



Departamento de Matemática Aplicada I

Un estudio sobre la homología persistente con coeficientes enteros

Javier Perera Lago

Dirigido por
Rocío González Díaz

Máster Universitario en
Matemáticas

2020-2021

Resumen

La homología persistente es una técnica que se usa para analizar la evolución de una cierta propiedad algebraica, la homología, sobre un espacio topológico que se construye paso a paso. Los resultados de la homología persistente varían según la elección de coeficientes que usemos para su cálculo. La homología persistente con coeficientes en un cuerpo ha sido ampliamente estudiada y aplicada gracias a su comodidad para el cálculo, su estabilidad y la existencia de invariantes sencillos y completos para clasificarla. Por contra, la homología persistente con coeficientes enteros presenta más dificultades para su cálculo y clasificación, y apenas ha sido estudiada. En este trabajo presentamos los grupos BD , un tipo de estructuras algebraicas diseñadas para el estudio de la homología persistente con coeficientes enteros y explicamos sus propiedades más generales. Además planteamos y probamos una serie de resultados totalmente originales que nos permiten ver que estos grupos BD generalizan adecuadamente los invariantes ya conocidos para la homología persistente con coeficientes en un cuerpo, y definimos un marco más general donde iniciamos el camino para probar la estabilidad de estos grupos frente a pequeñas perturbaciones.

Abstract

Persistent homology is a technique used to analyze the evolution of a certain algebraic property, the homology, of a topological space that is built step by step. The results of the persistent homology vary according to the choice of coefficients used for its calculation. Persistent homology with coefficients over a field has been widely studied and applied thanks to its easy computation, its stability and the existence of easy and complete invariants for its classification. By contrast, persistent homology over integer coefficients is harder to calculate and classify and it has been barely studied. In this work we introduce the BD groups, a sort of algebraic structures designed for the study of persistent homology over integer coefficients and we explain its more general properties. Also, we present and prove some totally original results showing that these BD groups are a good generalization of the already known invariants for the persistent homology over field coefficients, and we define a more general framework where we start the path to prove the stability of these groups in the presence of small perturbations.

Índice general

0. Introducción	7
1. Nociones algebraicas previas	9
2. Homología Persistente	17
2.1. Homología	17
2.1.1. Complejos de cadenas	17
2.1.2. Homología de un complejo de cadenas	21
2.1.3. Computación de la homología	21
2.2. Homología Persistente	22
2.2.1. Complejos de cadenas filtrados y módulos de persistencia	23
2.2.2. Correspondencia entre módulos de persistencia y módulos graduados	25
2.2.3. Homología persistente con coeficientes en un cuerpo	26
2.2.4. Problemas de clasificación para módulos con coeficientes enteros	30
2.2.5. Cálculo de grupos persistentes	31
2.3. Ejemplos para el cálculo de la homología persistente	32
2.3.1. Botella de Klein	32
2.3.2. Sombrero bobo	33
2.3.3. Complejo 4-2-1	35
3. Grupos BD	37
3.1. Definición y propiedades de los grupos BD	37
3.1.1. Grupos BD para intervalos finitos	38
3.1.2. Grupos BD con intervalos infinitos	42
3.1.3. Códigos de barras enteros	43
3.2. Computación de los grupos BD	43
3.3. Grupos V y su relación con los grupos BD	46
3.3.1. Definición de los grupos $V_n^{I,k}$	47
3.3.2. Relación entre $BD_n^{I,k}$ y $V_n^{I,k}$ con coeficientes en un cuerpo	52
3.3.3. Relación entre $BD_n^{I,k}$ y $V_n^{I,k}$ con coeficientes enteros	53
3.4. Ejemplos de cálculo de los grupos BD	54

3.4.1. Botella de Klein	54
3.4.2. Sombrero bobo	58
3.4.3. Complejo 4-2-1	61
4. Estabilidad de los grupos BD	65
4.1. Grupos BD con parámetro general	65
4.2. Estabilidad frente a pequeñas perturbaciones	70
5. Conclusiones y trabajo futuro	75

Capítulo 0

Introducción

La homología es una herramienta de la topología algebraica que trata de clasificar y diferenciar espacios topológicos mediante la asignación de una sucesión de estructuras algebraicas. El cálculo de la homología depende de unos coeficientes pertenecientes a un cierto conjunto (con estructura de anillo), y según el conjunto de coeficientes que escojamos, estas estructuras pueden ser grupos abelianos, módulos o espacios vectoriales. Informalmente, estas estructuras tratan de resumir cuántos “agujeros” tiene ese espacio topológico en cada dimensión posible. El conjunto de coeficientes que mejor información da sobre estos “agujeros” y que dio inicio a la teoría de homología fue el de los números enteros \mathbb{Z} . Esta teoría se ha ido desarrollando y refinando a lo largo de los siglos XIX y XX hasta que a finales de este siglo se llegó al concepto de homología persistente.

La homología persistente es una herramienta que no analiza un espacio topológico, sino toda una sucesión creciente de espacios. Esto es particularmente útil para analizar espacios topológicos que se van construyendo por partes. Así, la homología persistente integra en un solo objeto algebraico la homología de todos los espacios de esta sucesión y deja un registro de la evolución de la misma. Lamentablemente, para que la homología persistente sea fácil de calcular e interpretar hay que imponer una cierta condición sobre el conjunto de coeficientes. Esta condición (que el conjunto de coeficientes tenga estructura de cuerpo) hace que en cada espacio de la sucesión la homología dé una información menos interesante que la que tendríamos usando coeficientes en \mathbb{Z} , que no es un cuerpo. Bajo esta condición, la homología persistente se puede clasificar completamente mediante unos invariantes computables y estables como son los códigos de barras y los diagramas de persistencia, mientras que esto no se puede hacer usando coeficientes enteros.

Nuestro objetivo en este trabajo será el de estudiar la homología persistente con coeficientes enteros de una forma alternativa, usando invariantes computables que aunque no den una clasificación completa sean una generalización adecuada de los invariantes ya conocidos en el caso con coeficientes en un cuerpo y que sean estables frente a pequeños cambios en la sucesión de espacios topológicos.

En el capítulo 1 de esta memoria presentaremos los conceptos algebraicos y los resultados que servirán de base para la teoría de la homología y la homología persistente. En el capítulo 2 explicaremos los conceptos más elementales de la homología y la homología persistente. Después, explicaremos las buenas propiedades de la homología persistente cuando usamos coeficientes en un cuerpo y veremos qué problemas plantea el uso de coeficientes enteros. En el capítulo 3 presentaremos los grupos BD , introducidos en el artículo [21], y que están diseñados expresamente para el estudio de la homología persistente con coeficientes enteros. Basándonos también en este artículo, veremos cómo se pueden calcular computacionalmente usando la

teoría de secuencias espectrales. Después haremos un estudio totalmente original para comprobar que, si usamos coeficientes en un cuerpo, los grupos BD nos dan la misma información que los códigos de barras antes citados. Con esto habremos probado que al usar coeficientes en un cuerpo los grupos BD son un invariante completo y por tanto generalizan de forma adecuada los conceptos clásicos de la homología persistente. Al final del capítulo calcularemos los grupos BD sobre tres ejemplos de espacios topológicos. En el capítulo 4 haremos un estudio también original para comprobar cómo cambian los grupos BD cuando inducimos pequeñas perturbaciones sobre la sucesión de espacios topológicos. La motivación de este estudio viene del artículo [8] y del libro [7], donde se estudia la homología persistente con coeficientes en un cuerpo y se llega a la conclusión de que pequeñas modificaciones en la sucesión de espacios topológicos inducen pequeños cambios en los códigos de barras y los diagramas de persistencia. Nuestro objetivo en este capítulo será por tanto encontrar resultados similares para los grupos BD con coeficientes enteros, viendo así que estos grupos tienen buenas propiedades de estabilidad y podrían ser usados para aplicaciones prácticas.

Capítulo 1

Nociones algebraicas previas

Toda la teoría de la homología y la homología persistente que veremos en próximos capítulos se apoya en el conocimiento de ciertas estructuras algebraicas y sus propiedades básicas, tales como grupos, anillos, cuerpos, módulos y espacios vectoriales. Por ello, empezamos la memoria con una breve introducción a los conceptos algebraicos que usaremos durante el resto del trabajo. El lector más familiarizado con estos términos puede pasar directamente al capítulo 2. Todas estas definiciones y sus ejemplos se pueden consultar en [10] y en [3].

Definición 1.1. *Un grupo abeliano es un conjunto no vacío G con una operación binaria $\star : G \times G \rightarrow G$ que satisface las siguientes propiedades:*

- \star es asociativa, es decir, $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ para cualesquiera $a, b, c \in G$.
- \star es conmutativa, es decir, $a \star b = b \star a$ para cualesquiera $a, b \in G$.
- Existe un elemento $e \in G$ llamado elemento neutro tal que $e \star a = a \star e = a$ para todo $a \in G$.
- Para cada $a \in G$ existe un elemento $a^{-1} \in G$, llamado inverso de a , tal que $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$.

Los conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} o \mathbb{R} con la suma en el lugar de la operación \star son ejemplos sencillos de grupos abelianos, donde el elemento neutro es el 0. La definición más general de grupo no contempla que \star sea conmutativa, pero nosotros vamos a suponer que esto siempre es así y por ello podemos llamar a los grupos abelianos simplemente grupos.

Definición 1.2. *Sea G un grupo. Un subconjunto $H \subset G$ se dice un subgrupo de G si es no vacío y dados $a, b \in H$ se tiene que $a^{-1} \in H$ y $a \star b \in H$.*

Por ejemplo dado $n \in \mathbb{Z}$, el conjunto $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ formado por los múltiplos de n es un subgrupo de \mathbb{Z} con la operación suma. A partir de los subgrupos podemos definir los grupos cocientes, para los que no daremos definición sino una intuición a partir de este mismo ejemplo de $n\mathbb{Z}$. Empezamos con la relación:

$$a \sim b \Leftrightarrow b - a \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow n|b - a \tag{1.1}$$

donde $x|y$ significa que x divide a y . Esta relación particiona a \mathbb{Z} en un total de n clases de congruencia distintas, donde cada clase contiene a todos los enteros que comparten el mismo resto al hacer la división por n . La clase de congruencia que contiene a m se denota $[m]$, y por

la definición de esta partición se cumple que si $a \sim b$, entonces $[a] = [b]$. Llamamos grupo de los enteros módulo n , o $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, al conjunto de estas clases de congruencia con la operación suma dada por:

$$[a] + [b] = [a + b] \quad (1.2)$$

Se puede demostrar que esta operación está bien definida y la suma de dos clases es siempre la misma independientemente de los representantes a y b escogidos.

Definición 1.3. Sean G y G' dos grupos con operaciones \star y \diamond respectivamente. Una aplicación $f : G \rightarrow G'$ se dice un homomorfismo de grupos si para cualesquiera $a, b \in G$ verifica que $f(a \star b) = f(a) \diamond f(b)$.

A partir de ahora y en línea con los ejemplos presentados vamos a considerar siempre que la operación \star de un grupo es la suma $+$, de forma que el elemento neutro se denota 0 y dado un elemento a , su inverso se denota $-a$.

La siguiente estructura que vamos a necesitar son los anillos, que no son más que grupos a los que se les añade una segunda operación.

Definición 1.4. Un anillo conmutativo con unidad es un conjunto no vacío R con dos operaciones binarias $+, \cdot : R \times R \rightarrow R$ llamadas suma y producto o multiplicación respectivamente satisfaciendo las siguientes propiedades:

- R es un grupo para la operación suma con elemento neutro 0 .
- \cdot es asociativa, es decir, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para cualesquiera $a, b, c \in R$.
- \cdot es conmutativa, es decir, $a \cdot b = b \cdot a$ para cualesquiera $a, b \in R$.
- \cdot es distributiva respecto de $+$, es decir, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ para todos $a, b, c \in R$.
- Existe un elemento $1 \in R$ llamado la identidad de R tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para todo $a \in R$.

Es habitual en la literatura que la multiplicación entre a y b se denote con la yuxtaposición ab , obviando el símbolo \cdot . La definición más general de anillo no contempla necesariamente ni la existencia de la identidad ni la conmutatividad de la multiplicación, pero en nuestro caso siempre las vamos a dar por supuestas, y por ello vamos a llamar simplemente anillos a estas estructuras.

Los grupos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} o \mathbb{R} adquieren estructura de anillo al considerar la suma y el producto habituales. El grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ también adquiere estructura de anillo al dotarlo de la multiplicación $[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$, que también está bien definida.

Un tipo particular de anillos que será de especial relevancia para calcular la homología persistente son los anillos de polinomios.

Definición 1.5. Sea R un anillo. Un polinomio sobre R es una suma formal:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0 \quad (1.3)$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $a_i \in R$ para todo $i = 0, \dots, n$. Se llama grado del polinomio al mayor i tal que $a_i \neq 0$.

Definición 1.6. Sea R un anillo conmutativo. Definimos el anillo de polinomios $R[x]$ como el anillo formado por todos los polinomios posibles sobre R donde la suma se calcula como:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i \quad (1.4)$$

y el producto se calcula como:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i \cdot \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) x^i \quad (1.5)$$

El elemento neutro para la suma es el polinomio $0 \cdot x^0$ o simplemente 0 y la identidad es el polinomio $1 \cdot x^0$ o simplemente 1 .

Todos los grados de los polinomios son números naturales según esta definición. Otra familia especial de anillos son los cuerpos, donde siempre se puede dividir un elemento por otro que no sea nulo.

Definición 1.7. Sea R un anillo. Una unidad es un elemento $a \in R$ no nulo para el que existe un elemento $a^{-1} \in R$ llamado inverso multiplicativo de a tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

La identidad 1 siempre es una unidad, pues es su propio elemento inverso para la multiplicación. Por ejemplo, las únicas unidades que hay en el anillo \mathbb{Z} son 1 y -1 .

Definición 1.8. Un cuerpo F es un anillo conmutativo con unidad donde todo elemento no nulo es una unidad.

Un cuerpo es por tanto un anillo F con la condición adicional de que $F \setminus \{0\}$ sea un grupo con la multiplicación. Los anillos \mathbb{Q} y \mathbb{R} son cuerpos con la suma y la multiplicación usuales, mientras que \mathbb{Z} no satisface esta definición. Por otra parte, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un cuerpo si y solo si n es un número primo.

Definición 1.9. Sea R un anillo conmutativo. Un ideal de R es un subconjunto $I \subset R$ que tiene estructura de anillo al considerar las restricciones de $+$ y \cdot sobre I (es decir, es un subanillo) y tal que para todo $r \in R$ y todo $i \in I$, se cumple que $r \cdot i = i \cdot r \in I$.

Todo anillo R tiene los dos ideales triviales $\{0\}$ y R . En \mathbb{Z} , además contamos con los ideales de múltiplos $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. En general, dado un subconjunto de elementos $r_1, \dots, r_m \in R$, siempre podemos generar el ideal (r_1, \dots, r_m) formado por todas las sumas y productos posibles de estos elementos. En el caso de que R sea un cuerpo, los únicos ideales posibles son los dos triviales. A partir de un ideal $I \subset R$ se puede definir un anillo cociente R/I de forma parecida a como se hizo con los grupos.

Definición 1.10. Sea R un anillo. Se dice que R es un dominio de ideales principales si el producto de dos elementos no nulos da como resultado un elemento no nulo (es decir, R es un dominio) y todos los ideales posibles se pueden generar con un sólo elemento (es decir, todos los ideales son principales).

\mathbb{Z} es un dominio de ideales principales, al igual que el anillo de polinomios $F[x]$ con F un cuerpo. En cambio el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[x]$ no lo es, ni tampoco lo son los anillos $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ cuando n no es primo. Un cuerpo F es un dominio de ideales principales trivialmente, pues el ideal $\{0\}$ está generado por el 0 y el ideal total F se puede generar con cualquier elemento no nulo, en particular con el 1 . Los dominios de ideales principales serán particularmente útiles para dar teoremas de clasificación cuando hayamos definido la homología y la homología persistente.

Definición 1.11. Sean R y R' dos anillos. Una aplicación $f : R \rightarrow R'$ se dice un homomorfismo de anillos si para cualesquiera $a, b \in R$ verifica que $f(a+b) = f(a) + f(b)$ y $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

Los anillos serán la base sobre la que definamos los módulos, que serán una estructura algebraica que usaremos continuamente a lo largo de todo este trabajo.

Definición 1.12. Sea R un anillo conmutativo con unidad. Un módulo sobre R o R -módulo es un conjunto no vacío M con una operación $+$: $M \times M \rightarrow M$ llamada suma y una operación \cdot : $R \times M \rightarrow M$ llamada producto por escalares satisfaciendo las siguientes propiedades:

- M es un grupo con la operación $+$.
- $r \cdot (s \cdot m) = (r \cdot s) \cdot m$ para cualesquiera $r, s \in R$ y cualquier $m \in M$.
- $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$ para cualesquiera $r, s \in R$ y cualquier $m \in M$.
- $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$ para cualquier $r \in R$ y cualesquiera $m, n \in M$.
- $1 \cdot m = m$ para todo $m \in M$, siendo 1 la identidad de R .

Nótese el abuso de notación que se produce al usar el símbolo $+$ tanto para la suma de R como para la suma de M y el símbolo \cdot para la multiplicación de R y el producto por escalares de M . En los ejemplos que iremos proponiendo los escalares de R siempre serán números reales, por lo que siempre será fácil distinguirlos de los elementos del módulo M y no será necesario hacer distinciones.

Definición 1.13. Sea F un cuerpo. Un espacio vectorial sobre F o F -espacio vectorial es un conjunto no vacío V con estructura de F -módulo.

Al igual que para grupos y anillos, podemos definir una subestructura llamada submódulos.

Definición 1.14. Sea R un anillo y M un R -módulo. Un subconjunto $N \subset M$ se dice un submódulo de M si es subgrupo para la suma y es cerrado para el producto por escalares, es decir, que dados $r \in R$ y $n \in N$ entonces $r \cdot n \in N$.

Los submódulos de un espacio vectorial tienen el nombre de subespacios vectoriales.

Definición 1.15. Sean M y M' dos R -módulos. Una aplicación $f : M \rightarrow M'$ se dice un homomorfismo de R -módulos si para cualesquiera $m, n \in M$ y cualquier $r \in R$ verifica que $f(m + n) = f(m) + f(n)$ y $f(r \cdot m) = r \cdot f(m)$.

Para comprender mejor los teoremas de clasificación que veremos, necesitamos saber qué es un módulo libre y qué es un módulo de torsión.

Definición 1.16. Sea M un R -módulo y sea $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset M$ un subconjunto. Decimos que S genera M si todo $m \in M$ es combinación lineal de S , es decir, existen unos escalares $r_1, r_2, \dots, r_n \in R$ tales que:

$$m = r_1 \cdot a_1 + r_2 \cdot a_2 + \dots + r_n \cdot a_n \quad (1.6)$$

Si M tiene un subconjunto finito S que genere a M , decimos que es finitamente generado. Decimos además que S es una base de M si estas combinaciones lineales son únicas para todo $m \in M$. En caso de que M tenga una base, se dice que M es un módulo libre y el número de elementos de su base se llama rango.

Definición 1.17. Dado un R -módulo M , decimos que un elemento $a \in M$ es de torsión si existe un escalar $r \in R$ no nulo tal que $r \cdot a = 0$.

Todo R -módulo M tiene trivialmente un elemento de torsión que es el 0. Si hubiera un elemento de torsión no nulo, se puede demostrar que M no es libre. Además los elementos de torsión de un módulo forman un submódulo $T(M) \subset M$.

Ahora para crear estructuras más complejas veremos una forma de tomar varios grupos (que tienen la suma como operación interna) y crear otro mayor que los contenga.

Definición 1.18. Sean G_1, G_2, \dots, G_n grupos. La suma directa $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$ es el grupo formado por las n -tuplas (a_1, a_2, \dots, a_n) con $a_i \in G_i$ y la operación suma dada por:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \quad (1.7)$$

Si una tupla $a \in G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$ tiene todas sus componentes iguales a 0 excepto a_i , se suele decir que $a \in G_i$. Por otra parte, si todos los grupos que forman la suma directa son el mismo, se suele simplificar la notación mediante exponentes. Así, G^n denota la suma directa $G \oplus \dots \oplus G$.

Para terminar esta introducción vamos a usar la suma directa para definir una familia de anillos y módulos, los graduados, que también serán útiles. Gracias a esta suma directa podemos definir los anillos y módulos graduados, que ocuparán un lugar central en la teoría de la homología persistente.

Definición 1.19. Sea T un subconjunto de \mathbb{R} . Un anillo T -graduado es un anillo R que es suma directa de grupos $R = \bigoplus_{t \in T} R_t$, y el producto cumple que si $a \in R_s$ y $b \in R_t$ entonces $a \cdot b \in R_{s+t}$. Un elemento $e \in R_t$ se dice homogéneo de grado $\deg e = t$. El grado de un elemento no homogéneo es el mayor de los grados de sus componentes homogéneas. El 1 tiene grado 0, y el 0 tiene cualquier grado.

Dado un anillo no graduado R , su anillo de polinomios $R[x]$ es un anillo \mathbb{N} -graduado donde los elementos homogéneos son los monomios, que son polinomios con un único coeficiente a_i no nulo.

Definición 1.20. Sea R un anillo T -graduado. Un R -módulo T -graduado M es un R -módulo dado como suma directa $M = \bigoplus_{t \in T} M_t$ donde el producto por escalares verifica que si $r \in R_s$ y $m \in M_t$ entonces $r \cdot m \in M_{s+t}$. La definición de elemento homogéneo y de grado en un módulo graduado es análoga a la de un anillo graduado.

Para que estas definiciones y toda la teoría que veremos después funcionen es necesario imponer que T sea un conjunto cerrado para la suma, como sucede con \mathbb{N} , \mathbb{Z} o \mathbb{R} que son los conjuntos de índices más usados.

Definición 1.21. Sea $R = \bigoplus_{t \in T} R_t$ un anillo T -graduado y sea el R -módulo T -graduado $M = \bigoplus_{t \in T} M_t$. Se dice que $N = \bigoplus_{t \in T} N_t$ es un submódulo de M si N_t es submódulo de M_t para todo $t \in T$ y además dados $r \in R_s$ y $m \in N_t$ su producto satisface $r \cdot m \in N_{s+t}$.

Las últimas definiciones que vamos a dar son generales y nos valdrán para grupos, anillos, cuerpos, módulos y espacios vectoriales. Para escribirlas en su forma más general, vamos a usar las palabras “estructura”, “homomorfismo” y “subestructura”. En todas las estructuras habrá una operación suma y su elemento neutro será el 0.

Definición 1.22. Sea $f : X \rightarrow Y$ un homomorfismo entre dos estructuras. Definimos los dos conjuntos:

- $\ker f = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$, llamado el núcleo de f .
- $\text{Im } f = \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ con } f(x) = y\}$, llamado la imagen de f .

Para cualquier tipo de estructura, tenemos que $\ker f$ es una subestructura de X e $\text{Im } f$ es una subestructura de Y .

Definición 1.23. Un homomorfismo biyectivo $f : X \rightarrow Y$ entre dos estructuras se dice isomorfismo, y las dos estructuras X, Y se dice que son isomorfas.

Ahora que ya hemos definido todos los conceptos algebraicos que nos van a hacer falta, cerramos esta sección con un par de resultados clásicos que serán útiles en adelante.

Proposición 1.1 ([1], pg. 413). *Todo grupo abeliano G tiene una única estructura de \mathbb{Z} -módulo.*

Esto es fácil de demostrar si consideramos que la suma del \mathbb{Z} -módulo es la misma que la suma del grupo y definimos el producto por escalares según las fórmulas $0 \cdot a = 0$, $(-1) \cdot a = -a$ y $n \cdot a = a + \overset{n \text{ veces}}{\dots} + a$ para $n > 0$. A partir de esta conexión podemos tomar las definiciones de generación, base, módulo libre y módulo de torsión que dimos para módulos y extenderlas a grupos.

Otro resultado importante es el siguiente, que nos ayudará a clasificar completamente los R -módulos y, en virtud de la proposición 1.1, los grupos.

Teorema 1.1 (teorema fundamental de los módulos finitamente generados, [10], pg. 462). *Sea R un dominio de ideales principales y sea M un R -módulo finitamente generado. Entonces M es isomorfo a una suma directa:*

$$M \cong R^\beta \oplus \bigoplus_{j=1}^m R/d_j R, \quad (1.8)$$

donde β es un entero no negativo llamado número de Betti y los d_j son elementos no nulos y no unidades de R tales que $d_j \mid d_{j+1}$ para todo j . Esta suma directa es única salvo multiplicación de los d_j por una unidad de R .

Como este isomorfismo es único, todos los R -módulos finitamente generados se pueden clasificar en función de su número de Betti β y sus coeficientes de torsión d_1, \dots, d_m . El submódulo R^β es el submódulo libre de M , y $\bigoplus_{j=1}^m R/d_j R$ es su submódulo de torsión $T(M)$. Cuando el anillo considerado es un cuerpo F , no existen elementos no nulos que no sean unidades, por lo que no hay coeficientes de torsión y la descomposición sólo tiene la parte libre. Entonces los F -espacios vectoriales finitamente generados son siempre libres, y quedan caracterizados por su rango β .

Por tener los grupos estructura de \mathbb{Z} -módulo, también podemos aplicar el teorema 1.2 con $R = \mathbb{Z}$, dando lugar al teorema fundamental de los grupos.

Teorema 1.2 (teorema fundamental de los grupos finitamente generados, [10], pg. 158). *Sea G un grupo finitamente generado. Entonces G es isomorfo a una suma directa:*

$$G \cong \mathbb{Z}^\beta \oplus \bigoplus_{j=1}^m \mathbb{Z}/n_j \mathbb{Z}, \quad (1.9)$$

donde β es un entero no negativo llamado número de Betti y los n_j son enteros mayores o iguales que 2 tales que $n_j | n_{j+1}$ para todo j . Esta suma directa es única.

Capítulo 2

Homología Persistente

En este capítulo introduciremos los conceptos más generales de la homología persistente, una herramienta de la topología algebraica y la topología computacional que nos permite estudiar las propiedades de un espacio topológico que se va construyendo paso a paso.

En la sección 2.1 explicamos el concepto de homología para un espacio topológico. En la sección 2.2 introducimos el concepto de homología persistente y analizamos qué condiciones deben darse para que su cálculo y su clasificación sean posibles, aportando además invariantes completos y estables. Al final de esta sección iniciamos el estudio de soluciones alternativas cuando estas buenas condiciones no se dan. Finalmente, en la sección 2.3 presentamos los espacios topológicos que usaremos como ejemplo para explicar los conceptos que veremos en los capítulos siguientes.

2.1. Homología

La homología es una teoría que sirve para clasificar distintos espacios topológicos asignándoles una sucesión de grupos. Estos grupos están diseñados de tal forma que si dos espacios topológicos son homeomorfos entre sí (es decir, que existe una deformación continua que convierte al uno en el otro) entonces esos grupos son isomorfos. Decimos entonces que esos grupos suponen un invariante topológico. Gracias a la proposición 1.1, sabemos que los grupos tienen estructura de \mathbb{Z} -módulos y por tanto la teoría de homología se puede ampliar cambiando los grupos por R -módulos siendo R un anillo cualquiera. Los casos que más usaremos a lo largo de este trabajo son $R = \mathbb{Z}$, que es el caso tradicional, y $R = F$, con F un cuerpo. En este caso la homología no es más que un F -espacio vectorial, y queda unívocamente determinado por su rango.

Todas las definiciones y proposiciones que demos en toda esta sección se harán en términos de R -módulos para englobar todos los casos diferentes, y se pueden consultar en [14], cap. 2. Si algún anillo concreto presenta particularidades interesantes se señalarán separadamente.

2.1.1. Complejos de cadenas

El primer objeto algebraico que necesitaremos para definir la homología son los complejos de cadenas.

