

SINTESIS DINAMICA DE LEVAS: CONSIDERACION DE LA FUERZA EN LA DIRECCION DEL MOVIMIENTO Y DEL ANGULO DE PRESION

Martínez García, J. / García-Lomas Jung, J. / Domínguez Abascal, J.

E.T.S. de Ingenieros Industriales de Sevilla

Resumen.- En este trabajo se presenta un método numérico para la síntesis dinámica de perfiles de leva. Se parte de un modelo lineal de varios grados de libertad, y el movimiento del seguidor se representa por una serie finita de Fourier. De esta forma la síntesis se reduce a un problema de optimización, cuya solución depende del criterio de optimización, o función objetivo elegida. Se analizan dos criterios de optimización distintos. El primero conduce a una solución analítica. El segundo da lugar a un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas, que se resuelve por un procedimiento iterativo.

1. INTRODUCCION

La síntesis dinámica de perfiles de levas se puede realizar mediante la optimización de diversos parámetros, tales como aceleraciones, errores producidos por las vibraciones, fuerzas de contacto, ángulo de presión, etc. La mayoría de los métodos de síntesis dinámica sólo consideran parámetros relativos al movimiento (velocidad, aceleración, error relativo, etc.), ya sea optimizando para una frecuencia de funcionamiento [1-5], ya sea para toda una gama de velocidades [6-9]. Por otra parte aquellos métodos [10-12] que optimizan lo que podríamos denominar parámetros geométricos (ángulo de presión, tensiones de contacto, etc.) no suelen considerar los efectos dinámicos.

Sin embargo, ambos grupos de parámetros no son independientes, de forma que la optimización de uno de ellos es en perjuicio de los otros. Por consiguiente la síntesis será más completa cuanto más parámetros se optimicen. Chew, Frensdanstein y Longman [13,14] realizan una síntesis para una velocidad de funcionamiento única, en la que consideran simultáneamente características vibratorias y tensiones de contacto, utilizando la teoría del control óptimo.

En el presente trabajo se representa el perfil de la leva por su desarrollo finito de Fourier [15]. El sistema leva-seguidor se representa por un modelo lineal de varios grados de libertad. La optimización se realiza minimizando el error, la fuerza transmitida por la leva en

la dirección del seguidor y el ángulo de presión en toda una gama de velocidades.

Utilizando el modelo de la figura 1, las ecuaciones del movimiento son:

$$|M| \ddot{\hat{x}} + |C| \dot{\hat{x}} + |K| \hat{x} = \begin{Bmatrix} c_1 \dot{y} + K_1 y \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Aplicando el método de superposición modal, las ecuaciones pueden ser desacopladas, de forma que la ecuación correspondiente al modo j adopta la expresión:

$$n_j'' + 2\xi_j \frac{\omega_j}{\omega} n_j' + \frac{\omega_j^2}{\omega^2} n_j = \phi_{1j} \left(\frac{c_1}{\omega} y' + \frac{k_1}{\omega^2} y \right) \quad (2)$$

Si el desplazamiento de la leva se expresa por su desarrollo finito de Fourier

$$y(\theta) = \sum_{n=0}^m (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (3)$$

la respuesta del p'ésimo grado de libertad viene dada [15] por:

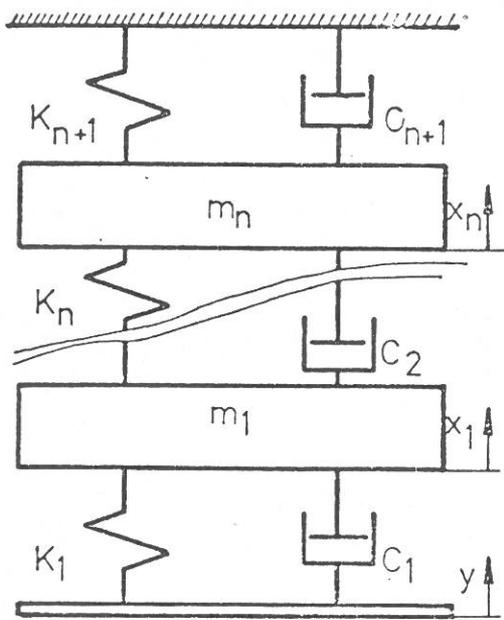


Figura 1.

