

## SOBRE LA ESTIMACIÓN DE LA VIDA A FATIGA DE UN ELEMENTO ENTALLADO

C. Navarro, J. Vázquez, J. Domínguez

Departamento de Ingeniería Mecánica y de los Materiales, Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla. Camino de los Descubrimientos s/n, 41092, Sevilla, España.

E-mail: cnp@us.es

### RESUMEN

En este trabajo se analiza la influencia de la forma de la grieta y el modo de calcular las tensiones sobre la estimación de vida a fatiga en una pieza entallada. Para estimar la forma de la grieta se han realizado ensayos interrumpidos a distintos números de ciclos. Posteriormente las probetas se rompen para analizar la forma de la grieta. El factor de intensidad de tensiones se calcula mediante funciones de peso y la distribución de tensiones que habría sin grieta. El cálculo de las tensiones es numérico y se analizan tres posibilidades: tensión plana, deformación plana y 3D. Para cada caso (geometrías 2D o 3D) se utiliza una función de peso adecuada. Con cada una de estas combinaciones se obtiene una evolución distinta del factor de intensidad de tensiones y por lo tanto una vida de propagación distinta. Como resultado final se comparan las distintas opciones entre sí y también con la vida experimental obtenida de los ensayos.

### ABSTRACT

This paper analyzes the influence of crack shape and the procedure to calculate the stress distribution on the estimated fatigue life in a notched specimen. In order to estimate the crack shape a series of interrupted tests at different number of cycles has been performed. The specimens are broken afterwards to analyze crack shape. The stress intensity factor is calculated through weight functions and the stress distribution in the specimen without crack. The stresses are calculated numerically and three possibilities are analyzed: plane stress, plane strain and 3D. For each case (2D or 3D geometries) an appropriate weight function is used. Each of these combinations gives a different evolution of the stress intensity factor and therefore different values of the propagation life. As a final result, the lives in the numerical analysis are compared to the experimental lives.

**PALABRAS CLAVE:** Entallas, Relación de aspecto, Factor intensidad de tensiones.

### 1. INTRODUCCIÓN

La fatiga es uno de los modos de fallos predominante en los sistemas mecánicos. Por ello, para el diseño de estos sistemas es fundamental poder predecir su comportamiento a fatiga ante las cargas producidas durante su funcionamiento. La disponibilidad de métodos fiables de predicción de vida a fatiga mejorará indudablemente la calidad de los sistemas y reducirá su coste. En los últimos años se han producido avances importantes en las técnicas de predicción de la vida a fatiga. Se han mejorado procedimientos para el análisis del comportamiento ante cargas de amplitud variable, se han desarrollado nuevos modelos de fatiga multiaxial o de predicción del comportamiento en condiciones especiales, por ejemplo, a alta temperatura [1].

El proceso de fatiga es una combinación de nucleación y crecimiento de grietas. Normalmente, la grieta se inicia en un lugar con una concentración de tensiones, de ahí la importancia de estudiar los elementos entallados. Inicialmente, las grietas tienen dimensiones del mismo orden que las características microestructurales y no permiten la aplicación directa de la mecánica de la fractura elástica lineal para su

análisis. Posteriormente, cuando las dimensiones de la grieta son suficientemente grandes el análisis de su comportamiento se realiza mediante las citadas técnicas. Se han propuesto muchos métodos de cálculo de la vida a fatiga en piezas entalladas. Unos sólo consideran iniciación (con curva  $\epsilon$ -N o S-N), suponiendo que el periodo de propagación es despreciable respecto al de iniciación [2]. Este es el caso frecuente de piezas pequeñas con una entalla suave y un número de ciclos de vida alto. Sin embargo, es difícil decir con qué geometrías, cargas y materiales es suficientemente aproximada la suposición anterior. En cualquier caso, este procedimiento producirá resultados conservadores, unas veces muy conservadores y otras, menos. En cualquier caso, un aspecto importante a considerar para la aplicación de estos métodos es la definición del punto o profundidad desde la superficie a la que se evalúan las tensiones y deformaciones para aplicar el criterio de iniciación correspondiente.

