

UN MODELO ANALITICO PARA HALLAR LA VIDA EN NUCLEACION BASADO EN EL RAIN-FLOW Y LAS DEFORMACIONES LOCALES.

Jose Zapatero

Jaime Dominguez

E.U. Politecnica de Málaga

E.T.S. Ingenieros Industriales de Sevilla.

**Resumen.** En este trabajo, se presenta un modelo analítico para calcular la vida de nucleación en Fatiga, basado, en la distribución de los rangos de un registro aleatorio, después de haber aplicado el método de contar ciclos de Rain-Flow. Se realiza un estudio, con varios métodos propuestos, para ajustar una función de densidad de probabilidad a la distribución. Para constatar la eficacia del modelo, se comparan los resultados analíticos, con los obtenidos mediante simulaciones y con datos disponibles de ensayos. El cálculo de la vida, se realiza utilizando la regla de Miner y las curvas deformación-número de ciclos. Con este modelo, se elimina la necesidad de simulación de una Historia para el cálculo de la vida con el consiguiente ahorro de tiempo.

LISTA DE SIMBOLOS

b : Exponente de resistencia a la fatiga.  
 c : Exponente de ductilidad a la fatiga.  
 E : Modulo de elasticidad.  
 K' : Coeficiente de resistencia ciclica.  
 K<sub>T</sub> : Factor de concentración de Tensiones elástico.  
 K<sub>E</sub> : Factor de concentración de deformaciones plástico.  
 K<sub>O</sub> : Factor de concentración de tensiones plástico.  
 m<sub>O</sub> : Frecuencia de picos.  
 n<sub>O</sub> : Frecuencia de cruces con pendiente positiva.  
 n' : Exponente de endurecimiento por deformación ciclica.  
 N<sub>f</sub> : Ciclos para la rotura de la curva S-N o ε-N  
 N<sub>fi</sub> : Ciclos para la rotura a en nivel de tensión o deformación i  
 N<sub>p</sub> : Número de ciclos aplicados.  
 N<sub>T</sub> : Vida de transición. Valor de N en la curva Δε-2Nf, para el que los rangos de deformaciones elasticos y plásticos son iguales.  
 P, r : Funciones de densidad de probabilidad.  
 Δs : Rango de tensiones nominales.  
 Δs<sub>O</sub> : Valor de desplazamiento de la función de densidad de probabilidad de Δs.  
 Δε : Rango de deformaciones en el fondo de una entalla.  
 Δε<sub>T</sub> : Rango de deformación de transición.  
 Δσ : Rango de tenciones en el fondo de una entalla.  
 αβδ : Parametros de las curvas de Manson.  
 ε : Factor de irregularidad.  
 ε' : Coeficiente de ductilidad a fatiga.

σ' : Coeficiente de resistencia a la fatiga.  
 λ : Parámetro de la distribución exponencial.

1. INTRODUCCION

El diseño a fatiga de un elemento mecánico se basa en el cálculo del daño que los distintos ciclos van produciendo en el material.

Desde que Miner [1] publicó la regla lineal, hasta nuestros días, se han propuesto gran cantidad de criterios de daño acumulado, basándose en muy diversas consideraciones. Los primeros aparecidos después del de Miner, trataban de corregir los fallos de este, en cuanto efectos de secuencia interacción etc. Entre los propuestos estaban el de Corten y Dolan [2], Freudenthal y Heller [3] Shanley [4], Gatts [5]..., sin embargo la complejidad introducida no compensaba las pequeñas mejoras conseguidas. Estos criterios no distinguían, además, entre nucleación y crecimiento.