$$x_p(\theta) = \sum_{j=1}^h \phi_{pj} \phi_{1j} \sum_{n=0}^m |(A_{jn} a_n + B_{jn} b_n) \cdot \cos n\theta + (A_{jn} b_n - B_{jn} a_n) \sin n\theta| \quad (4)$$

siendo

$$A_{jn} = \frac{K_1 \omega_j^2 - K_1 h^2 \omega^2 + 2\xi_j n^2 \omega_j^2 c_1}{(\omega_j^2 - n^2 \omega^2)^2 + (2\xi_j n \omega \omega_j)^2}$$

$$B_{jn} = \frac{n \omega \omega_j^2 c_1 - n^3 \omega^3 c_1 - 2\xi_j k_1 n \omega \omega_j}{(\omega_j^2 - n^2 \omega^2)^2 + (2\xi_j n \omega \omega_j)^2} \quad (5)$$

Haciendo:

$$\bar{A}_n^D = \sum_{j=1}^h \phi_{pj} \phi_{1j} (A_{jn} a_n + B_{jn} b_n) = A_n^D a_n + B_n^D b_n$$

$$\bar{B}_n^D = \sum_{j=1}^h \phi_{pj} \phi_{1j} (A_{jn} b_n - B_{jn} a_n) = A_n^D b_n - B_n^D a_n \quad (6)$$

la expresión de la respuesta toma la forma:

$$x_p = \sum_{n=0}^m (\bar{A}_n^D \cos n\theta + \bar{B}_n^D \sin n\theta) \quad (7)$$

2. CRITERIO DE OPTIMIZACION

Como los parámetros referidos en el apartado anterior están funcionalmente ligados, no se pueden minimizar independientemente. Sólo se puede minimizar una funcional de los mismos, y en este sentido se planteará el problema matemático de la optimización. El criterio de optimización se refiere al problema, no matemático, de la elección de dicha funcional, según cual sea esta elección el problema matemático puede ser muy distinto, y por tanto la solución del mismo.

En este trabajo se han utilizado dos criterios de optimización. El primero conduce a un problema lineal lo suficientemente simple como para conseguir la solución en forma analítica. El segundo controla un mayor número de características, conduciendo, como contrapartida, a un problema no lineal, que se resuelve por un procedimiento numérico iterativo.

En los dos apartados siguientes se desarrollan los dos criterios, así como las correspondientes soluciones.

3. CRITERIO 1

En este caso los parámetros a controlar son la respuesta x_p , y la fuerza transmitida por la leva en la dirección del seguidor F . La función objetivo es:

$$Q = \int_{\omega_a}^{\omega_b} P d\omega \quad (8)$$

siendo:

$$P = \int_0^{2\pi} |(\bar{x} - x_p)^2 + \alpha_F F^2| d\theta \quad (9)$$

Donde $[\omega_a, \omega_b]$ es el rango de frecuencias de funcionamiento, \bar{x} es la respuesta deseada y α_F un coeficiente de ponderación.

De acuerdo con el modelo de la figura 1, F vendrá dada por:

$$F = m_o \ddot{y} + K_1 (y - x_1) + c_1 (\dot{y} - \dot{x}_1) \quad (10)$$

El movimiento de la leva viene dado por su desarrollo finito de Fourier. Resulta interesante expresar, igualmente, el movimiento deseado por su desarrollo finito de Fourier:

$$\bar{x} = \sum_{n=0}^m (\bar{a}_n \cos n\theta + \bar{b}_n \sin n\theta) \quad (11)$$

Derivando (7) y (3) y sustituyendo en (10) se tiene:

$$F = \sum_{n=0}^m (F_{cn} \cos n\theta + F_{sn} \sin n\theta) \quad (12)$$

Donde F_{cn} y F_{sn} son funciones conocidas de los coeficientes a_n y b_n . Sustituyendo (7), (11) y (12) en (9), se puede efectuar explícitamente la integración, habida cuenta de las propiedades de ortogonalidad de las funciones trigonométricas, para obtener:

$$P = \pi \sum_{n=0}^m |(\bar{a}_n - A_n^p)^2 + (\bar{b}_n - B_n^p)^2 + \alpha_F (F_{cn}^2 + F_{sn}^2)| \quad (13)$$

