".

necesario para la matemática? Si es así, ¿es que "antes del año 1820, (…), no había matemáticas"? (Poincaré, 1920, pág. 27). Más adelante intentaremos presentar su postura, aunque antes creo que puede ser esclarecedor seguir desde un enfoque histórico.

2.2 Cantor y el infinito actual

Parecía que las matemáticas habían resuelto su problema de rigor y que, desde unos fundamentos sólidos, avanzarían hacia un futuro prometedor. Sin embargo, esto no fue del todo así, los baches empezaron a asolar el camino. En la raíz de muchos de estos baches se encontraba la teoría de conjuntos, en concreto la teoría de los conjuntos infinitos, propuesta por Cantor en los años 1870. Lo distintivo de este autor fue pensar el infinito no como potencial, sino actual (Kline, 1982).

Hasta ese momento, y ya desde Aristóteles, los matemáticos habían concebido que el concepto de infinito se refería a un infinito potencial: existían los conjuntos infinitos, y éstos eran infinitos porque tenían la particularidad de que podían agregárseles entidades indefinidamente. Por ejemplo, el conjunto de los números enteros es infinito porque se pueden "añadir nuevos elementos sin cesar" (Poincaré, 1917, pág. 105); ante un elemento x siempre existirá un x+1 y un (x+1) + 1, así continuamente. En palabras de Poincaré (1920): "este infinito era lo que los filósofos denominaban un *devenir*. (…), era una cantidad variable de quien no se podía decir que *hubiera dejado atrás* todos los límites, sino solamente que los *dejaría*[4]" (pág. 153).

Lo innovador de Cantor fue que empezó a entender el infinito de manera actual (Hilbert, 1983, pág. 188). Es decir, pensaba los conjuntos infinitos entendiéndolos como entidades totales, ya dadas, siguiendo con la anterior cita, "una cantidad que no solamente sea susceptible de dejar atrás todos los límites, sino que sea mirada como si los hubiera pasado" (Poincaré, 1920, pág. 153). Esto no fue del todo bien aceptado por los matemáticos del momento, de hecho, el mismo Poincaré puso numerosas objeciones a esta manera de tratar el infinito, y no solo eso, sino que lo vio como el origen de todas las paradojas a las que más adelante se enfrentarían las matemáticas.

A pesar de las críticas, Cantor dio un paso más; no le bastó con afirmar que los conjuntos infinitos son entidades de pleno derecho, sino que trató de compararlos entre

[4] "Cet infni était es que les philosophes appelent un devenir (…). C'était une quantité variable dont on ne pouvait pas dire qu'elle avait dépassé toutes les limites, mais seulement qu'elle les dépasserait".

sí. Veámoslo con un ejemplo: ¿es "igual de grande" el conjunto infinito de los números enteros positivos que el conjunto infinito de los números racionales? Para responder a esta pregunta utilizó el concepto de correspondencia biunívoca[5]. La pregunta entonces se transformaría en la siguiente: ¿se puede establecer una correspondencia biunívoca entre el conjunto infinito de los números enteros positivos y el conjunto infinito de los números racionales? Llegó a la sorprendente conclusión de que sí se podía establecer esa correspondencia; por tanto, el conjunto de números racionales es numerable[6] (Giaquinto, 2002; Kline, 1982).

Decimos sorprendente porque era impensable hasta ese momento que se pudiera establecer este tipo de correspondencia entre un conjunto A y un subconjunto de A. De hecho, es contrario al sentido común, a ese sentido común que nos dice que el todo es mayor que la parte[7]. Así, se estableció que el conjunto de los números enteros y el de los racionales era, por así decirlo, igual de grande. En términos técnicos diremos que tienen la misma cardinalidad[8]. Posteriormente, mediante el método de la diagonalización, Cantor probó que el conjunto de los números reales no era numerable y que, por tanto, era mayor que el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números enteros (Giaquinto, 2002).

Para expresar la cardinalidad recurrió al signo $\aleph$. El conjunto de números enteros y el conjunto de números racionales tienen la misma cardinalidad, es decir, tienen el mismo número de elementos y Cantor le asignó el $\aleph_0$. A esto se le llamó números cardinales transfinitos, en base a ellos Cantor desarrolló la aritmética de los cardinales transfinitos. Este autor pensaba que el cardinal correspondiente al conjunto de los números reales idealmente sería $\aleph_1$ y se propuso demostrarlo. Mediante la aritmética, que anteriormente había desarrollado, llegó a la conclusión de que la cardinalidad del conjunto de los números reales era $2^{\aleph_0}$. Propuso, en la llamada hipótesis del continuo[9], que no existía

---

[5] La correspondencia biunívoca entre elementos de dos conjuntos se da si: 1) a cada elemento del primer conjunto le corresponde un único elemento del segundo conjunto; 2) a diferentes elementos del primer conjunto le corresponde diferentes elementos del segundo conjunto; y 3) cada elemento del segundo conjunto ha sido puesto en correspondencia con un elemento del primer conjunto. ('One-to-one correspondence'. Encyclopedia of Mathematics. URL: http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=One-to-one_correspondence&oldid=32076)

[6] Se llama conjunto numerable a aquel que puede establecer una correspondencia biunívoca con el conjunto de los números enteros positivos.

[7] Como Aristóteles ya nos enseñó.

[8] Dos conjuntos tienen la misma cardinalidad si y solo si se puede establecer una correlación de 1-a-1 entre los dos conjuntos (Giaquinto 2002).

[9] Para más información ver (Putnam & Benacerraf, 1983, pág. 17).

ningún conjunto cuyo número cardinal estuviese entre $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$. Entonces, quiso demostrar que $2^{\aleph_0}$ sería igual que $\aleph_1$, pero le fue imposible (Giaquinto, 2002).

Otro concepto interesante, que trató Cantor y que nos será imprescindible para entender las paradojas que luego surgen, es el de número ordinal[10].

2.3 PARADOJAS

A raíz de la teoría de conjuntos de Cantor surgieron diversas dificultades. Es interesante la manera en la que los autores dieron nombre a estas complicaciones. La mayoría de ellos las llamaron paradojas, sin embargo, nuestro autor, Poincaré (1920) no las llamó paradojas, sino que las llamó antinomias. La diferencia entre estos dos conceptos radica en la posibilidad de que estas dificultades puedan ser resueltas (Kline, 1982). De hecho, si nos fijamos en su etimología, vemos que paradoja viene del prefijo *para* (contra) y la raíz *doxa* (opinión); así, paradoja sería algo "en contra de la opinión". No obstante, antinomia viene del prefijo *anti* (en contra) y la raíz *nomos* (ley, norma), significaría entonces "en contra de la norma", en este caso, la normatividad lógica. Efectivamente, la noción de antinomia seguro que nos recuerda a las antinomias de la razón kantianas, claramente irresolubles. Con este apunte podemos entrever los matices que tendría usar un concepto u otro para los autores.

- Paradoja de Burali-Forti. Cantor tomó el conjunto de todos los ordinales: Ω. Este conjunto estaría bien ordenado, ya que todos los subconjuntos del conjunto tienen un primer miembro (Kline, 1982, pág. 196; Brower, 1983, pág. 83). Digamos que el conjunto de todos los ordinales se podía organizar en una serie ordenada bajo la relación de "$<$" y " $>$ ". Bien, en tanto que esta serie ordenada es un conjunto y está bien ordenada, este conjunto debería de tener un ordinal, pongamos que es: δ. Al ser un ordinal, debería pertenecer al conjunto de todos los ordinales, es decir: $\delta \in \Omega$. Y, es más, debería ser mayor que todos los demás ordinales de Ω; entonces, $\forall x \in \Omega\ (x < \delta)$. Pero, si como hemos dicho antes $\delta \in \Omega$, δ forma parte del conjunto Ω, podríamos sustituir x por δ. Haciendo esto llegaríamos a la conclusión de que $\delta < \delta$. Y esto es contradictorio (Brower, 1983, pág. 83).

[10] En la teoría de conjuntos de Cantor, es un número que designa el tipo de orden de un conjunto bien ordenado.

-Paradoja de Cantor. Esta paradoja depende de dos teoremas que Cantor demostró; teniendo en cuenta un conjunto que está formado por subconjuntos:

1) el cardinal de cualquiera de los subconjuntos del conjunto x es menor o igual que el del conjunto x.

2) el conjunto potencia[11] del conjunto x tiene mayor cardinal que el conjunto x.

Ahora bien, si tenemos en cuenta el conjunto de todos los conjuntos y lo llamamos Ʊ. Tendría un cardinal x que sería mayor o igual que el de cualquier subconjunto de Ʊ (por el teorema 1). Ahora si cogemos el conjunto potencia de Ʊ, designémoslo con $\rho(Ʊ)$. Por el teorema 2 su cardinal debería ser mayor que el cardinal de Ʊ. El problema viene cuando vemos que el conjunto $\rho(Ʊ)$ es un conjunto y al ser un conjunto debería de pertenecer a Ʊ, es decir, $\rho(Ʊ) \in Ʊ$. Entonces, en tanto que es un subconjunto de Ʊ debería de tener un cardinal menor o igual que Ʊ. Pero en tanto que es el $\rho(Ʊ)$ debería tener un cardinal mayor que Ʊ y aquí podemos ver la contradicción (Giaquinto, 2002).

-Paradoja de Russell. Esta paradoja apunta directamente a lo más básico de la teoría de conjuntos cantoriana. Toma como base el conjunto de todos los conjuntos que no forman parte de sí mismos. La pregunta es si ese conjunto forma parte de sí mismo o no. Si la respuesta es que sí forma parte de sí mismo, debería cumplir la condición para formar parte del conjunto; es decir, no formar parte de sí mismo, lo cual es contradictorio. Si la respuesta es negativa y no forma parte de sí mismo, estaría así cumpliendo la condición para formar parte de él mismo. Aquí tenemos la contradicción (Giaquinto, 2002).

De una manera más formal tendríamos: M es el conjunto de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos; es decir $M = \{x : x \notin x\}$. Dicho de otra forma, un conjunto pertenece a M si y solo si ese conjunto no pertenece a sí mismo. En términos formales: $\forall x \; x \in M \leftrightarrow x \notin x$. Ahora bien, como M es un conjunto, podríamos sustituirlo por *x* para ver si pertenece a sí mismo. Entonces nos quedaría: $M \in M \leftrightarrow M \notin M$ lo cual, como se puede ver a simple vista, es contradictorio.

Las tres primeras paradojas, que hemos intentado explicar, son las llamadas paradojas lógicas que se derivan directamente de la teoría de conjuntos, es por esto por lo que supusieron un antes y un después para el desarrollo y la rigorización de esta teoría.

[11] El conjunto de todos los subconjuntos de X, denotado $\rho(X)$. Tal que $A \in \rho(X) \Leftrightarrow A \subseteq X$.

Por otro lado, la paradoja del mentiroso, la paradoja de Richard… son las llamadas paradojas semánticas, estas paradojas están relacionadas con el uso de conceptos semánticos, sobre todo la idea de verdad y la de definición, es cuestión del lenguaje (Kline, 1982; Giaquinto, 2002, pág. 104). Esta diferenciación nos será de ayuda más adelante.