Definición 2.1. *Un complejo de cadenas \mathcal{C} es una sucesión de R -módulos $\{C_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$ junto con una sucesión de homomorfismos $d = \{d_p : C_p \rightarrow C_{p-1}\}_{p \in \mathbb{Z}}$, satisfaciendo la condición de que*

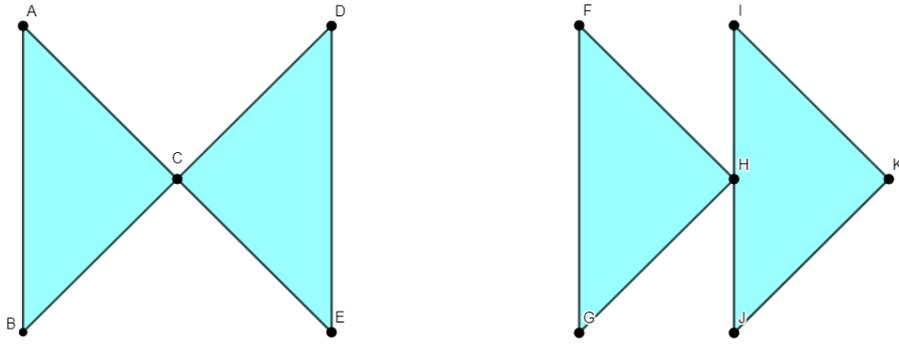


Figura 2.1: A la izquierda tenemos el conjunto de símplices formado por los cinco puntos A, B, C, D, E , las seis aristas que los unen y los dos triángulos ABC y CDE . Este conjunto satisface la definición de complejo simplicial y lo llamaremos L . En cambio a la derecha, el conjunto formado por los puntos F, G, H, I, J, K , las aristas FG, FH, FH, IJ, IK, JK y los dos triángulos FGH, IJK no es un complejo simplicial porque la intersección de los triángulos es el punto H , que es cara de FGH pero no de IJK .

para todo $p \in \mathbb{Z}$, $d_p \circ d_{p+1} \equiv 0$. A la sucesión de homomorfismos d se le llama la diferencial del complejo de cadenas, y la condición de que $d_p \circ d_{p+1} \equiv 0 \forall p$ se simplifica diciendo que la doble diferencial es nula o bien que $d^2 = 0$. Los complejos de cadenas se representan con diagramas como el siguiente:

$$\cdots \longrightarrow C_{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} C_p \xrightarrow{d_p} C_{p-1} \longrightarrow \cdots \quad (2.1)$$

donde el subíndice de la diferencial d_p se puede omitir cuando no sea necesario especificarlo.

Definición 2.2. Sea \mathcal{C} un complejo de cadenas.

- A un elemento de C_p se le llama p -cadena.
- A una p -cadena tal que su diferencial es nula se la llama p -ciclo.
- A una p -cadena tal que es imagen por d_{p+1} de una $(p+1)$ -cadena se la llama p -borde.

Los complejos de cadenas aparecen de forma muy natural en la topología algebraica, siendo los complejos simpliciales los objetos más sencillos y conocidos a los que se les puede asignar un complejo de cadenas.

Definición 2.3. Un n -símplice σ en \mathbb{R}^d ($n \leq d$) es la envoltura convexa de $n+1$ puntos afínmente independientes $\{v_0, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^d$. Si tomamos un subconjunto de $\{v_0, \dots, v_n\}$ con $m+1$ puntos ($m \leq n \leq d$), su envoltura convexa es una cara de σ con dimensión m .

Definición 2.4. Un complejo simplicial K es una colección de símplices en \mathbb{R}^d tal que cualquier cara de $\sigma \in K$ está en K y la intersección de dos símplices de K es o bien vacía o bien una cara común. La dimensión de un complejo simplicial es el máximo de las dimensiones de sus símplices.

A la izquierda de la figura 2.1 podemos ver un ejemplo de complejo simplicial, al que llamaremos L , que usaremos para ilustrar las definiciones que vayamos dando.

Definición 2.5. Dado un complejo simplicial K en \mathbb{R}^d , su espacio subyacente $|K|$ es el espacio topológico formado por todos los puntos de \mathbb{R}^d que pertenecen a algún símplice de K , con la topología euclídea heredada de \mathbb{R}^d .

Gracias al complejo de cadenas que vamos a definir sobre el complejo simplicial K , vamos a poder extraer propiedades topológicas del espacio subyacente $|K|$.

Sea un complejo simplicial K de dimensión m y supongamos que sus vértices tienen una ordenación (llamándolos por ejemplo x_1, x_2, x_3, \dots). Si los puntos v_0, v_1, \dots, v_p son vértices de un símplice de K , al símplice que generan lo llamaremos $[v_0, v_1, \dots, v_p]$. A partir de K es muy sencillo definir un complejo de cadenas $\mathcal{C}(K)$.

Definición 2.6. Sea K un complejo simplicial. Definimos $C_p(K)$ como el R -módulo libre (con submódulo de torsión nulo) generado por los p -símplices de K , donde una reordenación de los vértices en el p -símplice $[v_0, v_1, \dots, v_p]$ es equivalente a un cambio de signo si la permutación es impar y no afecta nada si la permutación es par.

Por ejemplo en el complejo simplicial L para $R = \mathbb{Z}$ y para $p = 2$, tenemos que $C_2(L)$ es un \mathbb{Z} -módulo generado por los 2-símplices $[A, B, C]$ y $[C, D, E]$. Ahora para completar el complejo de cadenas nos faltaría definir una diferencial.

Definición 2.7. Sea K un complejo simplicial. El operador borde p -ésimo es un homomorfismo de R -módulos $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ que opera sobre sus símplices de la siguiente forma:

$$\partial_p[v_0, \dots, v_p] = \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p], \quad (2.2)$$

donde \hat{v}_i indica que el vértice v_i se ha eliminado del símplice. ∂_p se extiende al resto de cadenas compuestas por linealidad.

Por ejemplo, en $C_2(L)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \partial_2[A, B, C] &= [B, C] - [A, C] + [A, B] = [B, C] + [C, A] + [A, B] \\ \partial_2[C, D, E] &= [D, E] - [C, E] + [C, D] = [D, E] + [E, C] + [C, D] \end{aligned}$$

Este operador le asigna a cada p -símplice σ los $(p-1)$ -símplices que definen su borde topológico $\partial|\sigma|$. Por ejemplo en $|L|$, al calcular ∂_2 sobre el triángulo $[A, B, C]$ tenemos como resultado las tres aristas que lo bordean e indicando además en qué sentido se recorren: empieza en B , de ahí va a C , de ahí a A y se vuelve a B .

Es fácil probar que $\partial_{p-1} \circ \partial_p \equiv 0 \forall p \in \mathbb{Z}$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \partial_1 \partial_2[A, B, C] &= \partial_1[B, C] + \partial_1[C, A] + \partial_1[A, B] \\ &= [B] - [C] + [C] - [A] + [A] - [B] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dicho de otra forma, todos los p -bordes son p -ciclos en un complejo simplicial. Por tanto podemos afirmar que el diagrama

$$0 \longrightarrow C_m(K) \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1}(K) \longrightarrow \dots \longrightarrow C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \longrightarrow 0 \quad (2.3)$$

es un complejo de cadenas al que llamamos $\mathcal{C}(K)$. Otra estructura menos rígida donde se pueden definir complejos de cadenas es en los complejos celulares. Un complejo celular X se construye de forma inductiva:

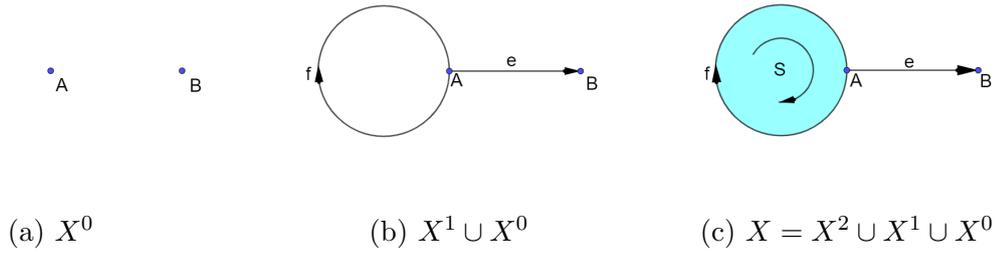


Figura 2.2: Construcción inductiva de un complejo celular. Las flechas describen las aplicaciones φ_s^n y por tanto los operadores borde ∂_p .

1. Empezamos con un conjunto discreto de puntos X^0 , llamado 0-esqueleto de X y a cuyos elementos llamaremos 0-células.
2. Inductivamente, creamos X^n a partir de X^{n-1} como $X^n = X^{n-1} \amalg_{\alpha} e_{\alpha}^n$, donde e_{α}^n es un subespacio topológico de \mathbb{R}^d homeomorfo a D^n y cuyo borde está contenido en X^{n-1} según una cierta aplicación $\varphi_{\alpha}^n : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$. A los discos e_{α}^n se les llama n -células.
3. Definimos el complejo celular X como $X = \cup_n X^n$.

Dado un complejo celular X es sencillo definir un complejo de cadenas $\mathcal{C}(X)$ donde $C_p(X)$ es el R -módulo libre generado por las p -células de X y cuya diferencial asigna a cada p -célula las $(p-1)$ -células que están en su borde con un coeficiente de R que depende de las aplicaciones φ_{α}^n antes descritas. Véase el ejemplo de la figura 2.2. Las flechas dibujadas indican que la 1-célula e comienza en A y acaba en B , la 1-célula f empieza y acaba en A y se recorre en sentido antihorario y la 2-célula S se pega por su borde con f teniendo ambas el mismo sentido de orientación. Por tanto el operador borde sería:

$$\begin{aligned}\partial_1 e &= B - A \\ \partial_1 f &= A - A = 0 \\ \partial_2 S &= f\end{aligned}$$

Para más detalles sobre la construcción de complejos celulares y su diferencial, consultar el libro de Hatcher [14], cap.0.

Si los complejos simpliciales o celulares tienen un número finito de elementos, darán lugar a un tipo de complejo de cadenas más sencillos que se llaman de tipo finito.

Definición 2.8. *Un complejo de cadenas \mathcal{C} se dice de tipo finito si la cantidad de R -módulos no triviales es finita y todos ellos son finitamente generados.*

Para definir un complejo de cadenas sobre un espacio topológico con estos métodos es necesario que éste se pueda descomponer en símlices o células. Para espacios topológicos más generales existen otras construcciones como los complejos de cadenas singulares, que preferimos no incluir por no sobrecargar la teoría. De todas formas, de ahora en adelante no nos importarán tanto los métodos para crear complejos de cadenas como sus propiedades y toda la teoría que se puede desarrollar en torno a ellos.

2.1.2. Homología de un complejo de cadenas

Sea R un anillo fijado. Cuando el complejo de cadenas viene dado por un complejo simplicial o celular X , cada $C_p(X)$ es un R -módulo libre. El subconjunto $\ker \partial_p = \{c \in C_p(X) \mid \partial_p(c) = 0\}$ es un submódulo libre que contiene a todos los p -ciclos y el subconjunto $\text{Im } \partial_{p+1} = \{c \in C_p(X) \mid c = \partial_{p+1}(b) \text{ para un } b \in C_{p+1}(X)\}$ es un submódulo libre que contiene a todos los p -bordes.

En un complejo de cadenas \mathcal{C} , la condición de que $d^2 = 0$ implica necesariamente que para todo $p \in \mathbb{Z}$, el submódulo $\text{Im } d_{p+1}$ está contenido en el submódulo $\ker d_p$. Por tanto, tiene sentido definir para cada p el R -módulo cociente:

$$H_p(\mathcal{C}) = \frac{\ker d_p}{\text{Im } d_{p+1}} \quad (2.4)$$

A $H_p(\mathcal{C})$ se le llama p -ésimo R -módulo de homología de \mathcal{C} , y cuando no sea necesario especificarlo se omitirá de la notación el complejo de cadenas \mathcal{C} . Los elementos de $H_p(\mathcal{C})$ se llaman clases de homología de dimensión p y se escriben entre corchetes por ser elementos de un cociente de módulos.

Cuando el complejo de cadenas $\mathcal{C}(X)$ proviene de un complejo simplicial o celular X , este cociente indica cuántos ciclos de dimensión p tiene X que no sean el borde de una $p+1$ -cadena. Por eso a las clases de homología se las suele asociar intuitivamente con “agujeros” en X . Por ejemplo, las clases de homología de dimensión 0 indican componentes conexas de X y las de dimensión 1 indican caminos cerrados sobre X que no se pueden contraer a un punto. En la segunda imagen de la figura 2.2, la circunferencia dada por f define un ciclo que no es borde, porque $\partial_1 f = 0$ y no hay 2-células. Por tanto en este estado de la construcción hay una clase de homología de dimensión 1 generada por f . En cambio al añadir S en la tercera imagen, f sigue siendo un ciclo pero ahora es también un borde porque $\partial_2 S = f$. Entonces f pasa a estar contenido en el cociente de H_1 y ya no genera nada.

Según el teorema 1.1, estos R -módulos quedan descritos por su rango y sus coeficientes de torsión. Ahora vamos a ver cómo se calculan.

2.1.3. Computación de la homología

Si el complejo de cadenas es de tipo finito, existe un método para la computación de los módulos de homología H_p . Para ello debemos calcular el núcleo y la imagen de cada operador borde d_p . Como son operadores lineales entre R -módulos, se pueden representar a través de una matriz M_p , donde las columnas representan una base de C_p y las filas una base de C_{p-1} . Por ejemplo, para el complejo celular X descrito en la figura 2.2 las matrices M_1 y M_2 serían:

$$M_1 = \left(\begin{array}{c|cc} & e & f \\ \hline A & -1 & 0 \\ B & 1 & 0 \end{array} \right) \quad M_2 = \left(\begin{array}{c|c} & S \\ \hline e & 0 \\ f & 1 \end{array} \right)$$

Calcular el núcleo y la imagen de ∂_p equivale a calcular el espacio nulo y el espacio de columnas de la matriz M_p respectivamente, y ambas cosas se pueden conseguir llevando M_p a su forma normal de Smith.

Decimos que una matriz está en forma normal de Smith si tiene la forma:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a_r & \\ \hline & & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (2.5)$$

donde a_i divide a a_{i+1} para todo i .

Para llevar a M_p a su forma normal de Smith se le pueden aplicar las siguientes operaciones elementales:

1. Multiplicar una fila (columna) por una unidad de R .
2. Intercambiar dos filas (columnas).
3. Sumar a una fila (columna) un múltiplo de otra.

Estas operaciones elementales hacen un cambio de base en los grupos libres C_p y C_{p-1} , de forma que las bases nuevas simplifican la expresión de d_p . Los elementos de la nueva base de C_p con columna nula forman una base de $\ker d_p$, mientras que los elementos de la nueva base de C_{p-1} con fila no nula multiplicados por su correspondiente a_i forman una base de $\text{Im } d_p$. Repitiendo esta reducción sobre las matrices de todas las diferenciales no triviales, podemos calcular todos los R -módulos de homología de \mathcal{C} .

Cuando R es un cuerpo F , el submódulo de torsión es trivial y por tanto H_p es simplemente un espacio vectorial sobre F cuya dimensión se obtiene con la fórmula:

$$\dim H_p = \dim C_p - \text{rank } M_p - \text{rank } M_{p+1} \quad (2.6)$$

En este caso los cálculos son mucho más sencillos pues ni siquiera es necesario llevar las matrices a su forma normal de Smith, sino que basta con llevarlas a una forma escalonada por columnas para calcular el rango. Por contra, la información que se obtiene es mucho menos rica que la que obtendríamos poniendo los coeficientes en \mathbb{Z} porque no da información sobre la torsión del espacio topológico. Por ejemplo, en la botella de Klein K , que es el complejo celular que describimos en el apartado 2.3.1, la homología de dimensión 1 sería:

R	$H_1(K)$
\mathbb{Z}	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
\mathbb{R}	\mathbb{R}
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

2.2. Homología Persistente

La homología persistente se crea con la intención de analizar no un complejo de cadenas sino todo un conjunto de complejos de cadenas ordenados según un criterio y relacionados entre ellos según una serie de morfismos. El campo donde más éxito está teniendo esta herramienta es en el análisis de datos. Aquí el objetivo es aproximar la topología de un conjunto de datos creando sobre ellos un complejo simplicial o celular con métodos como Vietoris-Rips, el método

witness o por conjuntos de subnivel de una cierta función. Estos métodos dependen de uno o varios parámetros y su elección condiciona el complejo resultante. Lo que hace la homología persistente es combinar la homología de todos estos complejos en un único objeto, donde se ve la evolución de este invariante en función de los parámetros. Esto permite dar un análisis de los espacios topológicos a varios niveles de precisión, sin tener que decantarse por ninguno concreto. Además, bajo ciertas condiciones tiene invariantes completos y estables que se pueden calcular en tiempo cúbico sobre el tamaño del conjunto de datos [25].

2.2.1. Complejos de cadenas filtrados y módulos de persistencia

El primer paso para definir filtraciones es extender la noción de homomorfismo a complejos de cadenas.

Definición 2.9. Sean \mathcal{C} y \mathcal{C}' dos complejos de cadenas. Una aplicación de cadenas $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ es una sucesión de homomorfismos $f_p : C_p \rightarrow C'_p$ tales que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{d_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{d_p} & C_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow f_{p+1} & & \downarrow f_p & & \downarrow f_{p-1} & & \\
 \cdots & \longrightarrow & C'_{p+1} & \xrightarrow{d'_{p+1}} & C'_p & \xrightarrow{d'_p} & C'_{p-1} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array} \tag{2.7}$$

Definición 2.10. Sea T un subconjunto de \mathbb{R} . Un complejo de cadenas filtrado es un conjunto de complejos de cadenas $\{C^t\}_{t \in T}$ tal que para todo par de índices $s, t \in T$ con $s \leq t$ entonces se verifica que $C_p^s \subset C_p^t$ para todo $p \in \mathbb{Z}$ y por tanto se puede definir una aplicación de cadenas $i^{s,t} : C^s \rightarrow C^t$ inducido por la inclusión entre complejos de cadenas. Estas aplicaciones de cadenas deben verificar que $i^{t,t} \equiv Id_{C^t}$ para todo $t \in T$ (donde Id_S es la aplicación identidad sobre el conjunto S), y además si $r \leq s \leq t$ entonces $i^{r,t} = i^{s,t} \circ i^{r,s}$.

Un método para crear complejos de cadenas filtrados es a través de filtraciones de complejos simpliciales o celulares, que no son más que un conjunto de complejos $\{K^t\}_{t \in T}$ tales que si $s \leq t$ entonces $K^s \subset K^t$. Esto es de hecho lo que se puede ver en la figura 2.2. También se pueden crear otro tipo de filtraciones más generales, donde el conjunto de índices T no sea uniparamétrico (dando lugar a lo que se llama homología multipersistente) o donde pueda haber algún par $s < t$ con $K^s \supset K^t$ (a esto se le llama persistencia en zigzag, y ya hablaremos de ella en próximos capítulos), pero ninguna de las dos entra dentro de los objetivos de este trabajo.

Las elecciones habituales para el conjunto de índices T serán \mathbb{Z} , \mathbb{N} o \mathbb{R} . Por ejemplo, para $T = \mathbb{Z}$, un complejo de cadenas filtrado se puede representar mediante el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdots & \longrightarrow & C_{p+1}^0 & \xrightarrow{i_{0,1}} & C_{p+1}^1 & \xrightarrow{i_{1,2}} & C_{p+1}^2 \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow d^0 & & \downarrow d^1 & & \downarrow d^2 \\
\cdots & \longrightarrow & C_p^0 & \xrightarrow{i_{0,1}} & C_p^1 & \xrightarrow{i_{1,2}} & C_p^2 \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow d^0 & & \downarrow d^1 & & \downarrow d^2 \\
\cdots & \longrightarrow & C_{p-1}^0 & \xrightarrow{i_{0,1}} & C_{p-1}^1 & \xrightarrow{i_{1,2}} & C_{p-1}^2 \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array} \tag{2.8}$$

donde hemos omitido los subíndices de los homomorfismos por no sobrecargar la notación siendo claro cuál es el conjunto de partida en cada caso. En este diagrama las columnas son complejos de cadenas, mientras que las filas son lo que a partir de ahora llamaremos módulos de persistencia.

Definición 2.11. Un R -módulo de persistencia M es un conjunto de R -módulos $\{M^t\}_{t \in T}$ junto con un conjunto de homomorfismos $\{f^{s,t} : M^s \rightarrow M^t \mid s \leq t\}$ llamados aplicaciones de estructura de forma tal que $f^{t,t} = Id_{M^t}$ y tal que $f^{s,t} \circ f^{r,s} = f^{r,t}$ si $r \leq s \leq t$.

Cuando el conjunto de índices es natural o entero, los módulos de persistencia se suelen representar con diagramas como éste:

$$\cdots \longrightarrow M^0 \xrightarrow{f^{0,1}} M^1 \xrightarrow{f^{1,2}} M^2 \longrightarrow \cdots \tag{2.9}$$

Los módulos de persistencia que usaremos nosotros son los de tipo finito, donde los cálculos son mucho más sencillos.

Definición 2.12. Un R -módulo de persistencia M con aplicaciones de estructura $\{f^{s,t}\}_{s \leq t}$ se dice de tipo finito si todos sus R -módulos M^t son finitamente generados y existe un índice $r \in T$ tal que si $r \leq s \leq t$, entonces $f^{s,t}$ es un isomorfismo.

Y en analogía con el resto de estructuras que vimos en el capítulo 1, definimos una estructura inferior a los R -módulos de persistencia.

Definición 2.13. Dado un R -módulo de persistencia M con aplicaciones de estructura $\{f^{s,t}\}_{s \leq t}$, un submódulo de persistencia N es otro R -módulo de persistencia donde $N^t \subset M^t \forall t \in T$ y donde $f^{s,t}(N^s) \subset N^t$ para cada par $s \leq t$. Las aplicaciones de estructura de N son las restricciones correspondientes de las de M .

Definición 2.14. Sea un complejo de cadenas filtrado $\{C^t\}_{t \in T}$ con las aplicaciones de cadenas dadas por la inclusión $\{i^{s,t}\}_{s \leq t}$ y sea un entero p . Definimos los siguientes tres módulos de persistencia:

1. El módulo de p -cadenas, dado por el conjunto de R -módulos $\{C_p^t\}_t$ y los homomorfismos $i_p^{s,t} : C_p^s \rightarrow C_p^t$.

2. El módulo de p -ciclos, dado por el conjunto de R -módulos $\{Z_p^t = \ker d_p^t\}_t$ y los homomorfismos $i_p^{s,t}|_{\ker d_p^s}$. Es submódulo del módulo de p -cadenas.
3. El módulo de p -bordes, dado por el conjunto de R -módulos $\{B_p^t = \text{Im } d_{p+1}^t\}_t$ y los homomorfismos $i_p^{s,t}|_{\text{Im } d_{p+1}^s}$. Es submódulo del módulo de p -ciclos.

Definición 2.15. En las mismas condiciones de la definición anterior, definimos el módulo de homología persistente p -ésimo, dado por el conjunto de R -módulos $\left\{H_p^t = \frac{Z_p^t}{B_p^t}\right\}_t$ y por los homomorfismos $\rho_p^{s,t} : H_p^s \rightarrow H_p^t$ inducidos por la inclusión, es decir:

$$[a] \in H_p^s \mapsto \rho_p^{s,t}([a]) = [i_p^{s,t}(a)] \in H_p^t \quad (2.10)$$

Los módulos de homología persistente serán el objeto central de nuestro trabajo, que integran en un solo objeto todos los R -módulos de todas las etapas de la filtración. Volviendo a la filtración de la figura 2.2, tenemos que $H_1^0 = \{0\}$, $H_1^1 = ([f])$ y $H_0^2 = \{0\}$, siendo todas las aplicaciones de estructura nulas. Nuestro objetivo será el de estudiar, clasificar y dar invariantes para la homología persistente.

Cuando partimos de una filtración de complejos simpliciales o celulares finitos, los módulos de persistencia de las definiciones anteriores son de tipo finito, facilitando los cálculos.

2.2.2. Correspondencia entre módulos de persistencia y módulos graduados

La definición formal de la homología persistente es poco útil para la computación porque depende de una gran cantidad (no numerable cuando $T = \mathbb{R}$ por ejemplo) de R -módulos de homología conectados entre ellos por homomorfismos. Para poder trabajar adecuadamente con los módulos de persistencia vamos a dar una relación entre los R -módulos de persistencia y los R -módulos graduados que explicamos en la definición 1.20. Esta relación se define en términos de categorías, que intuitivamente son estructuras abstractas que engloban objetos conectados por morfismos. Para más información sobre categorías, ver el libro [2].

Teorema 2.1 (de correspondencia, [25]). *Existe una equivalencia α entre la categoría de los R -módulos de persistencia de tipo finito y la categoría de los $R[x]$ -módulos graduados finitamente generados, dada por:*

$$\alpha(\mathcal{M}) = \bigoplus_{t \in T} M^t, \quad (2.11)$$

donde el homomorfismo $f^{r,s}$ se corresponde con la multiplicación por el monomio x^{s-r} .

Entonces todo R -módulo de persistencia se puede interpretar como un único módulo graduado sobre el anillo de polinomios $R[x]$ y por tanto todos los resultados que se conozcan para una categoría son automáticamente ciertos en la otra.

Al igual que en homología, el anillo de coeficientes escogido para el módulo de persistencia cambia sustancialmente los cálculos y el resultado final. Pero en este caso la diferencia va más allá, pues la elección del anillo condiciona si los cálculos van a ser en general factibles o si existen invariantes computables y completos. Empezamos comentando el caso más sencillo y más estudiado en la bibliografía: el caso en que los coeficientes están en un cuerpo F .

$$M \equiv \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} \mathbb{R} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}} \mathbb{R} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}} \cdots \quad (2.12)$$

Figura 2.3: Ejemplo de \mathbb{R} -módulo de persistencia de tipo finito indexado por \mathbb{N} .

2.2.3. Homología persistente con coeficientes en un cuerpo

Cuando los coeficientes están en un cuerpo F , los M^t son F -espacios vectoriales y el anillo de polinomios $k[x]$ es un dominio de ideales principales, lo cual hace que la teoría sea más sencilla y haya sido estudiada más. Tanto es así que la gran mayoría de los autores definen los módulos de persistencia solo en estos términos, sin considerar la posibilidad de usar anillos más generales. La principal ventaja de los módulos de persistencia sobre F es la existencia de teoremas de clasificación. Esta clasificación [25] pasa por separar los módulos en partes más pequeñas y requiere definir un par de conceptos antes.

Definición 2.16. *Un módulo de persistencia M se dice descomponible si tiene dos submódulos no nulos N y L tales que $M^t = N^t \oplus L^t \forall t \in T$. En este caso, se dice que M es la suma directa de los sumandos N y L y se escribe como $M = N \oplus L$. Si no existe esta suma directa, se dice que M es indescomponible.*

Para clasificar los módulos de persistencia sobre F tenemos que expresarlos como suma directa de indescomponibles. Para garantizar que esta descomposición es un buen clasificador, necesitamos el teorema de Krull-Schmidt.

Definición 2.17. *Sea M un R -módulo.*

- *M satisface la condición de cadenas ascendentes (CCA) si toda secuencia creciente de submódulos:*

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots \quad (2.13)$$

se hace constante partir de un cierto momento.

- *M satisface la condición de cadenas descendentes (CCD) si toda secuencia decreciente de submódulos:*

$$M = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots \quad (2.14)$$

se hace constante partir de un cierto momento.