Otros métodos sólo consideran el periodo de propagación, considerando que la duración relativa del proceso de iniciación es pequeña, ya sea por la geometría y el alto nivel de tensiones, por suponer que existen defectos previos en forma de microgrietas o

porque la grieta se inicia en los primeros ciclos de carga a partir de un defecto, por ejemplo, una inclusión [3], [4]. En estos métodos, si la grieta inicial es suficientemente grande, la propagación se analiza mediante la LEFM, aplicando directamente una ley de propagación de grieta larga. En cambio, si se considera que la grieta se inicia desde un defecto microestructural, diversos modelos tienen en cuenta el comportamiento de grietas cortas [4]-[7].

Otro grupo de métodos considera el proceso de fatiga como la combinación de una fase de iniciación y otra de propagación, analizando la vida como la suma de las duraciones de ambos procesos. La duración de la fase de iniciación se determina mediante el método de las deformaciones locales, a través de las curvas  $\epsilon$ - $N$ , y la de propagación mediante métodos basados en la mecánica de la fractura.

**2. MODELO DE PREDICCIÓN DE VIDA**

En este trabajo se presenta un modelo para la predicción de vida que está basado en otro propuesto por los autores [8]. Tiene la característica de que combina las fases de iniciación y de propagación pero sin tener que definir previamente la longitud de grieta donde termina la iniciación y comienza la propagación. Cada fase se analiza por separado. En la de propagación el número de ciclos que tarda en propagarse una grieta desde cualquier longitud  $a$  hasta la rotura utilizando la mecánica de la fractura ( $a - N_p$ ). Para ello se integra la ley de crecimiento desde cada longitud de grieta,  $a$ , hasta la rotura. La fase de iniciación se analiza determinando el número de ciclos necesarios para que se genere una grieta de longitud  $a$ . Dicho número se calculará a partir de las tensiones a lo largo del camino que sigue la grieta y de una curva de fatiga  $\epsilon$ - $N$  que se detallará más adelante. El resultado es una curva,  $a - N_i$ , que representa los ciclos necesarios para originar una grieta de longitud  $a$ . La suma de estas dos curvas daría la vida total en función de qué valor se tome de la longitud de grieta que separa las fases de iniciación y propagación. Tal como se muestra en artículos previos [8], [9], estas dos curvas muestran que cerca de la superficie domina el proceso de iniciación y lejos de ella el de propagación, de forma que el nexo entre las dos se encuentra en el mínimo de la curva de vida total descrita anteriormente. Por esta razón y porque además es el valor más conservativo, se toma como solución el mínimo de la curva.

*2.1. Fase de propagación*

Para la fase de propagación se emplea la mecánica de la fractura, tomando como longitud inicial una longitud genérica,  $a$ . La ley de crecimiento utilizada trata de modelar también el crecimiento de grietas pequeñas dado que la longitud de iniciación definida puede ser del orden de micras. La forma de hacerlo es introduciendo un umbral de crecimiento modificado en función de la longitud de grieta [10]:

$$\frac{da}{dN} = C \left( \Delta K^n - \left( \Delta K_{th\infty} \cdot \left( \frac{a^f}{a^f + a_0^f - l_0^f} \right)^{1/2f} \right)^n \right) \tag{1}$$

donde  $\Delta K_{th\infty}$  es el umbral de crecimiento de grieta larga,  $f$  es un parámetro que de forma general se toma igual a 2.5 [11],  $l_0$  es la distancia típica hasta la primera barrera microestructural y  $a_0$  es la llamada constante de El Haddad:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K_{th\infty}}{\Delta \sigma_{LF}} \right)^2 \tag{2}$$

siendo  $\Delta \sigma_{LF}$  el límite de fatiga. El factor que multiplica al umbral de crecimiento de grieta larga en la ecuación (1) proviene de la aproximación teórica al diagrama de Kitagawa-Takahashi, en el que se representa la tensión umbral en función de la longitud de grieta. Se han ensayado otras formas de tener en cuenta el crecimiento de grietas pequeñas [10],[12], siendo la mostrada en la ecuación (1) la que mejor se ajusta a los resultados experimentales obtenidos en otro tipo de ensayos.