La separación entre nucleación y crecimiento, en el cálculo del daño, es fundamental y necesaria, dado que ambas etapas parecen tener un carácter distinto. La primera esta gobernada por deformaciones locales plásticas [6] y la segunda por tensiones nominales de tracción [7]. El problema que se plantea es saber cuando acaba la nucleación y cuando empieza el crecimiento. Existen diversos criterios sobre este tema. Los que consideran que la nucleación termina con tamaño de grietas muy pequeñas (1 μm) [8-10], suponiendo después una etapa de crecimiento de esta grieta pequeña mediante Mecanica de Fractura Elasto-Plas

tica. Los que consideran que la nucleación termina cuando la grieta alcanza un tamaño suficiente para aplicar la Mecánica de Fractura Elástica Lineal (MFEL) [11,12]. Otros consideran la finalización de esta etapa, cuando la grieta alcanza un tamaño suficientemente grande para poder ser detectado por métodos normales de inspección - (2,5±5 mm.) [13,14] suponiendo después el crecimiento mediante MFEL.

El cálculo de la vida en un material sometido a cargas aleatorias, implica el conocimiento del daño producido por cada uno de los distintos ciclos, aplicando cualquiera de los criterios conocidos. Para ello hay dos métodos para llevarlo a cabo: La simulación paso a paso y el estudio analítico mediante Funciones de Densidad de Probabilidad (FDP) o de densidad espectral [15-19]. Estos últimos calculan la vida sin distinguir los periodos de nucleación y crecimiento y basándose en la FDP de picos. Sin embargo la vida depende más directamente de los rangos que de los picos. Para tener esto en cuenta se han hecho algunos estudios que calculan la vida basándose en la FDP de rangos [20] o en la FDP de rangos después de aplicar el método del Rain-Flow [21, 22]. Estos también calculan la vida sin distinguir entre las dos fases indicadas y basándose en tensiones.

Entre los métodos de simulación, uno de los más utilizados, es el método de las deformaciones locales [13], que calcula la vida en nucleación, basándose en las deformaciones que se producen en el fondo de una entalla.

El presente trabajo, calcula la vida en nucleación, mediante la FDP de los rangos de Rain-Flow y basándose en el método de las deformaciones locales, considerando como datos de partida las curvas  $\Delta\epsilon-N_f$ .

## 2. CARACTERIZACION ESTADISTICA DE RANGOS DE RAIN-FLOW

Para obtener la FDP de los rangos de Rain-Flow, se han estudiado cuatro historias distintas, tres de las cuales son las utilizadas por el "Fatigue Design and Evaluation Committee" de SAE [23], obtenidas directamente sobre diversos componentes en pruebas de vehículos. Estas historias se denominarán "Frenos", "Suspensión" y "Transmisión". La otra ha sido tomada de el programa "Road Robin Crack Growth Prediction on Center-Crack Tension Specimen Under Spectrum Loading" [24], este en un espectro típico de carga en aviones, se denominará "H1300".

En las figuras 1 y 2 se representa la distribución de rangos de tensiones obtenidas en las 4 historias, después de aplicar el método de Rain-Flow para contar los ciclos. Para poder obtener una mejor idea de los registros, en la tabla 1 se representan, además de los números de ciclos por bloque, de cada registro, otros dos parámetros. Uno llamado factor de irregularidad ( $\epsilon$ ), que representa, la relación entre el número de cruces del nivel medio con pendiente positiva y el número de picos. El otro, denominado factor de cresta, representa la relación en-

tre el valor del pico máximo y la media de picos considerando la historia con media cero.

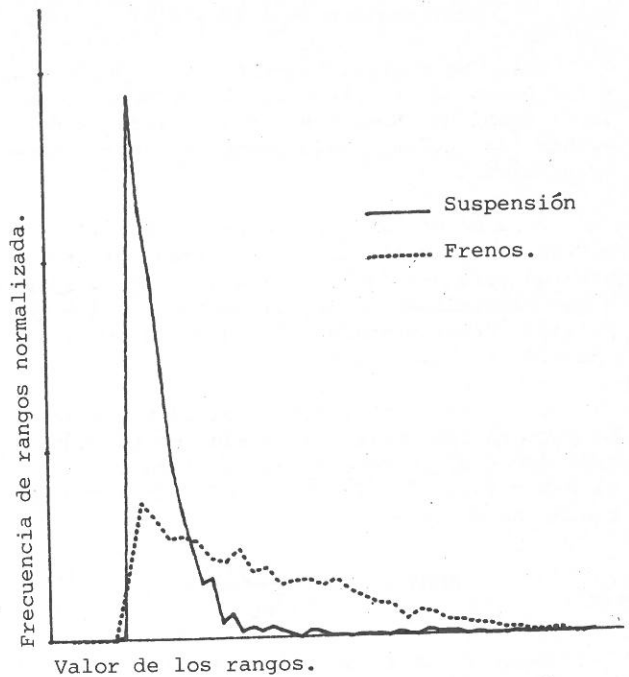


Fig. 1: Distribuciones de Suspensión y Frenos.

