

EFFECTO DE ALGUNOS FACTORES EN LA RESPUESTA DE ROTORES FLEXIBLES.

Francisco Caro Morón

Jaime Dominguez

E.T.S.I.I. de Sevilla

Resumen.- En este trabajo se presenta la ecuación general para el estudio de la dinámica de rotores, incluyendo los términos correspondientes al efecto giroscópico, la deformación por cortante, la inercia al giro de las secciones y varios tipos de amortiguamiento. Se indica un procedimiento de discretización, empleado en la implementación de un programa de ordenador para su resolución. También se han determinado analíticamente las frecuencias naturales y de resonancia para modelos concretos en los que se incluye alguno de los términos indicados anteriormente, analizándose el efecto de cada uno de ellos separadamente, en las frecuencias obtenidas, en función de la relación entre la longitud y el radio del rotor.

LISTA DE SIMBOLOS

- |  |  |
|--|--|
| $A$ : Area de la sección del eje.  | $\tilde{K}(\Omega)$ : Matriz de amortiguamientos y rigidez del sistema discretizado. |
| $A(\Omega)$ : Matriz general del problema de autovalores.  | $L$ : Longitud del rotor.  |
| $c_e, m_e$ : Coeficientes del amortiguamiento viscoso externo.   | $\tilde{M}$ : Matriz de masa del sistema discretizado.                               |
| $c_i, m_i$ : Coeficientes del amortiguamiento viscoso interno.   | $M_y, M_z$ : Momentos flectores.   |
| $c_{ij}, k_{ij}, m_{ij}$ : Términos de las matrices de amortiguamiento, rigidez y masa, respectivamente, del cojinete. | $p$ : Frecuencia adimensional, idéntica a $\omega T$ .                               |
| $\tilde{C}(\Omega)$ : Matriz de amortiguamientos y efecto giroscópico del sistema discretizado.                        | $q$ : Vector de grados de libertad del sistema discretizado.                         |
| $C_i, C_{ie}, M_i, M_{ie}$ : Parámetros adimensionales del amortiguamiento viscoso.                                    | $\dot{q}$ : Derivada temporal del vector $q$ .                                       |
| $E$ : Módulo de elasticidad.   | $t$ : Tiempo.  |
| $F_{ci}$ : Vector de fuerzas en el cojinete $i$ .  | $T$ : Tiempo característico, idéntico a $\sqrt{\frac{\rho A}{EI_T}} L^2$             |
| $F_{e}, F_{ext}$ : Vectores de fuerzas exteriores.   | $V_y, V_z$ : Esfuerzos cortantes.  |
| $G$ : Módulo de rigidez.   | $x$ : Coordenada a lo largo del eje.   |
| $G_r$ : Parámetro adimensional del efecto giroscópico.   | $y, z$ : Desplazamientos radiales del eje.   |
| $H$ : Parámetro adimensional de la inercia al giro de las secciones.   | $Z$ : Autovector.  |
| $I_p$ : Momento de inercia polar de la sección del eje.  | $\alpha$ : Factor de cortadura.  |
| $I_T$ : Momento de inercia transversal de la sección del eje.  | $\epsilon$ : Coeficiente de amortiguamiento histerético.                             |
|  | $\zeta$ : Coordenada adimensional para la dirección $y$ .                            |
|  | $\eta$ : Coordenada adimensional para la dirección $z$ .                             |
|  | $\xi$ : Coordenada adimensional para la dirección $x$ .                              |
|  | $\rho$ : Densidad volumétrica.   |

- $\tau$  : Tiempo adimensional.
- $\phi_y$  : Giro de la sección del eje en el plano - yx.
- $\phi_z$  : Giro de la sección del eje en el plano - zx.
- $i\omega$  : Frecuencia compleja o autovalor.
- $\Omega$  : Velocidad de giro del eje.

### 1. Introducción

La necesidad del conocimiento de los modos y frecuencias de vibración de un eje en el análisis de ciertos problemas relacionados con la dinámica de rotores, como el cálculo de la res puesta o el equilibrado de rotores flexibles, plantea la duda de cuan exactos son los resultados obtenidos cuando se utiliza un modelo ex cesivamente simplificado para calcular los mo dos y frecuencias que van a ser la base de los cálculos posteriores.

En este trabajo se han estudiado varios ca sos, con objeto de dar una idea del error que se comete cuando se omiten ciertos efectos que tradicionalmente se aceptan como despreciables o de escasa relevancia. Para ello se han formu lado las ecuaciones de movimiento de un rotor que descansa sobre dos o más cojinetes.