Y no solo eso, es interesante resaltar la diferencia entre las dos primeras paradojas con respecto a la última. Las dos primeras lidian con el conjunto de todos los ordinales y con el conjunto de todos los conjuntos; intentarán poner solución a la contradicción mediante diversas restricciones (o bien sobre el tamaño de los conjuntos, o bien acerca de lo que es un conjunto). Sin embargo, la última paradoja afecta de manera transversal a los principios más básicos de la teoría de conjuntos; de manera que para intentar salvar la contradicción sería necesario reformular la teoría de conjuntos al completo (Kline, 1982; Ferreirós, 2001, pág. 444). En palabras de Quine (1966): "El principio básico de las clases que se utiliza tácitamente, en eventualmente todo momento en el que las clases estén involucradas, es precisamente el principio de existencia-de-clases que es desacreditado por la antinomia de Russell[12]" (pág. 14).

Así, la teoría de conjuntos de Cantor (llamada naïve set theory) será remodelada en casi su totalidad para poder franquear este tipo de contradicciones. Surgirá entonces la teoría axiomática de conjuntos en base a los axiomas de Zermelo y Fraenkel. En esta teoría se usará el llamado axioma de elección[13]. Este axioma había sido implícitamente usado en el pasado sin que nadie reparara en que se estaba utilizando, pero cuando Zermelo lo expuso explícitamente y lo usó para su teoría generó mucha controversia (Giaquinto, 2002; Kline, 1982).

Las matemáticas, como hemos visto, pasaban por una etapa difícil debido a la aparición de paradojas, que supone un problema de consistencia[14]. Y ya no solo en la teoría de conjuntos de Cantor, que, dentro de lo que cabe, se podía aceptar o no; sino también al reparar en que los procedimientos que habían usado sin ningún miramiento y que tenían aceptados, por ejemplo el axioma de elección y la teoría rigurosa de los

[12] "The basic principle of classes that is tacitly used, at eventually every turn where classes are involved at all, is precisely the class-existence principle that is discredited by Russell's antinomy".

[13] Para cualquier familia F de conjuntos no vacíos, existe una función f que, para cualquier conjunto S de F, uno tiene $f(S) \in S$.

[14] Estos problemas fueron expuestos en el congreso de 1900 por Hilbert, el resto de los matemáticos no le daban tanta importancia (Kline, 1982, págs. 195-196).

números reales[15] (Weirestrass, Dedekind, Cantor), empezaban a dar problemas. Y estos problemas no eran menores, involucraban problemas de completitud: no eran capaces de derivar el axioma de elección o la continuidad de la recta real de ninguno de los axiomas ya expuestos.

La disciplina, que se supone que era la más fiable a la hora de exponer y demostrar proposiciones y de la que dependían otras ramas científicas, parecía no ser ni tan consistente ni tan completa como se pensaba (Hilbert, 1983, pág. 191). Si no estamos familiarizados con la lógica, la consistencia puede parecer una mera característica periférica, pero nada más lejos de esto, si la matemática no es consistente es porque de ella se derivan contradicciones (Giaquinto, 2002, pág.162). El problema de la consistencia y de la completitud, entonces, no eran dificultades baladíes, de hecho, generaron un cuestionamiento trascendental acerca de los fundamentos de las matemáticas. Preguntas como ¿qué significa la existencia en matemáticas? ¿qué axiomas se pueden aceptar en la disciplina? ¿qué estatuto ontológico tienen las matemáticas? se hicieron especialmente urgentes en esta época. Las respuestas a éstas acarrearon una separación en el mundo matemático, empezaron a nacer diferentes escuelas de pensamiento que, poniendo el foco en la consistencia y en la completitud, se plantearon qué son las matemáticas.

2.4 LOGICISTAS

La primera escuela que comentaremos son los llamados logicistas, "el *logicismo* es la tesis de que las matemáticas son reducibles a la lógica, y por tanto no son más que una parte de la lógica[16]" (Carnap, 1983, pág. 41). Esto contradice la tesis de Kant acerca de las matemáticas, que las entiende como verdades sintéticas a priori, y si son sintéticas necesitan de la experiencia o de la intuición para formarse[17]. Frege, uno de los primeros logicistas, quería demostrar que las verdades matemáticas eran analíticas y que podían ser demostradas sin necesidad de recurrir a la intuición[18], es decir, podían ser derivadas de los principios de la lógica. Además, si la lógica era consistente y la matemática se reducía a la lógica, la matemática también lo sería (Giaquinto, 2002; Kline, 1982).

[15] Ésta involucraba el trabajo con conjuntos infinitos, que conllevaba a las mismas dificultades.
[16] "*Logicism* is the thesis that mathematics is reducible to logic, hence nothing but a part of logic".
[17] Esto lo veremos con más profundidad en el apartado 5.
[18] Al final de su vida se retractará (Giaquinto, 2002, pág. 56).

Como ya expusimos, el simbolismo lógico se había conseguido desarrollar lo suficiente para ser un cuerpo sólido del que derivar la matemática. El primer paso del proyecto de Frege fue derivar los números naturales de conceptos lógicos, ya que ya se había demostrado que la aritmética se puede reducir a los números reales (Carnap, 1983). Parte de este programa se publicó en 1893 en su obra *Grundgesetze der Arithmetik* y fue aquí donde Russell, en 1902, encontró la paradoja que lleva su nombre. Frege, que ya tenía el segundo volumen de esta obra en imprenta, escribió en él un apéndice a colación de esta paradoja. En este anexo intenta dar respuesta a Russell, pero le es imposible (Giaquinto, 2002).

Por otra parte y a la vez, Russell y Whitehead están trabajando en el mismo proyecto que Frege y esto dará como resultado su obra conjunta *Principia Mathematica* (1910). En ella desarrollarán la lógica de las proposiciones y, posteriormente, la lógica cuantificacional[19], que culminarán en lo que se llamará teoría de tipos (que, en el fondo, no es más que "un sistema formal para la teoría de conjuntos"[20] (Ferreirós, 2001, pág. 467)). Pero, si tiene como base la teoría de conjuntos de Cantor, ¿cómo consigue no caer en las paradojas en las que cae ésta, en especial, la paradoja de Russell? (Kline, 1982) Gracias a la jerarquía de tipos:

> Al tipo 0 pertenecen los nombres de los objetos ("individuos") del dominio del discurso (por ejemplo, a, b, …). Al tipo 1 pertenecen las propiedades de estos objetos (por ejemplo, J(a), g(a), …). Al tipo 2 pertenecen las propiedades de estas propiedades (por ejemplo, F(J), G(J), …) (…). La regla básica de la teoría de tipos es que todo predicado pertenece a un tipo determinado y solo puede aplicarse con sentido a expresiones del tipo inmediatamente inferior[21]. (Carnap, 1983, pág. 45)

Así, consiguen lo que tanto intentaban los matemáticos de la época: llegar a una teoría que fuera capaz de rescatar la mayoría de la teoría de Cantor, pero sin caer en las paradojas que conllevaba. De esta manera, las llamadas paradojas lógicas (paradojas de la teoría de conjuntos) consiguen ser sorteadas.

[19] Hacen uso de funciones cuyos argumentos y valores son valores de verdad.

[20] Al hablar de funciones proposicionales, las funciones, por así decirlo, denominan una clase, un grupo, un conjunto, y entonces se rige por las leyes de la teoría de conjuntos.

[21] To type 0 belong the names of the objects ("individuals") of the domain of discourse (e.g., a, b, . . .). To type 1 belong the properties of these objects (e.g., J(a), g(a), ...). To type 2 belong the properties of these properties (e.g., F(J), G(J), …) (…). The basic rule of type theory is that every predicate belongs to a determinate type and can be meaningfully applied only to expressions of the next lower type.

Sin embargo, para Russell, no todas las contradicciones habían sido evitadas. Las contradicciones semánticas seguían ahí, según este autor se originaban debido al llamado círculo vicioso (corroborando a Poincaré[22]). De nuevo, intentaron que su teoría evolucionara para conseguir eludir las definiciones que conllevaran caer en un círculo vicioso. Es ahí donde surge la teoría ramificada de tipos. El problema es que, a pesar de evitar las contradicciones, era demasiado restrictiva y no se podían establecer proposiciones que, por ejemplo, incluyeran todos los números reales; entonces, construir la teoría de estos números, entre otras cosas, resultaba imposible (Carnap, 1983; Ferreirós, 2001; Giaquinto, 2002).

Una vez más, para intentar salvar esta dificultad, introdujeron (según la opinión de la mayoría, incluso del propio Russell, *ad hoc* (Ferreirós, 2001, pág. 468)) el axioma de reducibilidad. Aun así, no llegó a convencer a la comunidad matemática. La anterior inserción de axiomas como el axioma de infinitud[23], el axioma de elección, y el nuevo axioma de reducibilidad fue demasiado para la mayoría de los matemáticos de la época. Estaban lejos de pensar que estos axiomas fueran axiomas lógicos y que, por tanto, la matemática se pudiera reducir a la lógica. Consecuentemente, o bien el concepto de lo que conocían por lógica se extendía hasta límites difícilmente aceptables, o bien el proyecto logicista se quedaría en una mera tentativa (Kline, 1982; Ferreirós, 2001).

2.5 CONJUNTISTAS

Los principales promotores de este grupo fueron Dedekind y Cantor inaugurando la teoría de conjuntos, pero fue Zermelo (1908) con algunas aportaciones de Fraenkel (1922) quienes consiguieron axiomatizarla. Su intención directriz, muy parecida a la de Russell y Whitehead, era formular “axiomas que, en conjunto, serían lo suficientemente generosos como para permitir el desarrollo de la aritmética y el análisis en la teoría de conjuntos, preservando así su papel fundacional, pero que serían demasiado estrictos para reproducir las paradojas” (Giaquinto, 2002, pág. 119). Siguiendo esta idea, desarrollaron la teoría de conjuntos hasta límites insospechados y esto supuso un enriquecedor avance para la comunidad matemática, sentando así las bases del desarrollo posterior de la disciplina.

[22] Esto lo veremos más profundamente tomando como referencia a Poincaré en el apartado 7.2.
[23] “Postula la existencia de una infinitud de entidades” (Giaquinto, 2002, pág.96).

Se basaron en “leyes de la lógica” que no especificaron, aunque más adelante se identificarían con la lógica de primer orden. También se apoyaron en diversos axiomas para conseguirlo, entre ellos, axiomas controvertidos como el axioma de elección, el axioma de infinito, axioma de separación… Así,

> Los axiomas de Zermelo más los Axiomas de Sustitución conservan todo lo valioso de la teoría de conjuntos que se conocía a principios de la década de 1920. (…). La teoría resultante, aunque claramente no es un sistema de la lógica, es más potente, más flexible y acorde con la intuición que la teoría simple de tipos. (Giaquinto, 2002, pág.129)

Lo único que faltaba, para enfrentarse a las críticas que le harían los intuicionistas, sería probar la consistencia de esta teoría axiomática. La escuela formalista, sobre todo Hilbert, aportarán enormemente a esta causa.

2.6 INTUICIONISTAS

A la vez que el pensamiento logicista se estaba gestando, surgieron diversas voces disonantes. En primer lugar, la tesis principal del logicismo no convencía a todos los autores, algunos de ellos pensaban que la matemática tenía sus principios característicos que no podían ser reducidos a la lógica. Además de esto, la utilización de ciertos axiomas como el de elección, el de reducibilidad, el de infinitud… no era bien visto por muchos matemáticos. De hecho, se puede ver en la correspondencia de Lebesgue, Baire y Borel la crítica al uso del axioma de elección y a numerosos presupuestos logicistas; se les considera, efectivamente, semi-intuicionistas (Kline, 1982).

También se le llama intuicionista al matemático Kronecker, ya que no aceptaba el infinito actual, ni tampoco las pruebas de existencia no constructivas, es decir, las demostraciones de que existe alguna entidad porque su no-existencia sería contradictoria, pero no porque sean capaz de construir un ejemplo (Kline, 1982). Además, el autor que vamos a trabajar, Henri Poincaré, también se incluye en este grupo. No nos demoraremos explicándolo aquí porque lo haremos más adelante.

