

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE SEVILLA
TRABAJO FIN DE GRADO



**ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO COMO
PROFESORA DE MATEMÁTICAS DE UNA FUTURA
MAESTRA. UN ESTUDIO DE CASO.**

**GRADO EN EDUCACIÓN PRIMARIA.
MENCIÓN EDUCACIÓN FÍSICA.**

INVESTIGACIÓN EN EL ÁMBITO DE LA EDUCACIÓN Y/O FORMACIÓN.

<p>AUTORA: RAQUEL RODRÍGUEZ GARCÍA. TUTOR: VÍCTOR BARRERA CASTARNADO.</p>
--

RESUMEN

Este trabajo surge a raíz de la poca motivación e interés que sienten los futuros maestros hacia las matemáticas ¿Influye esto en su profesión? ¿Están realmente preparados para dar clase en un aula de primaria? Para dar respuesta a estas preguntas, me propuse, a través de un estudio de caso, identificar el conocimiento especializado como profesora de matemáticas de una estudiante del grado en Educación Primaria en la Universidad de Sevilla, a través del análisis de un vídeo de una maestra con experiencia dando clase de geometría. En un primer momento, tras visualizar dicho vídeo, se le pidió identificar el conocimiento que ponía en juego. Tras una entrevista semiestructurada y el estudio del modelo ¹MTSK, que surge con el objetivo de analizar en profundidad el conocimiento que emplean los profesores de matemáticas a la hora de desarrollar su trabajo, se le solicitó que volviera a analizarlo. La diferencia entre el primer y el segundo análisis fue notable, ya que, en el último, identifica más elementos del conocimiento especializado de un profesor de matemáticas, al estar todos ellos estructurados en el modelo. En conclusión, podemos decir que la estudiante identifica el conocimiento que la maestra ha puesto en juego.

Palabras claves: Matemáticas, Geometría, Educación Primaria, Conocimiento de los futuros maestros, Modelo MTSK, Análisis de vídeos.

ABSTRACT

This study arises as a result of the little motivation and interest that future teachers feel towards mathematics. Does this influence their profession? Are they really prepared to teach in an elementary classroom? To answer these questions, I decided, through a case study, to identify the specialized knowledge as a mathematics teacher of a student of the degree in Primary Education at the University of Seville, through the analysis of a video of an experienced teacher giving geometry class. At first, after view the video, she was asked to identify the knowledge that the teacher put into play. After a semi-structured interview and the study of the MTSK model, which arises with the aim of analyzing in depth the knowledge that mathematics teachers use when developing their work, she was asked to analyze it again. The difference between the first and the second analysis was noticeable because, in the last, she identifies more elements of the specialized knowledge of a mathematics teacher as they are all structured in the model. In conclusion, we can say that the student identifies the knowledge that the teacher has put into play.

Key words: Mathematics, Geometry, Elementary Education, Prospective primary teacher knowledge, MTSK model, Video analysis.

¹MTSK son las siglas de “*The Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge*”, traducido al español como “Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas”, creado por los miembros del SIDM (Carrillo et. al, 2018).

ÍNDICE

Resumen.....	1
Abstract.....	1
1. Introducción / Justificación.....	3
2. Marco teórico.....	5
2.1. Conocimiento especializado del profesor de matemáticas.....	5
2.1.1. Propuesta de Shulman.....	6
2.1.2. Modelo MKT.....	7
2.1.3. Modelo MTSK.....	8
2.2. Tratamiento curricular de los contenidos matemáticos.....	14
2.2.1. Currículum de Educación Primaria en Andalucía.....	14
2.2.2. Principios y estándares para la Educación Matemática.....	15
2.3. Tareas profesionales.....	19
3. Objetivos del TFG.....	21
4. Metodología.....	22
5. Análisis de la información.....	27
5.1. Análisis personal sobre el fragmento del vídeo de la maestra dando clase.....	27
5.2. Primer análisis de Alicia sobre el vídeo de la maestra.....	32
5.3. Análisis de la entrevista de Alicia.....	34
5.4. Segundo análisis de Alicia sobre el vídeo (después de conocer el modelo MTSK)....	38
6. Conclusiones.....	41
7. Referencias bibliográficas.....	43
8. Anexos.....	45

1. INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Me gustaría empezar el trabajo aclarando los motivos por los cuales he elegido el área de Didáctica de las Matemáticas para realizar mi trabajo fin de grado (en adelante, TFG).

El primero es que, desde que era pequeña, las matemáticas han sido para mí una forma de evasión. Siempre que me preguntaban cuál era mi asignatura favorita, yo respondía: “Matemáticas”, y eran muchos los que se extrañaban. Mientras que estudiar el resto de materias era un proceso aburrido o poco motivante, no ocurría así con esta asignatura. Quizás fuera porque me planteaba cada tema como un reto a superar y cada actividad como un acertijo a resolver, o porque eran ejercicios en los que tenía que usar la lógica y no “vomitar” una gran cantidad de contenidos memorizados. Aún recuerdo esas veces que tenía que resolver un problema matemático más complicado de lo habitual y no paraba hasta dar con la solución.