### 2. Ecuaciones del movimiento

Las ecuaciones linealizadas de movimiento para un rotor con simetría de revolución y que gira a velocidad angular constante  $\Omega$  en torno a su eje, son las siguientes [2], [3]:

$$\left[ \begin{array}{l} \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (c_i + c_e) \frac{\partial y}{\partial t} + \Omega c_i z + \frac{\partial V_y}{\partial x} \\ \rho A \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + (c_i + c_e) \frac{\partial z}{\partial t} - \Omega c_i y + \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \rho I_T \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} + \Omega \rho I_p \frac{\partial \phi_z}{\partial t} + (m_i + m_e) \frac{\partial \phi_y}{\partial t} + \\ \quad + \Omega m_i \phi_z + V_y - \frac{\partial M_y}{\partial x} \\ \rho I_T \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} - \Omega \rho I_p \frac{\partial \phi_y}{\partial t} + (m_i + m_e) \frac{\partial \phi_z}{\partial t} - \\ \quad - \Omega m_i \phi_y + V_z - \frac{\partial M_z}{\partial x} \end{array} \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^N \delta(x-x_i) F_{\sim ci} = F_{\sim e} \quad (2.1)$$

En ellas se han omitido las deformaciones debi das a la torsión y a los esfuerzos axiales, así como los efectos gravitatorios.

El sistema de fuerzas  $F_{\sim ci}$  es debido a los cojinetes, y constituyen las condiciones de -- contorno del problema. Estas fuerzas pueden -- ser representadas para cada cojinete de forma satisfactoria mediante relaciones del tipo:

$$F_{\sim ci} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \dot{\phi}_y \\ \dot{\phi}_z \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix}_i \quad (2.2)$$

Los coeficientes  $m_{ij}$ ,  $c_{ij}$  y  $k_{ij}$  que aparecen en la ecuación (2.2) definen las propiedades inertes, amortiguadoras y de rigidez, respecti vamente, del cojinete [6].

Los coeficientes  $c_i$ ,  $m_i$ ,  $c_e$ ,  $m_e$  en la ecuación (2.1), introducen un efecto de amortigua miento viscoso interno y externo, el primero -- proporcional a las velocidades relativas y el segundo a las absolutas, y tratan de explicar el comportamiento de los rotores reales. En -- vez de o junto con este efecto, se puede obten er un modelo más o menos parecido a la reali dad introduciendo un amortiguamiento de tipo -- histerético, mediante las relaciones [5, 7, 8]:

$$\frac{M_y}{EI_T} = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \right);$$

$$\frac{M_z}{EI_T} = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \left( -\frac{\partial \phi_z}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \quad (2.3)$$

Donde los valores de  $\epsilon$  varían normalmente en -- tre 0.0007 y 0.0016 para el acero [5]. Ecuacio nes que para  $\epsilon=0$  conducen a las conocidas rela ciones entre el momento y la curvatura de la -- Resistencia de Materiales.

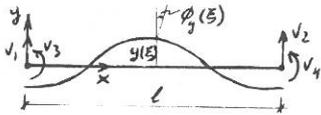
### 3. Resolución de las ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones (2.1) se han resuelto dis -- cretizando el rotor mediante "matrices consis tentes" [4]. Como funciones de forma es usual tomar aquellas que representan la deformación que se produce en una viga simple, cargada en sus extremos, debida a la acción del flector. En el caso presente se han incluido en ellas -- la deformación debida al cortante para poder -- introducir este efecto en la formulación. En -- la tabla 1 se presentan estas funciones de for ma.

Las matrices consistentes, junto con las de los cojinetes de ecuación (2.2) se pueden mon --

Tabla 1.

FUNCIONES DE FORMA DE DESPLAZAMIENTO	FUNCIONES DE FORMA DE GIRO
$\psi_1(\xi) = \frac{1}{1+12\tau}  2\xi^3 - 3\xi^2 - 12\tau \xi + 1 + 12\tau $	$\theta_1(\xi) = \frac{1/1}{1+12\tau}  6\xi^2 - 6\xi $
$\psi_2(\xi) = \frac{1}{1+12\tau}  -2\xi^3 + 3\xi^2 + 12\tau \xi $	$\theta_2(\xi) = \frac{1/1}{1+12\tau}  -6\xi^2 + 6\xi $
$\psi_3(\xi) = \frac{1}{1+12\tau}  \xi^3 - (2+6\tau) \xi^2 + (1+6\xi)\xi $	$\theta_3(\xi) = \frac{1}{1+12\tau}  3\xi^2 - (4+12\tau)\xi + (1+12\tau) $
$\psi_4(\xi) = \frac{1}{1+12\tau}  \xi^3 + (-1+6\tau) \xi^2 - 6\tau \xi $	$\theta_4(\xi) = \frac{1}{1+12\tau}  3\xi^2 + (-2+12\tau)\xi $