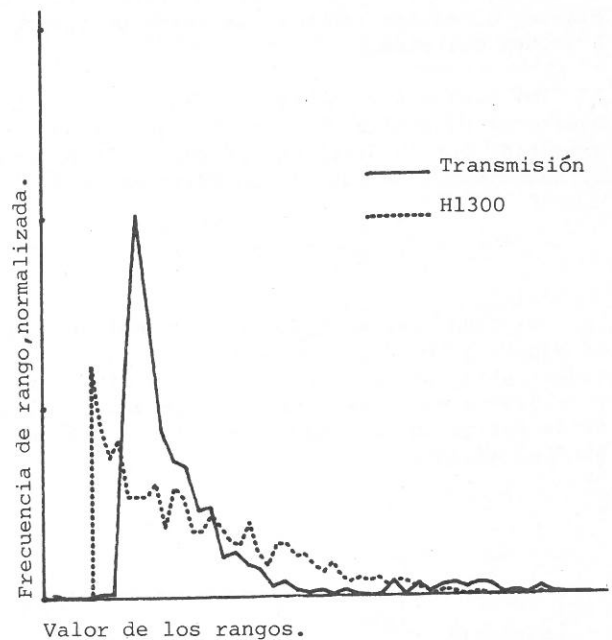


Fig. 2: Distribución de Transmisión y H1300

Para caracterizar estas distribuciones mediante una FDP, se ha optado por despreciar el daño producido por los rangos menores del de máxima probabilidad, aproximándose el resto -

(parte descendente), mediante una distribución exponencial, desplazada al punto de máxima ordenada. La función utilizada es del tipo:

$$p(x) = \lambda \exp(-\lambda(x - x_0)) \quad (1)$$

Sería necesario, hacer una estimación del error cometido al desprestigiar los rangos de pequeña magnitud. Basándose en los trabajos de Nelson [14] puede considerarse este error despreciable.

Para el cálculo del parametro de la distribución exponencial, se han realizado diversos ajustes para ver cual es el que mejor se adapta a las previsiones de la simulación y a los resultados experimentales. Los ajustes realizados han sido los siguientes:

a) Ajuste por minimos cuadrados ponderado. La ponderación realizada ha sido en función del daño que produce cada rango, utilizando la curva S-N modificada [7]. La función objetivo empleada ha sido:

$$FOBJ = \sum \left( \frac{P_i - p(x)}{N_{fi}} \right)^2 \quad (2)$$

Donde  $P_i$  es el valor de la frecuencia del rango  $x_i$  normalizada,  $p(x_i)$  es el valor de la función  $p(x)$  en  $x_i$ , y  $N_{fi}$  es el número de ciclos de rotura para un rango  $x_i$ . En este ajuste se ha considerado  $N_f$  igual a infinito para rangos menores al 60% del máximo. Esto es, el ajuste de la función se ha hecho minimizando el error cuadrático ponderado, entre las frecuencias correspondientes al máximo rango y las correspondientes a un 60% del mismo.

b) Ajuste por un error minimo de daño. Este ajuste se ha realizado de manera que el daño producido por la distribución real y la ajustada sea minimo. La función objetivo empleada fue:

$$FOBJ = \left( \sum \frac{p_i}{N_{fi}} - \sum \frac{p(x_i)}{N_{fi}} \right)^2 \quad (3)$$

c) Igual que el caso b, pero empleando para el ajuste solo los valores de frecuencia comprendidos entre los correspondientes al minimo rango y un 60% de este. Es decir considerando el limite de fatiga en el rango de magnitud igual al 60% del máximo.

Tabla 1.