Los F -módulos de persistencia de tipo finito siempre satisfacen ambas condiciones. Una idea informal para entender por qué es que dado un M^t cualquiera, éste es isomorfo al espacio vectorial k^n para algún n y los únicos submódulos posibles para un espacio vectorial son subespacios isomorfos a k^m para algún $m \leq n$. Entonces las cadenas ascendentes y descendentes de submódulos se pueden traducir en términos de sucesiones numéricas que son monótonas y acotadas, y por tanto convergentes. Gracias a esto, podemos aplicar el siguiente teorema:

Teorema 2.2 (Krull-Schmidt, [17], pg. 83). *Si M es un módulo no nulo que satisface tanto CCA como CCD, entonces se puede descomponer como suma directa de submódulos indescomponibles. Además, esta descomposición es única salvo isomorfismo y salvo reordenamiento de los indescomponibles.*

$$M \cong \mathbb{R}_{[0,\infty)} \oplus \mathbb{R}_{[0,1)} \oplus \mathbb{R}_{(0,1)} \oplus \mathbb{R}_{[1,2)} \quad (2.17)$$

Figura 2.4: Descomposición de M como suma de indescomponibles.

Lo único que nos faltaría para completar la clasificación sería describir completamente el conjunto de los módulos de persistencia indescomponibles. La clave está en lo que vamos a llamar módulos intervalares:

Definición 2.18. *Sea $T \subset \mathbb{R}$. Un subconjunto $I \subset T$ es un intervalo si es no vacío y para cualesquiera $r \leq s \leq t \in T$ con $r, t \in I$ tenemos que $s \in I$.*

Un intervalo I se denota tradicionalmente con un par de puntos $s, t \in T$ que representan sus extremos y van entre paréntesis o entre corchetes en función de que los extremos estén en I o no. Por ejemplo, el intervalo $I = [s, t)$ contiene a todos los puntos que están entre s y t , contiene a s por llevar el corchete pero no contiene a t por llevar el paréntesis.

Definición 2.19. *Sea I un intervalo del conjunto de índices T . El módulo intervalar k_I es un módulo de persistencia dado por los F -módulos:*

$$F_{I,t} = \begin{cases} F & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad (2.15)$$

y las aplicaciones de estructura:

$$f_{s,t} = \begin{cases} Id_F & \text{si } s, t \in I \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad (2.16)$$

Teorema 2.3 (Gabriel, [12]). *Los módulos intervalares F_I son indescomponibles y además son los únicos F -módulos de persistencia indescomponibles que hay.*

Corolario 2.1. *Todo F -módulo de persistencia se puede descomponer de forma única salvo isomorfismo y reordenamiento como suma directa de módulos intervalares.*

Gracias al teorema 2.1 de correspondencia, podemos traducir el último corolario en términos de $F[x]$ -módulos graduados. Por ejemplo, consideremos un cuerpo F y el conjunto de índices $T = \mathbb{N}$. Dado un intervalo infinito $I = [n, \infty)$, el módulo de persistencia F_I se corresponde con el $F[x]$ -módulo graduado generado por el monomio x^n , también denotado $\Sigma^n F[x]$. Esta última notación indica que ese módulo es isomorfo a $F[x]$ pero su generador tiene grado n . Ahora dado un intervalo finito $J = [n, m)$, el módulo de persistencia F_J se corresponde con el $F[x]$ -módulo graduado generado por x^n pero que se anula a partir del grado m , denotado $\Sigma^n F[x]/(x^{m-n})$. Entonces, combinando el teorema de correspondencia con el corolario 2.1, tenemos que todo F -módulo de persistencia tiene asociada una única suma directa:

$$\bigoplus_{i=1}^n \Sigma^{\alpha_i} F[x] \oplus \bigoplus_{j=1}^m \Sigma^{\gamma_j} F[x]/(x^{n_j}), \quad (2.18)$$

Cuando hablamos concretamente de un módulo de homología persistente, esta descomposición se puede calcular con la forma normal de Smith gracias a que $F[x]$ es un dominio de ideales principales. Las entradas de la matriz del operador borde son monomios de $F[x]$, cuyos coeficientes se asignan de igual forma que en la homología clásica y cuyo grado se asigna según

$$M \cong \Sigma^0 \mathbb{R}[x] \oplus \Sigma^0 \mathbb{R}[x]/(x) \oplus \Sigma^0 \mathbb{R}[x]/(x) \oplus \Sigma^1 \mathbb{R}[x]/(x) \quad (2.19)$$

Figura 2.5: Descomposición de M visto como módulo graduado sobre $\mathbb{R}[x]$.

la regla: $\deg M_p(i, j) = \deg e_j - \deg \hat{e}_i$, donde e_j pertenece a la base del R -módulo de cadenas C_p y \hat{e}_i pertenece a la base del R -módulo de cadenas C_{p-1} . Además en este caso la reducción es mucho más sencilla porque cualquier monomio no nulo de $F[x]$ divide a cualquier otro con un grado igual o mayor. De hecho no es necesario llegar a la forma normal de Smith, sino que basta con ordenar adecuadamente las filas y las columnas de la matriz M_p y llevarla a una forma escalonada por columnas. A partir de estas matrices transformadas podemos deducir en cuántos submódulos indescomponibles se puede descomponer cada módulo de homología persistente, qué grado tienen, cuáles son libres, cuáles tienen torsión y a partir de qué grado la tienen.

Esta clasificación, que sólo aplica cuando el anillo de coeficientes es un cuerpo, nos da n submódulos libres y m submódulos de torsión. Para dar una representación más sencilla y visual de esta descomposición, definimos los códigos de barras.

Definición 2.20. Sea $M = \bigoplus_{i=1}^n \Sigma^{\alpha_i} F[x] \oplus \bigoplus_{j=1}^m \Sigma^{\gamma_j} F[x]/(x^{n_j})$ un módulo de persistencia finitamente generado sobre $F[x]$. Por cada submódulo $\Sigma^{\alpha_i} F[x]$ consideramos el intervalo semi-infinito $[\alpha_i, \infty)$ y por cada submódulo $\Sigma^{\gamma_j} F[x]/(x^{n_j})$ consideramos el intervalo finito $[\gamma_j, \gamma_j + n_j)$. Definimos el código de barras $B(M)$ como el multiconjunto de estos $n + m$ intervalos.

El código de barras se define como multiconjunto porque algunos intervalos podrían tener multiplicidades. Gracias al teorema de estructura, podemos decir que el código de barras es un invariante completo para los módulos de persistencia y aportan una parametrización que es única salvo isomorfismo.

Los intervalos del código de barras permiten interpretar la evolución de la homología en una filtración de complejos simpliciales o celulares. Sea una filtración y consideremos el código de barras de su homología persistente p -ésima. Un intervalo semiinfinito $[\alpha_i, \infty)$ representa una clase de homología p -ésima que aparece por primera vez en el complejo K^{α_i} y sigue apareciendo en todos los complejos que siguen (se dice que esta clase “persiste” infinitamente). Un intervalo finito $[\gamma_j, \gamma_j + n_j)$ representa una clase que nace en el complejo K^{γ_j} pero sólo persiste n_j etapas, porque en el complejo $K^{\gamma_j + n_j}$ aparece una nueva $(p + 1)$ -cadena que tiene a su representante por borde, haciendo que éste vaya al denominador del cociente y se anule.

Cuando la homología persistente se aplica al análisis de datos, los intervalos largos se suelen asociar con características topológicas importantes del conjunto de datos mientras que los intervalos cortos se suelen asociar con errores o ruido dados por el muestreo. De hecho existen técnicas de inferencia estadística para contrastar si una determinada barra del código es significativa o por contra se puede ignorar.

Una alternativa equivalente a los códigos de barras son los llamados diagramas de persistencia. Esta representación visual de los módulos de persistencia, más geométrica que los códigos de barras, nos permite definir de una forma sencilla una medida de similitud entre módulos de persistencia, que será útil para conseguir resultados de estabilidad.

Definición 2.21. Sea M un módulo de persistencia sobre F y sea $B(M) = \{[b_i, d_i]\}_i$ su código de barras asociado. Definimos el diagrama de persistencia de M como $D(M) = \{(b_i, d_i) \in [0, \infty]^2 \mid [b_i, d_i] \in B(M)\} \cup d_+$, donde d_+ es la diagonal $d_+ = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}_+\}$.

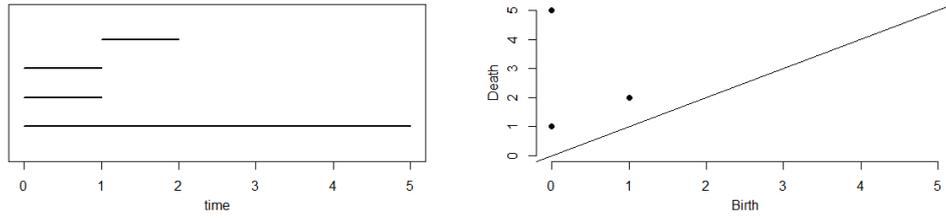


Figura 2.6: Código de barras y diagrama de persistencia del módulo M . Nótese que en el diagrama de persistencia el punto $(0, 1)$ es doble.

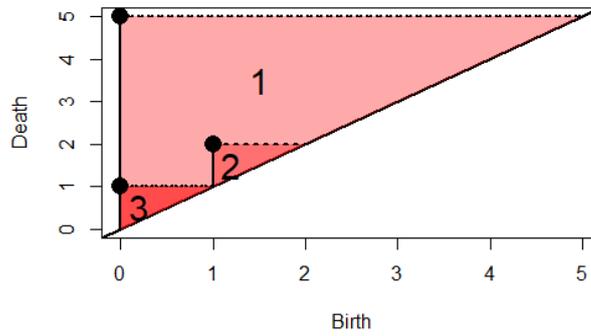


Figura 2.7: Triángulos $\mathcal{T}^{b,d}$ para el módulo M . Según el lema 2.1, contando cuántos triángulos se superponen sobre un punto (p, l) sabemos el rango de $f^{l,p}$

Por construcción, todos los puntos no diagonales del diagrama de persistencia se encuentran en el primer cuadrante del plano real extendido, y por encima de d_+ . En esta representación, los puntos más alejados de la diagonal se corresponden con las clases de homología más persistentes, mientras que los puntos cercanos a ella se corresponden con clases de corta duración.

Este diagrama no solo explica completamente cuándo nace cada clase de homología y cuándo desaparece, sino que además nos da información sobre todas los homomorfismos $\iota_{i,j}$ mediante el siguiente lema:

Lema 2.1 (de los triángulos, [11]). *Sea M un módulo de persistencia sobre F y sea $D(M)$ su diagrama de persistencia. Por cada punto $(b, d) \in D(M)$, se define $\mathcal{T}^{b,d}$ como el triángulo dado por las desigualdades:*

$$\mathcal{T}^{b,d} = \{(x, y) \in [-\infty, \infty]^2 \mid x \geq b, y < d, y \geq x\} \quad (2.20)$$

El número de triángulos $\mathcal{T}^{(b,d)}$ que se superponen sobre el punto (l, p) coincide con el rango del homomorfismo $f^{l,p}$.

Este invariante describe completamente a los módulos de persistencia sobre F , y además, dada su naturaleza geométrica, nos permite dar una medida de distancia entre módulos, lo cual nos será útil para probar teoremas de estabilidad.

Definición 2.22. *Sean dos diagramas de persistencia D y D' . La distancia bottleneck entre D y D' es:*

$$d_B(D, D') = \inf_{\phi \in \Phi} \sup_{x \in D} \|x - \phi(x)\|_\infty \quad (2.21)$$

donde Φ es el conjunto de todas las biyecciones entre D y D' . En ambos casos, si no existe el ínfimo, se dice que la distancia entre D y D' es infinita.

A la hora de calcular estas biyecciones, hay que tener en cuenta que d_+ también es parte de D , que algunos puntos pueden ser múltiples y otros pueden estar en la recta del infinito.

El teorema de estabilidad que vamos a explicar está enfocado al análisis de datos, donde es usual separar los datos con funciones de filtro. Por ello, necesitamos explicar cómo se puede crear una filtración a partir de una función real.

Definición 2.23. *Sea F un cuerpo. Una función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice tame si, al variar $a \in \mathbb{R}$, el F -espacio vectorial de homología $H_p(f^{-1}(-\infty, a])$ siempre es de dimensión finita y sólo cambia un número finito de veces.*

Dado un espacio topológico X y una función tame $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, se puede definir una filtración indexada en \mathbb{R} dada por: $X^t = \{x \in X | f(x) \leq t\}$. Este procedimiento se puede ampliar para filtrar un complejo simplicial o un complejo celular. Con este método, se puede probar el siguiente teorema:

Teorema 2.4 (de estabilidad para diagramas de persistencia, [8]). *Sea X un espacio triangulable y sean $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tame. Supongamos que se construyen sendas filtraciones por conjuntos de subnivel de f y g y sean $D_n(f)$ y $D_n(g)$ sus diagramas de persistencia de dimensión n asociados. Entonces los diagramas de persistencia satisfacen la desigualdad:*

$$d_B(D_n(f), D_n(g)) \leq \|f - g\|_\infty \quad (2.22)$$

Es decir, que una pequeña perturbación en la función de filtro induce un cambio pequeño en la estructura de nuestros módulos de homología. Mientras que una pequeña perturbación en la función de filtro puede cambiar sustancialmente la homología simplicial de un complejo X^t concreto, la homología persistente de la filtración se mantiene bajo control.

Este resultado es el inicio de toda una teoría sobre la estabilidad en módulos de persistencia, sin tener que ceñirnos al análisis de datos ni a un único método para construir los módulos de persistencia. De momento preferimos dejarlo en este caso particular para centrarnos en ella en próximos capítulos.

2.2.4. Problemas de clasificación para módulos con coeficientes enteros

Los módulos de persistencia sobre un cuerpo F son fácilmente computables y tienen muchas buenas propiedades, pero ofrecen una información muy pobre cuando intentamos analizar la homología persistente de un objeto topológico con torsión como un plano proyectivo o una botella de Klein. A nivel de homología, la mejor elección posible es tomar los coeficientes enteros porque es la que mejor explica la relación entre ciclos y bordes de un espacio mientras que los coeficientes en un cuerpo sólo nos dan una aproximación. Por eso lo ideal sería conseguir una teoría similar a la antes explicada que nos permitiera clasificar los \mathbb{Z} -módulos de persistencia y asignarles invariantes completos, computables y estables. No obstante, esta tarea no va a ser posible y tendremos que conformarnos con soluciones incompletas [25].

Lo primero que falla para que no podamos clasificar completamente los módulos de persistencia sobre \mathbb{Z} es que el teorema de Krull-Schmidt no se puede aplicar. Sea por ejemplo un

módulo de persistencia M con $T = \mathbb{N}$ donde el único grupo no nulo es $M^0 = \mathbb{Z}$, dado por el diagrama:

$$\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \quad (2.23)$$

Podemos crear una sucesión descendente de submódulos, donde N_i tiene todos sus grupos nulos excepto $N_i^0 = (2^i) \subset \mathbb{Z}$. Esta cadena descendente no se estabiliza nunca, y por tanto no se verifica la propiedad CCD. Como esta propiedad no se verifica en general no se puede usar el teorema de Krull-Schmidt y no sabemos si un \mathbb{Z} -módulo se descompone de forma única como suma de indescomponibles.

Además, en este caso el conjunto de indescomponibles no está tan acotado como en el anterior, pues si bien los módulos intervalares \mathbb{Z}_I son indescomponibles no son los únicos que existen. Por ejemplo, el módulo de persistencia

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (2.24)$$

también es indescomponible, al igual que el módulo

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (2.25)$$

donde $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es un homomorfismo tal que $f(1) = [1]$. Por otra parte, si intentáramos calcular una homología persistente, la reducción de matrices también es problemática porque el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[x]$ no es un dominio de ideales principales. Por ejemplo, sea el ideal $(2t, t^2)$. El máximo común divisor de los generadores es 1, pero no podemos generar el 1 como combinación lineal de estos dos por la graduación del anillo. Esto implica que al intentar reducir no siempre podremos calcular el máximo común divisor de dos elementos y no siempre podremos conseguir ceros donde queramos.

Entonces, con los resultados teóricos de que disponemos a día de hoy, no podemos dar una clasificación completa de los módulos de persistencia sobre \mathbb{Z} pero sí podemos estudiar sus propiedades para buscar invariantes que aunque no den toda la información posible sí sean computables y estables.

2.2.5. Cálculo de grupos persistentes

El primer intento por estudiar la homología persistente sobre \mathbb{Z} se hizo en el artículo [25] de Carlsson y Zomorodian, donde solo se considera el conjunto de índices $T = \mathbb{N}$. El invariante que se propone es el conjunto de todos los grupos de persistencia $H_p^{i,j}$, con fórmula:

$$H_p^{i,j} = \frac{Z_p^i}{B_p^j \cap Z_p^i} \quad (2.26)$$

Cuando los coeficientes están en un cuerpo, este invariante nos permite reconstruir el diagrama de persistencia y el código de barras gracias al lema de los triángulos. No disponemos de un resultado similar cuando los coeficientes son enteros pero al menos disponemos de un invariante para los módulos de persistencia sobre \mathbb{Z} .

El algoritmo que se propone para calcular los grupos $H_p^{i,j}$ se basa en la definición dada por el cociente y requiere hacer hasta cuatro veces una forma normal de Smith por cada par $i \leq j$. No es muy eficiente pero es la primera solución que se propuso para estudiar la homología

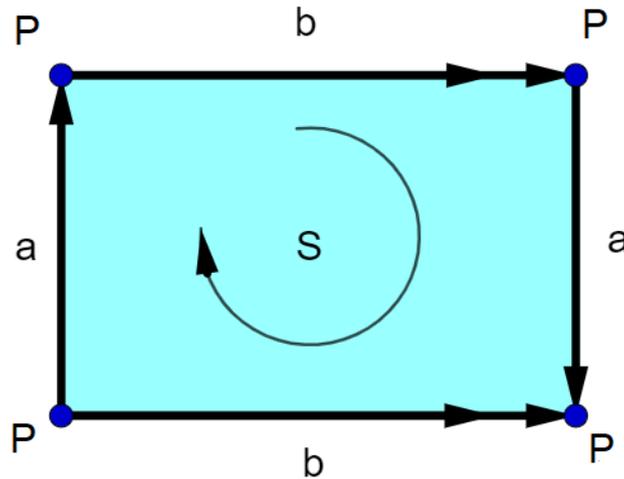


Figura 2.8: Botella de Klein

persistente sobre \mathbb{Z} y merece la pena comentarla. No se conocen resultados sobre la estabilidad de este invariante, aunque sí para su versión para coeficientes en un cuerpo [6].

En los próximos capítulos presentaremos otros enfoques que han dado otros autores para estudiar este problema y analizaremos sus ventajas y desventajas e intentaremos buscar conexiones entre ellos para dar resultados nuevos.

2.3. Ejemplos para el cálculo de la homología persistente

En esta sección vamos a presentar los tres complejos celulares que usaremos de ejemplo para ilustrar las definiciones y los resultados que veremos en los próximos capítulos. En todo momento, cuando escribamos G_e , estaremos denotando un grupo isomorfo a G generado por un único elemento que es la clase de homología $[e]$.

2.3.1. Botella de Klein

La botella de Klein K es un espacio topológico clásico, y es uno de los ejemplos más conocidos de objeto con torsión. Aunque es una superficie y por tanto tiene dimensión topológica 2, no existe forma de hacer una inmersión de la botella de Klein en el espacio euclídeo tridimensional sin que la superficie se corte a sí misma. Entonces vamos a usar otra forma de representarla visualmente. En la figura 2.8 podemos ver una representación plana de este objeto. Para formar la botella de Klein a partir de este rectángulo, hay que identificar los cuatro vértices en uno solo al que llamaremos P , y luego identificar los dos pares de aristas a, b según el sentido que indican las flechas. El interior del rectángulo S se queda como está.

Este complejo celular K se va a filtrar de la siguiente forma:

1. Se incluye el vértice P .
2. Se incluye la 1-célula a , cuyo borde es $\partial_1 a = P - P = 0$.
3. Se incluye la 1-célula b , cuyo borde es $\partial_1 b = P - P = 0$.
4. Se incluye la 2-célula S , cuyo borde es $\partial_2 S = a + b + a - b = 2a$.

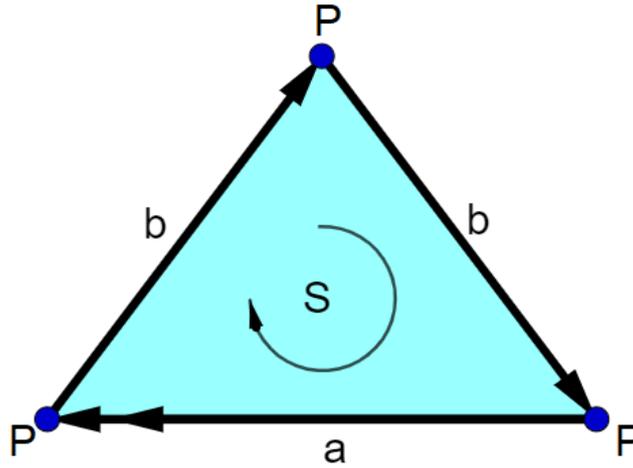


Figura 2.9: Sombrero bobo

Según esta filtración, las matrices M_1 y M_2 que tendríamos que reducir a su forma normal de Smith para hacer la clasificación son:

$$M_1 = \left(\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline P & 0 & 0 \end{array} \right) \quad M_2 = \left(\begin{array}{c|c} S & \\ \hline a & 2x^2 \\ b & 0 \end{array} \right)$$

Donde el monomio $2x^2$ indica que S aparece por primera vez dos etapas más tardes que a y que su borde es $2a$. Este es un caso concreto de filtración donde sí podemos llevar a las matrices a su forma normal de Smith aunque $\mathbb{Z}[x]$ no sea un dominio de ideales principales.

Consideremos la homología de dimensión 1 en cada etapa de la filtración. Por comodidad no escribiremos más veces la dimensión de la que estamos hablando. En ese caso tenemos que $H_1^1(K) = \{0\}$ porque aún no hay 1-células en el complejo, $H_1^2(K) = \mathbb{Z}_a$ porque a es un ciclo que no es borde de ninguna 2-célula, $H_1^3(K) = \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b$ porque el nuevo ciclo b no es borde de ninguna célula, y $H_1^4(K) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b$ porque al aparecer S en el complejo, la cadena $2a$ pasa a ser un borde y se anula en el cociente.

La aplicación $\rho_1^{1,2}$ es nula porque $H_1^1(K) = \{0\}$. La aplicación $\rho_1^{2,3}$ es una inclusión trivial, donde $a \mapsto a$. La aplicación $\rho_1^{3,4}$ también es bastante sencilla de describir. La clase $[a]$ que genera el submódulo $\mathbb{Z}_a \subset H_1^3(K)$ va en la clase $[a]$ que genera el submódulo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}_a \subset H_1^4(K)$, pero hay que tener en cuenta que por ejemplo $\rho_1^{3,4}([2a]) = [2a] = [0] \in H_1^4(K)$. Por otra parte, $\rho_1^{3,4}([b]) = [b] \in H_1^4(K)$. Vamos a poner toda esta información junta en el siguiente diagrama:

$$0 \xrightarrow{[0]} \mathbb{Z}_a \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b \longrightarrow \dots \quad (2.27)$$

En este diagrama las matrices indican cómo se relacionan los generadores de unos grupos con los de otros.

2.3.2. Sombrero bobo

El sombrero bobo L es otro espacio clásico donde la homología de dimensión 1 tiene torsión. En la figura 2.9 podemos ver una representación plana del mismo. AL igual que antes, los tres vértices del triángulo se deben identificar como uno solo al que llamamos P , y las dos aristas

llamadas b se identifican según el sentido de las flechas. El orden en que creamos esta filtración es el siguiente:

1. Se incluye el vértice P .
2. Se incluye la 1-célula a , cuyo borde es $\partial_1 a = P - P = 0$.
3. Se incluye la 1-célula b , cuyo borde es $\partial_1 b = P - P = 0$.
4. Se incluye la 2-célula S , cuyo borde es $\partial_2 S = a + b + b = a + 2b$.

Según esta filtración, las dos matrices que habría que reducir a su forma normal de Smith son:

$$M_1 = \left(\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline P & 0 & 0 \end{array} \right) \quad M_2 = \left(\begin{array}{c|c} S & \\ \hline a & x^2 \\ b & 2x \end{array} \right)$$

Los exponentes de los monomios se explican porque S aparece dos etapas después de a y una después que b . En este caso no podemos llevar a la matriz M_2 a una forma diagonal porque el ideal $(2x, x^2) \subset \mathbb{Z}[x]$ no es principal.

Calculamos los grupos de homología de dimensión 1 en todas las etapas de la filtración de L . Tenemos que $H_1^1(L) = 0$ porque aún no hay 1-células en L . Razonando igual que para la botella de Klein, tenemos que $H_1^2(L) = \mathbb{Z}_a$ y $H_1^3(L) = \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b$. El cálculo de $H_1^4(L)$ es más complejo, y vamos a detallarlo. En la etapa 4 de la filtración todas las 1-cadenas son 1-ciclos porque están generadas por a y b , que son 1-ciclos. Entonces $\ker \partial_1 = \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b$ y nos faltaría calcular los 1-bordes de $\text{Im } \partial_2$ en la etapa 4. La matriz de ∂_2 en la etapa 4 sería:

$$M_2 = \left[\begin{array}{c|c} S & \\ \hline a & 1 \\ b & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2 - 2 \cdot F_1} \left[\begin{array}{c|c} S & \\ \hline a + 2b & 1 \\ b & 0 \end{array} \right]$$

Lo que hemos hecho al llevar esta matriz a su forma normal de Smith es cambiar la base del grupo de 1-ciclos, que dijimos que era $\mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b$, y escribirlo de forma equivalente como $\mathbb{Z}_{a+2b} \oplus \mathbb{Z}_b$. Entonces, tenemos que:

$$H_1^4(L) = \frac{\ker \partial_1}{\text{Im } \partial_2} = \frac{\mathbb{Z}_{a+2b} \oplus \mathbb{Z}_b}{\mathbb{Z}_{a+2b}} = \mathbb{Z}_b$$

Ahora nos falta ver cómo son las aplicaciones de estructura. Las aplicaciones $\rho_1^{1,2}$ y $\rho_1^{2,3}$ son iguales que en la botella de Klein. Veamos cómo actúa $\rho_1^{3,4}$. Dada una clase de $H_1^3(L)$, tomamos su representante, que es un 1-ciclo, y lo llevamos al grupo de 1-ciclos de la etapa 4 por inclusión. Allí expresamos este representante en términos de la nueva base calculada al hacer la reducción de antes, y eliminamos la parte correspondiente al cociente. Queda mejor explicado viendo lo que le pasa a la clase $[a] \in H_1^3$:

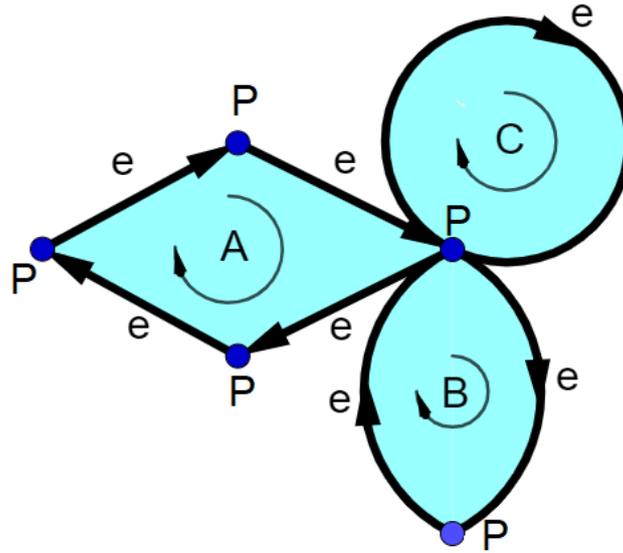


Figura 2.10: Complejo 4-2-1

$$\begin{aligned}
 \rho_1^{3,4}([a]) &= [i_1^{3,4}(a)] && \text{(por definición de } \rho_1^{3,4}) \\
 &= [a] && \text{(por definición de } i_1^{3,4}) \\
 &= [a + 2b - 2b] && \text{(hacemos el cambio de base)} \\
 &= [-2b] && \text{(porque } [a + 2b] = [0]) \\
 &= -2[b]
 \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo razonamiento, es claro que $\rho_1^{3,4}([b]) = [b]$. Por tanto, ya tenemos descritas las aplicaciones de estructura y nos queda el diagrama:

$$0 \xrightarrow{[0]} \mathbb{Z}_a \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b \xrightarrow{\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{Z}_b \longrightarrow \dots \tag{2.28}$$

2.3.3. Complejo 4-2-1

Este es otro complejo celular de invención propia que hemos diseñado para ver qué sucede cuándo tomamos una misma clase de homología y le aplicamos distintas torsiones sucesivas a lo largo de la filtración. Se puede consultar su representación plana en la figura 2.10, aunque es bastante más complejo que en los dos ejemplos anteriores.