Lo que tienen en común estos autores es lo que posteriormente, la figura principal del intuicionismo, L.E.J. Brouwer, intentó sistematizar a lo largo de su vida. No solo criticó los presupuestos de la escuela logicista, sino que propuso una lógica intuicionista de acuerdo con esas objeciones. El argumento principal de este autor es que las matemáticas son construcciones de la mente y accedemos a ellas a través de una facultad humana llamada intuición. En palabras del intuicionista, y alumno de Brouwer, Heyting (1983): "los objetos matemáticos dependen, por su propia naturaleza, del pensamiento humano. Su existencia está garantizada solo en la medida en que pueden ser determinados por el pensamiento. Solo tienen propiedades en la medida en que éstas pueden ser discernidas en ellos por el pensamiento[24]" (pág. 53). De esta manera, los objetos matemáticos son solo aquellos que pueden ser pensados. Es por esto por lo que, al ser nosotros seres finitos, consideran que no somos capaces de pensar en un conjunto con un número de entidades infinito. Pensaban que los conjuntos infinitos de Cantor, al no poder ser concebidos por la mente (no ser intuitivos), no es que fueran verdaderos o falsos, sino que (ya que no pueden ser pensados), no son ni verdaderos ni falsos. Por esto, piensan que hay una tercera opción en el valor de verdad, ya no solo verdadero ni falso. Es decir, no aceptan el principio de tercio excluso para conjuntos infinitos, porque es imposible para una mente humana comprobarlo caso por caso (Putnam & Benacerraf, 1983; Giaquinto, 2002; Kline, 1982).

Además, los intuicionistas pensaban que solo eran aceptables las definiciones constructivas, es decir, que "hay que dar un método para exponer la entidad o entidades en un número finito de pasos, o un método para calcularlas con cualquier grado de precisión deseado" (Kline, 1982, pág. 238). Así, axiomas como el de elección o la hipótesis del continuo son rechazados a la hora de demostrar la existencia. En base a estas restricciones que ponen a las matemáticas, los intuicionistas crean una nueva lógica: la lógica intuicionista. El problema es que no se desarrolló debidamente hasta más adelante, era muy complicada y, lo más relevante; por el camino tuvieron que renunciar a una parte importante de la matemática (Kline, 1982).

2.7 FORMALISTAS

Podemos ver que las escuelas logicistas e intuicionistas se disputaban vehementemente cuál de sus posturas sería el fundamento teórico de la reconstruida matemática. Hilbert, matemático prusiano que había expuesto los 23 problemas fundamentales de la matemática en el Congreso internacional de matemáticos de 1900, no estaba satisfecho con ninguna de las teorías. Pensaba, al contrario que los logicistas, que la disciplina matemática necesitaba tanto axiomas lógicos como propiamente

[24] "Mathematical objects are by their very nature dependent on human thought. Their existence is guaranteed only insofar as they can be determined by thought. They have properties only insofar as these can be discerned in them by though".

matemáticos. Sin embargo, la lógica intuicionista, con sus restricciones, extirpaba una parte muy importante de la teoría matemática, no solo el "paraíso cantoriano" (Hilbert, 1983, pág. 191), sino también gran parte del análisis, y Hilbert no estaba dispuesto a renunciar a ella (Kline, 1982).

De esta manera, la teoría matemática tendría que sustentarse en axiomas y conceptos lógicos y matemáticos expresados mediante lógica simbólica. Este proyecto ya lo habían llevado a cabo tanto Russell como Zermelo (Neumann, 1983, pág. 64). Pero no solo eso, Hilbert aspiraba a demostrar que "el origen de las paradojas no estaba en los conceptos de Cantor, (…), sino en la mala aplicación de ciertos modos de inferencias a esos conceptos" (Giaquinto, 1983, pág. 122). De esta manera, el matemático prusiano introdujo una restricción para poder usar sin miedo la inferencia lógica: el llamado finitismo[25].

Solo una parte de la lógica muy limitada, parecida a la lógica intuicionista, cumplía esta nueva condición. En definitiva, debía renunciar a la lógica clásica, pero de nuevo, Hilbert no estaba dispuesto. Incorporó, entonces, la posibilidad de usar los llamados elementos ideales (que no cumplen la condición de finitismo) en el sistema formal. No obstante, tenía que justificar que se podían usar estos elementos ideales y que no llevarían a contradicción. Esta, podríamos decir, constituye una segunda parte en la trayectoria de este autor: el programa de Hilbert. Esta empresa consistía en, una vez que hemos constituido el análisis como un sistema formal, establecer —mediante las demostraciones finitarias— que, a partir de él, no se puede llegar a una contradicción; por lo que el sistema sería consistente. Como conclusión, "si el programa tuviera éxito (…); también habría demostrado que la destrucción de las matemáticas clásicas que conlleva el intuicionismo no tiene sentido, no nos ahorra nada en términos de certeza intuitiva" (Giaquinto, 1983, pág. 123).

Esta es la última escuela que trataremos en estos antecedentes, ya que su fundador, Hilbert, estará en constante diálogo con el autor principal que vamos a tratar en este trabajo. Además, a nivel histórico, el siguiente aporte significativo a esta crisis de los fundamentos de las matemáticas, el teorema de incompletitud de Gödel, excede

[25] Las proposiciones matemáticas tienen significado solo si pueden ser decidibles en un número finito de pasos, si no solo serán una cadena de símbolos sin significado (Giaquinto, 1983).

considerablemente los objetivos de este trabajo y, deja de ser contemporáneo a Poincaré, por lo que no entabla un intercambio intelectual relevante para lo que aquí nos compete.

3 HENRI POINCARÉ

3.1 BIOGRAFÍA

En este apartado relataremos la trayectoria científica (en concreto, matemática) de nuestro autor Poincaré, para luego intentar reconstruir el camino que siguió a nivel filosófico. Posteriormente, presentaremos resumidamente la postura filosófica de este autor acerca de los fundamentos de la matemática para, a continuación, exponer los diversos debates que tuvo con los matemáticos de su época.

Poincaré nació en 1854 en Nancy, Francia. Su entorno familiar destaca debido a la cantidad de parientes con una alta formación, por ejemplo, su padre era médico, su primo, el abogado Raymond Poincaré, llegó a ser presidente de la república francesa… (Rollet, 2014). Así, el ambiente intelectual lo tuvo claramente presente desde muy temprana edad; no es entonces de extrañar que siguiera una enseñanza universitaria. En 1873 entró en la École Polytechnique, donde tuvo como profesores a grandes matemáticos como Hermite, Laguere... Allí también coincidió con el círculo de Boutroux del que hablaremos más adelante. A pesar de que las matemáticas fueran desde siempre su mayor interés[26], continuó sus estudios en la *École des mines* para ser ingeniero de minas, a la vez que estudiaba la carrera de ciencias en la Sorbona. En 1879, cuando finalizaba su formación como ingeniero de minas, terminó su tesis en la facultad de ciencias de París sobre ecuaciones diferenciales (ámbito imprescindible para la física matemática) (Ginoux & Gerini, 2014). Este mismo año, consiguió un puesto de ingeniero de minas en Vesoul, que le duró pocos meses, ya que enseguida le llamaron para ser lector de matemáticas en Caen, con 25 años (Rollet, 1999).

En Caen desarrolló ampliamente su faceta como matemático, empezó a escribir sobre las funciones fuchsianas, manteniendo correspondencia con el propio Fuchs y luego con Félix Klein. Desde 1885 obtuvo varios puestos de profesor en la Sorbona, primero en mecánica física y experimental, luego en física matemática (aplicación de ideas matemáticas a problemas físicos) y cálculo de probabilidad (sus cursos fueron

[26] Ya en 1874 escribió su primer artículo sobre geometría.

posteriormente publicados). Dos años después, como reconocimiento a sus obras matemáticas y físicas, fue elegido miembro de la *Académie des sciences* de París; en 1887, fue elegido presidente de la *Societé mathematique* de France, y en 1889, no sin controversia, ganó el premio del rey Oscar II por su ensayo sobre el problema de los 3 cuerpos. Una trayectoria, sin duda, extraordinaria.

A final de la década de los 90, se celebró el primer congreso internacional de matemáticas, en el cual era miembro del comité organizador. Sin embargo, no pudo asistir y su ponencia sobre física matemática fue leída por J. Franel. 1900 fue el año en el que tuvo lugar el segundo congreso internacional de matemáticas, de vital importancia y donde Hilbert propuso sus 23 problemas (que influyeron enormemente a la matemática de la época). En pleno apogeo de la lógica, con las ideas de Peano, Frege y otros, Poincaré participó dando una conferencia plenaria sobre la intuición y la lógica en matemáticas (se encuentra en su obra *El valor de la ciencia*), la cual suscitó numerosos debates.

La primera década del siglo XX fue muy productiva y variada a nivel de publicaciones para nuestro autor: escribirá obras sobre el trabajo de Hilbert, topología, mecánica celeste… En 1909 Hilbert, entre otros, invitó al matemático francés a Göttingen a dar una serie de conferencias; fue donde conoció personalmente a Klein y al propio Hilbert. Estas ponencias tuvieron como temas principales las ecuaciones diferenciales, las funciones fuchsianas y finalmente, los números transfinitos. Debido a esta última, tuvo una disputa indirecta con Zermelo, pero también influyó notablemente en matemáticos como Hilbert. Finalmente, un año antes de su muerte, en 1911, participó en uno de los congresos científicos más importantes de la época: el congreso Solvay. Allí coincidió con eminencias investigadoras como Marie Curie, H.A. Lorentz, Albert Einstein... (Kahle, 2014).

Como podemos ver, Henri Poincaré fue un personaje multidisciplinar, siendo ingeniero de minas, hizo grandes aportaciones en matemáticas (funciones fuchsianas, topología, probabilidad[27]), física (problema de los tres cuerpos, teoría de la relatividad…), etc. Gozó de gran popularidad en su época debido a estas contribuciones. Incluso podríamos decir que fue una reconocida figura pública[28], sus obras se leyeron ampliamente y publicó numerosos artículos en diversas revistas de la época, con las que

[27] Dirigió la tesis del E. Borel sobre el tema.

[28] Por ejemplo, participó en el caso Dreyfus, en 1894, como miembro del comité investigador científico que establecía la veracidad de las pruebas presentadas.

se ganó la fama de divulgador científico. Debido a este carácter polifacético, no es de extrañar que participase tanto en congresos de matemática, como en el congreso Solvay, como en congresos de filosofía[29]; y tuviera reconocimientos de universidades desde Francia hasta Hungría (ganando el premio Bolyai en 1905), Alemania, Reino Unido, Estados Unidos, Suecia…

3.2 INFLUENCIAS FILOSÓFICAS

Primeramente, señalaremos la influencia que tuvieron las geometrías no euclidianas en el matemático francés. En concreto, en su visión convencionalista de la geometría. A pesar de ser este el primer gran influjo que encontramos a nivel cronológico, no nos centraremos en este punto, ya que excede la visión de este trabajo. Sin embargo, nos parecía interesante mencionarlo, ya que hará uso de estas geometrías en sus trabajos matemáticos. Y además, será uno de los aspectos que lo distanciará de la teoría kantiana.