$$\xi : x/l \quad y(\xi) = \sum_{i=1}^4 v_i \psi_i(\xi)$$

$$\tau : \frac{\alpha E I_T}{G A I^2} \quad \phi_y(\xi) = \sum_{i=1}^4 v_i \theta_i(\xi)$$

tar en tres matrices globales para conseguir la relación final:

$$\tilde{M} \ddot{\tilde{q}} + \tilde{C}(\Omega) \dot{\tilde{q}} + \tilde{K}(\Omega) \tilde{q} = \tilde{F}_{ext} \quad (3.1)$$

Donde  $\tilde{q}$  contiene los grados de libertad, tanto de giro como de desplazamiento, considerados.

Para calcular las frecuencias propias de vibración, así como los modos correspondientes a éstas, es conveniente transformar (3.1) a la forma [1]:

$$\tilde{A}(\Omega) \tilde{X} = \dot{\tilde{X}} \quad (3.2)$$

Con

$$\tilde{A}(\Omega) = \begin{vmatrix} -\tilde{M}^{-1} \cdot \tilde{C}(\Omega) & \dots & -\tilde{M}^{-1} \cdot \tilde{K}(\Omega) \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{I} & \dots & \tilde{0} \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

y

$$\tilde{X} = \begin{vmatrix} \cdot \\ \tilde{q} \\ \dots \\ \tilde{q} \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

Ensayando la solución  $\tilde{X} = \tilde{Z} e^{i\omega t}$ , la ecuación (3.2) se convierte en:

$$\tilde{A}(\Omega) \tilde{Z} = i\omega \tilde{Z} \quad (3.5)$$

Problema general de autovalores que hay que resolver. En el programa de ordenador implementado se ha optado por el método de transformación QR [1] para la resolución. Además del cálculo de las frecuencias naturales, es interesante, en algunos casos, el de las frecuencias de resonancia. Siendo éstas aquellos valores de  $\omega$  cuya parte real coincide con la velocidad de rotación  $\Omega$ , cuando el fenómeno excitador tiene también esta frecuencia. Las primeras dependen de  $\Omega$  y se obtienen de la resolución directa del problema (3.5). Para obtener las segundas es necesario resolver la ecuación:

$$\text{Re} \{ \omega_i(\Omega) \} = \Omega \quad (3.6)$$

previo cálculo de  $\omega_i(\Omega)$  en la ecuación (3.5). La resolución gráfica se muestra en la figura 1.

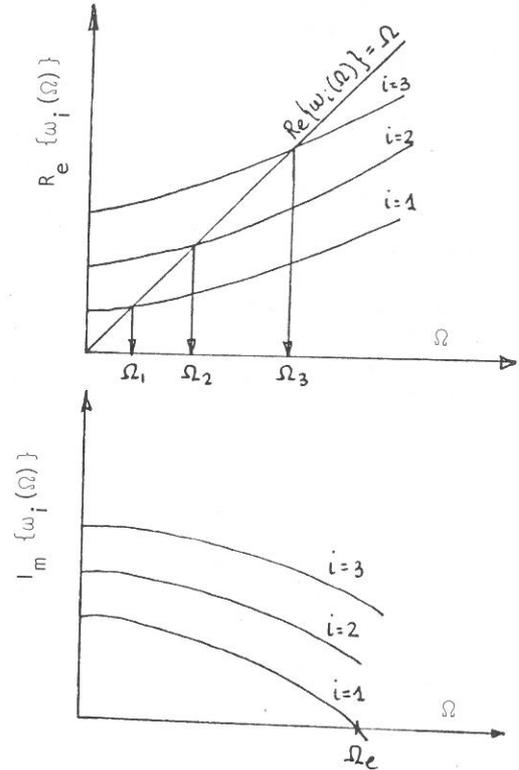


Figura 1.

De esta misma figura se obtiene el límite de estabilidad para el rotor, viniendo éste dado por aquel valor de  $\Omega$  para el cual la parte imaginaria de algún autovalor se hace nula, ya que un instante después se hará negativa e implicará oscilaciones indefinidamente crecientes. En la Figura 1 esto se verifica para  $\Omega = \Omega_e$ .

#### 4. Análisis de la influencia de los diversos factores

Por el procedimiento numérico anteriormente descrito, pueden obtenerse las frecuencias naturales, las de resonancia y los modos de vibración correspondientes de un rotor con cualesquiera condiciones de apoyo e incluyendo varios efectos.