El orden en el que filtramos este complejo es el siguiente:

1. Se incluye el vértice P .
2. Se incluye la 1-célula e , con borde $\partial_1 e = P - P = 0$.
3. Se incluye la 2-célula A , con borde $\partial_2 A = 4e$.
4. Se incluye la 2-célula B , con borde $\partial_2 B = 2e$.
5. Se incluye la 2-célula C , con borde $\partial_2 C = e$.

Este orden en la filtración es el motivo por el que lo hemos llamado complejo $4 - 2 - 1$, porque la homología de dimensión 1 se tuerce primero por un factor 4, luego por un factor 2 y luego por un factor 1. Las matrices que habría que llevar a su forma normal de Smith son:

$$M_1 = \left(\begin{array}{c|c} & e \\ \hline P & 0 \end{array} \right) \quad M_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline e & 4x & 2x^2 & x^3 \end{array} \right)$$

M_2 tampoco se puede llevar a su forma normal de Smith porque el ideal $(4x, 2x^2, x^3) \subset \mathbb{Z}[x]$ no es principal y por tanto no podemos hacer ceros en esa fila.

Calculemos los grupos de homología de dimensión 1 en todas las etapas de la filtración. A partir de la etapa 2 el grupo de 1-ciclos siempre está generado por e , y no hacen falta calcular cambios de base como antes. En la etapa 2 no hay 2-células, entonces $H_1^2 = \mathbb{Z}_e$. En la etapa 3, el grupo de 1-bordes está generado por $4e$, por lo tanto $H_1^3 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}_e$. En la etapa 4, el grupo de 1-bordes está generado por $4e$ y $2e$, que es lo mismo que decir que está generado solo por $2e$. Por tanto, $H_1^4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}_e$. En la etapa 5, el grupo de los 1-bordes contiene a e , por lo tanto $H_1^5 = 0$. Las aplicaciones de estructura son triviales, quedando el diagrama como:

$$0 \xrightarrow{[0]} \mathbb{Z}_e \xrightarrow{[1]} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}_e \xrightarrow{[1]} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}_e \xrightarrow{[0]} 0 \longrightarrow \dots \quad (2.29)$$

Capítulo 3

Grupos BD

En este capítulo presentaremos algunos invariantes que se han propuesto para estudiar la homología persistente con coeficientes enteros y profundizaremos en algunas de sus propiedades. También buscaremos conexiones entre estos invariantes y otros que originalmente fueron propuestos para el caso con coeficientes en un cuerpo, en un intento por unificar ambas líneas de trabajo. Más tarde, en el capítulo 4, trataremos de ampliar la teoría a un marco más general donde se puedan probar resultados de estabilidad para \mathbb{Z} -módulos de persistencia.

A lo largo de este capítulo vamos a suponer que $R = \mathbb{Z}$, por lo que los R -módulos que iremos definiendo serán realmente grupos, y así los llamaremos por simplicidad. También vamos a suponer que tenemos un complejo K (simplicial o celular) finito que se construye en m etapas perfectamente diferenciadas, dando lugar a una sucesión de complejos:

$$\emptyset = K^0 \subset K^1 \subset K^2 \subset \dots \subset K^m = K \subset K^{m+1} \subset \dots \quad (3.1)$$

Como este complejo se construye en m etapas, $K^l = K^m$ para todo $l \geq m$. Dado un entero n , esta sucesión de complejos anidados define un complejo de cadenas filtrado indexado por $T = \mathbb{N}$, y por tanto un módulo de homología persistente

$$0 = H_n^0 \xrightarrow{\rho_n^{0,1}} H_n^1 \xrightarrow{\rho_n^{1,2}} H_n^2 \xrightarrow{\rho_n^{2,3}} \dots \xrightarrow{\rho_n^{m-1,m}} H_n^m \xrightarrow{\rho_n^{m,m+1}} \dots \quad (3.2)$$

donde H_n^i es el grupo de homología n -ésima del complejo K_i y la aplicación de estructura $\rho_n^{i,i+1}$ es el homomorfismo inducido por la inclusión entre los complejos de cadenas $\mathcal{C}(K^i)$ y $\mathcal{C}(K^{i+1})$. Este módulo de persistencia verifica que $H_n^l = H_n^m$ para todo $l \geq m$, por lo que simplemente se puede representar como:

$$0 = H_n^0 \xrightarrow{\rho_n^{0,1}} H_n^1 \xrightarrow{\rho_n^{1,2}} H_n^2 \xrightarrow{\rho_n^{2,3}} \dots \xrightarrow{\rho_n^{m-1,m}} H_n^m \quad (3.3)$$

3.1. Definición y propiedades de los grupos BD

Toda la teoría de esta sección se puede consultar en el artículo [21], que aunque no ha llegado a publicarse ha sido citado en otras publicaciones ([15], [16], [20], [13]). Este artículo contiene un buen número de definiciones y resultados nuevos, pero apenas tiene demostraciones porque en general los autores las consideran fáciles o incluso elementales. Nosotros en cambio vamos a incluir todas las pruebas que sean necesarias para la correcta comprensión de los resultados que se afirman.

Esta aproximación al problema se basa en el estudio de intervalos. Las definiciones y propiedades que se dan en el artículo [21] están hechas para analizar intervalos infinitos, y se ven en el apartado 3.1.1. Después, en el apartado 3.1.2 daremos unas definiciones de creación propia que generalizan estos resultados para el estudio de intervalos infinitos. Finalmente, en el apartado 3.1.3 combinamos todo lo anterior para definir una alternativa que generalice los códigos de barras que vimos en la definición 2.20.

3.1.1. Grupos BD para intervalos finitos

El primer tipo de grupos que vamos a definir está inspirado en uno que ya se definió en el capítulo anterior.

Definición 3.1. *Los grupos persistentes son las imágenes de los homomorfismos $\rho_n^{i,j}$:*

$$H_n^{i,j} = \text{Im } \rho_n^{i,j} = \rho_n^{i,j}(H_n^i) \subset H_n^j \quad \text{para todo } 0 \leq i \leq j \leq m \quad (3.4)$$

Los autores de [21] usan para esta definición la misma notación que usaron los autores de [25] para la ecuación 2.26, pero son grupos distintos. El grupo $H_n^{i,j}$ que se define en el capítulo anterior es un subgrupo de H_n^i , mientras que nuestro grupo $H_n^{i,j}$ que acabamos de definir ahora es un subgrupo de H_n^j . No obstante, ambos grupos tienen un significado similar: representa las clases de homología n -ésima que estaban vivas en la etapa i y siguen vivas en la etapa j . La diferencia está en cuál de los etapas usas como referencia para hacer los cálculos, pero ambos grupos son isomorfos.

Proposición 3.1 (original). *La definición 3.1 y la ecuación 2.26 dan la misma información, es decir, existe un isomorfismo de grupos:*

$$\frac{Z_n^i}{B_n^j \cap Z_n^i} \cong H_n^{i,j} = \rho_n^{i,j}(H_n^i) \quad (3.5)$$

Demostración. Recordemos en primer lugar que Z_n^i es el grupo de n -ciclos que hay en el complejo K^i y B_n^j es el grupo de n -bordes del complejo K^j . Entonces podemos escribir $H_n^{i,j}$ como $\rho_n^{i,j}(Z_n^i/B_n^j)$. Entonces la aplicación que va a dar el isomorfismo de grupos será $f : Z_n^i/(B_n^j \cap Z_n^i) \rightarrow H_n^j = Z_n^j/B_n^j$, con fórmula:

$$[a] \in \frac{Z_n^i}{B_n^j \cap Z_n^i} \mapsto f([a]) = [i_n^{i,j}(a)] = [a] \in Z_n^j/B_n^j \quad (3.6)$$

En primer lugar vemos que la aplicación está bien definida, pues si $a \in Z_n^i$, entonces $f([a]) = [a] \in Z_n^j$ y si $b \in B_n^j \cap Z_n^i$, entonces $f([b]) = [b] \in B_n^j$ y por tanto $f([b]) = [0]$. Esto nos garantiza que la aplicación no depende del representante escogido, es decir, que si $[a] = [b]$, entonces $f([a]) = f([b])$.

Además tenemos que $\text{Im } f = \rho_n^{i,j}(H_n^{i,j})$ porque realmente $\rho_n^{i,j}$ opera igual que f sobre los representantes pero sobre un cociente distinto. Entonces, todos los representantes de un grupo coinciden con los representantes del otro.

Veamos ahora que f es inyectiva. Sea una clase $[a] \in Z_n^i/(B_n^j \cap Z_n^i)$ tal que $f([a]) = 0 \in H_n^j$. Esto quiere decir que $a \in B_n^j$, y por tanto se puede decir que $a \in B_n^j \cap Z_n^i$, es decir, que $[a] = 0 \in Z_n^i/(B_n^j \cap Z_n^i)$.

Por ser f inyectiva, es un isomorfismo sobre su imagen y tenemos el resultado deseado. \square

Ya dijimos que en el caso con coeficientes enteros estos grupos no bastan para describir la homología, como sí bastaba en el caso con coeficientes en un cuerpo. No obstante nos van a ser útiles para crear otros grupos que complementen la información sobre el módulo de persistencia. Para poder definir y entender correctamente esos nuevos grupos, antes hemos de probar un pequeño lema sobre los $H^{i,j}$.

Lema 3.1 ([21]). *Fijado un j , los grupos persistentes $H_n^{*,j}$ satisfacen la siguiente cadena de contenciones:*

$$0 = H_n^{0,j} \subset H_n^{1,j} \subset H_n^{2,j} \subset \dots \subset H_n^{j,j} = H_n^j \quad (3.7)$$

Demostración. (original) Lo que debemos probar en esta cadena de contenciones son las dos igualdades de los extremos y las contenciones intermedias. En primer lugar, por ser $H_n^0 = 0$ es claro que $H_n^{0,j} = \rho_n^{0,j}(0) = 0$. Además, por la definición de módulo de persistencia, $\rho_n^{j,j} = Id_{H_n^j}$, por lo cual tenemos que $H_n^{j,j} = \rho_n^{j,j}(H_n^j) = Id_{H_n^j}(H_n^j) = H_n^j$.

Sea ahora un $i \leq j - 1$. Por ser la homología un módulo de persistencia, se cumple que $\rho_n^{i,j} = \rho_n^{i+1,j} \circ \rho_n^{i,i+1}$. Por tanto, $H_n^{i,j} = \rho_n^{i,j}(H_n^i) = \rho_n^{i+1,j}(\rho_n^{i,i+1}(H_n^i)) = \rho_n^{i+1,j}(H_n^{i,i+1})$. Por la definición 3.1, se tiene que $H_n^{i,i+1} \subset H_n^{i+1}$ y por tanto $\rho_n^{i+1,j}(H_n^{i,i+1}) \subset \rho_n^{i+1,j}(H_n^{i+1})$, que es lo mismo que decir que $H_n^{i,j} \subset H_n^{i+1,j}$. \square

Sea por ejemplo un módulo de persistencia creado en cinco etapas, es decir:

$$0 = H_n^0 \longrightarrow H_n^1 \longrightarrow H_n^2 \longrightarrow H_n^3 \longrightarrow H_n^4 \longrightarrow H_n^5 \quad (3.8)$$

. En virtud del lema 3.1, podemos tomar H_n^3 y crear la cadena de contenciones:

$$0 = H_n^{0,3} \subset H_n^{1,3} \subset H_n^{2,3} \subset H_n^{3,3} = H_n^3 \quad (3.9)$$

Ahora definiremos los grupos $H_n^{i,k,j}$, que son un poco más complicados que los grupos $H_n^{i,j}$.

Definición 3.2. *Dados $0 \leq i \leq k \leq j \leq m$, definimos el grupo $H_n^{i,k,j}$ como:*

$$H_n^{i,k,j} = H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j}) \subset H_n^k \quad (3.10)$$

Según los propios autores del artículo [21], el grupo $H_n^{i,k,j}$ contiene las clases de H_n^k que están en $H_n^{i-1,k}$, y además a las clases de H_n^k que nacen justo en H_n^i y mueren al entrar en H_n^j o antes. Estos grupos nos servirán para dar una filtración más fina de los grupos H_n^j , como puede verse en este lema.

Lema 3.2 ([21]). *Fijados i, k , los grupos $H_n^{i,k,*}$ satisfacen la siguiente cadena de contenciones entre $H_n^{i-1,k}$ y $H_n^{i,k}$:*

$$H_n^{i-1,k} = H_n^{i,k,k} \subset H_n^{i,k,k+1} \subset H_n^{i,k,k+2} \subset \dots \subset H_n^{i,k,m} \subset H_n^{i,k} \quad (3.11)$$

Demostración. (original) Todos los grupos de la cadena están contenidos en $H_n^{i,k}$ porque la propia definición 3.2 nos dice que $H_n^{i,k,j}$ es la intersección de $H_n^{i,k}$ con otro grupo. Con respecto a la primera igualdad, si aplicamos la definición escribiendo k en el lugar de j tenemos que

$H_n^{i,k,k} = H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,k})^{-1}(H_n^{i-1,k})$. Por ser $\rho_n^{k,k} = Id_{H_n^k}$, tenemos que $H_n^{i,k,k} = H_n^{i,k} \cap Id_{H_n^k}^{-1}(H_n^{i-1,k}) = H_n^{i,k} \cap H_n^{i-1,k}$ y por la proposición 3.1 tenemos que $H_n^{i-1,j} \subset H_n^{i,j}$. Por tanto, $H_n^{i,k,k} = H_n^{i-1,k}$.

Ahora falta probar que dado un r con $r \leq m-1$, se da la contención $H_n^{i,k,r} \subset H_n^{i,k,r+1}$. El término $H_n^{i,k}$ es común a ambos grupos, por lo que basta probar que $(\rho_n^{k,r})^{-1}(H_n^{i-1,r}) \subset (\rho_n^{k,r+1})^{-1}(H_n^{i-1,r+1})$.

Sea $x \in (\rho_n^{k,r})^{-1}(H_n^{i-1,r})$. Esto quiere decir que $\rho_n^{k,r}(x) \in H_n^{i-1,r} = \rho_n^{i-1,r}(H_n^{i-1})$. Si a este elemento $\rho_n^{k,r}(x)$ le aplicamos $\rho_n^{r,r+1}$, tenemos que $\rho_n^{r,r+1}(\rho_n^{k,r}(x)) \in \rho_n^{r,r+1}(\rho_n^{i-1,r}(H_n^{i-1}))$, que es lo mismo que decir que $\rho_n^{k,r+1}(x) \in \rho_n^{i-1,r+1}(H_n^{i-1}) = H_n^{i-1,r+1}$ y por tanto que $x \in (\rho_n^{k,r+1})^{-1}(H_n^{i-1,r+1})$. Con esto queda completada la prueba. \square

Volviendo al módulo de persistencia con cinco etapas de la ecuación 3.8, si combinamos los lemas 3.1 y 3.2, podemos refinar la cadena de contenciones de la ecuación 3.9, dando lugar a:

$$0 = H_n^{0,3} = H_n^{1,3,3} \subset H_n^{1,3,4} \subset H_n^{1,3,5} \subset H_n^{1,3} = H_n^{2,3,3} \subset \quad (3.12)$$

$$\subset H_n^{2,3,4} \subset H_n^{2,3,5} \subset H_n^{2,3} = H_n^{3,3,3} \subset H_n^{3,3,4} \subset H_n^{3,3,5} \subset H_n^{3,3} = H_n^3 \quad (3.13)$$

Otro lema que nos será útil para usarlo en pruebas de teoremas más importantes es el siguiente, que nos muestra cómo se relacionan los grupos $H_n^{i,k,j}$ mediante las aplicaciones de estructura.

Proposición 3.2 ([21]). *Dados $0 \leq i \leq k \leq j \leq m$ tales que $k \leq j-1$, se cumple que:*

$$\rho_n^{k,k+1}(H_n^{i,k,j}) = H_n^{i,k+1,j} \quad (3.14)$$

Demostración. (original) El primer paso es descomponer $\rho_n^{k,k+1}(H_n^{i,k,j})$ como: $\rho_n^{k,k+1}(H_n^{i,k,j}) = \rho_n^{k,k+1}(H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j})) = \rho_n^{k,k+1}(H_n^{i,k}) \cap \rho_n^{k,k+1}((\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j}))$. Con respecto a la primera parte de la intersección, es claro que $\rho_n^{k,k+1}(H_n^{i,k}) = \rho_n^{k,k+1}(\rho_n^{i,k}(H_n^i)) = \rho_n^{i,k+1}(H_n^i) = H_n^{i,k+1}$. Con respecto a la segunda, tenemos que $\rho_n^{k,j} = \rho_n^{k+1,j} \circ \rho_n^{k,k+1}$ y por tanto $(\rho_n^{k,j})^{-1} = (\rho_n^{k+1,j})^{-1} \circ (\rho_n^{k,k+1})^{-1}$. Entonces,

$$\rho_n^{k,k+1}((\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j})) = \rho_n^{k,k+1}((\rho_n^{k,k+1})^{-1}((\rho_n^{k+1,j})^{-1}(H_n^{i-1,j}))) = (\rho_n^{k+1,j})^{-1}(H_n^{i-1,j})$$

. Intersecando ambos grupos, se llega a que $\rho_n^{k,k+1}(H_n^{i,k,j}) = H_n^{i,k+1,j}$. \square

Habiendo visto estas definiciones y estos lemas, ya estamos preparados para introducir el elemento central de este capítulo: los grupos BD .

Definición 3.3. *Sea el intervalo entero $I = [i, j]$ con $0 \leq i \leq j \leq m$. Dado $k \in I$, es decir, $i \leq k \leq j-1$, se define el grupo $BD_n^{I,k}$ como:*

$$BD_n^{I,k} = \frac{H_n^{i,k,j}}{H_n^{i,k,j-1}} \quad (3.15)$$

Este cociente tiene sentido porque según el lema 3.2, $H_n^{i,k,j-1} \subset H_n^{i,k,j}$. Según los autores del artículo, el grupo $BD_n^{I,k}$ debe interpretarse como el grupo de clases de homología de H_n^k que nacieron justo en H_n^i (*born* en inglés) y mueren justo al entrar en H_n^j (*dead* en inglés). La primera pregunta que nos planteamos es: si queremos saber qué clases nacen justo en H_n^i y mueren justo al llegar a H_n^j , ¿cómo afecta la elección del índice $k \in [i, j]$ en estos cálculos? La respuesta es que no afecta en nada, como probamos en el siguiente teorema.

Teorema 3.1 ([21]). *Dados $k, k' \in I = [i, j]$ con $k \leq k'$, existe un isomorfismo de grupos:*

$$BD_n^{I,k} \cong BD_n^{I,k'} \quad (3.16)$$

Demostración. (original) Realmente vamos a probarlo para el caso $k' = k + 1$, pero si probamos que este isomorfismo existe para dos índices consecutivos, por transitividad se extiende a todos los índices del intervalo I .

El isomorfismo que vamos a dar entre los grupos cocientes $BD_n^{I,k}$ y $BD_n^{I,k+1}$ viene inducido por la aplicación de estructura $\rho_n^{k,k+1}$, y tiene por fórmula:

$$\begin{aligned} \rho_n^{k,k+1} : \frac{H_n^{i,k,j}}{H_n^{i,k,j-1}} &\rightarrow \frac{H_n^{i,k+1,j}}{H_n^{i,k+1,j-1}} \\ [a] &\mapsto [\rho_n^{k,k+1}(a)] \end{aligned}$$

En primer lugar veamos que esta aplicación está bien definida. Sean dos elementos $a, b \in H_n^{i,k,j}$ que representen la misma clase, es decir, tales que $b - a \in H_n^{i,k,j-1}$ o dicho de otra forma $[a] = [b]$. Según la proposición 3.2, $\rho_n^{k,k+1}(H_n^{i,k,j-1}) = H_n^{i,k+1,j-1}$ y por tanto

$$\rho_n^{k,k+1}([b]) - \rho_n^{k,k+1}([a]) = \rho_n^{k,k+1}([b - a]) = [\rho_n^{k,k+1}(b - a)] = [0]$$

Entonces el resultado no depende del representante escogido. También es un homomorfismo porque $\rho_n^{k,k+1}$ lo es y los cocientes preservan la linealidad. La sobreyectividad se deduce de que también por la proposición 3.2, $\rho_n^{k,k+1}(H_n^{i,k,j}) = H_n^{i,k+1,j}$.

Veamos ahora que es inyectiva. Lo que hay que probar es que la clase nula de $BD_n^{I,k}$ es la única que va a la clase nula de $BD_n^{I,k+1}$ por $\rho_n^{k,k+1}$. Dicho de otra forma, hay que probar que si $a \in H_n^{i,k,j}$ y $\rho_n^{k,k+1}(a) \in H_n^{i,k+1,j-1}$, entonces $a \in H_n^{i,k,j-1}$. Sea

$$\rho_n^{k,k+1}(a) = b \in H_n^{i,k+1,j-1} = H_n^{i,k+1} \cap (\rho_n^{k+1,j-1})^{-1}(H_n^{i-1,j-1})$$

Como $b \in (\rho_n^{k+1,j-1})^{-1}(H_n^{i-1,j-1})$, tenemos que:

$$\rho_n^{k+1,j-1}(b) = \rho_n^{k+1,j-1}(\rho_n^{k,k+1}(x)) = \rho_n^{k,j-1}(a) \in H_n^{i-1,j-1}$$

Entonces, $a \in (\rho_n^{k,j-1})^{-1}(H_n^{i-1,j-1})$. Como además por estar $a \in H_n^{i,k,j}$ se tiene que $a \in H_n^{i,k}$, entonces se cumple que $a \in H_n^{i,k,j-1}$ y esto concluye la prueba. \square

Como el resultado es el mismo independientemente del punto donde se hagan los cálculos, la notación original del artículo ni siquiera considera nombres distintos para estos grupos, sino que define directamente:

$$BD_n^{i,j} = \frac{H_n^{i,i,j}}{H_n^{i,i,j-1}} = \frac{H_n^{i,i+1,j}}{H_n^{i,i+1,j-1}} = \cdots = \frac{H_n^{i,j-2,j}}{H_n^{i,j-2,j-1}} = \frac{H_n^{i,j-1,j}}{H_n^{i,j-1,j-1}} \quad (3.17)$$

Nótese que en la notación original no se nombra al intervalo $I = [i, j]$ sino a sus extremos, y tampoco se especifica en qué punto k se hacen los cálculos. Estos cambios en la notación se han introducido para poder adaptar de una forma más cómoda estos conceptos al lenguaje más usado en la teoría de módulos de persistencia y presentar de una forma más cómoda los distintos teoremas que iremos probando.

Según los autores del artículo [21], en el caso con coeficientes en un cuerpo los grupos $H_n^{i,j}$ nos permiten conocer los grupos $BD_n^{l,k}$ y viceversa. No obstante, en el caso con coeficientes enteros la situación no es tan favorable. Conocer solo la estructura de los grupos $H_n^{i,j}$, $H_n^{i,k,j}$ no basta para determinar los $BD_n^{l,k}$ porque podrían haber problemas para determinar los cocientes. Por ejemplo, el cociente entre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ podría ser o bien $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ o bien $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Sin conocer la relación entre los generadores de ambos grupos no se puede saber cuál es la opción correcta. Recíprocamente, conocer solo la estructura de los grupos $BD_n^{l,k}$ tampoco nos dice nada sobre los grupos $H_n^{i,j}$ y los $H_n^{i,k,j}$. Por tanto, según los autores, para comprender completamente la homología persistente de un complejo K es necesario calcular separadamente los grupos $H_n^{i,j}$, $H_n^{i,k,j}$ y $BD_n^{l,k}$.

Realmente no estamos de acuerdo al cien por ciento con esta última afirmación porque, tal y como están definidos los grupos $BD_n^{l,k}$, hay información que no se da. El grupo $BD_n^{(i,j),k}$ nos dice qué clases de homología nacen en H_n^i y mueren al entrar en H_n^j pero, ¿qué sucede con las clases de homología que nacen en H_n^i pero no mueren nunca? Habría que ampliar las definiciones para contemplar el estudio de intervalos infinitos, pues recordemos que a partir de H_n^m el módulo de persistencia continúa aunque se mantenga estable.

3.1.2. Grupos BD con intervalos infinitos

Como todos los grupos de homología a partir de H_n^m son isomorfos, decir que una clase nacida en i no muere nunca es lo mismo que decir que llega viva al grupo H_n^m . Por eso tiene sentido dar la siguiente definición.

Definición 3.4 (original). *Sea el intervalo entero $I = [i, \infty)$ con $0 \leq i$. Se define el grupo BD_n^I como:*

$$BD_n^I = \frac{H_n^{i,m}}{H_n^{i-1,m}} \quad (3.18)$$

Este cociente es fácil de interpretar: son las clases de H_n^m que estaban vivas en H_n^i pero no lo estaban en H_n^{i-1} , y por tanto nacieron justo en H_n^i . Esta definición es sencilla de calcular y entender pero tiene el inconveniente de que sigue una fórmula distinta a la usada para intervalos finitos. Para poder dar una definición que siga la misma fórmula como cociente de dos grupos $H_n^{i,k,j}$, necesitamos truncar el módulo de persistencia:

$$0 = H_n^0 \xrightarrow{\rho_n^{0,1}} H_n^1 \xrightarrow{\rho_n^{1,2}} H_n^2 \xrightarrow{\rho_n^{2,3}} \dots \xrightarrow{\rho_n^{m-1,m}} H_n^m \xrightarrow{\rho_n^{m,m+1}} H_n^{m+1} \longrightarrow \dots \quad (3.19)$$

cambiando todos los grupos H_n^l con $l \geq m+1$ por el grupo trivial 0, quedando:

$$0 = H_n^0 \xrightarrow{\rho_n^{0,1}} H_n^1 \xrightarrow{\rho_n^{1,2}} H_n^2 \xrightarrow{\rho_n^{2,3}} \dots \xrightarrow{\rho_n^{m-1,m}} H_n^m \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \dots \quad (3.20)$$

En este módulo de persistencia truncado, las clases que llegan vivas a H_n^m mueren necesariamente al entrar en H_n^{m+1} . Por tanto, decir que una clase persiste infinitamente en el módulo original es lo mismo que decir que muere al entrar en H_n^{m+1} en el módulo truncado. En este contexto podemos dar el siguiente resultado:

Proposición 3.3 (original). *Sea el intervalo entero $I = [i, \infty)$ con $0 \leq i$. Dado cualquier k con $i \leq k \leq m$, tenemos un isomorfismo:*

$$BD_n^I \cong \frac{H_n^{i,k,m+1}}{H_n^{i,k,m}} \quad (3.21)$$

donde BD_n^I está calculado en el módulo de persistencia original y el cociente $H_n^{i,k,m+1}/H_n^{i,k,m}$ está calculado en el módulo truncado.