El factor de intensidad de tensiones se ha calculado de forma diferente en función de si la probeta se modela mediante una geometría en 2D o 3D. En aquellas situaciones donde las condiciones son de tensión o deformación plana (2D), el factor de intensidad de tensiones se ha obtenido mediante integración de la función de peso para grietas unidimensionales obtenida por Wu [13] y mostrada en la referencia [14]. En estas condiciones el factor de intensidad de tensiones,  $K$ , para una determinada longitud de grieta  $a$  se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$K = \int_0^a \sigma(s) w(s, a) ds \tag{3}$$

donde  $\sigma(s)$  es la distribución de tensiones en la zona de la grieta en la geometría sin fractura y  $w(s)$  es la función de peso obtenida por Wu [13]. Esta distribución de tensiones, tanto en condiciones de deformación como en tensión plana, se ha obtenido mediante un modelo elasto-plástico de elementos finitos de las probetas utilizadas en los ensayos. El modelo elasto-plástico es necesario porque en algunos de los ensayos analizados se llega a la plastificación en los primeros ciclos. Para la realización de este modelo se ha utilizado el software comercial ANSYS 13.0. En la figura 1 se puede ver la malla del modelo en la zona del concentrador, además de las condiciones de contorno impuestas.

La situación en la que la grieta está contenida en un plano (3D), no es más que una adaptación de la anterior ecuación (3) al caso bidimensional, por lo que

$$K(a, \varphi) = \int_{\Omega} \sigma(x, y) w(\varphi) dA \tag{4}$$

Como se puede ver en la ecuación (4), la integral se realiza sobre el plano de la grieta  $\Omega$ . El ángulo  $\varphi$  determina el punto en el frente de grieta donde se evalúa  $K$ , figura 2,  $\sigma(x,y)$  es la distribución de tensiones bidimensional en la localización de las caras de la grieta en el cuerpo sin grieta y  $w$  es una función de peso que depende de la geometría de la grieta y de la probeta.

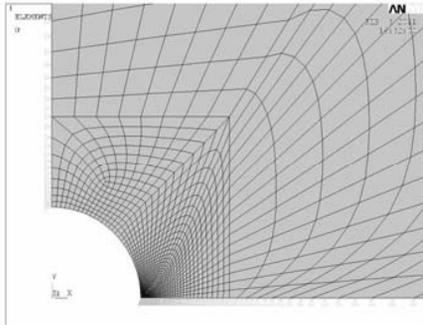


Figura 1. Malla del modelo 2D.

Lamentablemente, no se dispone de una expresión explícita de  $w$  para el tipo de geometría utilizada en este trabajo, de modo que no es posible obtener  $K$  mediante la ecuación (4), por ello en este caso se ha obtenido el  $K$  mediante la técnica mostrada en el artículo de Zhao *et al.* [14] para grietas superficiales con forma semi-elíptica y que emanan de una entalla circular centrada en una placa de espesor finito, figura 2, y sometida a una distribución de tensiones arbitraria,  $\sigma(x,y)$ , sobre las caras de la grieta.

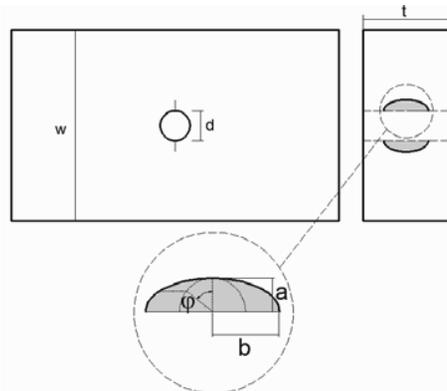


Figura 2. Configuración de la grieta en las probetas.