Como influencia filosófica principal, y de la que se servirá para tomar contacto con la filosofía en general y particularmente con la de Kant, será Émile Boutroux (cuñado de Poincaré). De hecho, a principios del s. XIX, la filosofía kantiana no había ejercido gran influencia en Francia y fue precisamente Boutroux, entre otros, quien contribuyó a revivir el debate acerca de este autor (Nye, 1979). De hecho, fue la tesis de Boutroux y los debates que se tuvieron acerca de ella, la mayor influencia en la filosofía de Poincaré, hasta tal punto de tratar los mismos temas de una manera muy parecida (Rollet, 1999, pág. 122). Cabe también mencionar el llamado círculo de Boutroux, del que Poincaré formaba parte, además de los hermanos Tannery. Este grupo discutía acerca de las tesis kantianas, en concreto, acerca de la filosofía de la ciencia y de las matemáticas (Rollet, 1999). Algunos autores, como Rollet (1999), afirman que es poco probable que Poincaré leyera a Kant íntegramente, y que fueron Boutroux y Lechalas los que desempeñaron el papel de tutores en lo concerniente a este tema.

De esta manera, podemos ver como la influencia filosófica fundamental para Poincaré fue la teoría kantiana. Sin embargo, ni siquiera fue un influjo directo, sino que se familiarizó indirectamente con estas ideas. Podemos ver, entonces, que Poincaré no parece un ávido lector de filosofía, y más bien, adquiere las distintas perspectivas leyendo los comentarios que hacen sus contemporáneos acerca de figuras propiamente filosóficas.

[29] Congreso que propone Xavier Léon, fundador de la *Revue de métaphysique et de morale*, en la que Poincaré participa activamente (Rollet, 1999, pág. 165).

Aun así, eso le bastará para compaginar sus creencias acerca del conocimiento que tenemos del mundo físico y matemático con las ideas de otros filósofos, creando así encuentros y desencuentros, que servirán para continuar con el debate filosófico acerca de estas cuestiones.

3.3 POSTURA FILOSÓFICA

Como hemos dicho, Poincaré no tuvo una teoría filosófica sistematizada, sino que su postura filosófica se puede dilucidar, a veces más directamente y otras veces entre líneas, de sus cuatro obras. En concreto, la parte que nos interesa a nosotros en este trabajo será la que dedica a los fundamentos de la matemática, específicamente, a la aritmética. Nos centraremos en la crítica que hace a la posición logicista; ya que es ahí donde podemos encontrar las tesis más importantes acerca de este tema.

Su principal desencuentro con esta escuela de pensamiento, y lo que guiará todas las demás críticas, será el principio logicista de que la matemática se puede reducir a la lógica. Es decir, la tesis de que la matemática solo emite principios analíticos/lógicos y que no necesita en ningún momento de la intuición para construirse. Poincaré promulgará una defensa acérrima de la intuición; primero, por motivos, podríamos llamarlos teóricos, y segundo, intentando demostrar que algunos de los principios básicos para la matemática (y que los logicistas usan) no son puramente lógicos (y, por tanto, según él, necesitan de algún tipo de intuición). Si consiguiera esto último, los logicistas solo tendrían dos opciones: o bien, estarían obligados a renunciar a estos principios que no son lógicos (pero esenciales para la matemática), o bien, su proyecto logicista de reducir la matemática a la lógica sería imposible.

Así, en este trabajo expondremos las diferencias epistemológicas entre los logicistas y nuestro matemático francés, que nos ayudarán a entender por qué defiende la intuición y las consecuencias que esto tiene. En concreto, esta postura conlleva un rechazo del infinito actual y, por tanto, de las definiciones impredicativas. Ilustraremos esta serie de rechazos con los ejemplos que Poincaré expone en los que los logicistas caen en este tipo de círculos viciosos.

4 RAZONAMIENTO ARITMÉTICO

Me parece interesante comentar el problema desde un punto de vista epistemológico como hace Goldfarb (1988). Este enfoque me parece acertado debido a la influencia de la epistemología kantiana en nuestro autor y, su preocupación por analizar qué conocimiento aportaba la ciencia, es decir, cuál es el valor de la ciencia (nombre de una de sus obras), en particular, qué tipo de conocimiento aporta la matemática y qué características tiene.

Para abordar este tema veremos cuál es la posición de Kant acerca del conocimiento matemático, y en qué se distingue de lo que piensan acerca de este tema los logicistas. Para terminar veremos el debate desde el punto de vista de nuestro autor.

4.1 KANT

El primero de los orígenes que, leyendo a Poincaré, nos viene a la mente, es la filosofía kantiana. En sus obras, Poincaré defenderá la teoría de este autor contra las figuras que quieren deslegitimarlo. Para entender hasta qué punto su postura es influida por Kant, vamos a exponer cuál es la naturaleza de las matemáticas para éste. En terminología kantiana, esto se basará en investigar qué tipos de juicios son los juicios matemáticos, y en eso nos sumergiremos a continuación.

Para Kant los juicios matemáticos, tanto de la aritmética como de la geometría, tienen dos características principales: son sintéticos y a priori (Kant, 2014, págs. 48-49).

Es decir, son sintéticos porque su predicado no está contenido en el sujeto, esto es, son juicios extensivos, aumentan conocimiento. Pensemos en un ejemplo clásico: "el triángulo tiene tres ángulos". Este juicio tiene la particularidad de que el concepto *triángulo* se define por tener tres ángulos; es decir, es tautológico, no puede haber un triángulo que no tenga tres ángulos porque, en ese caso, no sería un triángulo. Entonces, con este juicio no ampliamos conocimiento, no sería extensivo, se trata de un juicio analítico: "no añaden nada al concepto del sujeto mediante el predicado, sino que simplemente lo descomponen en sus conceptos parciales, los cuales eran ya pensados en dicho concepto del sujeto" (Kant, 2014, pág. 45). Cuando Kant dice que los juicios matemáticos son sintéticos quiere decir que, al contrario de los analíticos y del ejemplo del triángulo, sí amplían conocimiento. Por ejemplo, si decimos "el triángulo tiene tres ángulos que suman 180º" es un juicio sintético, ya que "tener tres ángulos que suman 180º" no está contenido en el concepto *triángulo*. Por tanto, este juicio sería sintético, es decir, extensivo, ya que aumenta el conocimiento que tenemos sobre ese triángulo.

Sin embargo, los juicios matemáticos no son solo sintéticos, sino que también son a priori. Este particular agregado, sintético y a priori, es precisamente lo más característico (y problemático) del pensamiento kantiano. Son a priori porque, según Kant, son universales y necesarios, "las proposiciones verdaderamente matemáticas son siempre juicios a priori, no empíricos, ya que conllevan necesidad, cosa que no puede ser tomada de la experiencia" (Kant, 2014, pág. 49). Por tanto, los juicios matemáticos son sintéticos porque amplían conocimiento y son a priori porque son universales y necesarios.

En la introducción de *la Crítica de la Razón Pura* Kant explica este tema con un ejemplo muy simple: 5+7=12. Este sería un juicio sintético a priori, pero nos podríamos preguntar ¿está contenida en la adición de 5+7 el resultado 12 y es, por tanto, un juicio analítico? Kant dirá que no lo está y que no es un juicio analítico. Explicará que en esta proposición está contenida la unión por adición de 5+7 en un solo número, pero no está contenido el resultado 12 en particular. Para hallar el resultado 12 tendríamos que representarnos, en concreto (por ejemplo, con los dedos, con puntos en un plano…), el concepto 5 y 7 y al sumarlos llegaríamos al 12. El resultado concreto (12) no está en la definición de adición. Es decir, el 12 no está contenido en la unión en un solo número de 5+7, sino que tendríamos que recurrir a la intuición para poder llegar al 12. En palabras de Kant: "jamás podríamos encontrar la suma mediante un simple análisis de los mismos, sin acudir a la intuición" (Kant, 2014, pág. 50).

Es necesaria entonces la intuición, aunque sea al modo de una representación mental (dedos, puntos…), para poder hacer la operación aritmética de la suma. El propio Kant avisa que en este ejemplo se ve menos claro, pero en el momento que intentemos sumar números mayores podremos ver que en el análisis de la suma de dos números nos sería imposible llegar al resultado sin recurrir a la intuición. Veremos el concepto de intuición en Kant más adelante.

Entonces, los juicios aritméticos (que son los que a nosotros nos interesan en este trabajo) son sintéticos, porque son extensivos y requieren de algún modo de cierta intuición, y son a priori porque necesaria y universalmente "5+7=12". Podemos ver que esto no es del todo evidente y será un foco de debate en los autores que discutan la filosofía matemática kantiana.

4.2 LOGICISTAS

En el siglo XIX, Frege intentará dar una vuelta de tuerca a esto y, a colación de la naturaleza de los juicios, diferenciará la matemática en geometría y aritmética. Propondrá que la geometría, como en Kant, utiliza juicios sintéticos a priori, mientras que la aritmética es analítica. Esto quiere decir que no se necesita de ninguna intuición para hacer juicios aritméticos. Este será el primer impulso del logicismo.

En su obra *Fundamentos de la Aritmética*, Frege plantea la cuestión filosófica acerca de la naturaleza de los juicios aritméticos y llega a la conclusión de que "los principios fundamentales de la aritmética son analíticos" (Frege, 1960, pág. 5), es decir, "su demostración puede ser derivada exclusivamente de leyes lógicas generales y definiciones" "sin incluir un llamamiento a los hechos, por ejemplo, (…) que contienen afirmaciones acerca de objetos particulares" (Frege, 1960, pág. 4).

Sabiendo que esto contradice lo anteriormente comentado por Kant, Frege retoma el ejemplo de la *Crítica a la Razón Pura* de 5+7=12. Comenta que la razón por la que el filósofo de Königsberg piensa que es un juicio sintético es que no se nos da como evidente en sí mismo, nos debemos ayudar de la intuición, por ejemplo, de la representación que hacemos con los dedos, para poder llegar al resultado de esa suma. Frege le replica que "¿Y tenemos, acaso, intuición de 135664 dedos o puntos?, (…) si así fuera, la validez de nuestra fórmula, (…), tendría que ser evidente de inmediato (…); pero no lo es" (Frege, 1960, pág. 6). Es por esto por lo que el argumento de la necesidad de la intuición para poder llegar a la validez o invalidez de este juicio no le resulta convincente y, por tanto, no está de acuerdo con el carácter sintético de estos juicios.

Sin embargo, Frege subscribe el pensamiento de Leibniz cuando éste, en su obra *Nuevos Ensayos*, tipifica el juicio 2+2=4 de verdad de razón derivada, es decir, que para llegar a su verdad no se necesita de una mediación sensible, pero sí es necesaria una demostración (de hecho, da una demostración de este juicio[30]) (Viñuela, 2010). Así, Frege relacionará esta propuesta leibniziana con la naturaleza analítica de los juicios aritméticos. De hecho, llegará a concluir: "las leyes de la aritmética son juicios analíticos y consecuentemente a priori. La aritmética, entonces, se convierte simplemente en un desarrollo de la lógica, y toda proposición aritmética una ley lógica" (Frege, 1960, pág.

[30] Frege puntualizará esta demostración, para profundizar en esta cuestión proponemos (Viñuela, 2010).

99). Por tanto, al contrario que Kant, pensará que los juicios aritméticos son juicios analíticos.

Así, la escuela logicista[31] seguirá las bases propuestas primero por Leibniz y formalizadas por Frege. Podemos entender que esta postura tuviera, en el s. XX, tantos adeptos, ya que el descubrimiento de las geometrías no euclidianas suscitó una gran conmoción. La geometría euclidiana, que había sido el modelo de teoría rigurosa por excelencia, desvelaba sus grietas; y la aritmética, que en numerosos casos había recurrido a la geometría para demostrar sus teoremas, debía encontrar otras bases para poder salvarse. De esta manera, la cuestión de los fundamentos de la matemática y la rigurosidad de la disciplina se volvieron cuestiones apremiantes (Frege, 1960, pág. 2). La idea de hacer completamente rigurosa la lógica y derivar de ella la matemática parecía una magnífica solución. Aunque Poincaré criticará esta concepción y contribuirá a que el debate de los fundamentos siga siendo una cuestión en boga.