Se plantea ahora el interrogante de hasta qué punto es necesario complicar la formulación y cuando.

Se responderá en parte a esto analizando el error que se comete en el cálculo de la frecuencia de resonancia, cuando se dejan de lado alguno de los efectos incluidos en el sistema de ecuaciones (2.1). No se analizarán los errores introducidos por una mala modelización de las condiciones de contorno.

Si inicialmente no se incluye el efecto del cortante, se pueden sustituir las dos últimas ecuaciones de (2.1) en las dos primeras, previo el cambio:

$$\phi_y = \frac{\partial y}{\partial z} ; \quad \phi_z = \frac{\partial z}{\partial y} \quad (4.1)$$

que garantiza la ausencia de deformación por efecto del cortante.

Introduciendo los parámetros adimensionales  $\xi = \frac{x}{L}$ ;  $\zeta = \frac{y}{L}$ ;  $\eta = \frac{z}{L}$ ;  $\tau = \frac{t}{T}$ , suponiendo un rotor biapoyado uniforme, de longitud  $L$  y tomando por conveniencia  $T = \sqrt{\frac{\rho A}{EI_T}} L^2$ , las dos primeras ecuaciones conducen a:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} + \frac{(c_i + c_e)L^2}{\sqrt{\rho A EI_T}} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + \Omega T \frac{c_i L^2}{\sqrt{\rho A EI_T}} \eta + \\ & + \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \left( \frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^4} + \epsilon \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} \right) - \frac{I_T}{AL^2} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} - \\ & - \Omega T \frac{I_p}{AL^2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^2 \partial \tau} - \frac{(m_i + m_e)}{\sqrt{\rho A EI_T}} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi^2 \partial \tau} - \\ & - \Omega T \frac{m_i}{\sqrt{\rho A EI_T}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} = 0 \\ & \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} + \frac{(c_i + c_e)L^2}{\sqrt{\rho A EI_T}} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} - \Omega T \frac{c_i L^2}{\sqrt{\rho A EI_T}} \zeta + \\ & + \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \left( \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} - \epsilon \frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^4} \right) - \frac{I_T}{AL^2} \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} + \\ & + \Omega T \frac{I_p}{AL^2} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi^2 \partial \tau} - \frac{(m_i + m_e)}{\sqrt{\rho A EI_T}} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^2 \partial \tau} + \\ & + \Omega T \frac{m_i}{\sqrt{\rho A EI_T}} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} = 0 \quad (4.2) \end{aligned}$$

Con las condiciones de contorno adimensionales:

$$\begin{aligned} \zeta|_0 = \zeta|_1 = \eta|_0 = \eta|_1 = 0 \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} \Big|_0 = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} \Big|_1 = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \Big|_0 = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \Big|_1 = 0 \quad (4.3) \end{aligned}$$

Se obtienen así la siguiente serie de parámetros adimensionales gobernantes del fenómeno:

Amortiguamiento viscoso:

$$\begin{aligned} C_{ie} &= \frac{(c_i + c_e)L^2}{\sqrt{\rho A EI_T}} ; \quad M_{ie} = \frac{m_i + m_e}{\sqrt{\rho A EI_T}} \\ C_i &= \frac{c_i L^2}{\sqrt{\rho A EI_T}} ; \quad M_i = \frac{m_i}{\sqrt{\rho A EI_T}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Efecto giroscópico:

$$G_r = \frac{I_p}{AL^2} \quad (4.5)$$

Inercia al giro de las secciones:

$$H = \frac{I_T}{AL^2} \quad (4.6)$$

Histéresis:

$$\epsilon \quad (4.7)$$

Ensayando en (4.2) las soluciones:

$$\zeta = B \operatorname{sen} \lambda_n \xi e^{ip\tau} ; \quad \eta = C \operatorname{sen} \lambda_n \xi e^{ip\tau} \quad (4.8)$$

que satisfacen automáticamente las condiciones de contorno con  $\lambda_n = n\pi$ , y siendo  $p$  la frecuencia adimensional  $\omega T$ , cuya parte real en el caso de resonancia es idéntica a  $\Omega T$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} & (-p^2 - Hp^2 \lambda_n^2 + ip C_{ie} + ip M_{ie} \lambda_n^2 + \frac{\lambda_n^4}{\sqrt{1+\epsilon^2}})B + \\ & + (\Omega T C_i + ip \Omega T G_r \lambda_n^2 + \Omega T M_i \lambda_n^2 + \frac{\epsilon \lambda_n^4}{\sqrt{1+\epsilon^2}})C = 0 \\ & - (\Omega T C_i + ip \Omega T G_r \lambda_n^2 + \Omega T M_i \lambda_n^2 + \frac{\epsilon \lambda_n^4}{\sqrt{1+\epsilon^2}})B + \\ & + (-p^2 - Hp^2 \lambda_n^2 + ip C_{ie} + ip M_{ie} \lambda_n^2 + \frac{\lambda_n^4}{\sqrt{1+\epsilon^2}})C = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

La exigencia de solución distinta de la trivial para  $B$  y  $C$  conduce a la ecuación de frecuencias. Haciendo participar en ella un sólo efecto, para obtener una solución simple, se podrá determinar el error que se comete al ignorarlo en el cálculo de la resonancia, en función de su parámetro característico.