Demostración. En el módulo truncado también es cierto que todos los grupos BD sean isomorfos si variamos el k , por tanto podemos probarlo solo para el caso $k = m$. En ese caso, $H_n^{i,m,m+1} = H_n^{i,m} \cap (\rho_n^{m,m+1})^{-1}(H_n^{i-1,m+1}) = H_n^{i,m} \cap (\rho_n^{m,m+1})^{-1}(0)$. Como la aplicación $\rho_n^{m,m+1}$ es nula, tenemos que $(\rho_n^{m,m+1})^{-1}(0) = H_n^m$, y por tanto $H_n^{i,m,m+1} = H_n^{i,m}$. Además por el lema 3.2 tenemos que $H_n^{i,m,m} = H_n^{i-1,m}$, y el isomorfismo queda claro. \square

Cuando trabajemos con nuestros complejos de ejemplo, usaremos esta segunda forma de calcular los grupos BD_n^I sobre el módulo truncado pero se podrá ver claramente que el resultado es el mismo de las dos maneras.

3.1.3. Códigos de barras enteros

Habiendo definido todos estos grupos, los autores proponen dos formas diferentes de definir un código de barras “entero” que generalice los códigos de barras vistos en la definición 2.20. La primera de ellas se encuentra en el artículo [21], y la segunda se puede leer en [24], que es pocos meses posterior. Nos centraremos en esta segunda definición porque no solo es más sencilla sino que además consideramos que es más adecuada para hacer esta generalización.

Lo que se hace es considerar los intervalos I (finitos o infinitos) tales que sus grupos $BD_n^{I,k}$ son no triviales. Para cada uno de estos intervalos, se toma cualquiera de los $k \in I$ posibles (pues ya dijimos que esta elección no afecta) y consideramos la descomposición dada por el teorema 1.1:

$$BD_n^{I,k} \cong \mathbb{Z}^\beta \oplus \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_l\mathbb{Z}$$

A partir de esta descomposición, dibujamos $\beta + l$ barras que tengan los mismos puntos de inicio y fin que el intervalo I . Las primeras β barras se etiquetan con el grupo \mathbb{Z} , y las l siguientes se etiquetan con los correspondientes grupos $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}, \dots, \mathbb{Z}/d_l\mathbb{Z}$. En las figuras 3.1, 3.2 y 3.3 se pueden ver tres ejemplos de códigos de barras enteros, basados en nuestros complejos de ejemplo. Cuando se usan coeficientes en un cuerpo F , no hay partes de torsión y todas las barras tendrían la etiqueta F . En ese caso, no harían falta las etiquetas y el resultado sería el mismo que los códigos de barras de la definición 2.20.

3.2. Computación de los grupos BD

Ahora nos enfrentamos a la tarea de obtener computacionalmente los grupos $H_n^{i,j}$, $H_n^{i,k,j}$ y $BD_n^{I,k}$ para la homología persistente de un complejo. El método que ofrecen los autores de [21] es a través de secuencias espectrales, una herramienta clásica de la topología algebraica. Para entender estas definiciones, necesitamos saber que un módulo bigraduado no es más que un módulo graduado como los de la definición 1.20 pero con el conjunto de índices $T = \mathbb{Z}^2$.

Definición 3.5. Sea R un anillo. Una secuencia espectral $E = (E^r, d^r)_{r \geq 1}$ es una sucesión de R -módulos bigraduados $E^r = \{E_{p,q}^r\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$, donde cada E^r cuenta con una diferencial $d^r = \{d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r\}$ satisfaciendo $d_{p-r,q+r-1}^r \circ d_{p,q}^r \equiv 0$ y donde existen isomorfismos $H(E^r, d^r) \cong E^{r+1}$. Como cada $E_{p,q}^{r+1}$ es un cociente calculado a partir de $E_{p,q}^r$, podemos definir $E_{p,q}^\infty$ como los R -módulos que resultan tras haber calculado todas las homologías.

$$\begin{array}{cccc}
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \cdots \longleftarrow E_{1,1}^1 & \longleftarrow E_{2,1}^1 & \longleftarrow E_{3,1}^1 & \longleftarrow E_{4,1}^1 \longleftarrow \cdots \\
 \cdots \longleftarrow E_{1,0}^1 & \longleftarrow E_{2,0}^1 & \longleftarrow E_{3,0}^1 & \longleftarrow E_{4,0}^1 \longleftarrow \cdots \\
 \cdots \longleftarrow E_{1,-1}^1 & \longleftarrow E_{2,-1}^1 & \longleftarrow E_{3,-1}^1 & \longleftarrow E_{4,-1}^1 \longleftarrow \cdots \\
 \cdots \longleftarrow E_{1,-2}^1 & \longleftarrow E_{2,-2}^1 & \longleftarrow E_{3,-2}^1 & \longleftarrow E_{4,-2}^1 \longleftarrow \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array} \tag{3.24}$$

Nuevamente, cada línea horizontal unida por flechas forma un complejo de cadenas y se puede calcular la homología en cada uno de ellos. Entonces podemos definir el término 2 de la secuencia mediante los R -módulos cociente:

$$E_{p,q}^2 = \frac{\ker d_{p,q}^1}{\text{Im } d_{p+1,q}^1} \tag{3.25}$$

y unas diferenciales $d_{p,q}^2$ adecuadas. El término E^2 se vería entonces como el diagrama:

$$\begin{array}{cccc}
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \cdots \longleftarrow E_{1,1}^2 & \longleftarrow E_{2,1}^2 & \longleftarrow E_{3,1}^2 & \longleftarrow E_{4,1}^2 \longleftarrow \cdots \\
 \cdots \longleftarrow E_{1,0}^2 & \longleftarrow E_{2,0}^2 & \longleftarrow E_{3,0}^2 & \longleftarrow E_{4,0}^2 \longleftarrow \cdots \\
 \cdots \longleftarrow E_{1,-1}^2 & \longleftarrow E_{2,-1}^2 & \longleftarrow E_{3,-1}^2 & \longleftarrow E_{4,-1}^2 \longleftarrow \cdots \\
 \cdots \longleftarrow E_{1,-2}^2 & \longleftarrow E_{2,-2}^2 & \longleftarrow E_{3,-2}^2 & \longleftarrow E_{4,-2}^2 \longleftarrow \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array} \tag{3.26}$$

Este proceso se puede repetir sucesivamente hasta que finalmente la secuencia converge, es decir, que a partir de un cierto s , todos los términos E^s tienen los mismos módulos $E_{p,q}^s$ aunque las diferenciales vayan cambiando. A estos R -módulos que forman el límite de la secuencia, es a los que se les llama $E_{p,q}^\infty$.

Lo que hacen los autores de [21] entonces es definir una secuencia espectral muy concreta, a partir de la cual pueden calcular los grupos $H_n^{i,j}$, $H_n^{i,k,j}$ y $BD_n^{l,k}$ usando un módulo del programa

Kenzo. El funcionamiento de este programa y del correspondiente módulo se pueden consultar en [23], y el código se puede descargar desde [22].

Teorema 3.2 ([21]). *Sea C un complejo de cadenas filtrado. Existe una secuencia espectral $E = E(C) = (E^r, d^r)_{r \geq 1}$ definida por los R -módulos:*

$$E_{p,q}^r = \frac{Z_{p,q}^r + C_{p+q}^{p-1}}{d_{p+q+1}(Z_{p+r-1,q-r+2}^{r-1}) + C_{p+q}^{p-1}} \quad (3.27)$$

donde C_n^k es el R -módulo formados por las n -cadenas que hay en la etapa k de la filtración, $Z_{p,q}^r$ es el submódulo $Z_{p,q}^r = \{a \in C_{p+q}^p \mid d_{p+q}(a) \in C_{p+q-1}^{p-r}\}$, y donde la diferencial $d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$ es el homomorfismo inducido por $d_{p+q} : C_{p+q} \rightarrow C_{p+q-1}$ sobre el cociente que define a $E_{p,q}^r$. Además, a partir de esta secuencia espectral existen isomorfismos:

$$E_{p,q}^\infty \cong \frac{H_{p+q}^p(C)}{H_{p+q}^{p-1}(C)} \quad (3.28)$$

Los programas que usan los autores para definir esta secuencia espectral se basan en diagonalización de matrices. Más concretamente, lo que hacen es calcular por separado los términos C_{p+q}^{p-1} , $Z_{p,q}^r$ y $d_{p+q+1}(Z_{p+r-1,q-r+2}^{r-1})$ para luego calcular el cociente de la ecuación 3.27. Adaptando las funciones del programa Kenzo, estos términos se pueden usar para computar los grupos $H_{i,j}$, $H_{i,k,j}$ y $BD_{I,k}$, como afirma el siguiente teorema:

Teorema 3.3 ([21]). *Sea C un complejo de cadenas filtrado y sea n la dimensión de la homología que queremos calcular. Dados $i \leq k \leq j$, los grupos $H_n^{i,j}$, $H_n^{i,k,j}$ y $BD_n^{[i,j],k}$ se pueden expresar en términos de secuencias espectrales como:*

$$\begin{aligned} H_n^{i,j} &= \frac{Z_{i,n-1}^i}{d_{n+1}(Z_{j,n-j+1}^{j-i})} \\ H_n^{i,k,j} &= \frac{Z_{i-1,n-i+1}^{i-1} + d_{n+1}(Z_{k,n-k+1}^{k-1})}{d_{n+1}(Z_{j,n-j+1}^{j-1})} \\ BD_n^{[i,j],k} &= \frac{d_{n+1}(Z_{j,n-j+1}^{j-i}) + C_n^{i-1}}{d_{n+1}(Z_{j-1,n-j+2}^{j-i-1}) + C_n^{i-1}} \end{aligned}$$

Los teoremas 3.2 y 3.3 tampoco vienen con demostración en [21], pero no va a suponernos un problema porque no nos interesa tanto la computación como las propiedades teóricas de los grupos BD . De hecho no hemos usado este programa en ningún momento y los ejemplos que veremos a continuación, al ser de pequeño formato, hemos podido calcularlos manualmente. Para ejemplos con complejos más voluminosos sí sería necesario aprender a trabajar con el programa Kenzo. Por otra parte, estos programas no están adaptados para calcular grupos del tipo $BD_n^{[i,\infty)}$ porque esta teoría no se hizo pensando en este tipo de intervalos infinitos.

3.3. Grupos V y su relación con los grupos BD

La última pregunta que vamos a plantearnos en este capítulo es si realmente los grupos $H_n^{i,j}$, $H_n^{i,k,j}$ y $BD_n^{I,k}$ nos sirven para generalizar la homología persistente con coeficientes en

un cuerpo. Es decir, si calculáramos los grupos $BD_n^{I,k}$ sobre un F -módulo de persistencia, ¿obtendríamos los mismos resultados que aplicando los algoritmos de reducción de matrices que vimos en la sección 2.2.3? ¿Sería el código de barras el mismo? Según los autores de [21] esto es así, pero tampoco aportan prueba alguna al respecto y nuestro objetivo va a ser el de detallar esta demostración.

Lo que debemos probar es que si la homología tiene coeficientes en un cuerpo F , la dimensión de cada F -espacio vectorial $BD_n^{I,k}$ es la que debe ser. Pero en el capítulo 2 no se explica ninguna forma de calcular cuántas clases están vivas a lo largo de un intervalo, y mucho menos se explica cómo hacer esos cálculos en un punto interno del intervalo. Por ello vamos a necesitar basarnos en otras referencias donde sí se aborde el problema desde esta perspectiva.

3.3.1. Definición de los grupos $V_n^{I,k}$

La teoría que vamos a usar para intentar responder esta pregunta es la de los módulos zigzag, desarrollada en [5]. Un módulo zigzag es una generalización de los módulos de persistencia indexados por $T = \mathbb{N}$ donde las aplicaciones de estructura pueden ir en más de un sentido. Por ser una generalización, los resultados que son ciertos para módulos zigzag son igualmente ciertos para módulos de persistencia pero para poder usar estos resultados necesitamos traducir la notación de este artículo en términos que conozcamos mejor.

Definición 3.6. *Un módulo zigzag V es un conjunto finito de F -espacios vectoriales V^1, V^2, \dots, V^n formando un diagrama:*

$$V^1 \xleftarrow{p^1} V_2 \xleftarrow{p^2} \dots \xleftarrow{p^{n-1}} V^n \quad (3.29)$$

donde $\xleftarrow{p^n}$ puede indicar o bien un homomorfismo $f^n : V^n \rightarrow V^{n+1}$ o bien un homomorfismo $g^n : V^{n+1} \rightarrow V^n$. A la secuencia de símbolos f, g que se pueden leer en este diagrama de izquierda a derecha se le llama el tipo τ de V .

Un F -módulo de persistencia de tipo finito encaja perfectamente en esta definición si escribimos siempre $f^{n,n+1}$ en el lugar de p^n , siendo $\tau = ff \dots f$ el tipo del módulo zigzag.

Definición 3.7. *La filtración derecha $R(V)$ de un módulo zigzag V con tipo τ es una tupla*

$$R(V) = (R^0, R^1, \dots, R^n) \quad (3.30)$$

donde los R^i son subespacios vectoriales de V^n tales que $R^i \subset R^{i+1}$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. La filtración derecha se construye inductivamente como sigue:

Caso base

Si V sólo tiene un espacio vectorial, $R(V) = (0, V^1)$.

Suponiendo que ya tenemos $R(V) = (R^0, R^1, \dots, R^n)$.

$$R(V \xrightarrow{f^n} V^{n+1}) = (f^n(R^0), f^n(R^1), \dots, f^n(R^n), V^{n+1})$$

$$R(V \xleftarrow{g^n} V^{n+1}) = (0, (g^n)^{-1}(R^0), (g^n)^{-1}(R^1), \dots, (g^n)^{-1}(R_n))$$

Veamos ahora cómo sería la filtración derecha para un módulo de persistencia.

Lema 3.3 (original). *Sea el módulo zigzag $V = V^1 \xrightarrow{f^{1,2}} V^2 \xrightarrow{f^{2,3}} \dots \xrightarrow{f^{n-1,n}} V^n$ con tipo $\tau = f \cdots f$ (es decir, V es un módulo de persistencia). Su filtración derecha es:*

$$R(V) = (R^0, R^1, R^2, \dots, R^n) = (0, \text{Im } f^{1,n}, \text{Im } f^{2,n}, \dots, \text{Im } f^{n,n} = V^n) \quad (3.31)$$

Demostración. En el caso base, donde V solo tiene un espacio vectorial, tenemos que $R(V) = (0, V^1)$. Supongamos que el resultado es cierto para un módulo de persistencia con n espacios. Al añadirle V^{n+1} , aplicando la definición 3.7 tenemos que:

$$\begin{aligned} R(V \xrightarrow{f^{n,n+1}} V^{n+1}) &= (f^{n,n+1}(R^0), f^{n,n+1}(R^1), f^{n,n+1}(R^2) \dots, f^{n,n+1}(R^n), V^{n+1}) \\ &= (f^{n,n+1}(0), f^{n,n+1}(\text{Im } f^{1,n}), f^{n,n+1}(\text{Im } f^{2,n}), \dots, f^{n,n+1}(V^n), V^{n+1}) \\ &= (f^{n,n+1}(0), f^{n,n+1}(f^{1,n}(V^1)), f^{n,n+1}(f^{2,n}(V^2)), \dots, f^{n,n+1}(V^n), V^{n+1}) \\ &= (f^{n,n+1}(0), f^{1,n+1}(V^1), f^{2,n+1}(V^2), \dots, f^{n,n+1}(V^n), V^{n+1}) \\ &= (0, \text{Im } f^{1,n+1}, \text{Im } f^{2,n+1}, \dots, \text{Im } f^{n,n+1}, V^{n+1}) \end{aligned}$$

□

Ahora veremos cómo sería para un módulo zigzag donde todas las flechas vayan hacia la izquierda. Esto nos será útil más adelante.

Lema 3.4 (original). *Sea el módulo zigzag $V = V^1 \xleftarrow{f^{2,1}} V^2 \xleftarrow{f^{3,2}} \dots \xleftarrow{f^{n,n-1}} V^n$ con tipo $\tau = g \cdots g$ (es decir, V es un módulo de persistencia visto de derecha a izquierda). Su filtración derecha es:*

$$R(V) = (R^0, R^1, R^2, \dots, R^n) = (0, \ker f^{n,n-1}, \ker f^{n,n-2}, \dots, V^n) \quad (3.32)$$

Demostración. En el caso base, donde V solo tiene un espacio vectorial, tenemos que $R(V) = (0, V^1)$. Supongamos que el resultado es cierto para un módulo de persistencia con n espacios. Al añadirle V^{n+1} , aplicando la definición 3.7 tenemos que:

$$\begin{aligned} R(V \xleftarrow{f^{n+1,n}} V^{n+1}) &= (0, (f^{n+1,n})^{-1}(R^0), (f^{n+1,n})^{-1}(R^1), (f^{n+1,n})^{-1}(R^2) \dots, (f^{n+1,n})^{-1}(R^n)) \\ &= (0, (f^{n+1,n})^{-1}(0), (f^{n+1,n})^{-1}(\ker f^{n,n-1}), (f^{n+1,n})^{-1}(\ker f^{n,n-2}) \dots, (f^{n+1,n})^{-1}(V^n)) \end{aligned}$$

Por definición, $(f^{n+1,n})^{-1}(0) = \ker f^{n+1,n}$. Dado un i , $(f^{n+1,n})^{-1}(\ker f^{n,n-i}) = \ker f^{n+1,n-i}$ porque si un elemento de V^{n+1} va dentro de $\ker f^{n,n-i}$ al aplicar $f^{n+1,n}$, entonces se anula al aplicar $f^{n+1,n-i} = f^{n,n-i} \circ f^{n+1,n}$. Finalmente, $(f^{n+1,n})^{-1}(V^n) = V^{n+1}$. Entonces,

$$R(V \xleftarrow{f^{n+1,n}} V^{n+1}) = (0, \ker f^{n+1,n}, \ker f^{n+1,n-1}, \dots, V^{n+1})$$

□

Ahora veremos lo que son los índices de nacimiento, que en el teorema final nos servirán para indicar el principio y el final de los intervalos.

Definición 3.8. *El índice de nacimiento $b(\tau)$ de un módulo zigzag V con tipo τ es una tupla*

$$b(\tau) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \quad (3.33)$$

donde los b_i son enteros entre 1 y n . El índice de nacimiento se construye inductivamente como sigue:

Caso base

Si V sólo tiene un espacio vectorial, $b(\tau) = (1)$.

Suponiendo que ya tenemos $b(\tau) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

$$b(\tau f) = (b_1, b_2, \dots, b_n, n + 1)$$

$$b(\tau g) = (n + 1, b_1, b_2, \dots, b_n)$$

Lema 3.5 (original). 1. Sea el módulo zigzag $V = V^1 \xrightarrow{f^{1,2}} V^2 \xrightarrow{f^{2,3}} \dots \xrightarrow{f^{n-1,n}} V^n$ con tipo $\tau = f \overset{n-1}{\cdots} f$. Su índice de nacimiento es:

$$b(\tau) = (1, 2, \dots, n) \quad (3.34)$$

2. Sea el módulo zigzag $V = V^1 \xleftarrow{f^{2,1}} V^2 \xleftarrow{f^{3,2}} \dots \xleftarrow{f^{n,n-1}} V^n$ con tipo $\tau = g \overset{n-1}{\cdots} g$. Su índice de nacimiento es:

$$b(\tau) = (n, n - 1, \dots, 1) \quad (3.35)$$

Demostración. En ambos casos en el caso base, donde V solo tiene un espacio vectorial, se tiene que $b(\tau) = (1)$. Supongamos que el primer resultado es cierto para un módulo de persistencia con n espacios. Al añadirle $\xrightarrow{f} V^{n+1}$, aplicando la definición 3.8 tenemos que:

$$\begin{aligned} b(\tau f) &= (b_1, b_2, \dots, b_n, n + 1) \\ &= (1, 2, \dots, n, n + 1) \end{aligned}$$

Supongamos ahora que el segundo resultado es cierto para un módulo de persistencia con n espacios. Al añadirle $\xleftarrow{g} V^{n+1}$, aplicando la definición 3.8 tenemos que:

$$\begin{aligned} b(\tau f) &= (n + 1, b_1, b_2, \dots, b_n) \\ &= (n + 1, n, n - 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

□

Ahora presentamos la filtración izquierda de un módulo zigzag, que se parece a la filtración derecha pero se apoya en el espacio V^1 y no en el V^n .

Definición 3.9. Sea V un módulo zigzag. La filtración izquierda de V es una tupla de subespacios crecientes en V^1 definida como:

$$L(V) = R(\bar{V}) \quad (3.36)$$

donde \bar{V} es el módulo inverso de V , con $\bar{V}^i = V^{n+1-i}$, $\bar{f}^i = g^{n+1-i}$ y $\bar{g}^i = f^{n-i}$.

Es decir, el módulo inverso no es más que otro módulo que tiene los mismos espacios vectoriales pero puestos en orden inverso y que por tanto tiene las flechas invertidas. Nuevamente, traducimos cómo es una filtración izquierda para un módulo de persistencia con el siguiente lema:

Lema 3.6 (original). Sea el módulo zigzag $V = V^1 \xrightarrow{f^{1,2}} V^2 \xrightarrow{f^{2,3}} \dots \xrightarrow{f^{n-1,n}} V^n$ con tipo $\tau = f \overset{n-1}{\cdots} f$ (es decir, V es un módulo de persistencia). Su filtración izquierda es:

$$L(V) = (L^0, L^1, L^2, \dots, L^n) = (0, \ker f^{1,2}, \ker f^{1,3}, \dots, \ker f^{1,n}, V^1) \quad (3.37)$$

Demostración. Es aplicación directa del lema 3.4 sobre el módulo inverso \bar{V} dado por el diagrama:

$$V^n \xleftarrow{f^{n-1,n}} V^{n-1} \xleftarrow{\dots} \xleftarrow{f^{2,3}} V^2 \xleftarrow{f^{1,2}} V^1 \quad (3.38)$$

□

El último paso antes de dar el teorema principal es ver cómo apoyar filtraciones izquierdas y derechas sobre un espacio intermedio V_k .

Definición 3.10. *Sea $V = V^1 \xleftrightarrow{p^1} V^2 \xleftrightarrow{p^2} \dots \xleftrightarrow{p^{n-1}} V^n$ un módulo zigzag. Dado un entero $1 \leq k \leq n$, podemos definir la filtración izquierda y la filtración derecha sobre V^k :*

$$\begin{aligned} R(V[1, k]) &= R(V^1 \xleftrightarrow{p^1} \dots \xleftrightarrow{p^{k-1}} V^k) = (R^0, R^1, \dots, R^k) \\ L(V[k, n]) &= L(V^k \xleftrightarrow{p^k} \dots \xleftrightarrow{p^{n-1}} V^n) = (L^0, L^1, \dots, L^{n+1-k}) \end{aligned}$$

Además podemos definir los índices de nacimiento y muerte sobre V^k :

$$\begin{aligned} b(\tau[1, k]) &= (b^1, \dots, b^k) \\ d(\tau[k, n]) &= (d^1, \dots, d^{n+1-k}) = n + 1 - b(\bar{\tau}[k, n]) \end{aligned}$$

Proposición 3.4 (original). *Sea el módulo zigzag $V = V^1 \xrightarrow{f^{1,2}} V^2 \xrightarrow{f^{2,3}} \dots \xrightarrow{f^{n-1,n}} V^n$ con tipo $\tau = f \overset{n-1}{\dots} f$ (es decir, V es un módulo de persistencia). Dado un entero $1 \leq k \leq n$, los conceptos de la definición anterior quedan como:*

- $R^0 = L^0 = 0$
- $R^k = L^{n+1-k} = V^k$
- $R^i = \text{Im } f^{i,k}$ para todo $0 < i < k$
- $L^j = \text{ker } f^{k,k+j}$ para todo $0 < j < n + 1 - k$
- $b_i = i$ para todo $1 \leq i \leq k$
- $d_j = j + k - 1$ para todo $1 \leq j \leq n + 1 - k$

Demostración. Los cuatro primeros puntos son aplicación directa del lema 3.3 para el módulo de persistencia $V^1 \xrightarrow{f^{1,2}} \dots \xrightarrow{f^{k-1,k}} V^k$ y del lema 3.6 para el módulo de persistencia $V^k \xrightarrow{f^{k,k+1}} \dots \xrightarrow{f^{n-1,n}} V^n$. Los dos últimos son aplicación directa del lema 3.5 para esos mismos módulos. □

Dicho de otra forma, tenemos que:

$$\begin{aligned} R(V[1, k]) &= (R^0, R^1, \dots, R^k) = (0, \text{Im } f^{1,k}, \dots, V^k) \\ L(V[k, n]) &= (L^0, L^1, \dots, L^{n+1-k}) = (0, \text{ker } f^{k,k+1}, \dots, V^k) \\ b(\tau[1, k]) &= (b_1, b_2, \dots, b_k) = (1, 2, \dots, k) \\ d(\tau[k, n]) &= (d_1, d_2, \dots, d_{n+1-k}) = (k, k + 1, \dots, n) \end{aligned}$$

Con esto ya estamos listos para ir al teorema que nos dice cómo calcular la multiplicidad de un intervalo para un módulo zigzag. Este teorema se puede consultar en la sección 5 del artículo [5]. Primero lo presentamos tal cual viene en este artículo, para luego ver cómo quedaría traducido para el caso concreto de módulos de persistencia.

Teorema 3.4. *Sea un módulo zigzag $V = V^1 \xrightarrow{p^1} V^2 \xrightarrow{p^2} \dots \xrightarrow{p^{n-1}} V^n$ y sea un $1 \leq k \leq n$. Dadas las filtraciones izquierda y derecha sobre V^k , y dados los índices de nacimiento y muerte sobre V^k , tenemos que la multiplicidad del intervalo $[b_i, d_j]$ en la descomposición de V es igual a:*

$$c_{ij} = \dim(R^i \cap L^j) - \dim(R^i \cap L^{j-1}) - \dim(R^{i-1} \cap L^j) + \dim(R^{i-1} \cap L^{j-1}) \quad (3.39)$$

o, equivalentemente:

$$c_{ij} = \dim \left(\frac{R^i \cap L^j}{(R^i \cap L^{j-1}) + (R^{i-1} \cap L^j)} \right) \quad (3.40)$$

Usando todos los lemas que hemos ido probando a lo largo de esta sección, este teorema queda traducido a módulos de persistencia queda como:

Teorema 3.5 (original). *Sea el módulo de persistencia $V = V^1 \xrightarrow{f^{1,2}} V^2 \xrightarrow{f^{2,3}} \dots \xrightarrow{f^{n-1,n}} V^n$ y sea un $1 \leq k \leq n$. Dados $1 \leq i \leq k$ y $k+1 \leq j \leq n$, la multiplicidad del intervalo $[i, j)$ es igual a:*

$$c_{ij} = \dim(\text{Im } f^{i,k} \cap \ker f^{k,j}) - \dim(\text{Im } f^{i,k} \cap \ker f^{k,j-1}) \\ - \dim(\text{Im } f^{i-1,k} \cap \ker f^{k,j}) + \dim(\text{Im } f^{i-1,k} \cap \ker f^{k,j-1})$$

o, equivalentemente:

$$c_{ij} = \dim \left(\frac{\text{Im } f^{i,k} \cap \ker f^{k,j}}{(\text{Im } f^{i,k} \cap \ker f^{k,j-1}) + (\text{Im } f^{i-1,k} \cap \ker f^{k,j})} \right)$$

Demostración. El intervalo $[i, j)$ es lo mismo que el intervalo cerrado $[i, j-1]$ que, visto en términos de índices de nacimiento y muerte sobre V_k , es igual a $[b_i, d_{j-k}]$ según la proposición 3.4. Entonces no tenemos más que aplicar el teorema 3.4 sobre el intervalo $[b_i, d_{j-k}]$ intercambiando los términos $R^i, R^{i-1}, L^j, L^{j-1}$ según las fórmulas dadas por la proposición 3.4. \square

Ahora que ya sabemos cuál debe ser la multiplicidad de un intervalo, ya podemos comprobar si los F -espacios vectoriales $BD_n^{I,k}$ tienen la misma dimensión. Pero antes de ello vamos a dar una última definición que nos será útil tanto en este capítulo como en el siguiente.