4.3 DEBATE ENTRE COUTURAT Y POINCARÉ

Como podemos ver, la diferencia entre el pensamiento kantiano y el logicista, acerca de la naturaleza de la aritmética, es radical. Mientras que los logicistas piensan que los juicios aritméticos son analíticos, Kant piensa que son sintéticos y a priori. Veremos cómo tratan este debate un contemporáneo de Poincaré, Couturat, y él mismo.

Couturat, logicista francés, en su obra *Les Principes des mathématiques* (1905) comenta el debate decantándose claramente por la posición de Frege. Incluso, en un apéndice[32] de este libro, trata en profundidad la filosofía matemática kantiana discutiendo, como Frege, el ejemplo de 5+7=12. Couturat defiende que "el concepto, no de '7 y 5', pero de '7+5', de cualquier manera que lo formemos, contiene, de hecho, y por definición el concepto de 12, incluso diríamos que es idéntico[33]" (Couturat, 1905, pág. 263). Por tanto, piensa que es un juicio analítico y despliega, debido a esto, una crítica muy dura en contra de la filosofía de la matemática kantiana. De hecho, en las conclusiones de este mismo apartado, llega a decir "los progresos de la lógica y de la

[31] Es importante señalar que la lógica a la que los logicistas pretenden reducir la matemática no es exactamente la lógica de ese momento, sino la teoría de conjuntos. Siendo esta mucho más amplia y permisiva que la primera.
[32] Publicado primero como artículo en la revista The Monist, en 1904, número dedicado al centenario de la muerte de Kant.
[33] "Le concept, non pas de '7 et 5', mais de '7+5', de quelque manière qu'on l'ait formé, contient actuellement et par définition le concept de 12, bien mieux, il lui est identique".

matemática en el s. XIX han incapacitado la teoría kantiana y han dado la razón a Leibniz[34]" (Couturat, 1905, pág. 303). Como podemos ver, es, desde luego, una cita osada, llegando a rozar la imprudencia.

A raíz de estas afirmaciones de Couturat, será por lo que Poincaré comience a escribir artículos más centrados en este tema. De hecho, en su artículo de 1905[35], *Las matemáticas y la lógica*, dirá que no está de acuerdo con esa "condena definitiva" (Poincaré, 1920, pág. 156) y dará sus razones. Entre ellas, se encuentra la imposibilidad de reducir el principio de inducción matemática a la lógica. Debemos de tener en cuenta que entender que la aritmética solo emite juicios analíticos es, en otras palabras, poder reducirla a la lógica, como ya dijo Frege. A colación de esto, y como pasaje introductorio al apartado siguiente, cabe citar el famoso enunciado de Poincaré "¿Las reglas de la perfecta lógica son toda la matemática? Sería como decir que todo el arte del jugador de ajedrez se reduce a las reglas del movimiento de las piezas[36]" (Poincaré, 1920, pág. 158).

5 INTUICIÓN

Como hemos visto en el apartado anterior, tanto para Kant como para Poincaré los juicios aritméticos son juicios sintéticos a priori. En concreto, para Kant, son a priori, no solo porque son juicios universales y necesarios, sino también porque entiende que los "números modelan el orden inherente a la intuición a priori del tiempo" (Folina, 1992, pág. 15). Como podemos ver, de esta intuición del tiempo se derivaría el concepto de orden, sucesión…, y sería una de las estructuras que posibilitan nuestra experiencia sensible. Por tanto, al igual que la geometría tiene que ver con la intuición a priori espacial, la aritmética se relaciona con la intuición a priori temporal. Es relevante hacer este apunte para ver si Poincaré hace esta misma relación a colación de la aritmética, o si, por otro lado, su visión de la intuición se diferencia de la kantiana.

5.1 DEFINICIÓN

En los escritos del matemático francés, la intuición es un concepto –aunque muy recurrente en su teoría– muy confuso, ya que no está debidamente definido. La obra que

[34] "Les progrès de la Logique et de la Mathématique au XIX siècle ont infirmé la théorie kantienne et donné raison à Leibniz".
[35] Publicado luego en Ciencia y método.
[36] "Les règles de la parfaite logique sont-elles toute la mathématique? Autant dire que tout l'art du joueur d'échecs se réduit aux règles de la marche des pièces".

más nos interesa para entender este concepto es *El valor de la ciencia*, donde da ejemplos de lo que él llama intuición y propone varios tipos. Sin embargo, en el uso posterior que hace de la noción, no explicita a qué tipo de intuición se refiere y se vuelve una idea imprecisa. Por lo que el análisis de lo que significa la intuición en Poincaré es complejo. A pesar de esto, autoras como J. Folina (1992) o K. Dunlop (2017) hacen un estudio muy interesante sobre el tema que intentaremos ilustrar aquí. Antes, veremos los ejemplos que el mismo Poincaré propone.

Comenzaremos retomando el ejemplo del ajedrez. En *El valor de la ciencia*, comenta que saber las reglas del ajedrez no implica saber jugar al ajedrez. Es decir:

> Comprender la partida, es totalmente otra cosa; es saber por qué el jugador adelanta tal pieza en vez de otra que podría haber movido sin violar las reglas del juego. Es percibir la razón íntima que hace de esta serie de movimientos sucesivos una suerte de todo organizado. (Poincaré, 1918, pág. 27)

Así, la intuición sería una facultad que permite "ver de lejos el objetivo" (Poincaré, 1918, pág. 27), "elegir la ruta adecuada" (Poincaré, 1918, pág. 31), percibir "de un vistazo el plan general de un edificio lógico" (Poincaré, 1918, pág. 33)… Si nos centramos en estos ejemplos, parece que la intuición está relacionada con comprender la unidad y orden de una serie de elementos[37] (que antes de pasar por la intuición parecían aislados) y elegir qué camino seguir de acuerdo con esa unidad (Dunlop, 2017).

5.2 RELACIÓN CON KANT

Cuando procedemos a buscar similitud con Kant para entender hasta qué punto le influyó en este tema, encontramos muchas dificultades. La primordial, es que ni siquiera los principales autores de bibliografía secundaria están de acuerdo acerca de este tema. A primera vista, la intuición poincareana no tiene una relación estrecha con la intuición kantiana. Debemos resaltar, como hace Goldfarb (1988), que Poincaré no asume el aparato de categorías kantiano y que hay diferencias sustanciales en ambas teorías[38]. Chareix (2015) defiende, incluso, que "como resultado de la síntesis (kantiana), las matemáticas no podrían ser asignadas a una deducción lógica. Esto es todo lo que Poincaré necesitaba para confrontar a Russell, Le Roy, e incluso, Hilbert" (pág. 4). Es decir, que Poincaré encontró en Kant una "manera conveniente de expresar su opinión"

[37] Poincaré cita como ejemplo la idea del continuo (Poincaré, 1918, pág. 28).
[38] Para profundizar en esta cuestión recomendamos: (Goldfarb, 1988).

(Chareix, 2015, pág. 4), y es exclusivamente eso lo que le interesaba de la filosofía kantiana.

Sin embargo, hay autores como J. Folina (1992) y T. Goldlove (2009) que piensan que la influencia kantiana en la obra de Poincaré es más acentuada de lo que se piensa. Indudablemente, Poincaré adopta la conceptualización kantiana de analítico-sintético y a priori-a posteriori; pero además, estos autores piensan que coinciden en más aspectos. En concreto, en su visión de la intuición como unión ordenada de términos aislados. Por ejemplo, Goldlove (2009) señala los parecidos que tiene esta idea con el concepto kantiano de tótum. Folina (1992) también desarrolla una extensa teoría donde relaciona la intuición poincareana con la intuición a priori temporal de Kant. Específicamente defiende que la inducción, que según Poincaré es el tipo más importante de intuición para la aritmética, es "esencialmente la suposición de que el futuro será (…) como el pasado (…). Pero no podríamos entender estos conceptos temporales (…) sin alguna intuición o experiencia del tiempo." (Folina, 1992, pág. 34). Bajo esta tesis, la relación entre el razonamiento por recurrencia y la intuición temporal es clara.

5.3 NECESIDAD DE LA INTUICIÓN

En *El valor de la ciencia*, Poincaré, a colación de la relación entre lógica e intuición en matemáticas, distingue dos "espíritus" matemáticos: el espíritu lógico (propio de los analistas) y el espíritu intuitivo (propio de los geómetras). Esta diferenciación servirá meramente para ilustrar la necesidad de ambas, lógica e intuición, para el hacer matemático. Adoptando un punto de vista histórico, el matemático francés defiende que la rigorización de la matemática es un movimiento reciente (propio de los analistas), y que anteriormente, entre los matemáticos eran más comunes los espíritus intuitivos. Este movimiento se dio porque "la intuición no puede darnos rigor" (Poincaré, 1918, pág. 17) y era necesario hacer de la matemática una disciplina rigurosa. Sin embargo, critica que esta novedosa inclinación hacia la lógica llegue a establecerla como única base de las matemáticas, como, de hecho, pretendían los logicistas.

Es desde este punto de vista desde donde Poincaré realiza su defensa de la necesidad de la intuición en las matemáticas. Según este autor, los analistas solo pueden demostrar que la teoría es rigurosa, pero no pueden inventar nada, ya que, Poincaré defiende que solo usan juicios analíticos que no son fecundos (profundizaremos acerca de esta cuestión en 6.1). Es la intuición la facultad que tiene la capacidad de crear. De hecho, comentará que:

> La lógica y la intuición tienen cada una su rol necesario. Ambas dos son indispensables. La lógica, que es la única que puede dar la certeza, es el instrumento de la demostración; la intuición es el instrumento de la invención. (Poincaré, 1918, pág. 29)

También se pregunta si es necesaria la intuición en la demostración, que a primera vista parece exclusivamente ámbito del analista: "el logicista descompone, por así decirlo, cada demostración en un número de operaciones elementares, cuando han examinado esas operaciones una a una y han constatado que todas son correctas, ¿habrán comprendido el verdadero sentido de la demostración?" (Poincaré, 1918, pág. 26). Responderá que no, porque no atisban la unidad de la demostración; recordemos el caso del ajedrez visto anteriormente. Lo ejemplifica de esta manera: "Un naturalista que solo ha estudiado al elefante en un microscopio, ¿conocerá suficientemente este animal?" (Poincaré, 1920, pág. 133). La respuesta es clara, este naturalista no conoce al elefante, solo las partes de éste, no conoce al elefante como un todo unido.

De esta manera, concluirá que, pese a que los logicistas hayan querido reducir la matemática a la lógica, es un movimiento imposible, ya que hay principios matemáticos que son propios de la intuición matemática (en este caso aritmética) e irreducibles a la lógica[39]. Daremos un ejemplo a continuación. Además, si se diese esta reducción, según Poincaré, extirparían el aspecto creativo de las matemáticas (como veremos en 6.1).