#### 4.1. Giroscópico e inercia al giro de las secciones

La resolución de la ecuación de frecuencias para el caso de que sólo  $H$  y  $G_r$  intervengan, representa la evolución de las frecuencias naturales en función de la velocidad de giro:

$$p_n^{(\Omega)} = \left| \frac{\lambda_n^4 (\Omega^2 T^2 G_r^2 + 2(1 + H \lambda_n^2))}{2(1 + H \lambda_n^2)^2} \pm \frac{\lambda_n^4 \Omega T G_r \sqrt{\Omega^2 T^2 G_r^2 + 4(1 + H \lambda_n^2)}}{2(1 + H \lambda_n^2)^2} \right|^{1/2} \quad (4.1.1)$$

Donde las  $p_n$  son siempre reales, como cabia esperar, ya que no se han incluido efectos disipativos.

Aplicando la ecuación (3.6), se obtienen -- las siguientes frecuencias de resonancia:

$$(\Omega_n T)_1^2 = \frac{\lambda_n^4}{1 + (G_r + H) \lambda_n^2} \quad (4.1.2)$$

$$(\Omega_n T)_2^2 = \frac{\lambda_n^4}{1 - (G_r - H) \lambda_n^2}$$

Como en (4.1.1), las frecuencias naturales aparecen desdobladas. Esto es debido a los dos sentidos posibles de precesión. En uno de ellos, la precesión inversa, el giroscópico contribuye a la deformación, flexibilizando por tanto al rotor y disminuyendo la frecuencia de resonancia respecto a la esperada en su defecto. En la precesión directa, el efecto es justamente el contrario. De la segunda ecuación (4.1.2) se puede sacar la conclusión de que el rotor no entrará en resonancia en precesión directa para aquellas - frecuencias en que se verifique:

$$G_r - H \geq \frac{1}{\lambda_n^2} \quad (4.1.3)$$

En las figuras 2 y 3 se representan las relaciones entre las frecuencias sin y con el efecto -- considerado, frente al parámetro característico de éste.

La condición (4.1.3) se da a partir de la - septima frecuencia. De este modo no existen más curvas que las representadas en la figura 3. No sucede así para la figura 2, donde existen una infinidad de curvas además de las dibujadas.

#### 4.2. Amortiguamiento viscoso externo e interno

Aunque quizás no tenga excesivo sentido físico, en este apartado se verá independientemente la influencia del término estabilizante de -- los amortiguamientos considerados, dejando para el siguiente el análisis del que introduce la -- inestabilidad. La solución de la ecuación de -- frecuencias, considerando sólo  $C_{ie}$  y  $M_{ie}$  distintos de cero, es la siguiente:

$$p_n = \frac{C_{ie} + M_{ie} \lambda_n^2}{2} i \pm \sqrt{\lambda_n^4 - \left(\frac{C_{ie} + M_{ie} \lambda_n^2}{2}\right)^2} \quad (4.2.1)$$

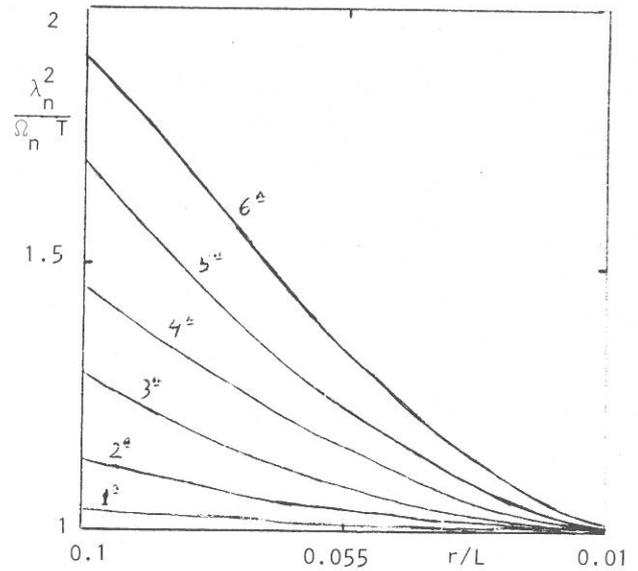


Fig. 2.- Efecto del Giroscópico e Inercia de las Secciones. Precesión Inversa.

