INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO ANALÓGICO MEDIANTE UN MODELO DE DINÁMICA POBLACIONAL

M. PERERA[1], M.A. RODRÍGUEZ[2], L. MIRÓ[2] Y D. CASCADO[2]
[1]*Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial - Univ. de Sevilla*
[2]*Área de Arquitectura y Tecnología de Computadores – Univ. de Sevilla*

Se propone una innovación didáctica complementaria a la enseñanza habitual de los amplificadores operacionales para resaltar la posibilidad de utilizar determinados circuitos como calculadores analógicos debido al isomorfismo matemático existente entre las expresiones analíticas que modelan el comportamiento de dichos circuitos electrónicos y determinados modelos científicos muy comunes como el arquetipo presa-depredador de la biología poblacional.

1. Introducción

Para la formación del estudiante se proponen los siguientes objetivos:
1. Introducir el concepto de cálculo analógico y su origen e importancia históricos.
2. Resaltar la existencia de isomorfismos matemáticos entre la electrónica y las ciencias "clásicas" (física, biología, etc.) y proporcionar una visión unitaria e integradora de ciencia y técnica.
3. Destacar la sencillez y utilidad del diseño modular de circuitos basados en amplificadores operacionales.

2. El arquetipo presa-depredador: lobos y conejos

El modelo biológico presa-depredador de Lotka y Volterra es uno de los arquetipos básicos del estudio de la evolución de las poblaciones. Se trata de modelar una sencilla dinámica de crecimiento autolimitada por razones estructurales. Un hábitat es compartido por dos especies: la presa (conejos) y el predador (lobos), con la siguientes suposiciones básicas:
1. De manera aislada la población de conejos sigue el arquetipo de crecimiento sin limitación de recursos propuesto por Malthus en su célebre "Ensayo sobre el crecimiento de la población" (1798).
2. De manera aislada la población de lobos se extingue por falta de alimento.
3. Los lobos y los conejos se reproducen continuamente. El modelo no distingue sexos ni edades de las poblaciones ni contempla muertes por vejez.

Un diagrama de influencias del sistema refleja el que un aumento de la población de lobos hará disminuir la de conejos y que un aumento en el número de estos últimos aumentará la población de lobos.

Figura 1: *Diagrama de influencias.*

Esta dinámica poblacional puede modelarse con un par de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dC(t)}{dt}=rC(t)-kC(t)L(t) \qquad\qquad \frac{dL(t)}{dt}=-sL(t)+hC(t)L(t)$$

donde $C(t)$ y $L(t)$ es la población de conejos y lobos a lo largo del tiempo, r es la tasa de crecimiento de los conejos y s es la tasa de decrecimiento de los lobos. Los parámetros k y h modelan la influencia que los encuentros entre conejos y lobos ejercen en la reducción de la población de los primeros y el aumento de número de los segundos de manera que k representa la habilidad de los conejos para evitar ser capturados por los lobos y h la habilidad de estos últimos en capturar a los conejos. La resolución numérica del par de ecuaciones diferenciales con un método de Runge-Kutta revela un comportamiento oscilatorio y periódico como puede verse en los ejemplos expuestos a continuación, con población inicial de lobos y conejos $C(0)=5$ y $L(0)=1$ y $k=h=0{,}1$ en ambos mientras que $r=s=0{,}15$ en el primero y $r=0{,}1$ y $s=0{,}3$ en el segundo. Las unidades del tiempo t y las poblaciones $C(t)$ y $L(t)$ son por supuesto arbitrarias.

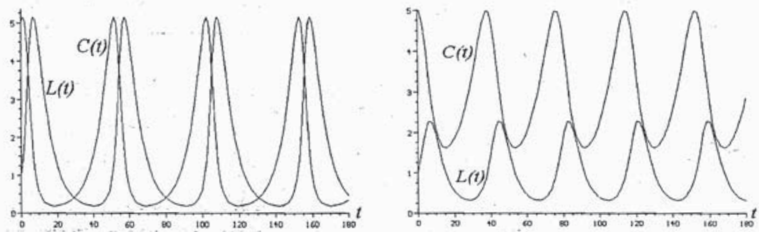

Figura 2: *Ejemplos de comportamiento.*

3. Análogo electrónico del sistema presa-predador

El principio básico del cálculo analógico consiste en establecer una correspondencia entre las variables matemáticas (representación abstracta) que modelan un fenómeno de la realidad y unas magnitudes físicas (representación concreta) que verifiquen formalmente el mismo modelo matemático. El sistema en estudio se representa por un dispositivo físico análogo que establece entre los valores simultáneos de sus magnitudes físicas la misma relación matemática utilizada para modelar el sistema original.