Sin embargo, era complicado encontrarse con otros alumnos que coincidieran conmigo en este aspecto y no sintieran rechazo hacia las matemáticas, he aquí el segundo motivo por el cual quiero realizar esta investigación. Casi siempre, en una clase de 25-30 alumnos, tan solo éramos dos o tres niños/as los que sentíamos atracción hacia los números, las cuentas, los problemas... mientras que, para la gran mayoría, esta asignatura suponía un gran obstáculo y su preocupación simplemente consistía en qué podían hacer para aprobar los distintos exámenes propuestos. Esto ha sido así durante toda mi etapa educativa, y ha continuado en la universidad. Son muchos los futuros maestros que rechazan tanto la asignatura “Matemáticas Específicas para Maestros” como “Didáctica de Matemáticas para Maestros”, aunque especialmente la primera, y que su único objetivo es aprobar la asignatura en lugar de preocuparse por tener una buena formación para su futuro profesional. Así pues, no es extraño encontrarse con alumnos que están en 3º o 4º curso de carrera, pero que aún tienen pendiente dichas asignaturas (que se cursan en 1º y 2º respectivamente).

Ahora que veo esta problemática como futura maestra, me gustaría que todos mis alumnos vieran las matemáticas bajo la misma perspectiva que lo hacía (y lo hago) yo. Para ello, creo que es fundamental que los alumnos sean conscientes y perciban en su maestro/a el gusto por esta asignatura, así como que dichos maestros sepan adaptar los contenidos propios de esta materia al nivel de partida, gusto e intereses de su alumnado para llamar así su atención y minimizar al máximo su frustración ante esta materia.

Todo esto me hace preguntarme continuamente si tendrá este asunto alguna repercusión en su manera de dar clase en un aula de primaria, y es así como surge la idea de realizar un TFG centrado en analizar el grado de adquisición de los conocimientos necesarios para dar clases de matemática que tiene un futuro maestro, estudiante para profesor (en adelante, EPP) del Grado de Educación Primaria en la Universidad de Sevilla. Lo ideal hubiese sido poder analizar a dicho alumno dando clase en un aula, lo cual solo hubiese sido posible durante el periodo de prácticas, pero debido a la situación de pandemia que estamos viviendo, iba a ser muy complicado poder entrar en un colegio y grabar al alumno en prácticas dando clase, por lo que he tenido que adaptarme a las circunstancias actuales.

El nuevo método consiste en mostrarle a ese/a futuro/a maestro/a un video de una profesora dando clases en un aula de primaria y, a modo de entrevista, hacerle una serie de preguntas acerca del modo de actuar de dicha maestra. A través del análisis de sus respuestas podré comprobar sus propios conocimientos sobre la matemática y sobre su enseñanza-aprendizaje y ver si está o no preparado para su futura labor. Utilizaré el modelo MTSK, cuyo contenido se explicará a continuación, en el marco teórico, para identificar el conocimiento que moviliza el EPP en el análisis del vídeo. Además, tras realizar la entrevista al sujeto de estudio, se le explicará este modelo creado por los miembros del Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Huelva (SIDM). Finalmente, se le pedirá que vuelva a analizar el vídeo en cuestión con ayuda de una tabla elaborada para tal fin, para comprobar si identifica más elementos del conocimiento especializado que la maestra del vídeo ha puesto en juego que en el primer análisis. Se pretende comprobar así, por una parte, la utilidad que tiene el modelo MTSK para movilizar los conocimientos especializados de matemáticas y su didáctica, ya que entre el primer y el segundo análisis no han aumentado sus conocimientos relacionados con estas disciplinas y, por otra parte, si la maestra es capaz de identificar todos los conocimientos que esa docente con experiencia ha puesto en juego.

2. MARCO TEÓRICO

El marco teórico de este trabajo cuenta con tres apartados, teniendo el primero y el segundo de ellos, a su vez, tres y dos subapartados respectivamente. Considero que todos y cada uno de ellos son necesarios e imprescindibles para justificar esta investigación.

En primer lugar, dado que lo que quiero saber es el conocimiento tanto matemático como didáctico de este contenido que posee un/a futuro/a maestro/a, necesito saber cuáles son estos conocimientos y cómo se organizan. Por este motivo, he añadido información sobre el modelo más actual y completo que existe en la actualidad, el modelo MTSK, pero también información sobre otros dos modelos sobre los que este se sustenta. Por otra parte, dado que voy a trabajar con un vídeo de una maestra dando clase de Geometría en un aula de 5º de Primaria, he decidido añadir un segundo apartado denominado “Tratamiento curricular de los contenidos matemáticos”. En él he añadido un subapartado en el que he analizado el currículum de Educación Primaria en Andalucía, para saber cuáles son los contenidos geométricos que se deben enseñar y aprender en este nivel. Me he centrado en Andalucía porque es la comunidad autónoma en la que nos encontramos y donde se ha grabado el vídeo en cuestión, por lo tanto, tengo que seguir lo recogido en su norma educativa (Orden del 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía.). Además, también he añadido otro subapartado en el que analizo la propuesta hecha por el *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)* en el libro denominado “Principios y estándares para la educación matemática” (NCTM, 2000), pues en él se recogen importantes consignas a considerar en la enseñanza de esta materia. Finalmente, he buscado información referente a las tareas profesionales, pues el análisis de vídeos de maestros o maestras dando clases constituye una de ellas, que puede ser reconvertida en tarea educativa en la formación inicial de profesores.