Definición 3.11. *Sea el \mathbb{Z} -módulo de persistencia $H_n^0 \xrightarrow{\rho_n^{0,1}} H_n^1 \xrightarrow{\rho_n^{1,2}} H_n^2 \xrightarrow{\rho_n^{2,3}} \dots \xrightarrow{\rho_n^{m-1,m}} H_n^m$, sea un intervalo $I = [i, j)$ y sea un $k \in I$. Definimos los siguientes submódulos de H_n^k :*

- $V_{n,+}^{I,k} = \text{Im } \rho_n^{i,k} \cap \ker \rho_n^{k,j}$
- $V_{n,-}^{I,k} = (\text{Im } \rho_n^{i,k} \cap \ker \rho_n^{k,j-1}) + (\text{Im } \rho_n^{i-1,k} \cap \ker \rho_n^{k,j})$

Además, por estar contenido $V_{n,-}^{I,k}$ en $V_{n,+}^{I,k}$, podemos definir el módulo cociente:

$$V_n^{I,k} = V_{n,+}^{I,k} / V_{n,-}^{I,k}$$

Estas definiciones no vienen tomadas de [5], sino que están basadas en el artículo [9] y se pueden aplicar para módulos de persistencia con coeficientes en cualquier anillo R . Realmente estas definiciones se dan con una notación más compleja, porque se estudia un problema donde los módulos de persistencia están indexados por conjuntos T más generales que \mathbb{N} , pero ésta sería la adaptación a nuestro problema. Ya en el próximo capítulo veremos la definición original de estos submódulos.

3.3.2. Relación entre $BD_n^{I,k}$ y $V_n^{I,k}$ con coeficientes en un cuerpo

Con esta terminología, si los coeficientes están en un cuerpo F , la dimensión de $V_n^{I,k}$ nos dice cuántas veces aparece el intervalo I en el código de barras del módulo de persistencia. Además, al igual que sucede con los grupos $BD_n^{I,k}$, el punto k donde hagamos los cálculos no afecta a la dimensión de $V_n^{I,k}$. La prueba de esta afirmación se encuentra en [9], y de hecho nuestra prueba del teorema 3.1 se basa en ésta en cierta medida. Entonces pasamos a hacer la pregunta que decíamos al principio de esta sección: si usamos coeficientes en un cuerpo F , ¿es la información que me dan los F -espacios vectoriales $BD_n^{I,k}$ la misma que me dan los F -espacios vectoriales $V_n^{I,k}$? La respuesta es que sí, tal y como probamos en el siguiente teorema.

Teorema 3.6 (original). *Sea un módulo de homología persistente $H_n^1 \xrightarrow{\rho_n^{1,2}} H_n^2 \xrightarrow{\rho_n^{2,3}} \dots \xrightarrow{\rho_n^{m-1,m}} H_n^m$, sea un intervalo $I = [i, j]$ y sea un $k \in I$. Si los coeficientes de la homología están en un cuerpo F , existe un isomorfismo:*

$$BD_n^{I,k} \cong V_n^{I,k} \quad (3.41)$$

Demostración. Al ser $BD_n^{I,k}$ y $V_n^{I,k}$ dos F -espacios vectoriales, no hace falta dar la expresión explícita del isomorfismo entre ellos sino que basta con comprobar que tienen el mismo rango o dimensión, es decir:

$$\dim \left(\frac{H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j})}{H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,j-1})^{-1}(H_n^{i-1,j-1})} \right) = \dim \left(\frac{\text{Im } \rho_n^{i,k} \cap \ker \rho_n^{k,j}}{(\text{Im } \rho_n^{i,k} \cap \ker \rho_n^{k,j-1}) + (\text{Im } \rho_n^{i-1,k} \cap \ker \rho_n^{k,j})} \right) \quad (3.42)$$

o equivalentemente:

$$\begin{aligned} \dim(BD_n^{I,k}) &= \dim(\text{Im } \rho_n^{i,k} \cap \ker \rho_n^{k,j}) - \dim(\text{Im } \rho_n^{i,k} \cap \ker \rho_n^{k,j-1}) \\ &\quad - \dim(\text{Im } \rho_n^{i-1,k} \cap \ker \rho_n^{k,j}) + \dim(\text{Im } \rho_n^{i-1,k} \cap \ker \rho_n^{k,j-1}) \end{aligned}$$

El primer paso es comprobar que $H_n^{i-1,k} \subset H_n^{i,k,j}$. En primer lugar $H_n^{i-1,k} \subset H_n^{i,k}$ por el lema 3.1. Por otro lado, $(\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j}) = (\rho_n^{k,j})^{-1}(\rho_n^{k,j}(\rho_n^{i-1,k}(H_n^{i-1}))) = (\rho_n^{k,j})^{-1}(\rho_n^{k,j}(H_n^{i-1,k})) \supset H_n^{i-1,k}$. Los mismos argumentos son válidos para probar que $H_n^{i-1,k} \subset H_n^{i,k,j-1}$. Por estas contenciones de subespacios, y por ser todos estos espacios vectoriales de dimensión finita, tenemos que:

$$H_n^{i,k,j} \cong H_n^{i-1,k} \oplus \frac{H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j})}{H_n^{i-1,k}} \quad (3.43)$$

Por estar contenido $H_n^{i-1,k}$ en $(\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j})$, podemos decir también que:

$$H_n^{i,k,j} \cong H_n^{i-1,k} \oplus \frac{H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j})}{H_n^{i-1,k} \cap (\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j})} \quad (3.44)$$

Análogamente para $H_n^{i,k,j-1}$ podemos dar la suma directa:

$$H_n^{i,k,j-1} \cong H_n^{i-1,k} \oplus \frac{H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,j-1})^{-1}(H_n^{i-1,j-1})}{H_n^{i-1,k} \cap (\rho_n^{k,j-1})^{-1}(H_n^{i-1,j-1})} \quad (3.45)$$

La dimensión de cada uno de los dos espacios es:

$$\begin{aligned} \dim(H_n^{i,k,j}) &= \dim(H_n^{i-1,k}) + \dim(H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j})) - \dim(H_n^{i-1,k} \cap (\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j})) \\ \dim(H_n^{i,k,j-1}) &= \dim(H_n^{i-1,k}) + \dim(H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,j-1})^{-1}(H_n^{i-1,j-1})) - \dim(H_n^{i-1,k} \cap (\rho_n^{k,j-1})^{-1}(H_n^{i-1,j-1})) \end{aligned}$$

y por tanto la dimensión de su cociente es:

$$\begin{aligned} \dim(BD_n^{I,k}) &= \dim(H_n^{i,k,j}) - \dim(H_n^{i,k,j-1}) \\ &= \dim(H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j})) - \dim(H_n^{i-1,k} \cap (\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j})) \\ &\quad - \dim(H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,j-1})^{-1}(H_n^{i-1,j-1})) + \dim(H_n^{i-1,k} \cap (\rho_n^{k,j-1})^{-1}(H_n^{i-1,j-1})) \end{aligned}$$

Vayamos ahora al primero de los cuatro sumandos. Por estar ese espacio contenido en una antiimagen por $\rho_n^{k,j}$, podemos definir el homomorfismo restringido $\bar{\rho}_n^{k,j} : H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j}) \rightarrow H_n^{i-1,j}$. Por un resultado clásico del álgebra lineal, tenemos que $\dim(H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j})) = \dim(\ker \bar{\rho}_n^{k,j}) + \dim(\text{Im } \bar{\rho}_n^{k,j})$. Veamos qué es cada sumando por separado. Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} \ker \bar{\rho}_n^{k,j} &= \{a \in H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j}) \mid \rho_n^{k,j}(a) = 0\} = \{a \in H_n^{i,k} \mid \rho_n^{k,j}(a) = 0\} \\ &= H_n^{i,k} \cap \ker \rho_n^{k,j} = \text{Im } \rho_n^{i,k} \cap \ker \rho_n^{k,j} \\ \text{Im } \bar{\rho}_n^{k,j} &= \rho_n^{k,j}(H_n^{i,k}) \cap \rho_n^{k,j}((\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j})) = H_n^{i,j} \cap H_n^{i-1,j} = H_n^{i-1,j} \end{aligned}$$

Combinando ambos resultados:

$$\dim(H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j})) = \dim(\text{Im } \rho_n^{i,k} \cap \ker \rho_n^{k,j}) + \dim(H_n^{i-1,j})$$

Aplicando el mismo razonamiento sobre los otros tres sumandos tenemos las sumas:

$$\begin{aligned} \dim(H_n^{i-1,k} \cap (\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j})) &= \dim(\text{Im } \rho_n^{i-1,k} \cap \ker \rho_n^{k,j}) + \dim(H_n^{i-1,j}) \\ \dim(H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,j-1})^{-1}(H_n^{i-1,j-1})) &= \dim(\text{Im } \rho_n^{i,k} \cap \ker \rho_n^{k,j-1}) + \dim(H_n^{i-1,j-1}) \\ \dim(H_n^{i-1,k} \cap (\rho_n^{k,j-1})^{-1}(H_n^{i-1,j-1})) &= \dim(\text{Im } \rho_n^{i-1,k} \cap \ker \rho_n^{k,j-1}) + \dim(H_n^{i-1,j-1}) \end{aligned}$$

Y por tanto, sumando y restando estos términos llegamos a lo que queríamos probar. \square

3.3.3. Relación entre $BD_n^{I,k}$ y $V_n^{I,k}$ con coeficientes enteros

Entonces cuando usamos coeficientes en un cuerpo F , obtenemos la misma información con los $V_n^{I,k}$ que con los $BD_n^{I,k}$. La pregunta que nos planteamos ahora es: ¿pasaría lo mismo si usáramos coeficientes enteros? Porque si fuera así, realmente no habría hecho falta definir los grupos $BD_n^{I,k}$ y podríamos usar simplemente los $V_n^{I,k}$, que ya están más estudiados.

El teorema 3.6 (al menos en la forma en que hemos hecho la demostración) depende de que los coeficientes estén en un cuerpo, y no se puede extrapolar a coeficientes enteros porque por el camino usa la propiedad de que dado un espacio vectorial V de dimensión finita y un subespacio U , se tiene que V y $U \oplus V/U$ son isomorfos. Esta propiedad no se cumple con grupos (o \mathbb{Z} -módulos) porque, por ejemplo, \mathbb{Z} no es isomorfo a $2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Nosotros particularmente no hemos conseguido encontrar ni una demostración ni un contraejemplo que nos permitan dar una respuesta clara, pero tenemos la intuición de que la respuesta es afirmativa y por eso planteamos la siguiente conjetura con la esperanza de que se pueda resolver en un futuro.

Conjetura 3.1. *Sea un módulo de homología persistente $H_n^1 \xrightarrow{\rho_n^{1,2}} H_n^2 \xrightarrow{\rho_n^{2,3}} \dots \xrightarrow{\rho_n^{m-1,m}} H_n^m$, sea un intervalo $I = [i, j)$ y sea un $k \in I$. Si los coeficientes de la homología están en \mathbb{Z} , existe un isomorfismo:*

$$BD_n^{I,k} \cong V_n^{I,k} \quad (3.46)$$

Creemos que el motivo por el que los autores de [21] recurren a esta nueva definición de los grupos $BD_n^{I,k}$ es para poder usar directamente sus programas para secuencias espectrales, sin tener que idear un método de cálculo para los grupos $V_{n,+}^{I,k}$ y $V_{n,-}^{I,k}$, pero no lo sabemos realmente. En cualquier caso, aunque no hayamos conseguido probar la relación entre estos dos grupos cociente, sí hemos encontrado una relación entre sus numeradores y sus denominadores que podría dar una intuición sobre lo que ocurre aquí.

Proposición 3.5. *Sea un módulo de homología persistente $H_n^1 \xrightarrow{\rho_n^{1,2}} H_n^2 \xrightarrow{\rho_n^{2,3}} \dots \xrightarrow{\rho_n^{m-1,m}} H_n^m$, sea un intervalo $I = [i, j)$ y sea un $k \in I$. Los grupos cocientes $BD_n^{I,k} = H_n^{i,k,j} / H_n^{i,k,j-1}$ y $V_n^{I,k} = V_{n,+}^{I,k} / V_{n,-}^{I,k}$ están relacionados mediante las contenciones:*

1. $V_{n,+}^{I,k} \subset H_n^{i,k,j}$
2. $V_{n,-}^{I,k} \subset H_n^{i,k,j-1}$

Demostración. En el primer punto hay que probar que $\text{Im } \rho_n^{i,k} \cap \ker \rho_n^{k,j} \subset H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j})$. Por definición, $\text{Im } \rho_n^{i,k} = H_n^{i,k}$. Por otro lado, $\ker \rho_n^{k,j} = (\rho_n^{k,j})^{-1}(0)$ y como $0 \in H_n^{i,k,j}$, tenemos que $\ker \rho_n^{k,j} \subset (\rho_n^{k,j})^{-1}(H_n^{i-1,j})$ y el primer punto queda probado.

En el segundo punto, hay que probar que $(\text{Im } \rho_n^{i,k} \cap \ker \rho_n^{k,j-1}) + (\text{Im } \rho_n^{i-1,k} \cap \ker \rho_n^{k,j}) \subset H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,j-1})^{-1}(H_n^{i-1,j-1})$. Para ello hay que probar que $\text{Im } \rho_n^{i,k} \cap \ker \rho_n^{k,j-1} \subset H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,j-1})^{-1}(H_n^{i-1,j-1})$ y que $\text{Im } \rho_n^{i-1,k} \cap \ker \rho_n^{k,j} \subset H_n^{i,k} \cap (\rho_n^{k,j-1})^{-1}(H_n^{i-1,j-1})$ por separado. La primera de las dos pruebas es análoga a la del primer punto poniendo $j-1$ en el lugar de j . La segunda también es fácil porque si tomo un elemento $x \in H_n^{i-1,k} = \text{Im } \rho_n^{i-1,k}(H_n^{i-1})$, ya sabemos que $x \in H_n^{i,k}$ por el lema 3.1 y al aplicar $\rho_n^{k,j-1}$ tenemos que $\rho_n^{k,j-1}(x) \in \text{Im } \rho_n^{k,j-1} \circ \rho_n^{i-1,k}(H_n^{i-1}) = H_n^{i-1,j-1}$ y por tanto $x \in (\rho_n^{k,j-1})^{-1}(H_n^{i-1,j-1})$. \square

3.4. Ejemplos de cálculo de los grupos BD

En esta sección vamos a calcular los grupos $H_1^{i,j}$, $H_1^{i,k,j}$, $BD_1^{I,k}$ y $V_{I,k}$ para las filtraciones de ejemplo que presentamos en la sección 2.3, aunque no entraremos en gran detalle sobre los cálculos porque son tantos que no vale la pena verlos todos. El resto de dimensiones distintas a 1 las obviaremos. Además acompañaremos los cálculos con los códigos de barras enteros que resultan. En los tres ejemplos hemos truncado los módulos para poder calcular directamente los grupos $BD_1^{I,k}$ con intervalos infinitos.

3.4.1. Botella de Klein

En la página 57 hemos puesto el resultado de calcular manualmente todos los grupos $H_1^{i,k,j}$ posibles en el módulo de persistencia truncado. Recordemos que según el lema 3.2 $H_1^{i-1,j} =$

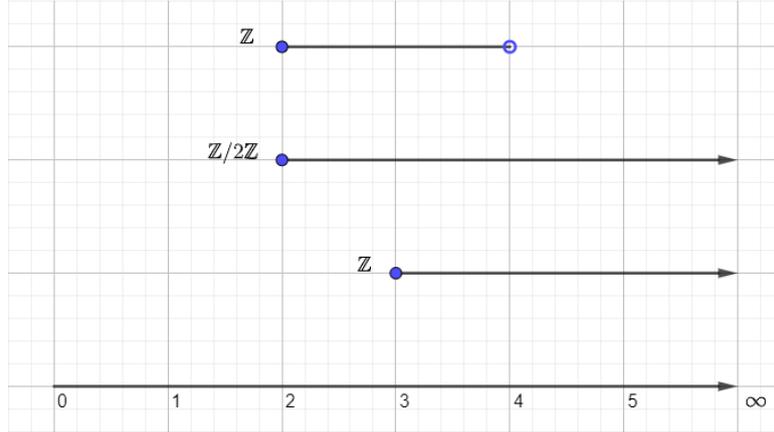


Figura 3.1: Código de barras entero para la botella de Klein

$H_1^{i,j,j}$, y por tanto no nos hemos dejado ningún grupo atrás. Veamos cómo hemos calculado por ejemplo el grupo $H_1^{2,3,4}$. La fórmula de este grupo es:

$$H_1^{2,3,4} = H_1^{2,3} \cap (\rho_1^{3,4})^{-1}(H_1^{1,4}) \quad (3.47)$$

Según el diagrama de la ecuación 2.27, la aplicación $\rho_1^{2,3}$ manda al generador de $H_1^2 = \mathbb{Z}_a$ en el primer generador de $H_1^3 = \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b$, y por tanto $H_1^{2,3} = \mathbb{Z}_a \cong \mathbb{Z}_a \oplus 0 \subset \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b$. Por ser $H_1^1 = 0$, tenemos que $H_1^{1,4} = \rho_1^{1,4}(0) = 0$ y por tanto lo que nos falta calcular es $(\rho_1^{3,4})^{-1}(0) = \ker \rho_1^{3,4}$. La aplicación $\rho_1^{3,4}$ manda al primer y segundo generador de $H_1^3 = \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b$ en el primer y segundo generador respectivamente de $H_1^4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b$. Los únicos elementos que se anulan por esta aplicación son los múltiplos de $2[a]$, es decir, $(\rho_1^{3,4})^{-1}(H_1^{1,4}) = \mathbb{Z}_{2a}$ y por tanto

$$H_1^{2,3,4} = H_1^{2,3} \cap (\rho_1^{3,4})^{-1}(H_1^{1,4}) = \mathbb{Z}_a \cap \mathbb{Z}_{2a} = \mathbb{Z}_{2a} \quad (3.48)$$

Realizando cálculos como éste para todos los índices posibles, se obtienen todos los grupos $H_1^{i,k,j}$ manualmente.

A la vista de estos grupos que salen como resultado, los únicos grupos $BD_1^{I,k}$ no triviales son los siguientes:

$$\begin{aligned} [2, 4) &\mapsto \frac{H_1^{2,2,4}}{H_1^{2,2,3}} \cong \frac{H_1^{2,3,4}}{H_1^{1,3}} \cong \mathbb{Z} \\ [2, \infty) &\mapsto \frac{H_1^{2,2,5}}{H_1^{2,2,4}} \cong \frac{H_1^{2,3,5}}{H_1^{2,3,4}} \cong \frac{H_1^{2,4,5}}{H_1^{1,4}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ [3, \infty) &\mapsto \frac{H_1^{3,3,5}}{H_1^{3,3,4}} \cong \frac{H_1^{3,4,5}}{H_1^{2,4}} \cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Con estos grupos, nos sale el código de barras entero de la figura 3.1. También se puede comprobar que lo que se afirma en la proposición 3.3 se cumple.

Separadamente hemos calculado también a mano los distintos grupos $V_{1,+}^{I,k}$, $V_{1,-}^{I,k}$ y $V_1^{I,k}$. Sólo presentamos los que se refieren a los intervalos $[2, 4)$, $[2, \infty)$ y $[3, \infty)$, pero en todos ellos se observa que no solo $BD_1^{I,k} \cong V_1^{I,k}$ para todo intervalo I y todo k , sino que además las contenciones de la proposición 3.5 se cumplen con igualdad en todo caso.

Grupos $V_1^{I,k}$ para $I = [2, 4)$

$$V_1^{I,2} = \frac{V_{1,+}^{I,2}}{V_{1,-}^{I,2}} = \frac{\mathbb{Z}_a}{0} \cong \mathbb{Z}$$

$$V_1^{I,3} = \frac{V_{1,+}^{I,3}}{V_{1,-}^{I,3}} = \frac{\mathbb{Z}_{2a}}{0} \cong \mathbb{Z}$$

Grupos $V_1^{I,k}$ para $I = [2, \infty)$

$$V_1^{I,2} = \frac{V_{1,+}^{I,2}}{V_{1,-}^{I,2}} = \frac{\mathbb{Z}_a}{\mathbb{Z}_{2a}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$V_1^{I,3} = \frac{V_{1,+}^{I,3}}{V_{1,-}^{I,3}} = \frac{\mathbb{Z}_a}{\mathbb{Z}_{2a}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$V_1^{I,4} = \frac{V_{1,+}^{I,4}}{V_{1,-}^{I,4}} = \frac{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}_a}{0} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Grupos $V_1^{I,k}$ para $I = [3, \infty)$

$$V_1^{I,3} = \frac{V_{1,+}^{I,3}}{V_{1,-}^{I,3}} = \frac{\mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b}{\mathbb{Z}_a} \cong \mathbb{Z}$$

$$V_1^{I,4} = \frac{V_{1,+}^{I,4}}{V_{1,-}^{I,4}} = \frac{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b}{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}_a} \cong \mathbb{Z}$$

Grupos $H_{i,k,j}$ de dimensión 1 para la botella de Klein.

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_1^0 = 0 & \longrightarrow & H_1^1 & = 0 & \longrightarrow & H_1^2 & = \mathbb{Z}_a \\
 H_1^{1,1,5} & & H_1^{1,1,4} & = 0 & & H_1^{2,2,5} & = \mathbb{Z}_a \\
 H_1^{1,1,4} & & H_1^{1,1,3} & = 0 & & H_1^{2,2,4} & = \mathbb{Z}_a \\
 H_1^{1,1,3} & & H_1^{1,1,2} & = 0 & & H_1^{2,2,3} & = \mathbb{Z}_{2a} \\
 H_1^{1,1,2} & & H_1^{0,1} & = 0 & & H_1^{1,2} & = 0 \\
 H_1^{0,1} & & & & & H_1^{1,2,5} & = 0 \\
 & & & & & H_1^{1,2,4} & = 0 \\
 & & & & & H_1^{1,2,3} & = 0 \\
 & & & & & H_1^{0,2} & = 0
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{c}
 \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b \\
 \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b \\
 \mathbb{Z}_a \\
 \mathbb{Z}_a \\
 \mathbb{Z}_a \\
 \mathbb{Z}_{2a} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{c}
 H_1^{3,3,5} \\
 H_1^{3,3,4} \\
 H_1^{2,3} \\
 H_1^{2,3,5} \\
 H_1^{2,3,4} \\
 H_1^{1,3} \\
 H_1^{1,3,5} \\
 H_1^{1,3,4} \\
 H_1^{0,3}
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{c}
 H_1^{4,4,5} \\
 H_1^{3,4} \\
 H_1^{3,4,5} \\
 H_1^{2,4} \\
 H_1^{2,4,5} \\
 H_1^{1,4} \\
 H_1^{1,4,5} \\
 H_1^{0,4}
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{c}
 \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{2a} \oplus \mathbb{Z}_b \\
 \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{2a} \oplus \mathbb{Z}_b \\
 \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{2a} \oplus \mathbb{Z}_b \\
 \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{2a} \oplus \mathbb{Z}_b \\
 \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{2a} \\
 \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{2a} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array}
 \longrightarrow
 H_1^5 = 0$$

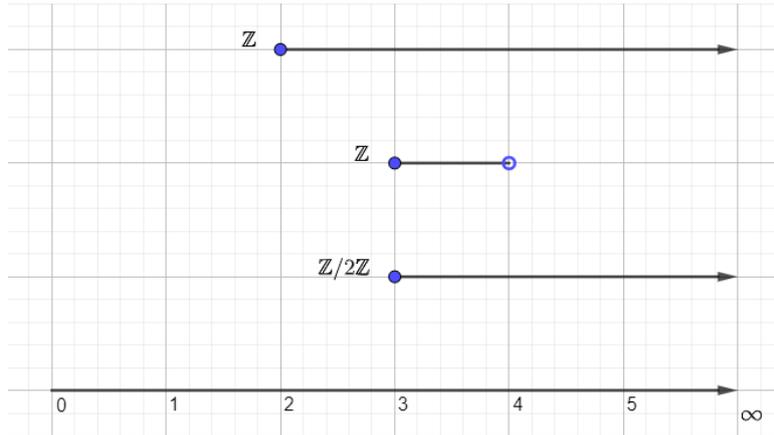


Figura 3.2: Código de barras entero para el sombrero bobo

3.4.2. Sombrero bobo

Al igual que hicimos para la botella de Klein, calculamos a mano todos los grupos $H_1^{i,k,j}$ posibles y presentamos los resultados finales en la página 60. En base a estos grupos $H_1^{i,k,j}$, los únicos grupos $BD_1^{I,k}$ no triviales que hay son:

$$\begin{aligned}
 [2, \infty) &\mapsto \frac{H_1^{2,2,5}}{H_1^{2,2,4}} \cong \frac{H_1^{2,3,5}}{H_1^{2,3,4}} \cong \frac{H_1^{2,4,5}}{H_1^{1,4}} \cong \mathbb{Z} \\
 [3, 4) &\mapsto \frac{H_1^{3,3,4}}{H_1^{2,3}} \cong \mathbb{Z} \\
 [3, \infty) &\mapsto \frac{H_1^{3,3,5}}{H_1^{3,3,4}} \cong \frac{H_1^{3,4,5}}{H_1^{2,4}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Estos grupos dan lugar al código de barras entero de la figura 3.2. Nuevamente calculamos todos los grupos $V_{1,+}^{I,k}$, $V_{1,-}^{I,k}$ y $V_1^{I,k}$ y comprobamos que efectivamente en todos los casos siempre coinciden ambos cocientes. Presentamos sólo los resultados para los intervalos $[2, \infty)$, $[3, 4)$ y $[3, \infty)$. El intervalo $[3, 4)$ es el más interesante de los tres y hablaremos un poco más de él más abajo.

Grupos $V_1^{I,k}$ para $I = [2, \infty)$

$$\begin{aligned}
 V_1^{I,2} &= \frac{V_{1,+}^{I,2}}{V_{1,-}^{I,2}} = \frac{\mathbb{Z}_a}{0} \cong \mathbb{Z} \\
 V_1^{I,3} &= \frac{V_{1,+}^{I,3}}{V_{1,-}^{I,3}} = \frac{\mathbb{Z}_a}{0} \cong \mathbb{Z} \\
 V_1^{I,4} &= \frac{V_{1,+}^{I,4}}{V_{1,-}^{I,4}} = \frac{\mathbb{Z}_{-2b}}{0} \cong \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Grupos $V_1^{I,k}$ para $I = [3, 4)$

$$V_1^{I,3} = \frac{V_{1,+}^{I,3}}{V_{1,-}^{I,3}} = \frac{\mathbb{Z}_{a+2b}}{0} \cong \mathbb{Z}$$

Este es el caso más interesante de los que hemos visto hasta ahora porque es el único donde los grupos $BD_1^{I,3}$ y $V_1^{I,3}$ son isomorfos pero los grupos que definen el numerador y el denominador del cociente no lo son. De todas formas, la proposición 3.5 que habla sobre contenciones entre los numeradores y los denominadores se sigue cumpliendo.