Función, exclusivamente de los a_n y b_n y de ω . Por tanto, Q será función de los a_n y b_n , y su minimización requiere:

$$\frac{\partial Q}{\partial a_k} = 0 \rightarrow \int_{\omega_a}^{\omega_b} \frac{\partial P}{\partial a_k} d\omega = 0 \quad k=0,1,\dots,m \quad (14)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_k} = 0 \rightarrow \int_{\omega_a}^{\omega_b} \frac{\partial P}{\partial b_k} d\omega = 0$$

Efectuando las derivaciones es fácil ver que las (14) constituyen un sistema lineal de $2m$ ecuaciones algebraicas en las $2m$ incógnitas a_k , b_k . Es más, se puede ver que el sistema es diagonal, con lo que se puede obtener explícitamente la solución:

$$a_k = \frac{\int_{\omega_a}^{\omega_b} (A_k^p \bar{a}_k - B_k^p \bar{b}_k) d\omega}{\int_{\omega_a}^{\omega_b} ((A_k^p)^2 + (B_k^p)^2 + \alpha_F \cdot f_k) d\omega} \quad k=0,1,2,\dots,m$$

$$b_k = \frac{\int_{\omega_a}^{\omega_b} (A_k^p \bar{b}_k + B_k^p \bar{a}_k) d\omega}{\int_{\omega_a}^{\omega_b} ((A_k^p)^2 + (B_k^p)^2 + \alpha_F \cdot f_k) d\omega} \quad (15)$$

Donde:

$$f_k = \frac{1}{a_k} \cdot \frac{\partial}{\partial a_k} \left(\sum_{n=0}^m (F_{cn}^2 + F_{sn}^2) \right) = \frac{1}{b_k} \cdot \frac{\partial}{\partial b_k} \cdot \left(\sum_{n=0}^m (F_{cn}^2 + F_{sn}^2) \right) = 2\pi | (k_1^2 + c_1^2 \omega^2 k^2) \cdot ((1-A_k^1)^2 + (B_k^1)^2) - 2m_0 \omega^2 k^2 (k_1(1-A_k^1) + c_1 \omega k B_k^1) + m_0^2 \omega^4 k^4 | \quad (16)$$

CRITERIO 2

Con este criterio Q sigue definiéndose mediante (8), pero ahora:

$$P = \sum_{n=1}^{NP} |(\bar{x}_s - x_p(\theta_s))^2 + \alpha_F \cdot F_s^2 + \alpha_p \cdot \text{tg}^2 \phi_s| \quad (17)$$

Respecto a la función (9) definida en el apartado anterior, se observa que se ha sustituido la integral por la suma sobre NP puntos, y se ha introducido el ángulo de presión ϕ . En este caso no conlleva ninguna ventaja expresar el movimiento deseado por su desarrollo finito de Fourier.

La expresión del ángulo a presión es:

$$\text{tg} \phi = \frac{y' - e}{y + \sqrt{r^2 - e^2}} \quad (18)$$

donde e es la excentricidad y r el radio de la circunferencia primitiva.

Con P definido por (17), el empleo de las condiciones de mínimo, (14), conduce a un sistema de ecuaciones no lineal, debido al término del ángulo de presión.

Se han empleado dos modificaciones para simplificar el problema, linealizando. Una primera alternativa consiste en sustituir en (17) $\text{tg}^2 \phi_s$ por:

$$(y'(\theta_s) - e)^2 \quad (19)$$

Entonces las (14) conducen a un sistema lineal de ecuaciones algebraicas, de fácil solución. En este caso se puede emplear también el método del apartado anterior, añadiendo al integrando de (9) el término (19) multiplicado por α_p . De esta forma el sistema de ecuaciones que se obtiene es diagonal, con solución inmediata.