Para obtener la distribución de tensiones  $\sigma(x,y)$  se ha utilizado un modelo elasto-plástico, al igual que en el caso plano, de elementos finitos tridimensional. En la figura 3 se muestra una imagen con la malla del modelo 3D. En las simulaciones realizadas para obtener  $K$ , se han supuesto dos relaciones de aspecto distintas para la grieta. En un caso se ha supuesto una relación de aspecto fija, basada en los resultados experimentales, y en otro una relación de aspecto variable.

Esta relación de aspecto variable se ha tomado como la que se obtendría en una placa con un agujero sometido a tracción en un problema elástico considerando que las zonas del frente de grieta situadas en  $\varphi=0$  y  $\varphi=\pi/2$ ,

véase la figura 2, crecen acorde al valor del factor de intensidad de tensiones en esa zona, que teniendo en cuenta un ley de crecimiento del tipo Paris, lleva a la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{db}{da} = \left( \frac{K_{\varphi=\pi/2}(a,b)}{K_{\varphi=0}(a,b)} \right)^n \quad (5)$$

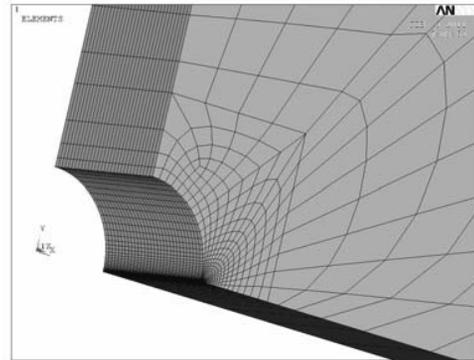


Figura 3. Malla del modelo 3D.

Para ello se han utilizado las expresiones del factor de intensidad de tensiones en la superficie ( $\varphi = \pi/2$ ) y fondo de la entalla ( $\varphi = 0$ ) proporcionadas por la referencia [15]. La resolución de la ecuación (5) se ha hecho mediante integración numérica con el método Runge-Kutta, donde se ha supuesto como condición inicial para  $b(a)$  que  $b(1\mu\text{m})=1\mu\text{m}$ . Se ha comprobado que la suposición tomada para esta condición inicial sólo influye en la evolución de la relación de aspecto de la grieta,  $b/a$ , para longitudes menores de  $10\mu\text{m}$  tal y como se puede ver en la figura 4.

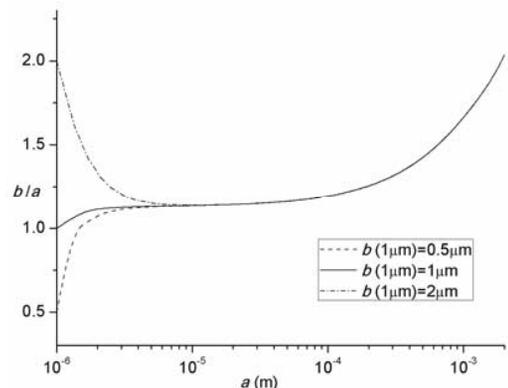


Figura 4. Evolución de la relación de aspecto en la grieta.

### 2.2. Fase de iniciación

El modelo presentado en este artículo analiza la fase de iniciación basándose en el trabajo de McClung *et al.* [16] para entallas. El primer paso consiste en la obtención de una curva de fatiga,  $\epsilon - N|_{a_i}$ , en probetas lisas y sin entalla que proporcione el número de ciclos necesario para generar una grieta de longitud  $a_i$  en función de la deformación aplicada. Para cada nivel de

deformaciones,  $\varepsilon_j$ , el número de ciclos de esta curva,  $N_{\varepsilon_j a_i}$ , se obtiene a partir de la ecuación:

$$N_{\varepsilon_j a_i} = N_{\varepsilon_j} - N_p(a_i) = N_{\varepsilon_j} - \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{f(a)} \quad (6)$$

Donde  $N_{\varepsilon_j}$  es el número de ciclos hasta el fallo obtenido en un ensayo de fatiga simple con tensión  $\varepsilon_j$ ,  $a_i$  es la longitud de grieta,  $a_f$  es la longitud a la que se produce la fractura y  $f(a)$  es la ley de crecimiento, que en este caso se utilizará la ecuación (1).