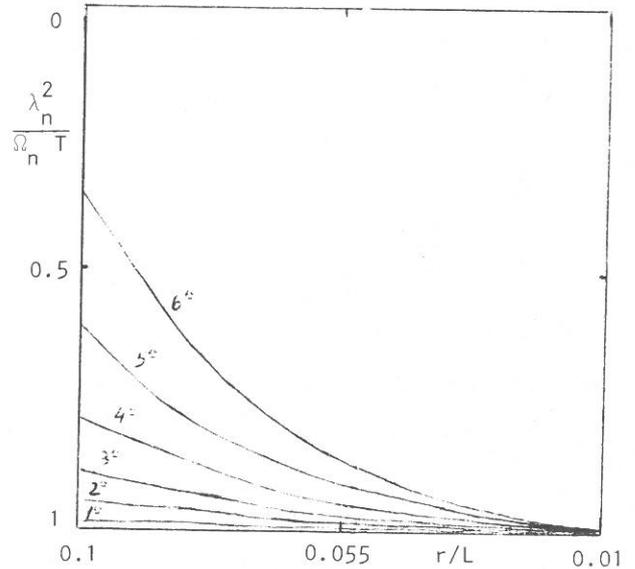


Fig. 3.- Efecto del Giroscópico e Inercia de las Secciones. Precesión Directa.

Las de resonancia se obtienen inmediatamente:

$$\Omega_n T = \sqrt{\lambda_n^4 - \left(\frac{C_{ie} + M_{ie} \lambda_n^2}{2}\right)^2} \quad (4.2.2)$$

El efecto amortiguador viene reflejado por la - parte imaginaria positiva de  $p_n$ .

#### 4.3. Amortiguamiento viscoso interno. Término - desestabilizador

Las frecuencias naturales vienen dadas por:

$$p_n(\Omega) = \pm \left\{ \frac{[\lambda^8 + \Omega^2 T^2 (C_i + M_i \lambda^2)^2]^{1/2} - \lambda^4}{2} \right\}^{1/2} i + \left\{ \frac{[\lambda^8 + \Omega^2 T^2 (C_i + M_i \lambda^2)^2]^{1/2} + \lambda^4}{2} \right\}^{1/2} \quad (4.3.1)$$

El término negativo en la parte imaginaria de  $p_n$  indica que el efecto considerado introduce siempre inestabilidad. Además, se observa que ésta aumenta con la velocidad de giro  $\Omega$ . Esto comprueba que la elección de un determinado amortiguamiento interno permite hacer que el rotor sea inestable para una cierta velocidad  $\Omega_e$ .

De la condición de resonancia, se obtiene:

$$\Omega_n T = \sqrt{\lambda_n^4 + \left( \frac{C_i + M_i \lambda_n^2}{2} \right)^2} \quad (4.3.2)$$

#### 4.4. Histéresis

Frecuencias naturales:

$$p_n = \pm \lambda_n^2 \sqrt{\frac{\sqrt{1+\epsilon^2} - 1}{2\sqrt{1+\epsilon^2}}} i + \lambda_n^2 \sqrt{\frac{\sqrt{1+\epsilon^2} + 1}{2\sqrt{1+\epsilon^2}}} \quad (4.4.1)$$

Resonancia:

$$\Omega_n T = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{\sqrt{1+\epsilon^2} + 1}{2\sqrt{1+\epsilon^2}}} \quad (4.4.2)$$

Los tres últimos casos analizados, para los rangos usuales de variación de los parámetros, no introducen errores importantes en el cálculo de la frecuencia de resonancia, aunque pueden influir en la estabilidad y son esenciales para simular el amortiguamiento.

#### 4.5. Cortante e inercia al giro

La deformación por cortante viene regida por las conocidas fórmulas:

$$v_y = \frac{GA}{\alpha} \left( \phi_y - \frac{\partial y}{\partial x} \right) ; v_z = \frac{GA}{\alpha} \left( \phi_z - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \quad (4.5.1)$$

con  $\alpha \approx 1.33$  para secciones circulares [3].

Sustituyendo (4.5.1) en la ecuación (2.1), eliminando los efectos no deseados e introduciendo de nuevo los parámetros adimensionales, se puede obtener:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} + \frac{\alpha E}{G} \left( \frac{l_T}{AL} \right)^2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial \tau^4} - \frac{l_T}{AL^2} (1 + \frac{E\alpha}{G}) \frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial \xi^4} = 0 \quad (4.5.2)$$

Ecuación igual a la de movimiento en el plano -

zx sin más que cambiar  $\zeta$  por  $\eta$ .