Grupos $V_1^{I,k}$ para $I = [3, \infty)$

$$V_1^{I,3} = \frac{V_{1,+}^{I,3}}{V_{1,-}^{I,3}} = \frac{\mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b}{\mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_{a+2b}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$V_1^{I,4} = \frac{V_{1,+}^{I,4}}{V_{1,-}^{I,4}} = \frac{\mathbb{Z}_b}{\mathbb{Z}_{2b}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

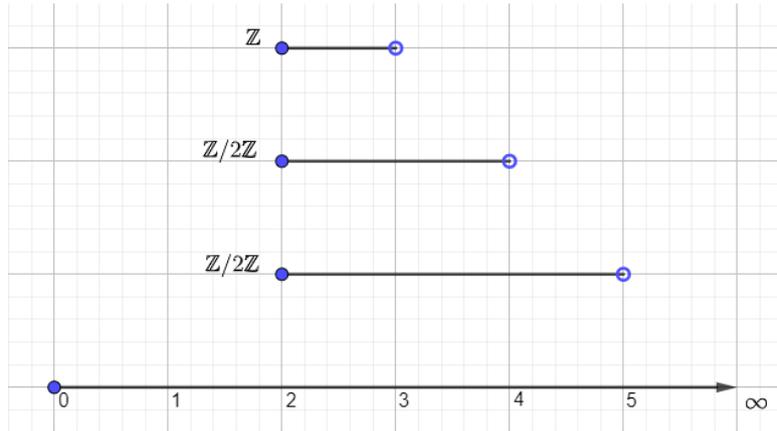


Figura 3.3: Código de barras entero para el complejo 4-2-1

3.4.3. Complejo 4-2-1

Al igual que en los dos casos anteriores, calculamos a mano todos los grupos $H_1^{i,k,j}$ y presentamos los resultados en la página 63. Los únicos grupos $BD_1^{I,k}$ no triviales que nos salen son:

$$\begin{aligned}
 [2, 3] &\mapsto \frac{H_1^{2,2,3}}{H_1^{1,2}} \cong \mathbb{Z} \\
 [2, 4] &\mapsto \frac{H_1^{2,2,4}}{H_1^{2,2,3}} \cong \frac{H_1^{2,3,4}}{H_1^{1,3}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
 [2, 5] &\mapsto \frac{H_1^{2,2,5}}{H_1^{2,2,4}} \cong \frac{H_1^{2,3,5}}{H_1^{2,3,4}} \cong \frac{H_1^{2,4,5}}{H_1^{1,4}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Con estos grupos, obtenemos el código de barras entero de la figura 3.3. Calculamos separadamente los grupos $V_1^{I,k}$ y nos sucede lo mismo que con la botella de Klein: no solo todos los cocientes son iguales sino que todos los denominadores y todos los numeradores que los definen son iguales también. Presentamos los resultados para los intervalos $[2, 3)$, $[2, 4)$ y $[2, 5)$.

Grupos $V_1^{I,k}$ para $I = [2, 3)$

$$V_1^{I,2} = \frac{V_{1,+}^{I,2}}{V_{1,-}^{I,2}} = \frac{\mathbb{Z}_{4e}}{0} \cong \mathbb{Z}$$

Grupos $V_1^{I,k}$ para $I = [2, 4)$

$$\begin{aligned}
 V_1^{I,2} &= \frac{V_{1,+}^{I,2}}{V_{1,-}^{I,2}} = \frac{\mathbb{Z}_{2e}}{\mathbb{Z}_{4e}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
 V_1^{I,3} &= \frac{V_{1,+}^{I,3}}{V_{1,-}^{I,3}} = \frac{2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}_e)}{0} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Grupos $V_1^{I,k}$ para $I = [2, 5)$

$$V_1^{I,2} = \frac{V_{1,+}^{I,2}}{V_{1,-}^{I,2}} = \frac{\mathbb{Z}_e}{\mathbb{Z}_{2e}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$V_1^{I,3} = \frac{V_{1,+}^{I,3}}{V_{1,-}^{I,3}} = \frac{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}_e}{2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}_e)} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$V_1^{I,4} = \frac{V_{1,+}^{I,4}}{V_{1,-}^{I,4}} = \frac{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}_e}{0} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Capítulo 4

Estabilidad de los grupos BD

Los F -módulos de persistencia, siendo F un cuerpo, cuentan con teoremas de descomposición única mediante módulos intervalares, mientras que los \mathbb{Z} -módulos de persistencia no los tienen y necesitan otros enfoques para su estudio. En el capítulo anterior hemos presentado una serie de grupos, los grupos $BD_n^{I,k}$, que también intentan estudiar los \mathbb{Z} -módulos mediante intervalos. Aunque no dan una descripción completa de los \mathbb{Z} -módulos de persistencia, hemos probado que son una buena generalización al caso entero porque si los calculamos sobre un F -módulo de persistencia sí nos dan toda la información necesaria. Entonces nos planteamos si estos grupos tienen más propiedades que hagan deseable su estudio y su uso en la práctica.

En este capítulo, cuyo planteamiento y resultados son totalmente originales, nos vamos a centrar en la estabilidad, es decir, queremos comprobar si los grupos $BD_n^{I,k}$ se mantienen bajo control cuando hacemos pequeñas modificaciones sobre el módulo de persistencia. Esto es importante porque en la práctica, los datos reales pueden tener errores de muestreo y necesitamos que estos errores no cambien sustancialmente los resultados. Pero para poder estudiar la estabilidad de los grupos $BD_n^{I,k}$ necesitamos antes generalizar los conceptos ya vistos, pues todo lo que hemos hecho en el capítulo anterior se hacía bajo el supuesto de que los módulos de persistencia estaban indexados sobre $T = \mathbb{N}$ y esto no es suficiente.

En la sección 4.1 vamos a redefinir los conceptos estudiados en el capítulo anterior para que se puedan aplicar en módulos indexados por conjuntos de índices T más generales. Después, en la sección 4.2 usaremos estas nuevas definiciones para probar algunos resultados de estabilidad parcial para los grupos $BD_n^{I,k}$ y los grupos $V_n^{I,k}$.

4.1. Grupos BD con parámetro general

El \mathbb{Z} -módulo de persistencia con el que vamos a trabajar en este capítulo se llamará H_n . Está indexado por $T = \mathbb{R}$, y está formado por los grupos de homología n -ésimos $\{H_n^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ y las aplicaciones de estructura $\rho_n^{s,t}$ tal y como dice la definición 2.15. Por hacer más llevadera la notación, que se irá complicando a lo largo del capítulo, vamos a optar por no escribir la dimensión n , mientras que lo que habitualmente se escribe en los superíndices se escribirá en los subíndices. Así, el grupo H_n^t pasará a escribirse H_t y la aplicación de estructura $\rho_n^{s,t}$ pasará a escribirse $\rho_{s,t}$. Igualmente, los grupos $BD_n^{I,k}$ y $V_n^{I,k}$ se escribirán $BD_{I,k}$ y $V_{I,k}$. Esto facilitará la lectura de los resultados y las pruebas que iremos dando.

Lo primero que necesitamos es ver cómo vamos a trabajar con los intervalos $I \subset T$ que vimos en la definición 2.18, pues vamos a tener que aproximarnos a sus extremos tanto por dentro como por fuera (algo así como calcular límites) y necesitamos explicar bien cómo hacemos

estas aproximaciones. Cuando $T = \mathbb{N}$ no hacía falta esto, pues para analizar lo que pasa en los extremos del intervalo $[i, j)$ bastaba con ver qué pasaba en $i - 1, i, j$ y $j + 1$. Con conjuntos de índices más generales como $T = \mathbb{R}$ no podemos limitarnos a una cantidad finita de casos particulares, y vamos a necesitar el concepto de corte.

Definición 4.1. *Sea $T \subset \mathbb{R}$. Un corte de T es un par de subconjuntos $c = (c^-, c^+)$ tales que $T = c^- \cup c^+$ y $s < t$ para cualesquiera $s \in c^-, t \in c^+$.*

Esta definición no excluye la posibilidad de que c^- o c^+ sea vacío. Un ejemplo de corte de \mathbb{R} sería el dado por $c^- = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$ y $c^+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Dado cualquier intervalo $I \subset T$, siempre existen dos cortes l, u tales que $I = l^+ \cap u^-$, y todos los cálculos que hagamos en torno al intervalo I se harán apoyándonos en los cortes l y u . Una alternativa a los cortes para describir los intervalos son los puntos decorados, descritos en [7].

Las dos definiciones siguientes son las que nos van a decir cómo aproximarnos a los extremos de un intervalo, concretamente a partir de imágenes y núcleos de las aplicaciones de estructura de un módulo de persistencia.

Definición 4.2. *Sea el \mathbb{Z} -módulo de persistencia H_n , sea c un corte de T y sea $t \in c^+$. Definimos los submódulos $\text{Im}_{c,t}^- \subset \text{Im}_{c,t}^+ \subset H_t$ según las fórmulas:*

$$\begin{aligned} \text{Im}_{c,t}^- &= \bigcup_{s \in c^-} \text{Im } \rho_{s,t} \\ \text{Im}_{c,t}^+ &= \bigcap_{s \in c^+, s \leq t} \text{Im } \rho_{s,t} \end{aligned}$$

Definición 4.3. *Sea el \mathbb{Z} -módulo de persistencia H_n , sea c un corte de T y sea $t \in c^-$. Definimos los submódulos $\text{ker}_{c,t}^- \subset \text{ker}_{c,t}^+ \subset H_t$ según las fórmulas:*

$$\begin{aligned} \text{ker}_{c,t}^- &= \bigcup_{r \in c^-, t \leq r} \text{ker } \rho_{t,r} \\ \text{ker}_{c,t}^+ &= \bigcap_{r \in c^+} \text{ker } \rho_{t,r} \end{aligned}$$

Por convención, $\text{Im}_{c,t}^- = 0$ si c^- es vacío y $\text{ker}_{c,t}^+ = V_t$ si c^+ es vacío.

En el caso con $T = \mathbb{N}$, un intervalo $I = [i, j)$ se definiría mediante los dos cortes:

$$\begin{aligned} l^- &= \{n \in \mathbb{N} | n \leq i - 1\} \\ l^+ &= \{n \in \mathbb{N} | n \geq i\} \\ u^- &= \{n \in \mathbb{N} | n \leq j - 1\} \\ u^+ &= \{n \in \mathbb{N} | n \geq j\} \end{aligned}$$

y dado un $k \in I$, las definiciones 4.2 y 4.3 se traducen en:

$$\text{Im}_{l,t}^- = \text{Im } \rho_{i-1,k} \quad (4.1)$$

$$\text{Im}_{l,t}^+ = \text{Im } \rho_{i,k} \quad (4.2)$$

$$\text{ker}_{u,t}^- = \text{ker } \rho_{k,j-1} \quad (4.3)$$

$$\text{ker}_{u,t}^+ = \text{ker } \rho_{k,j} \quad (4.4)$$

Es decir, los grupos $\text{Im}_{l,t}^-$ y $\text{ker}_{u,t}^-$ nos dan una aproximación por la izquierda de lo que sucede en los límites del intervalo I mientras que los grupos $\text{Im}_{l,t}^+$ y $\text{ker}_{u,t}^+$ nos dan una aproximación por la derecha.

Definición 4.4. *Sea el \mathbb{Z} -módulo de persistencia H_n , sean l y u dos cortes de T y sea I el intervalo dado por la intersección $I = l^+ \cap u^-$. Definimos los siguientes submódulos de H_t :*

$$\begin{aligned} V_{I,t}^+ &= \text{Im}_{l,t}^+ \cap \text{ker}_{u,t}^+ \\ V_{I,t}^- &= (\text{Im}_{l,t}^- \cap \text{ker}_{u,t}^+) + (\text{Im}_{l,t}^+ \cap \text{ker}_{u,t}^-) \end{aligned}$$

Además, dado que $V_{I,t}^- \subset V_{I,t}^+$, podemos definir el módulo cociente:

$$V_{I,t} = V_{I,t}^+ / V_{I,t}^- \quad (4.5)$$

Esta es la definición original de los grupos $V_{I,t}^-$, $V_{I,t}^+$ y $V_{I,t}$ de la que hablábamos en el capítulo anterior. Usando las ecuaciones 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4 se ve que en efecto la definición 3.11 es la adaptación correcta al caso con $T = \mathbb{N}$.

En [9] se prueba que dado un intervalo $I \subset T$ y dados dos puntos $s, t \in I$ los grupos $V_{I,s}$ y $V_{I,t}$ son isomorfos. Realmente se prueba suponiendo que los coeficientes están en un cuerpo y por tanto $V_{I,s}$ y $V_{I,t}$ son espacios vectoriales, pero la prueba se puede utilizar tal cual para coeficientes en cualquier anillo R , en particular para coeficientes enteros.

Ahora nuestro objetivo es el de tomar la definición 3.3 para los grupos $BD_n^{I,k}$ (que ahora llamamos $BD_{I,k}$) que proviene del artículo [21] y solo valía para módulos de persistencia indexados por $T = \mathbb{N}$, y extenderla para que se pueda usar en cualquier tipo de módulos de persistencia. Como la fórmula que dimos en el capítulo anterior para los grupos $BD_{I,k}$ era:

$$BD_{[i,j],k} = \frac{H_{i,k,j}}{H_{i,k,j-1}} \quad (4.6)$$

parece que lo que habría que hacer es encontrar la forma de traducir los grupos $H_{i,k,j}$ al lenguaje general para luego definir simplemente $BD_{I,k}$ como su cociente. Sin embargo, cuando usamos un T general el numerador y el denominador de este cociente se van a tener que traducir de forma diferente. Esto es así porque dado un intervalo I , lo que va a hacer el numerador es contar las clases de homología que están muertas más allá de I , y por tanto necesita una aproximación por la derecha al extremo derecho de I mientras que el denominador lo que va a hacer es contar las clases de homología que mueren antes de acabar I , y por tanto necesita una aproximación por la izquierda. Por tanto, en la traducción que proponemos para el grupo $BD_{I,k}$ el numerador y el denominador van a tener fórmulas diferentes, al contrario que en el capítulo anterior donde sí se podía usar una fórmula parecida para ambos.

Definición 4.5 (original). *Sea el \mathbb{Z} -módulo de persistencia H_n , sean l y u dos cortes de T y sea I el intervalo dado por $l^+ \cap u^-$. Dado un $k \in I$, definimos el grupo $BD_{I,k}$ como:*

$$BD_{I,k} = \frac{\text{Im}_{l,k}^+ \cap \bigcap_{t \in u^+} \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)}{\text{Im}_{l,k}^+ \cap \bigcup_{k \leq t, t \in u^-} \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)} \quad (4.7)$$

Proposición 4.1 (original). *La definición 4.5 es una buena generalización de la definición 3.3, es decir, si tomamos $T = \mathbb{N}$ e $I = [i, j]$, $BD_{I,k} \cong H_{i,k,j} / H_{i,k,j-1}$.*

Demostración. Tal y como decimos un poco más arriba, cuando $T = \mathbb{N}$, el intervalo $I = [i, j]$ se define mediante los cortes $l^- = [0, i - 1]$, $l^+ = [i, \infty)$, $u^- = [0, j - 1]$ y $u^+ = [j, \infty)$. Según la definición 4.2, tenemos que:

$$\text{Im}_{l,k}^+ = \bigcap_{s \in l^+, s \leq k} \text{Im } \rho_{s,k}$$

Por el lema 3.1, sabemos que si $s < s'$ entonces $\text{Im } \rho_{s,t} \subset \rho_{s',t}$. Entonces la intersección de todos los grupos $\text{Im } \rho_{s,t}$ es igual al menor de todos ellos, que se da en $s = i$ porque es el menor $s \in l^+$ tal que $s \leq k$. Entonces, cuando $T = \mathbb{N}$, $\text{Im}_{l,k}^+ = \text{Im } \rho_{i,k} = H_{i,k}$.

Ahora debemos probar que si $t < t'$, entonces $\rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-) \subset \rho_{k,t'}^{-1}(\text{Im}_{l,t'}^-)$. Sea un $a \in \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)$, es decir, sea un $a \in V_k$ tal que $\rho_{k,t}(a) \in \text{Im}_{l,t}^-$. Dado que

$$\text{Im}_{l,t}^- = \bigcup_{s \in l^-} \text{Im } \rho_{s,t}$$

esto significa que existe un $s \in l^-$ tal que $\rho_{k,t}(a) \in \text{Im } \rho_{s,t}$. Y al aplicar $\rho_{t,t'}$ tenemos que $\rho_{t,t'}(\rho_{s,t})(a) = \rho_{s,t'}(a) \in \rho_{t,t'}(\text{Im } \rho_{s,t}) = \text{Im } \rho_{s,t'}$. Por tanto $a \in \rho_{k,t'}^{-1}(\text{Im } \rho_{s,t'})$ para un $s \in l^-$ y por tanto $a \in \rho_{k,t'}^{-1}(\text{Im}_{l,t'}^-)$.

Esto quiere decir que la intersección de todos los $\rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)$ entre todos los $t \in u^+$ se produce yendo al menor t posible, que en este caso es $t = j$ y por tanto $\bigcap_{t \in u^+} \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-) = \rho_{k,j}^{-1}(\text{Im}_{l,j}^-)$ y según la ecuación 4.1, esto es igual a $\rho_{k,j}^{-1}(\text{Im } \rho_{i-1,j}) = \rho_{k,j}^{-1}(H_{i-1,j})$.

Por otra parte, la unión de todos los $\rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)$ entre todos los $t \in u^-$, $k \leq t$ se produce yendo al mayor t posible, que es $t = j - 1$ y por tanto $\bigcup_{k \leq t, t \in u^-} \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-) = \rho_{k,j-1}^{-1}(\text{Im}_{l,j-1}^-)$ y según la ecuación 4.1, esto es igual a $\rho_{k,j-1}^{-1}(\text{Im } \rho_{i-1,j-1}) = \rho_{k,j-1}^{-1}(H_{i-1,j-1})$. Queda probado entonces que cuando $T = \mathbb{N}$,

$$BD_{[i,j],k} = \frac{H_{i,k} \cap \rho_{k,j}^{-1}(H_{i-1,j})}{H_{i,k} \cap \rho_{k,j-1}^{-1}(H_{i-1,j-1})} = \frac{H_{i,k,j}}{H_{i,k,j-1}} \quad (4.8)$$

□

Ya hemos visto que la definición 4.5 coincide con la definición 3.3 cuando $T = \mathbb{N}$. Ahora vamos a comprobar si también satisface las mismas propiedades. Lo primero que vamos a dar es una versión del teorema 3.6 para parámetro general. La prueba seguirá una estructura similar pero requerirá un par de detalles técnicos adicionales.

Teorema 4.1 (original). *Sea H_n un F -módulo de persistencia indexado sobre T , sean l y u dos cortes de T y sea I el intervalo dado por $l^+ \cap u^-$. Dado un $k \in I$, tenemos existe un isomorfismo:*

$$BD_{I,k} \cong V_{I,k} \quad (4.9)$$

Demostración. La prueba va a ser muy similar a la del teorema 3.6. Al ser ambos espacios vectoriales, basta comprobar que:

$$\dim \left(\frac{\text{Im}_{l,k}^+ \cap \bigcap_{t \in u^+} \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)}{\text{Im}_{l,k}^+ \cap \bigcup_{k \leq t, t \in u^-} \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)} \right) = \dim \left(\frac{\text{Im}_{l,t}^+ \cap \ker_{u,t}^+}{(\text{Im}_{l,t}^- \cap \ker_{u,t}^+) + (\text{Im}_{l,t}^+ \cap \ker_{u,t}^-)} \right) \quad (4.10)$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} \dim(BD_{I,k}) &= \dim(\text{Im}_{l,t}^+ \cap \ker_{u,t}^+) - \dim(\text{Im}_{l,t}^- \cap \ker_{u,t}^+) \\ &\quad - \dim(\text{Im}_{l,t}^+ \cap \ker_{u,t}^-) + \dim(\text{Im}_{l,t}^- \cap \ker_{u,t}^-) \end{aligned}$$

Ya sabemos que $\text{Im}_{l,k}^- \subset \text{Im}_{l,k}^+$. Ahora queremos ver que $\text{Im}_{l,k}^- \subset \bigcap_{t \in u^+} \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)$ y $\text{Im}_{l,k}^- \subset \bigcup_{k \leq t, t \in u^-} \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)$. Para ello basta ver simplemente que dado cualquier $t \geq k$, $\text{Im}_{l,k}^- \subset \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)$. Si $a \in \text{Im}_{l,k}^-$, existe un $s \in l^-$ tal que $a \in \text{Im} \rho_{s,k}$. Al aplicar $\rho_{k,t}$, tenemos que $\rho_{k,t}(a) \in \rho_{k,t}(\text{Im} \rho_{s,k}) = \text{Im} \rho_{s,t}$ y por tanto $a \in \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im} \rho_{s,t})$ para un $s \in l^-$, es decir, $a \in \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)$.

Entonces, $\text{Im}_{l,k}^-$ está contenido tanto en el numerador como en el denominador de $BD_{I,k}$ y por ser todos F -espacios vectoriales de dimensión finita, podemos decir que:

$$\text{Im}_{l,k}^+ \cap \bigcap_{t \in u^+} \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-) \cong \text{Im}_{l,k}^- \oplus \frac{\text{Im}_{l,k}^+ \cap \bigcap_{t \in u^+} \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)}{\text{Im}_{l,k}^-} = \text{Im}_{l,k}^- \oplus \frac{\text{Im}_{l,k}^+ \cap \bigcap_{t \in u^+} \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)}{\text{Im}_{l,k}^- \cap \bigcap_{t \in u^+} \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)}$$

E igualmente con el denominador:

$$\text{Im}_{l,k}^+ \cap \bigcup_{t \in u^-, k \leq t} \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-) \cong \text{Im}_{l,k}^- \oplus \frac{\text{Im}_{l,k}^+ \cap \bigcup_{t \in u^-, k \leq t} \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)}{\text{Im}_{l,k}^-} = \text{Im}_{l,k}^- \oplus \frac{\text{Im}_{l,k}^+ \cap \bigcup_{t \in u^-, k \leq t} \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)}{\text{Im}_{l,k}^- \cap \bigcup_{t \in u^-, k \leq t} \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)}$$

Juntando todo esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \dim(BD_{I,k}) &= \dim(\text{Im}_{l,k}^+ \cap \bigcap_{t \in u^+} \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)) - \dim(\text{Im}_{l,k}^- \cap \bigcap_{t \in u^+} \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)) \\ &\quad - \dim(\text{Im}_{l,k}^+ \cap \bigcup_{t \in u^-, k \leq t} \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)) + \dim(\text{Im}_{l,k}^- \cap \bigcup_{t \in u^-, k \leq t} \rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)) \end{aligned}$$

Vayamos al primer y segundo sumando. Ya hemos visto antes que, cuanto menor sea el t , más pequeños serán el subespacio $\rho_{k,t}^{-1}(\text{Im}_{l,t}^-)$ y el subespacio $\ker \rho_{k,t}$. Por ser V_k un espacio vectorial de dimensión finita, tiene que haber un $t' \in u^+$ tal que $\rho_{k,t'}^{-1}(\text{Im}_{l,t'}^-)$ sea el menor posible y $\ker \rho_{k,t'}$ sea el menor posible. Con respecto al tercer y cuarto sumando, por el mismo razonamiento debe haber un $t'' \in u^-$, $t'' \geq k$ tal que $\rho_{k,t''}^{-1}(\text{Im}_{l,t''}^-)$ sea el mayor posible y $\ker \rho_{k,t''}$ sea el mayor posible. Entonces, podemos decir que:

$$\begin{aligned} \dim(BD_{I,k}) &= \dim(\text{Im}_{l,k}^+ \cap \rho_{k,t'}^{-1}(\text{Im}_{l,t'}^-)) - \dim(\text{Im}_{l,k}^- \cap \rho_{k,t'}^{-1}(\text{Im}_{l,t'}^-)) \\ &\quad - \dim(\text{Im}_{l,k}^+ \cap \rho_{k,t''}^{-1}(\text{Im}_{l,t''}^-)) + \dim(\text{Im}_{l,k}^- \cap \rho_{k,t''}^{-1}(\text{Im}_{l,t''}^-)) \end{aligned}$$

En el primer sumando, podemos aplicar el homomorfismo restringido $\rho_{k,t'}^* : \text{Im}_{l,k}^+ \cap \rho_{k,t'}^{-1}(\text{Im}_{l,t'}^-) \rightarrow \text{Im}_{l,t'}^-$, cuyo núcleo y cuya imagen son:

$$\begin{aligned} \ker \rho_{k,t'}^* &= \{a \in \text{Im}_{l,k}^+ \mid \rho_{k,t'}(a) = 0\} = \text{Im}_{l,k}^+ \cap \ker \rho_{k,t'} = \text{Im}_{l,k}^+ \cap \ker_{u,k}^+ \\ \text{Im} \rho_{k,t'}^* &= \rho_{k,t'}(\text{Im}_{l,k}^+ \cap \rho_{k,t'}^{-1}(\text{Im}_{l,t'}^-)) = \text{Im}_{l,t'}^+ \cap \text{Im}_{l,t'}^- = \text{Im}_{l,t'}^- \end{aligned}$$

Entonces, por una propiedad elemental del álgebra lineal,

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}_{l,k}^+ \cap \rho_{k,t'}^{-1}(\text{Im}_{l,t'}^-)) &= \dim(\ker \rho_{k,t'}^*) + \dim(\text{Im} \rho_{k,t'}^*) \\ &= \dim(\text{Im}_{l,k}^+ \cap \ker_{u,k}^+) + \dim(\text{Im}_{l,t'}^-) \end{aligned}$$

En el segundo sumando usaríamos el mismo argumento también con $\rho_{k,t''}^*$, y en el tercero y el cuarto usaríamos el mismo argumento con el homomorfismo restringido $\rho_{k,t''}^*$, obteniendo:

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}_{l,k}^- \cap \rho_{k,t'}^{-1}(\text{Im}_{l,t'}^-)) &= \dim(\text{Im}_{l,k}^- \cap \ker_{u,k}^+) + \dim(\text{Im}_{l,t'}^-) \\ \dim(\text{Im}_{l,k}^+ \cap \rho_{k,t''}^{-1}(\text{Im}_{l,t''}^-)) &= \dim(\text{Im}_{l,k}^+ \cap \ker_{u,k}^-) + \dim(\text{Im}_{l,t''}^-) \\ \dim(\text{Im}_{l,k}^- \cap \rho_{k,t''}^{-1}(\text{Im}_{l,t''}^-)) &= \dim(\text{Im}_{l,k}^- \cap \ker_{u,k}^-) + \dim(\text{Im}_{l,t''}^-) \end{aligned}$$

Haciendo las sumas y restas adecuadas, llegamos al resultado que queríamos probar. \square

Al igual que nos pasó con el teorema 3.6, la forma en que hacemos la prueba depende de que los coeficientes de la homología estén en un cuerpo y no hemos encontrado ni una prueba ni un contraejemplo que nos digan si ocurre lo mismo cuando los coeficientes son enteros. Por tanto sólo podemos plantear la siguiente conjetura esperando poder resolverla en un futuro.

Conjetura 4.1. *Sea el \mathbb{Z} -módulo de persistencia H_n , sean l y u dos cortes de T y sea I el intervalo dado por $l^+ \cap u^-$. Dado un $k \in I$, tenemos existe un isomorfismo:*

$$BD_{I,k} \cong V_{I,k} \quad (4.11)$$

4.2. Estabilidad frente a pequeñas perturbaciones

En esta última sección estudiaremos qué sucede con los grupos $BD_{I,k}$ y los grupos $V_{I,k}$ cuando introducimos una pequeña perturbación en el módulo de persistencia H_n . Este sería el primero de los pasos para un estudio completo de la estabilidad de la homología persistente, que en el caso con coeficientes en un cuerpo queda completamente descrito en el libro [7]. En este libro, se estudia la categoría de los F -módulos de persistencia indexados por $T = \mathbb{R}$, se define una noción de diagrama de persistencia más general que la vista en la definición 2.21 y se introduce nuevamente la distancia *bottleneck*, que ya vimos en la definición 2.22 y mide la similaridad entre dos módulos de persistencia. Después se introduce la distancia *interleaving*, que compara dos módulos de persistencia mediante el uso de un functor (algo así como una aplicación entre categorías) llamado 1_ε . Finalmente, el teorema de isometría prueba que la distancia *interleaving* entre dos módulos de persistencia es igual a la distancia *bottleneck* entre sus diagramas de persistencia.