Historia	Nº de ciclos	$\epsilon$	F.C.
Transmisión	854	0,641	3,52
Frenos	2968	0,914	3,11
Suspensión	1253	0,900	3,83
H1300	1300	0,812	3,57

En todos los casos, el ajuste se ha realizado hasta valores de rango iguales a diez veces la desviación típica [20].

### 3. CALCULO DEL DAÑO.

Una vez obtenida la FDP de los rangos de tensión, es necesario calcular la FDP de los rangos de deformación en el fondo de la entalla. Calculado esto, se aplica el criterio de daño de Miner a la curva  $\Delta\epsilon - N_f$ .

Considerando que el daño producido por un rango de deformación es:

$$D = \frac{1}{2N_{fi}} \quad (4)$$

el producido por todos los rangos de la historia sera:

$$D = \sum \frac{n}{2N_f(\Delta\epsilon)} = \int_0^{\infty} \frac{2N_f r(\Delta\epsilon) d\Delta\epsilon}{2N_f(\Delta\epsilon)} \quad (5)$$

donde  $r(\Delta\epsilon)$  es la FDP de rangos de deformación, cuya expresión es:

$$r(\Delta\epsilon) = \frac{d\Delta S^{-1}(\Delta\epsilon)}{d\Delta\epsilon} p(\Delta S^{-1}) \quad (6)$$

y  $N_p$  es el número de ciclos aplicados.

Para la obtención de  $r(\Delta\epsilon)$ , se utiliza la regla de Neuber [25]

$$\sqrt{K_\sigma \cdot K_\epsilon} = K_T^2 \quad (7)$$

que en el caso usual de tensiones nominales elasticas puede expresarse:

$$K_T^2 \frac{\Delta S^2}{E} = \Delta\sigma \cdot \Delta\epsilon \quad (8)$$

Para obtener  $\Delta\epsilon$  seria necesario sustituir  $\Delta\sigma$  a partir de la curva de comportamiento ciclico, cuya expresión es:

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} + \left( \frac{\Delta\sigma}{2K'} \right)^{1/n} \quad (9)$$

sin embargo al estar  $\Delta\sigma$  en forma implicita, no es posible su sustitución.

Manson [26] propone unas expresiones aproximadas para esta curva en la que  $\Delta\sigma$  esta en forma explicita, con un error muy pequeño. Las expresiones propuestas son:

$$\Delta\sigma = 2\sigma'_f (2N_f)^b \frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T} \exp\left(b\delta \left(\frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T}\right)^\beta\right) \quad (10)$$

valida para  $\Delta\epsilon < \Delta\epsilon_T$  y:

$$\Delta\sigma = 2\sigma'_f (2N_f)^b \left(\frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T}\right)^{b/c} \exp\left(b\delta \left(\frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T}\right)^\alpha\right) \quad (11)$$

valida para  $\Delta\epsilon > \Delta\epsilon_T$  donde  $\alpha, \beta$  y  $\delta$  son tres parámetros.

metros definidos en función de las características de fatiga del material.

A partir de estas expresiones, sustituyendo las ecuaciones (10) y (11) en la ecuación (8), - operando y sustituyendo en la ecuación (6) se obtiene:

para  $\Delta\epsilon < \Delta\epsilon_T$

$$r(\Delta\epsilon) = B\lambda \left[ \exp(-\lambda) (B \cdot \Delta\epsilon \cdot F1 - \Delta S_0) \right] \cdot \left[ F1 \left( 1 + \frac{b\delta}{2} \beta \left( \frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T} \right)^\beta \right) \right] \quad (12)$$

siendo:

$$B = \left[ \frac{E \cdot 2 \cdot \sigma'_f \cdot (2N_f)^b}{K_T^2 \cdot \Delta\epsilon_T} \right]^{0,5} \quad (13)$$

$$F1 = \exp\left(\frac{b\delta}{2} \left(\frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T}\right)^\beta\right) \quad (14)$$