De este modo se hallan los parámetros adimensionales del efecto cortante:

$$\frac{\alpha E}{G} H^2 = \frac{\alpha E}{G} \left( \frac{l_T}{AL} \right)^2 ; \frac{\alpha E}{G} H = \frac{\alpha E}{G} \left( \frac{l_T}{AL} \right) \quad (4.5.3)$$

Ensayando  $\zeta = B e^{ip\tau}$  sen  $\lambda_n \xi$  en la ecuación (4.5.2), de nuevo se satisfacen las condiciones de contorno con  $\lambda_n = n\pi$  y se obtiene la ecuación de frecuencias:

$$\left\{ p^4 \frac{\alpha E}{G} H^2 - [1 + H \lambda^2 (1 + \frac{E\alpha}{G})] p^2 + \lambda^4 \right\} B = 0 \quad (4.5.4)$$

Las expresiones analíticas de las frecuencias naturales y de resonancia coinciden, pero son complicadas y no se reproducen aquí. Las figuras 4, 5 y 6 muestran el error que se comete al omitir la deformación por cortante, la inercia al giro y la unión de ambos efectos, respectivamente. En ellas se ha simplificado el campo de variación del parámetro adimensional, fijando el material.

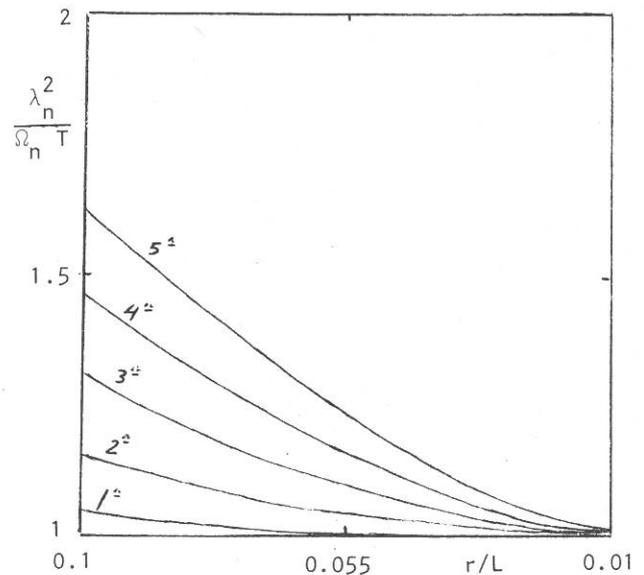


Fig.4.- Efecto de la Deformación por Cortante.

#### 5. Combinación de varios efectos

Finalmente se resuelve numéricamente mediante el método expuesto en un apartado anterior, el problema de calcular las frecuencias de resonancia de un rotor uniforme biapoyado con las siguientes características:

$$\begin{aligned} L &= 0.5 \text{ m.} & G &= 7.938 \cdot 10^{10} \text{ N}\omega/\text{m}^2 \\ A &= 3.1416 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 & \alpha &= 1.33 \\ I_T &= 0.785 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 & \epsilon &= 0 \\ I_P &= 1.57 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 & C_e &= m_e = 0 \\ \rho &= 7800 \text{ Kg/m}^3 & C_i &= 0.1 \text{ N}\omega \cdot \text{seg}/\text{m}^2 \\ E &= 2.058 \cdot 10^{11} \text{ N}\omega/\text{m}^2 & m_i &= 0.1 \text{ N}\omega \cdot \text{seg}/\text{m} \end{aligned}$$

Discretizado en 10 etapas de  $l=0.05$  m.

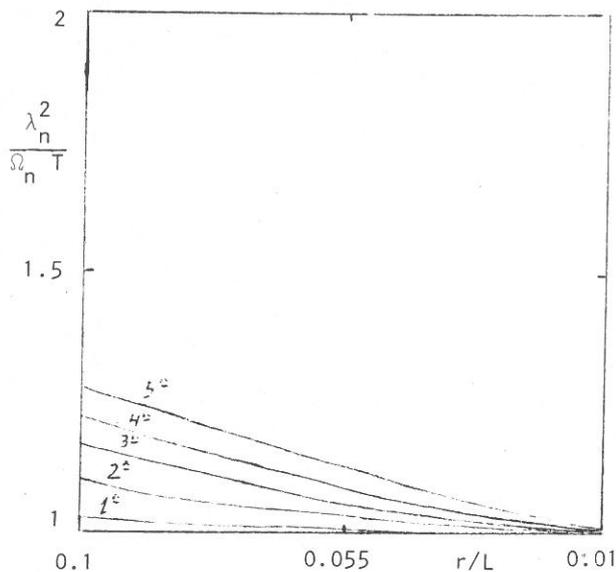


Fig. 5.- Efecto de la Inercia al Giro de las Secciones.