Estas curvas,  $\varepsilon - N|_{a_i}$ , a las que se hará referencia como curvas de iniciación, se presentan en la figura 5 para cuatro casos distintos: fractura total, generación de una grieta de 100, 50 y 10 micras para el aluminio 7075 T651.

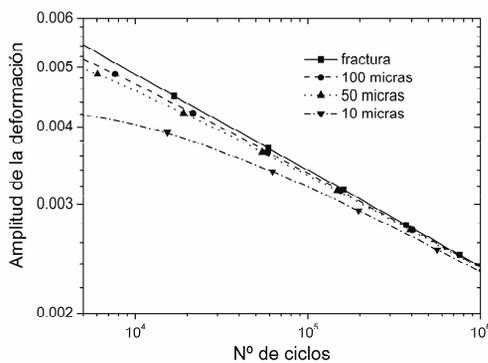


Figura 5. Curvas  $\varepsilon$ - $N$  de iniciación para la generación de distintas longitudes de grieta en el aluminio 7075 T651 en fatiga simple.

En el caso de que se estuviera aplicando el modelo a un ensayo de fatiga simple se podría calcular el número de ciclos necesario para generar una grieta de longitud,  $a_i$ , utilizando la curva apropiada,  $\varepsilon - N|_{a_i}$ .

En el caso de una pieza con un estado multiaxial y gradiente de tensiones, se puede aplicar el mismo proceso aunque con algunas modificaciones. En primer lugar, es necesario un criterio de fatiga multiaxial, en este caso se empleará el de Fatemi-Socie [18]. Posteriormente se calcula el parámetro de Fatemi-Socie ( $FS$ ) para cada nivel de deformación en las curvas de iniciación,  $\varepsilon - N_i|_{a_i}$ , obtenidas anteriormente. Con esto se construyen las nuevas curvas  $FS - N_i|_{a_i}$ . Por otro lado, cuando hay una entalla la tensión disminuye rápidamente con la profundidad, desde un máximo en la superficie. La vida de iniciación será una u otra en función de dónde se evalúe el parámetro de daño utilizado,  $FS$  en este caso. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en otros trabajos [17], la opción que se considera más apropiada es calcular el  $FS$  medio entre la superficie y la longitud de grieta  $a_i$ , y con él

entrar en la curva  $FS - N_i|_{a_i}$  y obtener el número de ciclos necesario para generar una grieta de longitud  $a_i$ . Evidentemente, el cálculo será aproximado al usar un valor medio, lo cual tiene asociado un cierto error, tanto mayor cuanto mayor sea la zona sobre la que se calcula el valor medio del parámetro de daño. Esta opción significa que se está haciendo la hipótesis de que a igual valor medio del parámetro de daño en la zona, igual número de ciclos para iniciar la grieta de esa longitud.

### 2.3. Combinación de la iniciación y propagación

Una vez que se han obtenido las dos curvas mencionadas ( $a - N_p$  y  $a - N_i$ ), representadas en la figura 6 para un caso concreto, se suman las dos obteniéndose una curva que representa la vida total en función del valor que se tome para la longitud de iniciación. El mínimo se toma como la vida a fatiga y el punto donde se produce el mínimo se toma como la longitud de iniciación. Este modelo se puede comparar con otros donde se define a priori la longitud a partir de la cual se toma propagación. Aplicar dicho modelo sería el equivalente a entrar en la gráfica de la figura 6 con una longitud de grieta  $a$  preestablecida obteniéndose una vida de iniciación y de propagación. La ventaja del modelo propuesto es que es más conservativo y no hay que tomar una decisión sobre cuándo termina una fase y empieza la otra.