2.1. Conocimiento especializado del profesor de matemáticas

Existen múltiples modelos que nos hablan sobre el conocimiento que debe tener un maestro para realizar adecuadamente su labor docente (denominado, en este caso, conocimiento especializado del profesor de matemáticas). Especial importancia tiene este asunto en este trabajo, ya que si quiero comprobar si la EPP está preparada para dar clases de matemáticas, tendré que analizar aspectos que en estos modelos se recogen. Aunque, como ya he comentado, voy a utilizar para ello el modelo MTSK, voy a mostrar el punto de partida hasta llegar a dicho modelo, pues es fruto del análisis y modificación de modelos anteriores. Voy a destacar, por

tanto, tres modelos que analizan el conocimiento especializado que deben tener los profesores para realizar una correcta enseñanza tanto en general (primer modelo) como de esta materia en concreto (segundo y tercer modelo). A continuación, se presentan estos tres modelos en orden cronológico de publicación:

2.1.1. Modelo propuesto por Shulman.

La primera propuesta sobre el conocimiento que debe tener un profesor de cualquier materia para ejercer su labor profesional la hace Shulman (1986), quien establece un modelo general en el que incluye tres categorías: *Conocimiento de la materia o del contenido (SMK)*, *Conocimiento pedagógico o didáctico del contenido (PCK)* y *Conocimiento pedagógico general (GPK)* (Shulman, opus cit.), las cuales se pueden apreciar en la Figura 1. Entre ellas, la más destacable y la que tiene mayor interés es el PCK, ya que cubre un vacío existente hasta entonces en lo que se refiere al conocimiento necesario del profesor de una asignatura específica. Este apartado hace referencia a la necesaria comprensión por parte del maestro de cómo aprenden los alumnos y cómo hay que presentarles los diferentes temas y contenidos para que sean capaces de asimilarlos. (Pinto y González, 2008).

Fue el propio Shulman quien, en 1987, siendo consciente de que su anterior propuesta estaba incompleta, publicó una revisión de su trabajo en el que añade otras categorías a las ya establecidas en 1986, considerándolas igualmente indispensables. Así, los conocimientos que debe tener un profesor, según este autor, son: *Conocimiento de la asignatura, Conocimiento pedagógico general, Conocimiento curricular, Conocimiento pedagógico o didáctico del contenido, Conocimiento de los aprendices y sus características, Conocimiento del contexto educativo y Conocimiento de los fines, propósitos y valores educacionales y sus bases filosóficas e históricas* (Leal, 2014).



Figura 1.

Modelo del conocimiento profesional del profesor. Shulman (1986).

Pinto y González (2008) nos indican que esta teoría surgió inicialmente centrada en los profesores de secundaria de inglés, biología, matemáticas y ciencias sociales, pero en los últimos años se ha extendido a otras disciplinas y otros niveles escolares.

2.1.2. Modelo MKT.

A partir del modelo propuesto por Shulman, en 2008 surge un nuevo modelo, denominado *Mathematical knowledge for Teaching (MKT)*, desarrollado por Ball, Thames y Phelps. Este modelo se basa en la propuesta de Shulman y en la observación de profesores dando clase, es decir, desarrollando su labor docente. Ball et al. (2008), consideran que la clasificación de Shulman no es totalmente clara y que este autor ignora la naturaleza dinámica del conocimiento de la enseñanza, por lo que decidieron crear este nuevo modelo.

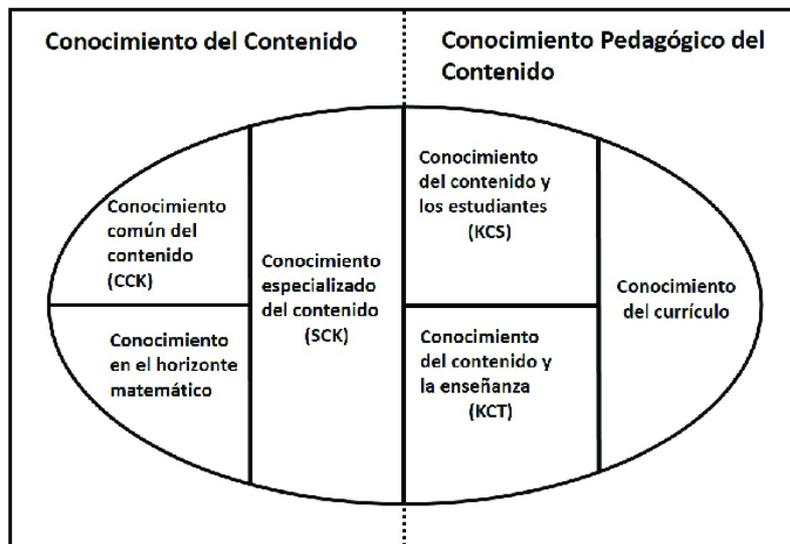


Figura 2.