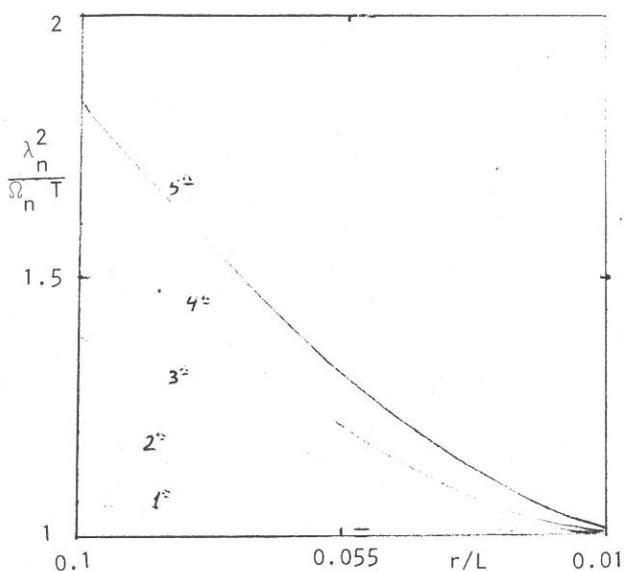


Fig. 6.- Efecto Conjunto del Cortante e Inercia de las Secciones.

En la Tabla 2 se comparan las frecuencias obtenidas numéricamente, incluyendo efecto giroscópico, inercia al giro, cortante y amortiguamiento interno, con las que se derivan de la resolución analítica del problema considerando sólo la inercia al desplazamiento y la rigidez a la flexión.

En la solución numérica se ha podido comprobar también que se produce inestabilidad en el primer modo a partir de una velocidad  $\Omega = 4017$  Rad/sg.

## 6. Conclusiones

De los resultados presentados, obtenidos analíticamente, para el caso de un rotor biapo-

Tabla 2.

FRECUENCIA	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
SOLO INERCIA AL DESPLAZAMIENTO Y RIGIDEZ A FLEXION	1013.92	4055.69	9125.31	16222.8	25348.1	36501.2
VARIOS EFECTOS PRECESION INVERSA	1010.48	4005.63	8889.58	15539.6	23844.2	33732.9
VARIOS EFECTOS PRECESION DIRECTA	1012.46	4036.42	9038.75	15985.8	24869.1	35728.4

yado, uniforme, puede deducirse de forma aproximada para otros casos más complejos, la influencia que tiene cada uno de los términos considerados en la ecuación general, en función de las dimensiones del sistema. Como criterio genérico puede decirse que los efectos: giroscópico, de la inercia al giro de las secciones y de la deformación por cortante; deberán considerarse cuando la relación  $r/L$  sea grande y las velocidades de giro sean próximas ó superiores a las frecuencias de resonancia correspondientes al segundo modo. En caso contrario, los efectos tendrán menor influencia, como puede apreciarse en los resultados obtenidos numéricamente incluyendo los efectos indicados, comparados con los que se producen sin incluirlos, para  $r/L = 0.02$ .

## Referencias

1. L. MEIROVITCH, "Computational Methods in Structural Dynamics". SIJTHOFF & NOORDHOFF, 1980.
2. J.W. LUND, "Modal Response of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings". Journal of Engineering for Industry. Mayo 1974.
3. R. BIGRET, "Vibrations des Machines Tournautes et des Structures". TECHNIQUE ET DOCUMENTATION, 1980.
4. R.W. CLOUGH, J. PENZIEN, "Dynamics of Structures". MCGRAW-HILL, 1975.
5. LI, DENNIS FUK-KUEN, "Dynamic Analysis of Complex Multi-Level Flexible Rotor System". Ph. D., Thesis, University of Virginia, 1979.
6. S. BART CHILDS, D.N. CHILDS, J. DRESDEN "Estimation of Seal Bearing Stiffness and Damping Parameters from Experimental Data". Second International Conference on Vibration in Rotating Machinery, 1980.
7. S. TIMOSHENKO, "Vibration Problems in Engineering". D. VAN NOSTRAND COMPANY INC. Tercera Edición. Septiembre 1968.
8. J.W. LUND "Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings". Journal of Engineering for Industry. Mayo 1974.