5.3.1 El caso de la inducción matemática

Para Poincaré, la intuición que nos guía en la aritmética es la intuición del número entero, que tiene que ver con el razonamiento por recurrencia, es decir, con el principio de inducción matemática. Examina la naturaleza del razonamiento por recurrencia en su obra *Ciencia e hipótesis* donde explica que este principio tiene la característica de que "condensa (…) en una fórmula única, una infinidad de silogismos" (Poincaré, 2017, pág. 33), nos permite, así, ordenar los elementos individuales en un "todo único condensado en una sola fórmula" (Dunlop, 2017, pág. 95). En otras palabras, es el razonamiento que nos permite generalizar. Pero ¿de dónde surge esta intuición?; ¿es analítica o necesitamos

[39] Por ejemplo, en las dos primeras propuestas que hace Russell para evitar las paradojas, Poincaré defenderá que necesitan una llamada a la intuición para poder ponerlas en práctica. Podemos verlo en (Poincaré, 1920, págs. 203-206).

de la experiencia? A esta pregunta Poincaré responde: “esta regla, inaccesible a la demostración analítica ni a la experiencia, es el verdadero tipo de juicio sintético a priori” (Poincaré, 2017, pág. 36). Por tanto, la inducción no podría ser ni analítica, ni a posteriori; así, tomando la terminología kantiana, la clasifica como un juicio sintético a priori.

Además, lejos de carecer de importancia, en *Ciencia y método*, como conclusión Poincaré escribe: “El verdadero razonamiento matemático es una verdadera inducción, (…), procede (..) de lo particular a lo general” (Poincaré, 1920, pág. 314). De esta manera, el razonamiento aritmético tendría como base fundamental la inducción; es decir, un juicio sintético a priori. Este es el ejemplo más interesante, a nuestro parecer, de principio irreducible a la lógica que Poincaré propone.

6 CUESTIONES PARA EL LOGICISMO

Además del debate que mantuvo con Couturat (expuesto en 4.3), nuestro matemático francés tomó partido intensamente en la cuestión acerca de la naturaleza de los juicios aritméticos. Para exponerlo, vamos a traer a colación una cita que nos servirá de guía:

> Quisiera volver sobre las cuestiones más importantes a mi entender; las reglas de la Logística, ¿han hecho sus pruebas de fecundidad e infalibilidad? ¿Es verdad que permiten demostrar el principio de inducción completo sin ninguna llamada a la intuición?[40]. (Poincaré, 1920, pág. 192)

Como podemos ver, la primera prueba que debe pasar el proyecto logicista se basa en la fecundidad y la infalibilidad de sus reglas, cuestiones que nuestro autor ve difícilmente conjugables con la postura logicista, lo discutiremos a continuación. La segunda prueba acerca del principio de inducción ha sido comentada en 5.3.1.

6.1 FECUNDIDAD

Siguiendo el razonamiento anterior acerca de la naturaleza de los juicios aritméticos, vemos que está intrínsecamente relacionado con el problema de la fecundidad. El razonamiento es el siguiente: si los juicios aritméticos son analíticos, serían tautológicos, es decir, el predicado estaría contenido en el sujeto, y por tanto, los

[40] “Je voudrais revenir sur les deux questions les plus importantes à mon sens; les règles de la Logistique ont-elles fait leurs preuves de fécondité et d’infalibilité? Est-il vrai qu’elles permettent de démontrer le principe d’induction complète sans aucun appel à l’intuition?”.

juicios aritméticos no aportarían ningún conocimiento, y el conocimiento aritmético no tendría posibilidad de extenderse, no sería fecundo[41]. Poincaré llega a plantear que, de esta manera, la aritmética se reduciría a una “inmensa tautología” (Poincaré, 1920, pág. 107), esto tiene sentido, ya que en base a lo que hemos explicado de los juicios analíticos, la aritmética no sería extensiva. A esta crítica, los logicistas responden que, pese a que las inferencias sí son tautológicas (de otra manera estarían contradiciendo su modelo de rigor), los axiomas no lo serían.

Pero Poincaré ya ve venir esta puntualización, y responde: aunque los axiomas no sean lógicos y solo lo sean las inferencias; todo se reduciría a la identidad con los axiomas y la matemática no conseguiría añadir nada nuevo (Poincaré, 1920) . Por tanto, la cuestión no se soluciona especificando que solo los axiomas son verdades lógicas (y tautológicas). De esto se deduce una pregunta fundamental para nuestro autor: ¿cómo los teoremas matemáticos pueden constituir una expansión de los axiomas si solo se usan inferencias que son puramente lógicas? Dicho así, la matemática no conseguiría aportar nada a los axiomas. Y sin embargo, él sí piensa que la matemática añade conocimiento, por tanto, la matemática no puede ser eso que los logicistas proponen (Detlefsen, 1992, pág. 352).

6.2 DEFINICIONES

Podemos ilustrar este debate, saliéndonos de la epistemología kantiana, analizando qué definiciones tiene a su disposición la lógica y si les servirían para cumplir el requisito de fecundidad. Poincaré clasifica las definiciones en tres tipos:

- Definiciones directas: Son las definiciones que nos permiten intercambiar el objeto por su definición, este método sería completamente analítico y no llevaría a contradicción. Sin embargo, sería una tautología. Si la lógica solo dispusiera de este tipo de definiciones, sería claramente estéril (Poincaré, 1917).

- Definiciones por postulados: Para definir el objeto matemático se basan en unos postulados. Para poder hacer uso de estos postulados se debería demostrar que no llevan a contradicción[42]. Se necesitaría “o bien admitir la ausencia de contradicción como una

[41] En base a esto, podemos entender por qué Detlefsen (1992) entiende este debate como una disputa de carácter epistemológico (356).

[42] Esto es problemático para los logicistas cuando pretenden que la inducción, como no puede ser una intuición como Poincaré sostiene, sea la definición disfrazada de número. No podría ser una definición directa porque implica un número infinito de proposiciones; sin embargo, tampoco puede ser una demostración por postulados porque debería mostrarse que no conlleva contradicción. Para hacer eso,

verdad intuitiva, como un axioma, (…); o bien es necesario construir una demostración en regla, (…)[43]" (Poincaré, 1917, págs. 152-153). Ahora bien, si la lógica contara con este tipo de definiciones, ¿dejaría de ser estéril? No dejaría de serlo, el argumento es el mismo que hemos dado anteriormente cuando los logicistas puntualizaban que las inferencias son tautológicas pero los axiomas no. Todo quedaría reducido a estos postulados que, en el mejor de los casos, se ha demostrado que no llevan a contradicción. La lógica seguiría siendo estéril (Poincaré, 1917, pág. 153).

Cabe señalar que la tesis poincareana de que los axiomas no son creadores, o al menos, no lo son lo suficiente, es una tesis difícil de sostener. Como ejemplo, vamos a citar el famoso axioma euclidiano de las paralelas; históricamente se intentó demostrar que este axioma se podría deducir de los demás axiomas de la teoría de Euclides. Sin embargo, nunca lo conseguían; hasta que procediendo por reducción al absurdo, se llegó a la conclusión de que su negación no lleva a contradicción. Es decir, el axioma de las paralelas es independiente de los demás; por lo que abre las puertas a otro tipo de geometrías que no lo contengan. De ahí surgieron las geometrías no euclidianas. Como podemos ver, es un simple axioma, sin embargo, ha demostrado ser enormemente fecundo; hasta el punto de ampliar la concepción que se tenía de geometría. Podemos recordar aquí la famosa cita del matemático húngaro, Bolyai, cuando descubrió la independencia de este postulado: "He creado un mundo nuevo y diferente de la nada". Como vemos, esta nada a la que se refiere, se basa en negar un axioma e incluso sustituirlo por otro. Por lo tanto, la idea de Poincaré de la impotencia creadora de los axiomas cabe ponerla en tela de juicio.

- Poincaré habla de un tercer tipo de definición que es una categoría especial dentro de las definiciones por postulados. Este tipo de definiciones tiene como particularidad que "el postulado es aquí una relación entre el objeto a definir y todos los individuos de un género en el que el objeto a definir se supone que forma parte[44]" (Poincaré, 1917, pág. 154). El problema de este tipo de definiciones es que, según nuestro matemático, caerían en un círculo vicioso.

---

tendrían que disponer de la inducción, que es precisamente lo que pretenden definir, caerían en un círculo vicioso. Ver (Poincaré, 1920, pág. 159) y (Heinzmann, 1986).

[43] "Ou bien admettre l'absence de contradiction comme une vérité intuititive, comme un axiome, (…); ou bien il faut construire une démonstration en règle, (…)".

[44] "Le postulat est ici une relation entre l'objet à définir et tous les individus d'un genre dont l'objet à définir est supposé faire lui-même partie (…)".

Ignorando la crítica que se le puede hacer a la visión poincareana, su tesis radicaría en que solo haciendo uso de este tercer tipo de definiciones la lógica dejaría de ser estéril. Sin embargo, no todos los matemáticos las aceptaban, veremos sus razonamientos cuando tratemos el apartado del infinito actual. A continuación, volveremos al registro kantiano y veremos la relación entre fecundidad y rigor.

6.3 RIGOR

En consonancia con la postura anteriormente comentada, el matemático francés razonará que no todas las inferencias de las matemáticas tienen que ser analíticas, en otras palabras, no tienen que tener una naturaleza exclusivamente lógica, ya que "la lógica quedaría estéril, a menos que sea fecundada por la intuición" (Poincaré, 1920, pág. 211). Esta conclusión, que de primeras parece inofensiva, escandalizó a los logicistas por su relación directa con su concepción de rigor. De esta manera, si las inferencias no tienen por qué ser puramente lógicas, es decir, no son tautologías en las que la conclusión se derive directamente de la premisa, ¿cómo nos aseguramos de que sean rigurosas? El escándalo es comprensible, ya que, como hemos visto en los antecedentes, el impulso de los matemáticos durante la segunda mitad del s. XIX se basó en rigorizar las matemáticas, y es por eso por lo que se desarrolló la lógica formal. De esta manera, decir que las inferencias no tienen que ser lógicas significa negar el concepto de rigor de la lógica formal. Parece que, entonces, todos los esfuerzos por hacer de la matemática una ciencia fiable, rigurosa y desde la que se pueda construir sólidamente están siendo desestimados completamente y que se desea volver a la época anterior a la rigorización del s. XIX.

Este pensamiento parece coherente, sin embargo, cabe decir que el deseo de Poincaré no es que las matemáticas, y en concreto la aritmética, no sean rigurosas[45], de hecho, hemos visto en la cita anterior que el rigor forma parte de las preguntas fundamentales que les dirige a los logicistas. Entonces, ¿cómo logrará conciliar nuestro matemático fecundidad y rigor? Pensando en otra concepción de rigor diferente a la de la lógica moderna[46].

[45] De hecho cabe mencionar su famosa frase: "En matemáticas el rigor no lo es todo, pero sin él, no hay nada" (Poincaré, 1920, pág. 27).
[46] Para profundizar en este tema recomendamos: (Detlefsen, 1992) y (Kebaïli, 2014).

7 DEFINICIONES IMPREDICATIVAS

En este apartado vamos a retomar el tercer tipo de definiciones que Poincaré menciona (explicadas en la sección 6.2) y comentaremos por qué está en desacuerdo con su uso. Este tipo de definición[47] es la que, según nuestro autor, podría hacer que la lógica dejara de ser estéril, pero también es la que provoca círculos viciosos. Las llamará definiciones impredicativas y para comprender el rechazo que suscitan, veremos cómo se relacionan con la noción de infinito actual y de círculo vicioso.

7.1 INFINITO ACTUAL

Para entender las implicaciones que tendrá la aceptación de los logicistas del infinito actual[48] en la cuestión de la predicatividad, comentaremos la diferenciación que hace Poincaré en (1917) entre pragmatistas[49] y cantorianos. En concreto, hablaremos de las concepciones epistemológicas/filosóficas que defiende cada grupo.