Modelo MKT. Ball et al. (opus cit.).

Tal y como se ve en la Figura 2, en él se consideran dos grandes categorías, el *Conocimiento del Contenido (SMK)* y el *Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK)* y estos, a su vez, se subdividen en diferentes dominios:

- SMK consta de *Conocimiento Común del Contenido (CCK)*, *Conocimiento Especializado del Contenido (SCK)* y *Conocimiento en el Horizonte Matemático (HCK)*.
- PCK incluye *Conocimiento del Contenido y su Enseñanza (KCT)*, *Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (KCS)* y *Conocimiento del Currículo (KCC)*.

Dentro de SMK, el Conocimiento Común del Contenido (CCK) se define como el conocimiento matemático general que puede tener una persona, ya sea fruto de su aprendizaje en la escuela, en su trabajo o en la vida misma. El Conocimiento Especializado del Contenido (SCK) es entendido como aquel conocimiento que es exclusivo del profesor de matemáticas para desarrollar adecuadamente su profesión, en contraposición al conocimiento matemático requerido por otros profesionales que usan las matemáticas como puede ser un ingeniero, un físico o un biólogo (Montes et al., 2013). Por último, el Conocimiento en el Horizonte Matemático (HCK) es lo que le aporta perspectiva al docente y hace referencia a cómo se integran las matemáticas escolares (Carrillo et al., 2018).

Con respecto a PCK y sus subdominios, hemos de decir que el Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (KCS) incluye la capacidad del docente para prever lo que a los estudiantes les parecerá fácil, complicado, interesante o motivador. El Conocimiento del Contenido y su Enseñanza (KCT) es lo que hace que un profesor sepa cuál es la manera más adecuada de enseñar a los alumnos un contenido matemático concreto y es lo que le permite, por ejemplo, enfatizar o aclarar una idea matemática en particular. Finalmente, el Conocimiento del Currículum (KCC) hace referencia al conocimiento sobre los contenidos que los alumnos deben aprender (Carrillo et al., opus cit.).

Siguiendo con lo que recogen Carrillo et al. (opus cit.) en su trabajo, puedo decir que una de las contribuciones más importantes de este modelo fue el reconocimiento de que hay un tipo de conocimiento que es exclusivo de los profesores (SCK) y que otros profesionales no necesitan. Pero, en la práctica, al usar el modelo MKT para analizar el conocimiento de un profesor de matemáticas, hay subdominios que se superponen, de ahí que posteriormente hayan seguido surgiendo nuevos modelos que abordan este asunto.

2.1.3. Modelo MTSK

El modelo más reciente de los tres que he destacado es el llamado “*The Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge*” (MTSK), traducido al español como “Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas”, creado por los miembros del SIDM (Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva). Este modelo está basado en los dos anteriores, sobre todo en la idea de Shulman sobre la importancia de que el profesor tenga un buen conocimiento pedagógico del contenido que va a enseñar y la idea que defiende Ball en

el modelo MKT sobre los conocimientos matemáticos que son necesarios tener para su correcta enseñanza; e intenta acabar con las limitaciones detectadas en el uso de ambos modelos (Carrillo et al., 2018).

Según Carrillo et al. (opus cit.), el modelo MTSK surge con el objetivo de analizar en profundidad el conocimiento que emplean los profesores de matemáticas a la hora de desarrollar su trabajo. Para ello se parte de la base de que, para llevar a cabo su función (lo que incluye la planificación de los temas, la relación con otros maestros, dar clase, reflexionar sobre su labor, etc.), el profesor necesita tener conocimientos específicos sobre las matemáticas, así como de su didáctica. Entre dichos conocimientos nos encontramos con los significados, propiedades y definiciones de los distintos contenidos de las matemáticas, la propia comprensión del tema, las conexiones existentes entre los elementos matemáticos, los medios y recursos adecuados para desarrollar las lecciones de manera que los alumnos las comprendan, conocimientos sobre la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje de las mismas, etc. El modelo MTSK tiene, como puede intuirse, un enfoque analítico, pues pretende obtener información sobre los conocimientos del profesor, los elementos que componen este conocimiento y las interacciones que se producen entre ellos. Sin embargo, se centra en estudiar el conocimiento que el profesor pone en uso, dejando a un lado aquellos conocimientos que posee, pero no son necesarios a la hora de desarrollar su labor docente (Carrillo et al., opus cit.).