La segunda alternativa consiste en un método iterativo, que comienza por suponer el denominador de $\text{tg} \phi_s$ independiente de los a_k , b_k , tomando $y(\theta_s)$ el valor necesario para obtener la salida deseada \bar{x}_s en condiciones estáticas. Bajo esta hipótesis se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left| \frac{y'(\theta_s) - e}{y(\theta_s) + \sqrt{r^2 - e^2}} \right|^2 = 2 \frac{y'(\theta_s) - e}{y(\theta_s) + \sqrt{r^2 - e^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial a_i} y'(\theta_s) \quad (20)$$

Y la aplicación de las ecuaciones (14) conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas lineal en las a_k y b_k . El proceso iterativo continuará considerando en cada etapa $y(\theta_s)$ en (20) igual

al valor obtenido como solución en la etapa anterior. El proceso se detendrá cuando la diferencia entre los valores de $y(\theta)$ obtenidos en dos etapas sucesivas sea lo suficientemente pequeño.

No es en absoluto evidente que el proceso sea convergente. Sin embargo, los resultados muestran que se produce la convergencia en muy pocas iteraciones.

4. RESULTADOS

Se ha resuelto un ejemplo de dos grados de libertad, fijando el siguiente movimiento al seguidor: $\bar{x}(\theta) = 0$, $0^\circ \leq \theta < 110^\circ$, y $\bar{x}(\theta) = 4$, $180^\circ \leq \theta < 290^\circ$. El resto de los parámetros que definen el sistema han sido: $m_1=1$, $\omega_1=223.6$ rad/s, $\omega_2=1.4\omega_1$, $k_{11}=k_{22}=74000$, $k_{12}=-24000$, $\xi_1=0.03$, $\xi_2=0.1118$, $c_1=13.416$, $r=15$ y $e=1$.

Se han utilizado 20 armónicas con un rango de frecuencias de funcionamiento: $\omega_a=0$, $\omega_b=0.1\omega_1$.

El criterio de optimización utilizado ha sido el correspondiente a la expresión (17), con $NP=101$. El coeficiente α_p controla bastante bien el valor máximo del ángulo de presión, con relativa independencia del valor adoptado para el coeficiente α_F . El nivel de error obtenido se encuentra en relación inversa con el pico del ángulo de presión, por lo que se debe elegir α_p para obtener el mayor ángulo tolerable. Una vez elegido α_p , la elección de α_F no tiene influencia apreciable sobre el ángulo de presión, pero sí sobre el nivel de error. Así que se fija para la relación nivel de error-fuerza más conveniente.

En lugar de la fuerza del seguidor, se puede utilizar como parámetro de control la aceleración. El correspondiente criterio de optimización vendrá dado por (17), sustituyendo F_s por \ddot{x}_p , y α_p por α_a .

En la figura 2 se muestra el ángulo de presión obtenido utilizando $\alpha_p = 0.01$ y $\alpha_F = 1.10^{-15}$. En la misma figura se ha representado el ángulo de presión obtenido empleando como parámetro de control \ddot{x}_p , en lugar de F_s . La diferencia entre ambas curvas es inapreciable en la figura.

La figura 3 muestra la respuesta durante el periodo de reposo, para una frecuencia de funcionamiento $\omega = \omega_a = 0$. La figura 4 representa la misma respuesta para $\omega = \omega_b$.

Las figuras 5 y 6 representan la fuerza F_s en la dirección del seguidor para $\omega = 0$ y $\omega = \omega_b$ respectivamente.