En la última conferencia que dio en 1912, y que luego se recogerá en su obra póstuma (1917), diferencia dos tipos de pensamientos: por un lado estarían los pragmatistas y por otro, los cantorianos (Poincaré, 1917, pág. 143).

Los pragmatistas, según Poincaré, son idealistas porque defienden que "un objeto solo existe en tanto es pensado, y que no sabríamos concebir un objeto pensado independientemente de un sujeto pensante" (Poincaré, 1917, págs. 158-159). Por tanto, los objetos matemáticos no tienen existencia fuera del pensamiento, es decir, se limitan a éste. Esto les hará ser más restrictivos con la aceptación de determinados objetos matemáticos. Por ejemplo, y a colación de la naturaleza del infinito su postura es clara: si "un sujeto pensante es un hombre, u otra cosa que se parezca a un hombre, que es por consecuencia un ser finito, el infinito no puede tener otro sentido que la posibilidad de crear tantos objetos finitos como queramos" (Poincaré, 1917, pág. 159). Podemos observar que, para los pragmatistas, el infinito solo existe como infinito potencial.

Por otro lado, los cantorianos piensan que los "objetos (matemáticos) existen, (…), con independencia de toda humanidad o divinidad que pueda pensarlos o hablar de ellos"

[47] También se le llaman definiciones autoreferenciales.
[48] Hemos comentado la diferencia entre infinito actual y potencial en el apartado 2.2.
[49] Lo que Poincaré entiende por 'pragmatistas' en este trabajo es sui generis, y no entraremos en aclaraciones. Lo importante es que se establece una posición con la que él concuerda, de tipo semi intuicionista.

(Poincaré, 1917, pág. 147). Esto hará que sean más flexibles a la hora de aceptar determinadas cuestiones matemáticas (Poincaré, 1917). Con respecto al infinito, dice Poincaré: “su infinito no es ya un devenir, porque preexiste al espíritu que lo descubre; (…), es necesario, entonces, que crean en el infinito actual” (Poincaré, 1917, pág. 160). El infinito de los cantorianos deja de ser potencial para convertirse en actual, ya que es un infinito que no va creciendo, sino que está dado.

El matemático francés concuerda con el pensamiento semi-intuicionista y, por eso, rechaza el infinito actual. De hecho, defiende que aceptarlo es lo que nos lleva, en último término, a las paradojas de la teoría de conjuntos (Poincaré, 1920, pág. 212). Nos parece importante recordar lo que significa, a nivel de definición de conjuntos, el rechazo del infinito actual. Si Poincaré solo acepta el infinito potencial, un conjunto infinito no será, para él, un conjunto ya dado, sino que será un conjunto inacabado, al que “se le puede añadir elementos sin cesar” (Poincaré, 1917, pág. 105).

7.2 CÍRCULO VICIOSO

Pero ¿qué relación hay entre la naturaleza del infinito y las definiciones impredicativas que nos llevan a círculos viciosos? La reflexión, que nuestro autor hará, se basa en el concepto de clasificación. La lógica funciona a base de clasificaciones, y el requisito que deben cumplir todas estas clasificaciones es que sean inmutables; es decir, que no cambien mientras razonamos sobre ellas (Poincaré, 1917, pág. 102). Si una clasificación cambiara constantemente, no podríamos trabajar con ella; por ejemplo, no sabríamos si la clasificación que usamos al principio de nuestro teorema seguirá siendo la misma al final de nuestro teorema, y este problema de identidad será crucial si queremos proceder de manera rigurosa. Cuando nuestro autor habla de clasificación, también se está refiriendo a las definiciones, ya que: “Toda definición es, en efecto, una clasificación. Separa los objetos que satisfacen a la definición de los que no la satisfacen, y los distribuye en dos clases distintas” (Poincaré, 1917, pág. 108).

El requisito de inmutabilidad cuando se habla de conjuntos finitos es sencillo, pero ¿qué pasará cuando esos conjuntos sean infinitos?, ¿seguirán cumpliendo esta exigencia?

Dependerá de una cuestión fundamental: ¿cambia la definición del conjunto infinito si se le añaden nuevos elementos? En el caso de que la respuesta sea negativa, se tratará de una definición inmutable y, por tanto, predicativa; si la respuesta es afirmativa, la definición se verá alterada y estaremos ante una definición impredicativa. Veremos con más profundidad esta cuestión.

Las definiciones predicativas serían aquellas en las que la definición del conjunto no cambie a pesar de su agrandamiento. Es decir, la definición de este conjunto debe referirse solo a entidades que están definidas independientemente de ese conjunto. Poincaré da un ejemplo acerca de clasificaciones de conjuntos infinitos que cumplen la condición de predicatividad: la clasificación del conjunto de los enteros entre los menores de 10 y los mayores de 10. Aquí podemos ver que, a pesar de que se le añadan números al conjunto de los enteros, siempre podrán clasificarse en base a la característica nombrada. No tendríamos ningún problema con esta clasificación porque no le afectaría el constante agrandamiento del conjunto, sería una clasificación inmutable. (Poincaré, 1917, págs. 105-106). Pasaría lo mismo con todas las definiciones predicativas.

Por otro lado, las definiciones impredicativas serán definiciones que no cumplen el requisito de inmutabilidad. Es más fácil que este hecho se dé en conjuntos infinitos, ya que cambian conforme el conjunto se extiende (Poincaré, 1917, pág. 104). Nos resultará sencillo entender que esta circunstancia solo se puede dar en el caso de que la definición del conjunto dependa de los elementos que lo conforman, de otra manera, la definición del conjunto seguiría estática, a pesar de la entrada de nuevos elementos. ¿Se da esta casuística en algún tipo de definición? En efecto, se da en el tercer tipo de definición que Poincaré cita: aquella que el conjunto que define depende de la definición de todos los objetos que lo integran, y algunos de esos objetos no pueden definirse sin recurrir a la noción misma del conjunto que se pretende definir (McLarty, 1997, pág. 106).

Vamos a intentar ilustrar, en palabras del matemático francés, por qué este tipo de definiciones serían cambiantes. Si a un conjunto infinito X, que se defina mediante el tipo de definición anteriormente nombrada, se le añade un elemento nuevo, este conjunto se modificará, y al modificarse, cambiará la relación entre los elementos pertenecientes al conjunto y el propio conjunto[50]. Incluso, podría darse el caso en el que los elementos pertenecientes al conjunto deban de dejar de formar parte de él (Poincaré, 1917, pág. 105). De esta manera, la definición de los objetos de ese conjunto haría referencia a ese mismo conjunto, y la definición del conjunto dependería de la definición de los objetos que le

[50] Los mejores ejemplos de este tipo de definición se encuentran al tratar de los números reales, por ejemplo cuando se definen mediante las ‘cortaduras’ de Dedekind. No entraremos en detalles, ya que el asunto es bastante técnico.

pertenecen. En pocas palabras, “una definición sería impredicativa cuando introduce un elemento refiriéndose a la totalidad que ya contiene ese elemento” (Ferreirós, 2008, pág. 4). Como podemos ver, el conjunto no se puede definir sin referirse a los objetos, pero los objetos tampoco se pueden definir sin referirse al conjunto. Estas definiciones, caerían en un círculo vicioso (Poincaré, 1920, pág. 207).

7.3 CONSECUENCIAS

Para Poincaré las definiciones impredicativas, las únicas que podrían hacer que la lógica fuera fecunda, deberán ser rechazadas por caer en un círculo vicioso[51]. Cabe citar su famosa frase: “sus definiciones son impredicativas y presentan esta especie de círculo vicioso escondido (…). En estas condiciones, *la lógica deja de ser estéril, ahora engendra antinomias*[52]” (Poincaré, 1920, pág. 211). Como vemos, en el origen de las paradojas, a las que ha llegado la teoría de conjuntos, se encuentran las definiciones impredicativas. De hecho, circunscribirse a definiciones y clasificaciones predicativas será una parte de la solución que Poincaré plantea para no caer en paradojas (Poincaré, 1917, pág. 139).

Esta reflexión influirá a numerosos matemáticos del momento. El ejemplo más cercano será Russell, que debido a esta cuestión fundará su teoría ramificada de tipos. Pero también, el alumno de Hilbert, Weyl, seguirá este razonamiento y terminará por formalizarlo defendiendo la restricción predicativa y fundando, así, lo que se llamará el predicativismo[53]. También cabe citar la influencia en matemáticos con menor proyección como Leon Chwisteck (Kahle, 2014, pág. 93).

Terminaremos este apartado con una reflexión acerca del infinito actual para Poincaré. Según él, es “la creencia en la existencia del infinito actual lo que ha dado nacimiento a esas definiciones impredicativas” (Poincaré, 1920, pág. 212), y en último término, a las paradojas de la teoría de conjuntos: “*no hay un infinito actual*, los Cantorianos lo han olvidado, y han caído en la contradicción” (Poincaré, 1920, pág. 212). Esto nos podría llevar a pensar que rechaza la existencia de conjuntos infinitos, o al

[51] Esto es especialmente problemático, ya que, como responderá Zermelo, la aritmética contiene numerosas definiciones impredicativas, no solo la teoría de conjuntos. Habría que rechazar, entonces, una parte importante de la aritmética.
[52] Cursiva en la obra original.
[53] Véase H. Weyl, *Das Kontinuum* (Leipzig, Veit, 1918) y el capítulo correspondiente en S. Shapiro (ed.), *The Oxford Handbook of philosophy of mathematics and logic* (Oxford University Press; 2005).

menos, que rechaza las proposiciones sobre el infinito en la medida en que no sean "la traducción, el enunciado abreviado de proposiciones sobre lo finito" (Poincaré, 1917, págs. 138-139), pero de hecho, "en su trabajo acerca de dinámica topológica implica explícitamente conjuntos infinitos de curvas, cada curva siendo un subconjunto infinito de un continuo" (McLarty, 1997, pág. 106). ¿Es esto contradictorio?

Es complejo responder a esta pregunta, ya que, como advertimos en la introducción, Poincaré no es un autor sistemático y en algunos casos, como por ejemplo este, es realmente confuso. Esto se debe, en parte, a que sus ideas fueron evolucionando conforme pasaba el tiempo. De hecho, a veces, algunas ideas de sus obras como *Ciencia y método* no concuerdan con algunas ideas que sostiene en *Últimos pensamientos*, cabe resaltar que esta última se publicó póstumamente y sin su supervisión. Además, precisamente el capítulo donde habla del tema que estamos tratando es la transcripción de una conferencia que dio antes de morir, y no está tan sistematizada como un artículo. Este es uno de los ejemplos en el que parece que las dos obras anteriormente citadas proponen opiniones contradictorias.

A pesar de esto, vamos a intentar dar una respuesta. Siguiendo la tesis de McLarty (1997), este punto no albergaría contradicción; Poincaré usa estos conjuntos porque no tiene problema con aceptar su existencia, su rechazo se basa en "el pensamiento de que todos los miembros de un conjunto infinito puedan ser vistos como dados independientemente de su definición específica" (McLarty, 1997, pág. 106). De hecho, hablando acerca de la teoría de los cardinales de Cantor, Poincaré comenta: "conviene, entonces, modificar la definición de los números cardinales especificando que la ley de correspondencia, sobre la cual la definición se funda, debe ser predicativa" (Poincaré, 1917, pág. 111). Parece que no niega la existencia de los conjuntos no enumerables, o de los cardinales mayores que $\aleph_0$, lo que niega es que "la teoría de las cardinalidades infinitas esté bien definida" (McLarty, 1997, pág. 107). A este respecto, podemos ver que su negación del infinito actual es específicamente a la definición de estos conjuntos y de sus miembros. El requisito que Poincaré está exigiendo es que no basta con aceptar la existencia de este tipo de conjuntos como "dados", sino que hace falta una definición específica[54].