MTSK reconfigura el conocimiento matemático tal y como se considera en el modelo MKT, al mismo tiempo que supone una reinterpretación del contenido pedagógico y una nueva forma de conceptualizar la noción de especialización. Respecto a las ideas de Shulman (1986), se consideran dos amplios dominios de conocimiento. El primero hace referencia al conocimiento matemático que posee un docente de matemáticas, tomando esta como una disciplina científica dentro del contexto educativo; es el dominio denominado *Conocimiento matemático* (*MK* de *Mathematical Knowledge*). Se amplía aquí la idea de conocimiento de la materia de Shulman ya que se reconoce las características matemáticas como una disciplina y se realiza una diferencia entre las matemáticas puras y las matemáticas escolares. El otro dominio, *Conocimiento del contenido pedagógico* (*PCK* de *Pedagogical Content Knowledge*), hace referencia al conocimiento matemático en términos de enseñanza-aprendizaje (Carrillo et al., opus cit.).

Además de todo esto, Carrillo y colaboradores (2018), incluyen en este modelo un nuevo apartado dedicado a las creencias que tiene el maestro, divididas en creencias relacionadas con el contenido matemático y creencias relacionadas con su enseñanza y aprendizaje, de ahí que se represente, tal y como puede apreciarse en la Figura 3, en el centro del hexágono, pues estas concepciones afectan a los dos dominios del conocimiento comentados anteriormente.

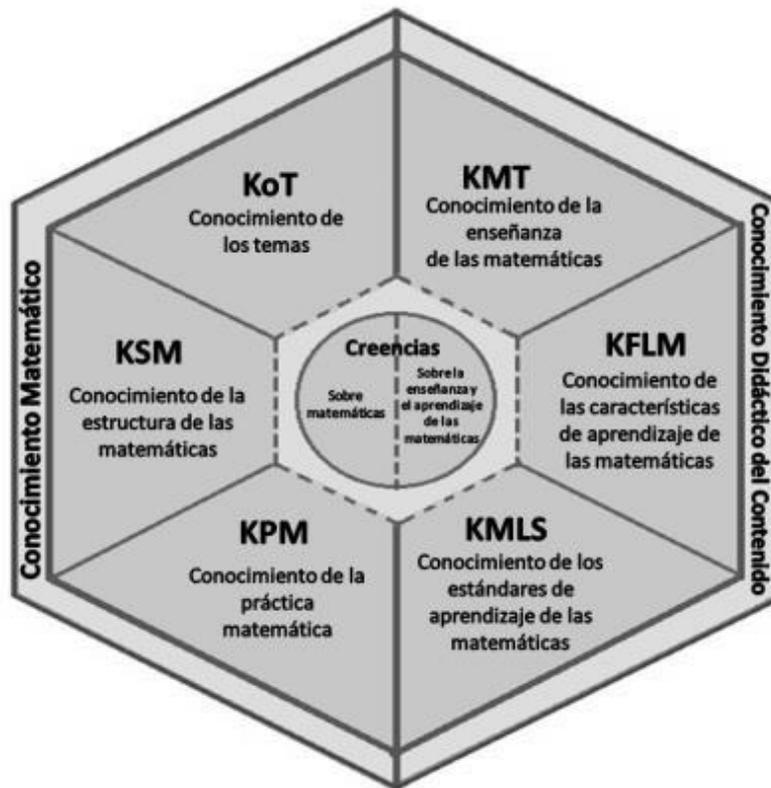


Figura 3.

Subdominios del modelo MTSK. Carrillo et al. (2018).

A continuación, se detallan cada uno de los subdominios de MK y PCK en los que se organiza el modelo MTSK:

Conocimiento matemático (MK)

Según los autores del modelo MTSK, tener un buen conocimiento sobre las matemáticas que se deben enseñar, es decir, conocer las conexiones que se dan entre los diferentes contenidos, sus reglas, sus características, etc., es primordial para el profesor, ya que es lo que le permite enseñar contenidos de una manera conectada y validar sus conjeturas y la de sus alumnos. Hablan de conocimiento matemático referente a los contenidos necesarios para ser profesor de

matemáticas, diferenciándolo del conocimiento matemático que necesita, por ejemplo, un ingeniero o un empresario.

Dividen el conocimiento matemático del profesor en tres subdominios: el contenido matemático en sí, *Conocimiento de los Temas (KoT*, de Knowledge of Topics); las relaciones interconceptuales entre esos contenidos, *Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM*, de Knowledge of the Structure of Mathematics) y conocimientos sobre cómo se procede en matemáticas, *Conocimiento de las Prácticas Matemáticas, (KPM*, de Knowledge of Practices in Mathematics).

- Conocimiento de los Temas (KoT)

El Conocimiento de los Temas (KoT) describe qué y de qué manera el profesor de matemáticas conoce el contenido que enseña. Implica un conocimiento profundo del contenido matemático y sus significados (Ma, 1999). Combina el conocimiento que se espera que los estudiantes aprendan con una comprensión más profunda. (Carrillo et al., 2018).