La resolución del par de ecuaciones diferenciales puede plantearse mediante el siguiente diagrama funcional:

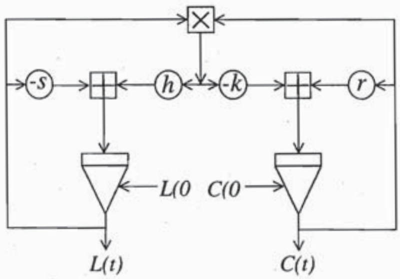

Figura 3: *Diagrama funcional para la resolución del sistema presa-predador.*

La implementación del diagrama funcional puede realizarse utilizando dos bloques funcionales lineales (integrador sumador y amplificador inversor) y uno no lineal (multiplicador analógico) de manera que los voltajes en determinados nodos del circuito electrónico análogo verifiquen las ecuaciones matemáticas del arquetipo presa-predador. El multiplicador analógico es de un solo cuadrante pues la población de lobos y conejos toma únicamente valores positivos.

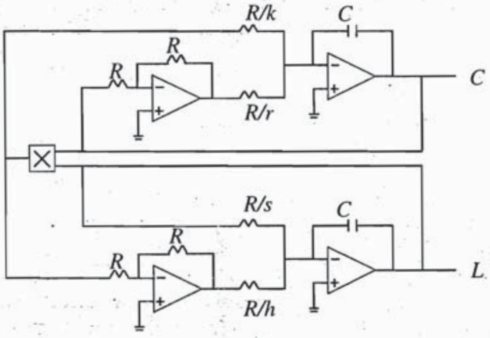

Figura 4: *Análogo electrónico del sistema presa-predador.*

Se eligen R y C tal que la constante de tiempo RC=1 (p.e. R=1MΩ y C=1μF) aunque en la práctica nos puede interesar un valor más pequeño de tal manera que el sistema no se sature durante el transitorio inicial. En la simulación, R=1KΩ y C=100μF. Los valores iniciales *C(0)* y *L(0)* de las poblaciones se introducen en el circuito como voltajes iniciales de los condensadores de los integradores respectivos para lo cual se conecta una batería en paralelo con cada condensador a través de un interruptor de tal forma que el borne positivo de cada batería está conectada al extremo del condensador que está unido a la salida del amplificador operacional. La constante de escala del multiplicador se fija en la unidad.

4. Simulación con SPICE.

Como ejercicio preliminar a la práctica en laboratorio se propone el diseño y simulación del anterior circuito usando como herramienta principal el simulador SPICE disponible en Internet para DOS y UNIX desarrollada por Berkeley.
El circuito es el correspondiente al ejemplo de comportamiento en el que *r=0.1* y *s=0.3*. Los valores iniciales para los condensadores se modelan usando la directiva IC para cada dispositivo. El operacional usado es el LF156, cuyo modelo está incluído en la distribución SPICE 3e2 para DOS. Vemos que, después de un periodo transitorio, el circuito se estabiliza presentando un comportamiento idéntico al gráfico de la figura 2, salvo por el factor de escala.

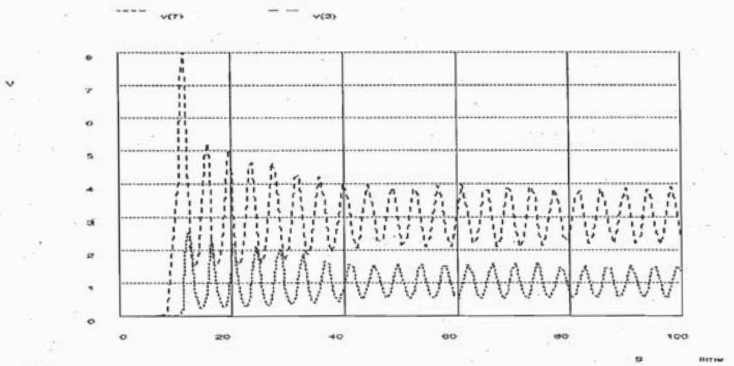

Figura 5: *Resultado de la simulación del circuito propuesto en SPICE 3e2.*

El circuito puede también construirse utilizando componentes discretos. En su utilización real hay que tener presente las limitaciones que el circuito electrónico análogo impone a los valores de los parámetros *r, s, h, k, C(0)* y *L(0)*. La carga inicial de los condensadores se puede controlar mediante un conmutador de relé o un interruptor electrónico como el CD4066. Fácilmente pueden derivarse otros circuitos análogos de modelos biológicos más sofisticados como los de competición, mutualismo, etc. que responden a formalismos matemáticos similares.

5. Conclusiones

Con esta propuesta se pretende que el alumno asimile y ponga en práctica los conocimientos de electrónica de instrumentación y cómo con éstos se pueden construir bloques funcionales para resolver problemas matemáticos de una cierta complejidad. No hay que olvidar tampoco el enfoque histórico de la propuesta que invita al alumno a rememorar los tiempos en los que las computadoras analógicas eran herramienta de uso común entre investigadores.

Referencias

[1] M.S. Ghausi. *Circuitos electrónicos discretos e integrados.* Nueva Ed. Interamer. (1987).
[2] D.H. Horrocks. *Circuitos con realimentación y amplificadores operacionales (2ª ed.)* Addison-Wesley (1994).