Nuestro objetivo es el de extrapolar toda esta teoría a los \mathbb{Z} -módulos de persistencia, pero no vamos a poder llegar tan lejos. Únicamente arañaremos la superficie, y estudiaremos qué sucede en un módulo de persistencia cuando le aplicamos el functor 1_ε , dando así un pequeño paso en esta línea.

Seguimos trabajando en todo momento con el módulo de persistencia H_n , con aplicaciones de estructura $\rho_{s,t}$.

Definición 4.6. *Sea $c = (c^-, c^+)$ un corte de \mathbb{R} . Dado un $\varepsilon \in \mathbb{R}$, definimos $c + \varepsilon$ como el corte dado por los conjuntos $(c + \varepsilon)^- = \{a \in \mathbb{R} | a - \varepsilon \in c^-\}$, $(c + \varepsilon)^+ = \{a \in \mathbb{R} | a - \varepsilon \in c^+\}$.*

El functor 1_ε convierte un módulo de persistencia en otro, transformando tanto sus grupos como sus aplicaciones de estructura según las fórmulas que se dan en la siguiente definición.

Definición 4.7. *Sea el \mathbb{Z} -módulo de persistencia H_n y sea $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Definimos el módulo de persistencia $1_\varepsilon(H_n)$ como el módulo dado por los grupos $1_\varepsilon(H_s) = \rho_{s,s+\varepsilon}(H_s)$ y las aplicaciones de estructura $1_\varepsilon(\rho_{s,t}) = \rho_{s+\varepsilon,t+\varepsilon}|_{\rho_{s,s+\varepsilon}(H_s)}$*

Lo que hace este functor es tomar cada grupo H_s , mandarlo en $H_{s+\varepsilon}$ mediante la aplicación de estructura $\rho_{s,s+\varepsilon}$, transformándolo en $H_{s,s+\varepsilon} = \rho_{s,s+\varepsilon}(H_s)$ y poner esa imagen en la posición s del nuevo módulo de persistencia. Las nuevas aplicaciones de estructura no son más que las restricciones correspondientes a las antiguas. Por comodidad notacional, en los próximos resultados llamaremos H'_n al módulo de persistencia $1_\varepsilon(H_n)$, siendo sus grupos $H'_s = 1_\varepsilon(H_s)$ y sus aplicaciones de estructura $\rho'_{s,t} = 1_\varepsilon(\rho_{s,t})$. En general todo lo que esté denotado con un apóstrofe hará referencia al módulo $H'_n = 1_\varepsilon$.

Veamos en primer lugar qué relación hay entre las imágenes y los núcleos de las aplicaciones de estructura de los módulos de persistencia H_n y H'_n .

Lema 4.1. Sea el \mathbb{Z} -módulo de persistencia H_n , sea $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y sea $H'_n = 1_\varepsilon(H_n)$.

■ Sean $s, t \in \mathbb{R}$ con $s \leq t$. Entonces:

$$\rho'_{s,t}(H'_s) = \rho_{s,t+\varepsilon}(H_s) \quad (4.12)$$

■ Sean $t, r \in \mathbb{R}$ con $t \leq r$. Entonces:

$$\ker \rho'_{t,r} = \rho_{t,t+\varepsilon}(H_t) \cap \ker \rho_{t+\varepsilon,r+\varepsilon} \quad (4.13)$$

Demostración. (original) Ambos puntos son sencillos de probar usando la definición 4.7. En el primero, cambiamos $\rho'_{s,t}$ y H'_s por su definición y nos sale que:

$$\rho'_{s,t}(H'_s) = \rho_{s+\varepsilon,t+\varepsilon}|_{\rho_{s,s+\varepsilon}(H_s)}(\rho_{s,s+\varepsilon}(H_s)) = \rho_{s,t+\varepsilon}(H_s)$$

Con respecto al segundo punto, cambiando $\rho'_{t,r}$ por su definición nos sale que:

$$\ker \rho'_{t,r} = \ker \rho_{t+\varepsilon,r+\varepsilon}|_{\rho_{t,t+\varepsilon}(H_t)} = \rho_{t,t+\varepsilon}(H_t) \cap \ker \rho_{t+\varepsilon,r+\varepsilon} \quad (4.14)$$

□

Lema 4.2. Sea el \mathbb{Z} -módulo de persistencia H_n , sea $\varepsilon \in \mathbb{R}$, sea $H'_n = 1_\varepsilon(H_n)$ y sea $c = (c^-, c^+)$ un corte de \mathbb{R} . Dado un $t \in c^+$, tenemos las igualdades:

$$\begin{aligned} \text{Im}'_{c,t}{}^+ &= \text{Im}_{c,t+\varepsilon}^+ \\ \text{Im}'_{c,t}{}^- &= \text{Im}_{c,t+\varepsilon}^- \end{aligned}$$

Demostración. (original) Por definición,

$$\text{Im}'_{c,t}{}^+ = \bigcap_{s \in c^+, s \leq t} \rho'_{s,t}(H'_s)$$

Usando el lema 4.1, esto se puede cambiar por

$$\text{Im}'_{c,t}{}^+ = \bigcap_{s \in c^+, s \leq t} \rho_{s,t+\varepsilon}(H_s)$$

Ya sabemos que si $r < s$, entonces $\rho_{r,t+\varepsilon} \subset \rho_{s,t+\varepsilon}$. Entonces la intersección se produce tomando el menor valor posible, y ampliar el conjunto $\{s | s \in c^+, s \leq t\}$ por la derecha no cambia el resultado de la intersección. Entonces podemos decir que:

$$\text{Im}'_{c,t}{}^+ = \bigcap_{s \in c^+, s \leq t+\varepsilon} \rho_{s,t+\varepsilon}(H_s) = \text{Im}_{c,t+\varepsilon}^+$$

Con respecto a la segunda igualdad, usando otra vez el lema 4.1,

$$\text{Im}'_{c,t}{}^- = \bigcup_{s \in c^-} \rho'_{s,t}(H'_s) = \bigcup_{s \in c^-} \rho_{s,t+\varepsilon}(H_s) = \text{Im}_{c,t+\varepsilon}^-$$

□

Lema 4.3. *Sea el \mathbb{Z} -módulo de persistencia H_n , sea $\varepsilon \in \mathbb{R}$, sea $H'_n = 1_\varepsilon(H_n)$ y sea $c = (c^-, c^+)$ un corte de \mathbb{R} . Dado un $t \in c^-$, tenemos las igualdades:*

$$\begin{aligned}\ker'_{c,t}{}^+ &= \rho_{t,t+\varepsilon}(H_t) \cap \ker_{c+\varepsilon,t+\varepsilon}^+ \\ \ker'_{c,t}{}^- &= \rho_{t,t+\varepsilon}(H_t) \cap \ker_{c+\varepsilon,t+\varepsilon}^-\end{aligned}$$

Demostración. (original) Por definición,

$$\ker'_{c,t}{}^+ = \bigcup_{r \in c^+} \ker \rho'_{t,r}$$

Usando el lema 4.1, esto se cambia por:

$$\ker'_{c,t}{}^+ = \bigcap_{r \in c^+} \rho_{t,t+\varepsilon}(H_t) \cap \ker \rho_{t+\varepsilon,r+\varepsilon}$$

Como el término $\rho_{t,t+\varepsilon}(H_t)$ no depende de r , es común a todos ellos y se puede poner fuera de la intersección, quedando:

$$\ker'_{c,t}{}^+ = \rho_{t,t+\varepsilon}(H_t) \cap \bigcap_{r \in c^+} \ker \rho_{t+\varepsilon,r+\varepsilon}$$

La condición $r \in c^+$ es equivalente a pedir que $r + \varepsilon \in (c + \varepsilon)^+$. Haciendo el cambio de variables $p = r + \varepsilon$, podemos escribir entonces:

$$\ker'_{c,t}{}^+ = \rho_{t,t+\varepsilon}(H_t) \cap \bigcap_{p \in (c+\varepsilon)^+} \ker \rho_{t+\varepsilon,p} = \rho_{t,t+\varepsilon}(H_t) \cap \ker_{c+\varepsilon,t+\varepsilon}^+$$

Con respecto a la segunda igualdad, podemos usar los mismos razonamientos y tenemos que:

$$\begin{aligned}\ker'_{c,t}{}^- &= \bigcup_{r \in c^-, r \geq t} \ker \rho'_{t,r} \\ &= \bigcup_{r \in c^-, r \geq t} \rho_{t,t+\varepsilon}(H_t) \cap \ker \rho_{t+\varepsilon,r+\varepsilon} \\ &= \rho_{t,t+\varepsilon}(H_t) \cap \bigcup_{r \in c^-, r \geq t} \ker \rho_{t+\varepsilon,r+\varepsilon} \\ &= \rho_{t,t+\varepsilon}(H_t) \cap \bigcup_{p \in (c+\varepsilon)^-, p \geq t+\varepsilon} \ker \rho_{t+\varepsilon,p} \\ &= \rho_{t,t+\varepsilon}(H_t) \cap \ker_{c+\varepsilon,t+\varepsilon}^-\end{aligned}$$

□

Los grupos $BD_{I,k}$ y $V_{I,k}$ se definen en términos de las imágenes y núcleos antes descritos. Por tanto, apoyándonos en estos últimos tres lemas, podemos ver la relación entre los grupos $V_{I,k}$ del módulo de persistencia H_n y los grupos $V'_{I,k}$ del módulo de persistencia H'_n .

Teorema 4.2 (original). *Sea el \mathbb{Z} -módulo de persistencia H_n y sea $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Sea $H'_n = 1_\varepsilon(H_n)$, sean l y u dos cortes de \mathbb{R} y sea $I = l^+ \cap u^-$. Dado un $t \in I$:*

$$V'_{I,t} = V_{J,t+\varepsilon} \tag{4.15}$$

donde J es el intervalo dado por $J = l^+ \cap (u + \varepsilon)^-$.

Demostración. Por definición,

$$V'_{I,t} = \frac{V'_{I,t}^+}{V'_{I,t}^-} = \frac{\text{Im}'_{l,t}^+ \cap \ker'_{u,t}^+}{(\text{Im}'_{l,t}^- \cap \ker'_{u,t}^+) + (\text{Im}'_{l,t}^+ \cap \ker'_{u,t}^-)}$$

Usando los lemas 4.2 y 4.3, tenemos que esto es igual a:

$$V'_{I,t} = \frac{\text{Im}'_{l,t+\varepsilon}^+ \cap \rho_{t,t+\varepsilon}(H_t) \cap \ker'_{u+\varepsilon,t+\varepsilon}^+}{(\text{Im}'_{l,t+\varepsilon}^- \cap \rho_{t,t+\varepsilon}(H_t) \cap \ker'_{u+\varepsilon,t+\varepsilon}^+) + (\text{Im}'_{l,t+\varepsilon}^+ \cap \rho_{t,t+\varepsilon}(H_t) \cap \ker'_{u+\varepsilon,t+\varepsilon}^-)}$$

Ahora debemos notar que tanto $\text{Im}'_{l,t+\varepsilon}^+$ como $\text{Im}'_{l,t+\varepsilon}^-$ están contenidos en $\rho_{t,t+\varepsilon}(H_t)$ porque dado cualquier $s \leq t$, se tiene que $\rho_{s,t+\varepsilon} \subset \rho_{t,t+\varepsilon}$. Entonces simplemente podemos escribir:

$$V'_{I,t} = \frac{\text{Im}'_{l,t+\varepsilon}^+ \cap \ker'_{u+\varepsilon,t+\varepsilon}^+}{(\text{Im}'_{l,t+\varepsilon}^- \cap \ker'_{u+\varepsilon,t+\varepsilon}^+) + (\text{Im}'_{l,t+\varepsilon}^+ \cap \ker'_{u+\varepsilon,t+\varepsilon}^-)} = \frac{V'_{J,t+\varepsilon}^+}{V'_{J,t+\varepsilon}^-} = V'_{J,t+\varepsilon}$$

□

Tratemos de explicar lo que quiere decir este teorema de una forma más sencilla. Sea el módulo de persistencia H_n , y supongamos que hay un intervalo J que tiene una longitud mayor que ε tal que el grupo $H_{J,r}$ es no trivial para todo $r \in J$. Digamos por ejemplo que ese intervalo es $J = [s, t + \varepsilon)$. Al aplicar el functor 1_ε sobre H_n , ese intervalo se recorta y pierde un trozo con longitud ε , y se convierte en $I = [s, t)$, de forma tal que los grupos $V_{J,r+\varepsilon}$ y $V'_{I,r}$ son isomorfos. Es decir, que los grupos $V_{I,k}$ del módulo de persistencia H_n y los de H'_n se parecen mucho, siendo la única diferencia el pequeño trozo que se le recorta a los intervalos.

De igual manera, podemos probar un resultado análogo para los grupos $BD_{I,k}$.

Teorema 4.3 (original). *Sea el \mathbb{Z} -módulo de persistencia H_n y sea $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Sea $H'_n = 1_\varepsilon(H_n)$, sean l y u dos cortes de \mathbb{R} y sea $I = l^+ \cap u^-$. Dado un $t \in I$:*

$$BD'_{I,t} = BD_{J,t+\varepsilon} \quad (4.16)$$

donde J es el intervalo dado por $J = l^+ \cap (u + \varepsilon)^-$.

Demostración. Por definición, tenemos que:

$$BD'_{I,t} = \frac{\text{Im}'_{l,t}^+ \cap \bigcap_{r \in u^+} \rho'_{t,r}{}^{-1}(\text{Im}'_{l,r}^-)}{\text{Im}'_{l,t}^+ \cap \bigcup_{t \leq r, r \in u^-} \rho'_{t,r}{}^{-1}(\text{Im}'_{l,r}^-)}$$

Usando el lema 4.1 y el lema 4.2, esto se convierte en:

$$\begin{aligned} BD'_{I,t} &= \frac{\text{Im}'_{l,t+\varepsilon}^+ \cap \bigcap_{r \in u^+} (\rho_{t+\varepsilon,r+\varepsilon} |_{\rho_{t,t+\varepsilon}(H_t)})^{-1}(\text{Im}'_{l,r+\varepsilon}^-)}{\text{Im}'_{l,t+\varepsilon}^+ \cap \bigcup_{t \leq r, r \in u^-} (\rho_{t+\varepsilon,r+\varepsilon} |_{\rho_{t,t+\varepsilon}(H_t)})^{-1}(\text{Im}'_{l,r+\varepsilon}^-)} \\ &= \frac{\text{Im}'_{l,t+\varepsilon}^+ \cap \bigcap_{r \in u^+} \rho_{t,t+\varepsilon}(H_t) \cap \rho_{t+\varepsilon,r+\varepsilon}^{-1}(\text{Im}'_{l,r+\varepsilon}^-)}{\text{Im}'_{l,t+\varepsilon}^+ \cap \bigcup_{t \leq r, r \in u^-} \rho_{t,t+\varepsilon}(H_t) \cap \rho_{t+\varepsilon,r+\varepsilon}^{-1}(\text{Im}'_{l,r+\varepsilon}^-)} \end{aligned}$$

Como el término $\rho_{t,t+\varepsilon}(H_t)$ no depende de r , se puede sacar fuera de la intersección y, como ya dijimos durante la prueba del teorema 4.2, $\text{Im}'_{l,t+\varepsilon}^+ \subset \rho_{t,t+\varepsilon}(H_t)$ Entonces:

$$\begin{aligned} BD'_{I,t} &= \frac{\text{Im}'_{l,t+\varepsilon}^+ \cap \rho_{t,t+\varepsilon}(H_t) \cap \bigcap_{r \in u^+} \rho_{t+\varepsilon,r+\varepsilon}^{-1}(\text{Im}'_{l,r+\varepsilon}^-)}{\text{Im}'_{l,t+\varepsilon}^+ \cap \rho_{t,t+\varepsilon}(H_t) \cap \bigcup_{t \leq r, r \in u^-} \rho_{t+\varepsilon,r+\varepsilon}^{-1}(\text{Im}'_{l,r+\varepsilon}^-)} \\ &= \frac{\text{Im}'_{l,t+\varepsilon}^+ \cap \bigcap_{r \in u^+} \rho_{t+\varepsilon,r+\varepsilon}^{-1}(\text{Im}'_{l,r+\varepsilon}^-)}{\text{Im}'_{l,t+\varepsilon}^+ \cap \bigcup_{t \leq r, r \in u^-} \rho_{t+\varepsilon,r+\varepsilon}^{-1}(\text{Im}'_{l,r+\varepsilon}^-)} \end{aligned}$$

Haciendo de nuevo el cambio de variable $p = r + \varepsilon$, nos queda que:

$$BD'_{I,t} = \frac{\text{Im}_{l,t+\varepsilon}^+ \cap \bigcap_{p \in (u+\varepsilon)^+} \rho_{t+\varepsilon,p}^{-1}(\text{Im}_{l,p}^-)}{\text{Im}_{l,t+\varepsilon}^+ \cap \bigcup_{t+\varepsilon \leq p, p \in (u+\varepsilon)^-} \rho_{t+\varepsilon,p}^{-1}(\text{Im}_{l,p}^-)} = BD_{J,t+\varepsilon}$$

□

Este teorema se puede interpretar de forma similar al teorema 4.2. Esto implica que si tomamos un módulo de persistencia H_n , le calculo su código de barras entero y le aplico el functor 1_ε , el código de barras de H'_n va a ser casi igual salvo que los intervalos pierden por la derecha un trozo de longitud ε . Es decir, que si inducimos una perturbación de ε en el módulo de persistencia, el cambio en los grupos $BD_{I,k}$ es pequeño y se puede medir en función del propio ε . Lo cual nos da a entender que estos grupos son algo estables y puede tener sentido estudiar más a fondo la estabilidad de los \mathbb{Z} -módulos de persistencia, al estilo de como se hace en el libro [7].

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

Como hemos podido ver en los capítulos 3 y 4, que no podamos dar una descripción completa de los \mathbb{Z} -módulos de persistencia no significa que no podamos estudiarlos con un enfoque basado en intervalos. Además hemos comprobado que este enfoque basado en los grupos BD es una buena generalización de los resultados clásicos de la homología persistente en tanto que obtendríamos los mismos resultados si usáramos coeficientes en un cuerpo y en tanto que preservan al menos parcialmente las buenas propiedades de estabilidad. No obstante, aún queda mucho en lo que trabajar para asegurar que esta teoría se pueda usar en los mismos campos en los que ya está teniendo éxito la homología persistente con coeficientes en un cuerpo, como el análisis topológico de datos [4], análisis de imágenes digitales [24], análisis de series temporales [19], medicina [18], etc. Hacemos un resumen a las principales trabas que encontramos de momento en esta teoría con la esperanza de que en trabajos futuros se puedan resolver.

La primera traba que nos encontramos es la de la interpretabilidad de los resultados. Los grupos BD nos ayudan a detallar lo que pasa dentro de nuestra filtración asignando un grupo a cada intervalo, pero aún no tenemos una interpretación clara para los grupos que se obtienen ni para los códigos de barras que podemos crear con ellos. En el caso con coeficientes en un cuerpo esta interpretación era muy fácil: un intervalo $[s, t)$ representa una clase de homología que aparece por primera vez en la etapa s de la filtración y se anula al llegar a la etapa t . Cada clase de homología p -ésima que aparece en el proceso genera un único intervalo, lo que hace que todos los intervalos de un código de barras se puedan interpretar de forma independientemente. Por contra, cuando los coeficientes de la homología son enteros no podemos considerar todos los intervalos de forma separada. Vayamos por ejemplo al apartado 3.4.3, donde hacíamos los cálculos de los grupos BD para el complejo 4-2-1. A lo largo de toda la filtración sólo hay un generador para la homología 1-ésima, que es el ciclo e , pero en cambio el código de barras de la figura 3.3 tiene tres barras distintas. Además, es difícil interpretar qué sucede en el módulo de persistencia solo con estas tres barras. Por ejemplo, en la tercera etapa de la filtración teníamos que $H_1^3 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, pero esto no queda reflejado en ningún momento en el código de barras. Esto es algo que ya notaron los autores del artículo [21], y lo achacan al problema de la extensión de grupos. La solución que aportan los autores es la de no solo usar los grupos $BD_n^{l,k}$ sino también todos los $H_n^{i,j}$ y los $H_n^{i,k,j}$ pero tampoco dan una explicación de cómo interpretar correctamente todos estos resultados combinados. Por tanto, encontrar un método para interpretar qué sucede en el espacio topológico durante la filtración usando solo los grupos $H_n^{i,j}$, $H_n^{i,k,j}$ y $BD_n^{l,k}$ es una cuestión aún abierta y de capital importancia para poder plantearse usar estos grupos para aplicaciones prácticas.

Otro problema que aunque ya está resuelto podría tratar de mejorarse es el del cálculo de los grupos BD con ordenador. Actualmente estos cálculos sólo se pueden hacer mediante el

software Kenzo [23], que requiere usar secuencias espectrales y tiene un problema que ralentiza considerablemente el tiempo de cálculo. El algoritmo que calcula la homología persistente con coeficientes en un cuerpo nos da todos los intervalos a la vez en tiempo cúbico, mientras que el software Kenzo no puede calcular los grupos para todos los intervalos a la vez, sino que necesita calcular qué pasa en cada intervalo independientemente. Esto se puede comprobar en la sección 7 del artículo [21], donde se exponen ejemplos de las funciones y se ve que hay que hacer una llamada para cada intervalo y dimensión de la homología. Cuando usamos filtraciones que duren pocas etapas como los que hemos usado de ejemplo esto no es un problema, pero el número de intervalos a calcular crece de forma cuadrática con respecto al número de etapas de la filtración y esto sí supone un problema para filtraciones de gran formato. Por otra parte, no sabemos si este software está preparado para calcular grupos $BD_n^{I,k}$ con un intervalo I infinito. Diseñar un nuevo software que pueda calcular de forma más directa y eficiente los grupos BD para cualquier tipo de intervalo queda como un problema abierto que de ser resuelto haría más apetecible el uso de la homología persistente con coeficientes enteros.

Por otra parte, hemos conseguido probar que los grupos $BD_n^{I,k}$ y $V_n^{I,k}$ son isomorfos cuando usamos coeficientes en un cuerpo, pero solo hemos logrado probar resultados parciales para el análogo con coeficientes enteros. Queda por tanto como trabajo futuro buscar una prueba o un contraejemplo para las conjeturas 3.1 y 4.1. Realmente bastaría con la segunda de ellas, pues ya hemos visto que la primera es un caso particular cuando el conjunto de índices es $T = \mathbb{N}$. Si probáramos que esas conjeturas son ciertas, tendríamos una definición alternativa para los grupos BD y podría intentar buscarse un método para su cálculo sin tener que recurrir a las secuencias espectrales, usando sólo las imágenes y los núcleos de las aplicaciones de estructura.

Con respecto a la estabilidad de los grupos BD , aún queda mucho en lo que trabajar. Ya hemos visto cómo se modifican los grupos $BD_n^{I,k}$ cuando perturbamos la homología persistente con el functor 1_ε , pero esto es sólo el primer paso para encontrar un análogo al teorema de isometría del libro [7]. Para ello tendríamos que definir los diagramas de persistencia para coeficientes enteros, dar una medida de similaridad entre esos diagramas que generalice la distancia *bottleneck*, y definir una distancia que generalice la distancia *interleaving*. Toda esta es una tarea que está sin hacer, pero creemos que podría ser interesante que se estudie en un futuro, pues la estabilidad frente a pequeñas modificaciones es fundamental en las aplicaciones prácticas donde estén involucrados datos con posibles errores de muestreo.

Una vez que se hayan estudiado estas cuestiones, podremos decidir si toda la teoría desarrollada en esta memoria tiene una aplicabilidad en la práctica o por contra se queda como una contribución teórica al poco estudiado campo de la homología persistente con coeficientes enteros.

Bibliografía

- [1] M. Artin. *Algebra*. Pearson, 2 edition, 2018.
- [2] S. Awodey. *Category theory*. Oxford university press, 2010.
- [3] N. Bourbaki. Elements of mathematics. algebra, part i: Chapters 1-3. *Translated from the French, Hermann, Paris*, 1974.
- [4] G. Carlsson. Topology and data. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 46(2):255–308, Jan. 2009.
- [5] G. Carlsson and V. De Silva. Zigzag persistence. *Foundations of computational mathematics*, 10(4):367–405, 2010.
- [6] A. Cerri, B. D. Fabio, M. Ferri, P. Frosini, and C. Landi. Betti numbers in multidimensional persistent homology are stable functions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 36(12):1543–1557, Aug. 2013.
- [7] F. Chazal, V. De Silva, M. Glisse, and S. Oudot. *The structure and stability of persistence modules*. Springer, 2016.
- [8] D. Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, and J. Harer. Stability of Persistence Diagrams. *Discrete & Computational Geometry*, 37(1):103–120, Jan. 2007.
- [9] W. Crawley-Boevey. Decomposition of pointwise finite-dimensional persistence modules. *Journal of Algebra and its Applications*, 14(05):1550066, 2015.
- [10] D. S. Dummit and R. M. Foote. *Abstract algebra*, volume 3. Wiley Hoboken, 2004.
- [11] H. Edelsbrunner, D. Letscher, and A. Zomorodian. Topological persistence and simplification. In *Proceedings 41st annual symposium on foundations of computer science*, pages 454–463. IEEE, 2000.
- [12] P. Gabriel. Unzerlegbare darstellungen i. *Manuscripta mathematica*, 6(1):71–103, 1972.
- [13] A. Guidolin, J. Divasón, A. Romero, and F. Vaccarino. Computing multipersistence by means of spectral systems. In *Proceedings of the 2019 on International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 195–202, 2019.
- [14] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 2002.
- [15] J. Heras, T. Coquand, A. Mörtberg, and V. Siles. Computing persistent homology within coq/ssreflect. *ACM Transactions on Computational Logic (TOCL)*, 14(4):1–16, 2013.

- [16] J. Heras, F. J. Martín-Mateos, and V. Pascual. Modelling algebraic structures and morphisms in acl2. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 26(3):277–303, 2015.
- [17] T. W. Hungerford. Graduate texts in mathematics: Algebra, 1974.
- [18] M. Nicolau, A. J. Levine, and G. Carlsson. Topology based data analysis identifies a subgroup of breast cancers with a unique mutational profile and excellent survival. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(17):7265–7270, Apr. 2011.
- [19] N. Ravishanker and R. Chen. Topological data analysis (tda) for time series. *arXiv preprint arXiv:1909.10604*, 2019.
- [20] S. Ren, C. Wu, and J. Wu. Computational tools in weighted persistent homology. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, 42(2):237–258, 2021.
- [21] A. Romero, J. Heras, J. Rubio, and F. Sergeraert. Defining and computing persistent z-homology in the general case. *arXiv preprint arXiv:1403.7086*, 2014.
- [22] A. Romero and J. Rubio. [http:// www.unirioja.es/cu/anromero/persistent-homology.zip](http://www.unirioja.es/cu/anromero/persistent-homology.zip), 2012.
- [23] A. Romero, J. Rubio, and F. Sergeraert. Computing spectral sequences. *Journal of symbolic computation*, 41(10):1059–1079, 2006.
- [24] A. Romero, J. Rubio, and F. Sergeraert. Effective persistent homology of digital images. *arXiv preprint arXiv:1412.6154*, 2014.
- [25] A. Zomorodian and G. Carlsson. Computing Persistent Homology. *Discrete & Computational Geometry*, 33(2):249–274, Feb. 2005.