Según nos detalla Liñán-García (2017), hay cuatro categorías dentro de este subdominio. La primera es “Definiciones, Propiedades y sus Fundamentos”, que considera el conjunto de propiedades que hacen definible a un tema y le dan sentido y significado, además de las formas alternativas de hacerlo, es decir, encontramos aquí el conocimiento sobre los conceptos, definiciones, propiedades, conexiones intraconceptuales, etc. El segundo es “Fenomenología”, y abarca los conocimientos del profesor sobre los fenómenos relacionados con un tema que pueden generar conocimiento matemático y los usos y aplicaciones del mismo. Después nos encontramos con la categoría “Registros de Representación” que, como podemos intuir, se refiere al conocimiento sobre las distintas formas en las que puede ser representado un tema o concepto: simbólica, gráfica, verbal, situaciones reales, materiales manipulativos, vocabulario asociado, etc. Finalmente, en la categoría “Procedimientos”, tenemos el saber hacer, el conocimiento práctico de las matemáticas. Pero no solo cómo se hace, sino también cuándo, porqué y las características del resultado.

- Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM)

Según Carrillo et al. (2018), este subdominio se refiere al conocimiento del profesor sobre las conexiones entre distintos elementos matemáticos, es decir, a las relaciones interconceptuales (las conexiones intraconceptuales y las conexiones de un contenido con otras disciplinas se recogen en KoT al considerarse conocimiento sobre un solo contenido, es decir, sobre un tema

concreto). Liñán-García (2017), al hacer referencia al KSM, nos habla también de cuatro categorías: “Conexiones de Complejización” (relación de contenidos actuales con otros que formarán parte de momentos posteriores en la formación académica), “Conexiones de Simplificación” (relacionan contenidos actuales con otros que ya formaron parte de la formación académica), “Conexiones Transversales” (aquellas existentes entre contenidos diferentes que tienen cualidades en común) y “Conexiones Auxiliares” (entre conocimientos que se relacionan como apoyo para un fin).

- Conocimiento de las Prácticas Matemáticas (KPM)

Cuando se habla de prácticas matemáticas se hace referencia a cualquier actividad matemática realizada sistemáticamente, que representa un pilar de la creación matemática y que se ajusta a una base lógica de la que se pueden extraer reglas. El conocimiento del profesor de matemáticas sobre estas prácticas incluye: demostrar, justificar, definir, hacer deducciones e inducciones, dar ejemplos y comprender el papel de los contraejemplos, comprender la lógica que sustenta cada una de estas prácticas, etc. (Carrillo et al., 2018). Como indicadores de este subdominio se establecen, por tanto, los conocimientos del profesor sobre: la jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos; las formas de validación y demostración; el papel de los símbolos y el lenguaje formal; los procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas; las prácticas particulares del quehacer matemático (modelación, algoritmización, etc.); y las condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones. (Liñán-García, opus cit.).

Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

Carrillo et al. (opus cit.), reconocen en el modelo MTSK la importancia del conocimiento matemático en términos de enseñanza y aprendizaje. Se trata del área del conocimiento de los profesores más cercana a la práctica en el aula. Hay tres subdominios en PCK, *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT*, de Knowledge of Mathematics Teaching), *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM*, de Knowledge of Features of Learning Mathematics) y *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de Matemáticas (KMLS*, de Knowledge of Mathematics Learning Standards).

- Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)

Este subdominio abarca, según Carrillo et al. (2018), el conocimiento asociado a las características del aprendizaje de las matemáticas, poniendo el foco en el contenido matemático (como objeto de aprendizaje) en lugar de en el alumno. Las principales fuentes de conocimiento que tienen los docentes dentro de este subdominio son su propia experiencia junto con los resultados de las investigaciones en Educación Matemática. Se distinguen varias categorías dentro de este subdominio, entre las que se incluyen: el conocimiento del profesor sobre las *formas de aprender de sus alumnos* (*Teorías de Aprendizaje* asociadas a un conocimiento matemático); conocimiento sobre las *Fortalezas y Dificultades* asociadas al aprendizaje de un contenido matemático, es decir, el conocimiento del profesor acerca de los errores, obstáculos y dificultades en el pensamiento matemático de los estudiantes así como las facilidades que suponen un tipo concreto de explicación o representación; conocimiento del profesor sobre las *Formas de Interacción* de los estudiantes *con un contenido matemático* o, lo que es lo mismo, el conocimiento sobre los procedimientos y estrategias de los estudiantes, incluyendo el conocimiento sobre el lenguaje y representaciones que estos utilizan y, finalmente, el conocimiento sobre los *Intereses y Expectativas* de los estudiantes con respecto a las matemáticas, lo que incluye el saber si estos consideran fácil o no un contenido, proceso o procedimiento concreto. (Liñán-García, 2017).

- Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)

En términos generales, el subdominio se refiere al conocimiento teórico necesario para la enseñanza de las matemáticas (*Teorías de Enseñanza*). Esto implica, además, tener conocimiento sobre el potencial educativo de las *Estrategias, Técnicas, Tareas y Ejemplo* para enseñar los contenidos matemáticos, así como el conocimiento sobre las limitaciones y obstáculos que pueden surgir. Se incluye aquí, por tanto, el conocimiento de *Recursos Materiales y Virtuales* como pueden ser los libros de texto, los materiales manipulativos, las herramientas virtuales, las pizarras interactivas, etc. Este tipo de conocimiento proviene de muchas fuentes: publicaciones de investigación, especificaciones del currículo y la propia experiencia en el aula del maestro junto con su formación. (Carrillo et al., opus cit.).

- Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de Matemáticas (KMLS).

Tal y como especifican Carrillo y colaboradores (2018), por estándar de aprendizaje se hace referencia a cualquier instrumento diseñado para medir el nivel de capacidad para comprender, construir y usar las matemáticas, y que se puede aplicar en cualquier etapa específica de la educación. Las nociones que sustentan esta medida pueden ser construido por el maestro basándose en diversas fuentes, sobre todo en las especificaciones curriculares. Por ese motivo, en una de las categorías de este subdominio, denominada *Expectativas de Aprendizaje*, se incluye el conocimiento que tiene el profesor de lo que se pretende, según el currículo oficial, que un estudiante aprenda en un determinado curso. Otras fuentes pueden incluir documentos curriculares no oficiales, por ejemplo, Principios y Estándares para la enseñanza de las Matemáticas (NCTM, 2000), y literatura de investigación. También es importante para este subdominio el *Nivel de Desarrollo Conceptual o Procedimental Esperado* para un contenido en un determinado momento escolar, haciendo referencia así al conocimiento sobre el nivel al que se debe llegar en un contenido determinado en un momento académico concreto. Finalmente, la categoría *Secuenciación con Temas* anteriores y posteriores a un determinado momento escolar, ya que el profesor debe localizar cuáles son los temas que los alumnos deben conocer primero y tener adquiridos para abordar temas posteriores (Liñán-García, 2017).

2.2.Tratamiento curricular de los contenidos matemáticos

2.2.1. Currículum de Educación Primaria en Andalucía.

A la hora de dar clase en un aula de Educación Primaria, todo maestro debe saber que tiene que ajustarse a un marco legal que nos indica todo aquello que deben conocer y aprender los alumnos de esta etapa educativa y, por tanto, aquello que los maestros deben enseñar. En nuestra comunidad, todo esto se recoge en la *ORDEN de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículum correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía.*

Si nos centramos en el área de matemáticas, que es la materia que nos ocupa, se establecen 5 bloques de contenidos para cada uno de los ciclos educativos:

- Bloque 1. “Procesos, métodos y actitudes matemáticas”.
- Bloque 2. “Números”.
- Bloque 3. “Medida”.
- Bloque 4. “Geometría”.

- Bloque 5. “Estadística y Probabilidad”.

En el presente estudio trabajaré con un vídeo de una maestra dando clase de Geometría en un aula de 5º de Primaria. Esto quiere decir que, al acudir al currículo, me tendré que centrar en el tercer ciclo y, más concretamente, en el bloque número 4, que es el que se va a tratar directamente. Según dicha Orden (Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía.), a través de este bloque de contenidos los alumnos aprenderán las cuestiones básicas relacionadas con las formas y estructuras geométricas, tanto en dos como en tres dimensiones (geometría plana y geometría espacial). En la clase analizada se trabaja contenido relativo a elementos geométricos en el plano.

También podemos encontrarnos en ese vídeo con contenidos propios del primer bloque, ya que la legislación establece que estos contenidos se deben trabajar de manera transversal a los demás, es decir, al mismo tiempo que se van desarrollando el resto de contenidos. *“Se ha formulado con la intención de que sea la columna vertebral del resto de los bloques y de esta manera forme parte del quehacer diario en el aula para trabajar el resto de los contenidos”* (Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía, p. 312).

En las páginas 405 y 406 del documento en cuestión, puede verse la gran cantidad de contenidos (24 para ser más exactos) relacionados con la Geometría en el tercer ciclo de Educación Primaria. Estos contenidos permitirán a los alumnos conocer, entre otras cosas: la situación en el plano y en el espacio de distintas figuras; el sistema de coordenadas cartesiano; elementos, relaciones y clasificación de las figuras planas; concavidad y convexidad de dichas figuras; identificación y denominación de diferentes polígonos; cálculo de perímetros y áreas; definición y elementos de la circunferencia y el círculo; todo lo relacionado con los cuerpos geométricos y los cuerpos redondos; simetrías, ampliaciones y reducciones (Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía, pp. 405-406).

El vídeo en cuestión trata sobre rectas, semirrectas y segmentos. Aunque en la legislación actual no aparece de manera explícita estos términos, todos ellos hacen referencia a figuras (conjuntos formados por puntos del plano), por tanto, se incluyen dentro del contenido 4.7. *Figuras planas: elementos, relaciones y clasificación* (Orden 17 marzo 2015, p. 405).