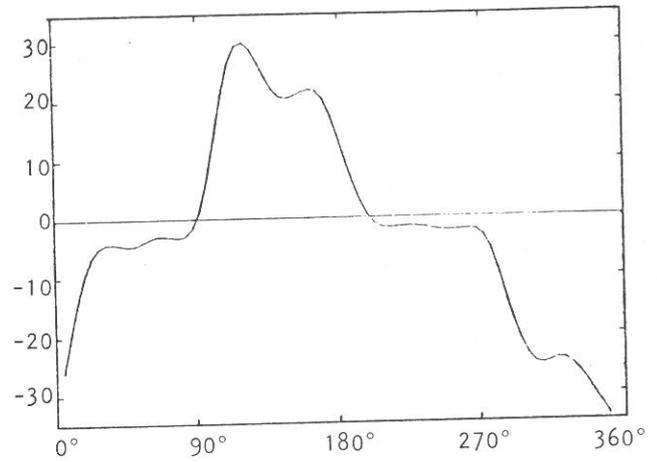


Figura 2

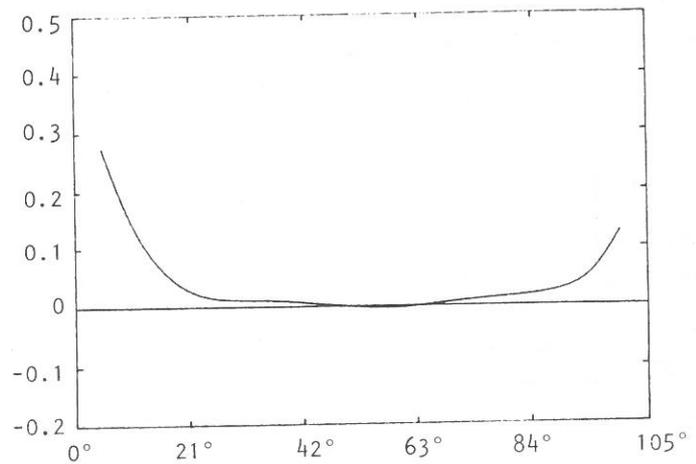


Figura 3

5. CONCLUSIONES

En los problemas de síntesis dinámica de levadas deben ser considerados el mayor número posible de parámetros interdependientes, pues de otra forma la optimización de uno de ellos es en perjuicio de los otros.

Se han analizado dos criterios concretos de optimización. El primero de ellos, a costa de considerar un menor número de parámetros, conduce muy sencillamente a una solución explícita, con ahorro en tiempo y memoria de ordenador muy considerables. En el segundo se consideran más parámetros, conduciendo a un sistema no lineal,