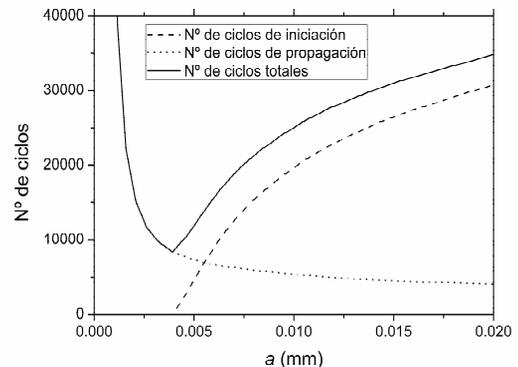


Figura 6. Aplicación del modelo de predicción.

## 3. ENSAYOS

Los ensayos sobre entallas fueron realizados por los autores sobre una aleación de aluminio 7075 T651, cuyas propiedades se muestran en la tabla 1. La geometría del espécimen era una placa de 8 mm de espesor y 50 mm de ancho con un agujero en el centro de 4 mm de diámetro, figura 2. Los ensayos se realizaron con un coeficiente de asimetría de las cargas de  $R = 0$ . Los valores de las fuerzas máximas aplicadas, tensión nominal basada en la sección neta y el número de ciclos hasta el fallo se muestran en la tabla 2. Las propiedades de fatiga de este material se han obtenido de [9] y las de crecimiento de grieta de [10].

Tabla 1. Propiedades del aluminio 7075 T651 empleado en los ensayos.

$E$ (GPa)	$\nu$	$\sigma_u$ (MPa)	$\sigma_y$ (MPa)
71	0.33	572	503
$C$	$n$	$\Delta K_{th}$ (MPa m <sup>0.5</sup> )	$\Delta\sigma_{FL}$ (MPa)
$8.83 \cdot 10^{-11}$	3.322	2.1	169
$\sigma'_f$ (MPa)	$b$	$\epsilon'_f$	$c$
1610	-0.155	0.26	-0.806
Tamaño grano $2l_0$ ( $\mu\text{m}$ )			50

Las probetas de los ensayos interrumpidos fueron seccionadas, pulidas e inspeccionadas al microscopio para medir las posibles grietas existentes. Después de cada inspección se pule la superficie eliminando entre 50 y 100 micras de material y se vuelve a inspeccionar. Esto implica que alguna grieta más pequeña de dicha dimensión puede no ser detectada. La figura 7 muestra el perfil de la única grieta encontrada en la probeta correspondiente a un ensayo con 211 MPa de tensión nominal máxima e interrumpido a los 10000 ciclos, es decir, al 38% de la vida total. Esta grieta se encontró a 3.1 mm de la superficie, es decir, cerca de la parte central de la probeta.

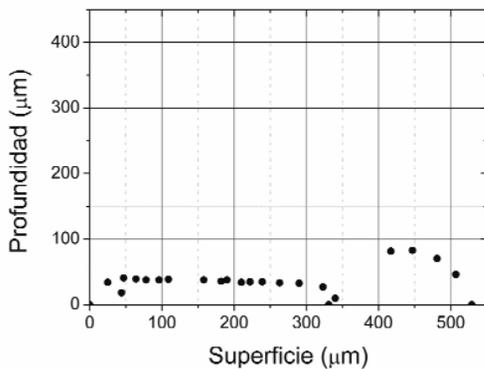


Figura 7. Perfil de las grietas en un ensayo con 211 MPa interrumpido a los 10000 ciclos.

Observando la gráfica se ven lo que podrían ser dos grietas que se han unido, una más plana que la otra. Tomando todo como una sola grieta se podría asumir una relación de aspecto de  $b/a = 4.5$  aproximadamente. También se analizó la probeta de un ensayo interrumpido a los 5000 ciclos, 19% de la vida total, pero no se encontró ninguna grieta. Estos resultados son por el momento insuficientes para tener una idea clara de la forma de la grieta y su evolución aunque se utilizarán en las simulaciones para analizar el efecto de distintos valores de la relación de aspecto de las grietas.