para  $\Delta\epsilon \geq \Delta\epsilon_T$

$$r(\Delta\epsilon) = A\lambda \left[ \exp(-\lambda) (A (\Delta\epsilon)^d \cdot F2 - \Delta S_0) \right] \cdot \left[ (\Delta\epsilon)^{d-1} \cdot F2 \left( d + \frac{b\delta}{2} \alpha \left( \frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T} \right)^\alpha \right) \right] \quad (15)$$

siendo:

$$A = \left[ \frac{E \cdot 2 \cdot \sigma'_f \cdot (2N_f)^b}{K_T^2 (\Delta\epsilon)^{b/c}} \right]^{0,5} \quad (16)$$

$$F2 = \exp\left(\frac{b\delta}{2} \left(\frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T}\right)^\alpha\right) \quad (17)$$

$$d = \frac{b}{\left(\frac{b}{c} + 1\right) + 2} \quad (18)$$

El otro término de la ecuación (5) cuya expresión hay que conocer es  $2N_f(\Delta\epsilon)$ . La ecuación general  $\Delta\epsilon-N_f$ , también está en forma implícita en  $2N_f$ . Manson también propone dos expresiones aproximadas de  $N_f$ . Estas son:

$$N_f = N_T \left(\frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T}\right)^{1/b} \exp\left(\delta \left(\frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T}\right)^\beta\right) \text{ para } \Delta\epsilon < \Delta\epsilon_T \quad (19)$$

$$N_f = N_T \left(\frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T}\right)^{1/c} \exp\left(\delta \left(\frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T}\right)^\alpha\right) \text{ para } \Delta\epsilon \geq \Delta\epsilon_T \quad (20)$$

sustituyendo las ecuaciones (12), (15), (19) y (20) en la ecuación (5) se obtiene la expresión del daño para una historia de cargas irregulares:

$$D=N \int_0^{\Delta\epsilon_T} \left[ \frac{B \cdot \lambda (\Delta\epsilon)^{1/b}}{N_T} \left\{ \frac{\exp[-\lambda (B \cdot \Delta\epsilon \cdot F1 - \Delta S_0)]}{(\Delta\epsilon)^{1/b}} \right\} + \frac{\exp(-\delta \left(\frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T}\right)^\beta)}{(\Delta\epsilon)^{1/b}} \right] \left[ F1 \left( \frac{b\delta}{2} \left(\frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T}\right)^\beta + 1 \right) \right] d\Delta\epsilon + \int_{\Delta\epsilon_T}^{\infty} \left[ \frac{A \cdot \lambda \cdot (\Delta\epsilon)^{1/c}}{N_T} \left\{ \frac{\exp[-\lambda (A (\Delta\epsilon)^d \cdot F2 - \Delta S_0)]}{1 + 1/c - d} \right\} + \frac{\exp(-\delta \left(\frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T}\right)^\alpha)}{(\Delta\epsilon)^{1+1/c-d}} \right] \left[ F2 \left( d + \frac{b\delta}{2} \cdot \left(\frac{\Delta\epsilon}{\Delta\epsilon_T}\right)^\alpha \right) \right] d\Delta\epsilon \quad (21)$$

Haciendo  $D=1$  la vida esperada se obtendrá despejando  $N_p$ .

4. RESULTADOS.

Para estudiar la eficacia del método propuesto se han simulado paso a paso, aplicando el método de las deformaciones locales [13], - las historias de "Transmisión, Frenos, Suspensión y H1300", cada una de ellas con diferentes niveles de tensiones. Los niveles simulados son los mismos utilizados en los ensayos realizados por S.A.E. para los tres primeras historias. En la tabla 2 se recogen los valores máximos correspondientes a cada nivel.

El material elegido fue el acero MAN-TEN con características mecánicas iguales a las del empleado en el programa S.A.E. [23]. El coeficiente de concentración de tensiones considerado ha sido  $K_T=3$ .

Tabla 2. Valores de los niveles de Tensión.

Histo. Nivel	Frenos	Trans.	Suspens.	H1300
1	805,3	805,3	805,3	805,3
2	402,65	402,65	453	402,65
3	171,16	171,16	302	171,16
4	151	-	226,5	151
5	125,82	-	151	-

Nota: Valores de la Tensión en MPa