[54] En un número finito de palabras (Poincaré, 1917, pág. 107).

Podríamos preguntarnos, teniendo en cuenta las tesis mencionadas en 7.1, si estos conjuntos existen independientemente de su definición; es decir, del acto de definir. ¿Podrían estos conjuntos existir sin que el matemático los hubiera definido aún? ¿serían entonces objetos matemáticos que perviven con independencia del sujeto pensante? Esta es la tesis que Poincaré le adjudica a los cantorianos. Si estuviera en contra de ella, sería fácil pensar que rechaza la existencia de estos objetos si no han sido definidos correctamente. Aunque debemos recordar que no dice que, por ejemplo, las tesis de Cantor no "existan", sino que anima a que revise sus definiciones y acepte la restricción predicativista. Además, su concepto de existencia matemática, al contrario que para muchos intuicionistas[55], se basa en la no contradicción (Poincaré, 1920, pág. 162). Como podemos ver, la obra citada es *Ciencia y Método*, ¿cambió su perspectiva acerca de este punto en su última obra? ¿entendía, al final de su vida, que la existencia en matemáticas es algo más que la consistencia? Si se identificase plenamente con las tesis que adjudica a los semi-intuicionistas (nombradas en 7.1), la respuesta sería, sin duda, afirmativa. Ya que defienden que "todos los objetos matemáticos (más allá de los números naturales) tienen que ser introducidos por unas definiciones explícitas, y se entienden como dados por esas definiciones"[56] (Ferreirós, 2008, pág. 5). Cabría pensar que se podrían conjugar estas dos ideas si entendiese que para cumplir el requisito de no llevar a contradicción es necesario que el conjunto esté bien definido. En cualquier caso, no podremos saberlo.

Otra hipótesis que podríamos plantearnos es que fuera compaginable no rechazar de lleno la existencia de la teoría cantoriana y plantear que está en proceso de definirse correctamente. Esto tendría sentido entendiendo la postura que Poincaré defiende: las teorías dependen de los sujetos que las construyen y, por tanto, se trata de un proceso de constante revisión en el que influye el recorrido histórico. De hecho, podemos observar como en su caso también se da. Aun así, podemos reconocer la vital importancia que tienen para Poincaré las definiciones, esto hace que podamos entender por qué fue uno de los padres del predicativismo.

8 CONCLUSIONES

Como hemos visto, los logicistas y Poincaré tienen una concepción muy diferente de la aritmética, incluso podríamos decir que son visiones irreconciliables. De hecho, el

[55] Que defienden la tesis constructivista.
[56] Esta será la tesis de Weyl.

mismo matemático francés lo afirma cuando termina concluyendo que los semi-intuicionistas y los logicistas “no se entienden porque no hablan la misma lengua, y esas lenguas no se pueden aprender” (Poincaré, 1917, pág. 161). Podemos ilustrar las diferentes perspectivas de la siguiente manera:

Para Poincaré, la historia de las matemáticas es muy relevante para comprender la disciplina, de hecho, para teorizar sobre el futuro de las matemáticas, estudia la historia de ésta y su estado presente (Poincaré, 1920, pág. 19). Esto es muy revelador, ya que nos indica hacia qué dirección tiene pensado ir este autor. Así, las matemáticas dependen de cómo está conformado nuestro espíritu y si, por ejemplo, la teoría de conjuntos es comprensible solo para alguien que ya sabe aritmética, quiere decir que la teoría de conjuntos presupone la aritmética (Goldfarb, 1988). De hecho, en *Ciencia y método* comenta: “la ciencia matemática debe reflexionar sobre ella misma y esto es útil porque cuando reflexiona sobre ella misma, reflexiona sobre el espíritu humano que la ha creado” (Poincaré, 1920, pág. 31). Poincaré nunca sale de la imagen de la persona haciendo matemáticas; no hay matemáticas sin personas que la crean. Es también significativo las numerosas ocasiones en las que el matemático francés comenta la enseñanza de la matemática. Siguiendo estas ideas, parecería que le da importancia a analizar cómo los jóvenes aprenden matemáticas porque ahí también se muestra cómo asimila nuestro espíritu las matemáticas; esto nos da claves para entender cómo se forma el razonamiento matemático, los orígenes de este, que es lo que, finalmente, parece interesarle a Poincaré.

Por otro lado, Frege piensa que las ideas y el cambio de ideas que ocurren durante la historia de las matemáticas no son relevantes para la fundamentación de la aritmética, ya que hay que diferenciar las condiciones en las que una persona llega a entender una proposición y la base racional de esa proposición[57]. Así, cómo una persona aprende matemáticas o cómo se ha desarrollado la historia de las matemáticas carece totalmente de relevancia a la hora de fundamentar la aritmética. La lógica es independiente de nuestra experiencia, y cuando hacemos lógica seguramente se deba a que podemos contar, pero eso no significa que la lógica presuponga el contar. Podemos ver como, bajo este paradigma, conocer cómo se forma históricamente el razonamiento matemático no tiene importancia.

[57] Me parece importante explicitar que esta diferenciación ya la hace Kant y Frege le sigue. Podemos ver otra diferencia entre la teoría kantiana y la poincareana.

Debido a estas diferencias, a Poincaré se le acusa de tener una concepción psicologista. El mismo Russell se lo reprochará, a lo que el matemático francés responderá que “no hay epistemología ni lógica independientes de la psicología” (Poincaré, 1917, pág. 139). Como podemos ver, la discrepancia entre las perspectivas es irreconciliable (Goldfarb, 1988).

9 BIBLIOGRAFÍA

Brower, L. (1983). Intuitionism and formalism. En P. Benacerraf, & H. Putnam (Edits.), *Philosophy of mathematics. Selected readings* (págs. 77-89). USA: Cambridge University Press.

Carnap, R. (1983). The logicist foundation of mathematics. En P. Benacerraf, & H. Putnam, *Philosophy of mathematics. Selected readings.* USA: Cambridge University Press.

Chareix, F. (2015). Annual International Conference on Philosophy: Yesterday, Today & Tomorrow. *Inventing, Demonstrating: Poincaré reading Kant on mathematics.* Global science & Technology forum (GSTF).

Couturat, L. (1905). *Les principes des mathématiques.* París: F. Alcan.

Detlefsen, M. (1992). Poincaré against the logicians. *Synthese 90,* 349-378.

Dunlop, K. (2017). Poincaré on the foundations of arithmetics and geometry. Part 2: Intuición y unidad en matemáticas. *HOPOS: The Journal of the International Society for the History of Philosophy of Science, 7,* 88-107.

Ferreirós, J. (2001). The Road to Modern Logic-An Interpretation. (A. f. Logic, Ed.) *The Bulletin of Symbolic Logic, 7*(4), 441-484.

Ferreirós, J. (2008). The Crisis in the Foundations of Mathematics. *Princeton Companion to Mathematics*.

Folina, J. (1992). *Poincaré and the philosophy of mathematics.* USA: Palgrave Macmillan.

Frege, G. (1960). *The foundations of arithmetic: A logic-mathematical enquiry into the concept of number.* New York: Harper torchbooks.

Giaquinto, M. (1983). Hilbert's Philosophy of Mathematics. *The British Journal for the Philosophy of Science, 34*(2), 119-132.

Giaquinto, M. (2002). *The search for certainty: A philosophical account of foundations of mathematics.* New York: Oxford University Press.

Ginoux, J.-M., & Gerini, C. (2014). *Henri Poincaré. A biography through the daily papers.* Singapore: World Scientific Publishing Co.

Goldfarb, W. (1988). Poincaré against the logicians. *History and philosophy of modern mathematics, 11*.

Gray, J., & G. Gray, E. (2012). *Henri Poincaré. A scientific biography.* USA: Princeton University Press.

Heinzmann, G. (1986). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano : textes de la discussion (1906-1912).* París: Albert Blanchard.

Heyting, A. (1983). The intuitionist foundations of mathematics. En H. Putnam , & P. Benacerraf (Edits.), *Philosophy of mathematics. Seleceted readings* (págs. 52-61). USA: Cambridge University Press.

Hilbert, D. (1983). On the infinite. En P. Benacerraf, & H. Putnam (Edits.), *Philosophy of mathematics. Selected readings* (págs. 183-201). USA: Cambridge University Press.

Kahle, R. (2014). Poincaré in Göttingen. En M. de Paz, & R. DiSalle (Edits.), *Poincaré, Philosopher of Science. Problems and Perspectives* (págs. 83-99). Springer.

Kant, I. (2014). *Crítica de la razón pura.* Madrid: Gredos.

Kebaïli, R. (2014). La rigueur mathématique chez Henri Poincaré. *Philosophia Scientiæ, 18-1*, 27-44.

Kline, M. (1982). *Mathematics: The loss of certainty.* New York, USA: Oxford University Press.

Lorenzo, J. d. (1973). *La filosofía de la matemática de Jules Henri Poincaré.* Madrid: Tecnos.

McLarty, C. (1997). Poincaré: Mathematics & Logic & Intuition. *Philosophia Mathematica*, *5*(2), 97-115.

Mooij, J. J. (1966). *La philosophie des mathématiques de Henri Poincaré.* París: Gauthier-Villars.

Neumann, J. V. (1983). The formalist foundations of mathematics. En P. Benacerraf, & H. Putnam (Edits.), *Philosophy of mathematics. Selected readings* (págs. 61-65). USA: Cambridge University Press.

Nye, M. J. (1979). The Boutroux Circle and Poincaré's Conventionalism. *Journal of the History of Ideas, 40*(1), 107-120.

Oliveira, A. J. (2014). Poincaré and the Principles of the Calculus. En M. de Paz, & R. DiSalle (Edits.), *Poincaré, Philosopher of Science. Problems and Perspectives* (págs. 101-111). Springer.

Poincaré, H. (1917). *Dernières pensées.* Paris: Flammarion.

Poincaré, H. (1918). *La valeur de la science.* Paris: Flammarion.

Poincaré, H. (1920). *Science et méthode.* Paris: Flammarion.

Poincaré, H. (2017). *La science et l'hypothèse.* Flammarion.

Putnam, H., & Benacerraf, P. (1983). Introduction. En H. Putnam, & P. Benacerraf (Edits.), *Philosophy of mathematics. Selected readings* (págs. 1-37). USA: Cambridge University Press.

Quine, W. V. (1966). *The way of paradox and other essays.* USA: Random House.

Rollet, L. (1999). *Henri Poincaré. Des Mathématiques à la Philosophie. Étude du parcours intellectuel, social et politique d'un mathématicien au début du siècle* [Unpublished doctoral dissertation]. Université Nancy 2.

Rollet, L. (2014). Portrait of Henri Poincaré as a Young Philosopher: The Formative Years (1860–1873). En M. de Paz, & R. DiSalle (Edits.), *Poincaré, Philosopher of Science Problems and Perspectives* (págs. 3-23). Springer.

Terry F. Godlove, J. (2009). Kant, and the Scope of Mathematical Intuition. *The Review of Metaphysics, 62*(4), 779-801.

Verhulst, F. (2012). *Henri Poincaré. An impatient genious.* Springer: Nueva York.

Viñuela, P. A. (2010). Demostración leibniziana de las fórmulas aritméticas. *Diánoia, LV*(64), 175-200.

VVAA. (2014). *Poincaré, Philosopher of Science: Problems and Perspectives.* (M. De Paz, & R. DiSalle, Edits.) Springer.