4. RESULTADOS

El modelo de predicción de vida se ha aplicado a cuatro de los niveles de carga mostrados en la tabla 2. Diferentes resultados se obtienen en función de cómo se calculen las tensiones. Diez combinaciones distintas se han probado en este artículo. En las dos primeras combinaciones se ha supuesto un problema plano:

tensión plana y deformación plana. En los cuatro siguientes se han calculado las tensiones mediante el modelo 3D. En las cuatro se ha supuesto una relación de aspecto de la grieta constante,  $b/a = 4.5$ . Se diferencian entre sí por la posición del punto donde se analizan las tensiones para calcular la fase de iniciación: en el centro de la probeta, a un tercio entre el centro y superficie de la probeta medido desde el centro, a dos tercios entre el centro y superficie de la probeta y finalmente en la superficie de la probeta. Por último, también se ha determinado la vida a fatiga calculando la iniciación con las tensiones en las cuatro secciones mencionadas y utilizando el factor de intensidad de tensiones suponiendo una relación de aspecto de la grieta variable, tal como se explica en el punto 2.1.

Tabla 2. Fuerzas, tensiones y número de ciclos hasta el fallo en los ensayos.

Ensayo	Fuerza (N)	Tensión (MPa)	Ciclos
1	95680	260	13580
2	95680	260	11043
3	86112	234	15600
4	86112	234	17300
5	77648	211	24300
6	77648	211	25000
7	69920	190	53732
8	69920	190	46073
9	63296	172	142000
10	63296	172	127000
11	57040	155	107000
12	57040	155	259000
13	57040	155	174200
14	54832	149	3632780
15	51520	140	4289890

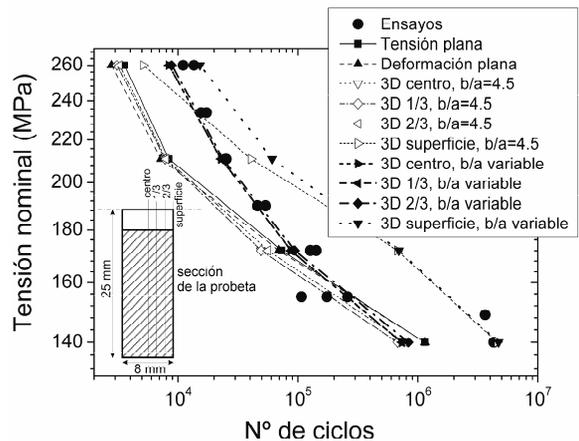


Figura 8. Curvas de fatiga con los distintos modelos.

Los resultados se muestran en la figura 8, donde se representa la tensión nominal máxima del ciclo frente a la vida a fatiga de los ensayos y la obtenida en las simulaciones. De dicha figura se pueden obtener varias conclusiones. En primer lugar, calcular la iniciación a partir de las tensiones en la superficie proporciona unos resultados muy diferentes del resto, y con vidas mucho mayores que las reales, debido a que las tensiones en el interior de la probeta son casi uniformes excepto cuando

se llega a la superficie. También se observa que tomando la relación de aspecto variable se obtienen vidas más largas que con la relación de aspecto fija en la zona de bajo número de ciclos, pero muy parecidas para alto número de ciclos. La razón es que tanto con una como con otra, la fase de iniciación para vidas cortas es pequeña mientras que para vidas largas casi todo es iniciación. Por otro lado, las vidas más largas con la relación de aspecto variable se deben a que las grietas se suponen menos planas. En este caso se ajustan muy bien los resultados experimentales. En cualquier caso, será necesario analizar más grietas para introducir la evolución real de las mismas.

## 5. CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado un modelo de predicción de vida que combina las fases de iniciación y propagación sin tener que definir a priori dónde termina una fase y empieza la otra obteniéndose muy buenos resultados. El modelo de predicción está enfocado a situaciones donde haya un gradiente de tensiones, como la fatiga por fretting o las entallas.

Los modelos de tensión plana y de deformación plana dan resultados muy parecidos. Éstos a su vez también son muy similares a los resultados obtenidos con la grieta en 3D, relativamente plana y suponiendo una relación de aspecto fija. Los mejores resultados se han obtenido al incorporar el comportamiento tridimensional de la grieta y utilizar una relación de aspecto variable.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Ministerio de Ciencia e Innovación la financiación de la investigación a través del proyecto DPI2007-66995-C03-01.