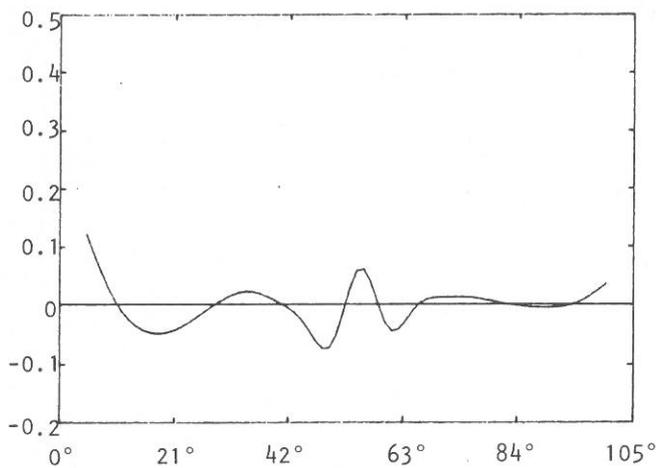


Figura 4

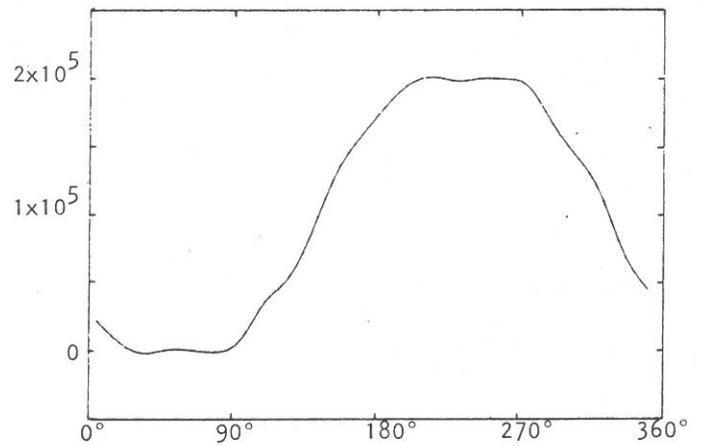


Figura 6

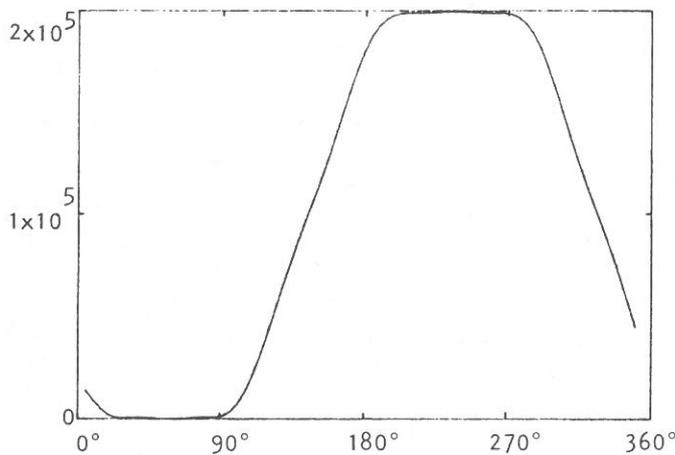


Figura 5

que se ha resuelto por un método iterativo muy simple, cuya rápida convergencia se demuestra por los resultados.

Un desarrollo posterior debe incluir la minimización directa de las fuerzas normales $F_n = F_s \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \phi}$, en lugar de minimizar separadamente $\tan \phi$ y F_s , ya que los picos de estas funciones ocurren en distintas posiciones. También deben incluirse parámetros como e y r lo que permitiría minimizar el ángulo de presión utilizando el criterio 1.

REFERENCIAS

1. Stoddart, D.A. "Polydyne cam Design", Machine Design, Vol. 25, N.1, 1953, pp. 121-135.
2. Tesar, D. y Matthew, G.K. "The Dynamic Synthesis, Analysis and Design of Modeled cam - Systems", Lexington Books, D.C., Meath & Co. Lexington, Massachusets, 1976.
3. Kanzaki, K., e Itao, K. "Polydyne cam Mechanisms for Typehead Positioning", Journal of Engineering for Industry, Febrero 1972, pp. 250-254.
4. Johnson, A.R. "Motion Control for a Series - System of N Degrees of Freedom Using Numerically Derived and Evaluated Equations", Journal of Engineering for Industry, Mayo 1965, pp. 191-204.
5. Berzak, N., y Frenenstein, F. "Optimization Criteria in Polydyne Cam Design", Proceedings of the Fifth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Publicado por ASME, Montreal, Julio 1979.
6. Kwakernaak, H. y Smit, J. "Minimum Vibration Cam Profiles", Journal of Mechanical Engineering Science, Vol.10, N.3, 1968, pp. 219-227.
7. Wiederrich, J.L., y Roth, B. "Dynamic Synthesis of Cams Using Finite Trigonometric Series", Journal of Engineering for Industry, Febrero 1975, pp. 287-293.
8. Wiederrich, J.L., y Roth, B. "Desing of Low Vibration Cam Profiles", Cams and Cams Mechanisms, Rees Jones, J., Edit, Mechanical - Engineering Publications, Londres, 1978, pp. 3-8.

9. Dominguez, J., Martínez, J., García-Lomas, J., Arizón, L. "Dynamic Synthesis of Cam -- Systems with N Degrees of Freedom", ASME - paper 82-DET-106, 1982.
10. Mischke, C. "Optimal Offset on Translating Follower Plate Cams", Journal of Enginee--ring for Industry, Febrero 1970, pp. 172-176.
11. Sermon, C.F. y Liniiecki, A. "Search for Op--timum Solution of a Single Disk Cam Mecha--nism with an Oscillating Doller Follower", ASME, paper 72-March-61, 1972.
12. Matthew, G.K. "The Modified Polynomial Spe--cification for Cams", Proceedings of the --Fifth World Congress on the Theory of Ma--chines and Mechanisms.
13. Chew, M., Frendenstein, F. y Longman, R.W. "Application of Optimal Control Theory to the Synthesis of High-Speed Cam-Follower - Systems. Part 1: Optimality Criterion", -- ASME paper 82-DET-100, 1982.
14. Chew, M., Frendenstein, F. y Longman, R.W. "Application of Optimal Control Theory to the Synthesis of High-Speed Cam-Follower - Systems. Part 2: System Optimization", -- ASME paper 82-DET-101, 1982.
15. Dominguez, J., Martínez, J., García-Lomas, J., Arizón, L. "Diseño de Perfiles de Le--vas en Sistemas Modelados con más de un --grado de libertad", IV Congreso Nacional - sobre la Teoría de Mecanismos y Máquinas, Valencia, 1981.