## REFERENCIAS

- [1] M.R. Mitchell and R.W. Landgraf (Eds.), *Advances in fatigue lifetime predictive techniques: 3<sup>rd</sup> Volume*, ASTM STP 1292, 1996.
- [2] R.M. Wetzel (Ed.), *Fatigue under complex loading: analysis and experiments*, Society of Automotive Engineers, 1977.
- [3] J. Lankford, "The growth of small fatigue cracks in 7075-T6 aluminum", *Fatigue of Engineering Materials and Structures* 5, pp. 233-248, 1982.
- [4] J.C. Newman, E.P. Phillips, M.H. Swain, "Fatigue-life prediction methodology using small-crack theory", *Int. J. Fatigue* 21, pp.109-119, 1999.
- [5] C.Y. Hou, F.V. Lawrence, "A crack-closure model for the fatigue behaviour of notched components". *Advances in fatigue lifetime predictive techniques: 3<sup>rd</sup> Volume*, M.R. Mitchell y R.W. Landgraf (Eds.), ASTM STP 1292, 116-135, 1996.
- [6] D.V. Ramsamooj, "Analytical prediction of short to long fatigue crack growth rate using small- and large-scale yielding fracture mechanics", *Int. J. of Fatigue* 25, pp.923-933, 2003.
- [7] A. Navarro, E.R. Ríos, *Fatigue crack growth modelling by successive blocking of dislocations*, Proc. R. Soc. Lond. A, 437, pp 375-390, 1992.
- [8] C. Navarro, M. García, J. Domínguez, "A procedure for estimating the total life in fretting fatigue", *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* 26, pp.459-468, 2003.
- [9] C. Navarro, S. Muñoz, J. Domínguez, "On the use of multiaxial fatigue criteria for fretting fatigue life assesment", *Inter. J. Fatigue* 30, pp.32-44, 2008.
- [10] S. Muñoz, C. Navarro, J. Domínguez, "Application of fracture mechanics to estimate fretting fatigue endurance curves", *Engineering Fracture Mechanics* 74, pp.2168-2186, 2007.
- [11] C. Vallengano, J. Domínguez, A. Navarro, "On the estimation of fatigue failure under fretting conditions using notch methodologies", *Fatigue Fract Engng Mater Struct.* 26, pp.469-478, 2003.
- [12] C. Navarro, S. Muñoz, J. Domínguez, "Analysis of crack evolution in fretting fatigue with spherical contact", *Journal of Strain Analysis*, vol. 30, pp.503-515, 2009.
- [13] X.R. Wu, "Weight functions and stress intensity factor for radial crack(s) emanating from a circular hole in an infinite sheet", Report 63, TRITA-HEL-0063 ISSN 0281-1502, The Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.
- [14] W. Zhao, X.R. Wu, M.G. Yan, "Weight function method for three dimensional crack problems--II. Application to surface cracks at a hole in finite thickness plates under stress gradients", *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 34, pp. 609-624, 1989.
- [15] J. C. Newman, Jr. y I. S. Raju, "Stress-intensity factor equations for cracks in the three-dimensional finite bodies subjected to tension and bending loads", *NASA Technical Memorandum 85793*, 1984.
- [16] R.C. McClung, W.L. Francis, S.J. Hudak Jr. "A new approach to fatigue life prediction based on nucleation and growth", *9<sup>th</sup> International Fatigue Congress*, Atlanta, mayo 2006.
- [17] C. Navarro, S. Muñoz, J. Domínguez, "Influencia de la longitud de iniciación en las predicciones de vida a fatiga por fretting", *Anales de Mecánica de la Fractura* 25, pp.554-559, 2008.
- [18] A. Fatemi, D. Socie, "A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading", *Fatigue and Fract of Engng Mater and Struct* 11, pp.145-165, 1988.