2.2.2. Principios y estándares para la Educación Matemática.

Además del Currículum de Educación Primaria en Andalucía, hay otro documento que todo profesor de Educación Primaria debería establecer como base para desarrollar sus clases de matemáticas de una manera adecuada y coherente. Se trata del libro “Principios y Estándares para la Educación Matemática”, autoría del *National Council of Teachers of Mathematics*, (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de EEUU), NCTM (2000) y traducido al español por la *Sociedad Andaluza de Educación Matemáticas THALES*. Este documento pretende ser una herramienta útil para aquellas personas que, de un modo u otro, intervienen en la educación matemáticas de los más jóvenes, y tiene el objetivo de mejorar la enseñanza de esta materia.

Así pues, según el NCTM (2000), los Principios que describen las características de una educación matemática de calidad son los siguientes:

- ✚ Igualdad. Debe haber igualdad de oportunidades para que todos los alumnos puedan aprender matemáticas, para lo cual es fundamental tener unas altas expectativas con todos ellos y proporcionarle a cada niño el apoyo que necesite teniendo en cuenta sus características y necesidades.
- ✚ Currículo. El currículo es algo enormemente importante en educación, pues en él se recoge todo aquello que los alumnos van a tener la oportunidad de aprender durante su escolarización. Por ello, es necesario que se seleccionen contenidos matemáticos importantes, es decir, que sean realmente útiles para nuestros alumnos, y que estos se relacionen entre sí de manera coherente. Además, deben estar bien articulados en los diferentes niveles, de manera que vayan de menor a mayor complejidad y profundidad.
- ✚ Enseñanza. Para que la enseñanza matemática se produzca de manera eficaz, es necesario que los profesores conozcan muy bien las matemáticas que están enseñando, sepan cómo los alumnos aprenden las matemáticas e investiguen lo que los alumnos ya saben sobre el tema en cuestión para que, partiendo de esos conocimientos, puedan entender y aprender nuevos contenidos o contenidos más profundos. Todo esto se ve favorecido si el maestro crea un ambiente de clase adecuado para ello.
- ✚ Aprendizaje. Como ya hemos comentado en el apartado anterior, para que los alumnos aprendan adecuadamente las matemáticas, es necesario que las comprendan y las entiendan, para lo cual es imprescindible que construyan los nuevos aprendizajes sobre

los conocimientos previos que ya tenían; solo así podrán aplicarlos posteriormente en diferentes situaciones y contextos.

- ✚ Evaluación. La evaluación no debe ser un proceso que solo sirva para ver si los alumnos han adquirido los aprendizajes y ponerles una nota, sino que debe ser un acto que sirva para mejorar el aprendizaje, al proporcionar información útil e importante a profesores y alumnos.
- ✚ Tecnología. Las herramientas tecnológicas como las calculadoras y los ordenadores enriquecen el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas si se hace un uso adecuado de las mismas. No debemos confundir esto e interpretar que las tecnologías son sustitutas de los maestros, pues esto sería una gran equivocación.

Por otra parte, nos encontramos con los Estándares, que son los que recogen los contenidos y procesos matemáticos que los estudiantes deberían aprender y, por lo tanto, los profesores enseñar, durante su escolarización. Tenemos, por una parte, los Estándares de contenidos (Número y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de datos y Probabilidad) y, por otra parte, los Estándares de procesos (Resolución de problemas, Razonamiento y prueba, Comunicación, Conexiones y Representación). En NCTM (2000) se establecen estos Estándares para distintas etapas, correspondientes a los niveles educativos de EE.UU. Los alumnos que en España cursan 5º de Primaria se corresponden con el nivel 5 (etapa 3-5). Los estudiantes de esta etapa, en lo que respecta a la Geometría, que es el área que nos ocupa, deberían ser capaces de:

- Analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas.
- Localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.
- Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas.
- Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas.

Como ya hemos comentado, el NCTM (opus cit.) también hace sugerencias sobre los Estándares de procesos en esta etapa:

- En cuanto al razonamiento matemático y la demostración, los alumnos de esta edad van a empezar a comprender, entre otros aspectos, el papel de la definición en matemáticas. El razonamiento matemático se desarrolla en las clases donde se anima

a los alumnos a exponer sus ideas para que sean debatidas. Así también serán capaces de pensar y evaluar las elaboraciones de los demás. Para todo esto necesitan tener abundantes oportunidades de intervenir en las discusiones sobre contenidos matemáticos.

- En lo que respecta a la comunicación, en esta etapa, la habilidad de los estudiantes para leer, escribir, escuchar, pensar y comunicar sobre los problemas, desarrollará su comprensión y profundización de las matemáticas. La comunicación en estos niveles debe incluir el compartir el pensamiento, hacer preguntas y explicar y justificar ideas. Debería animarse a los alumnos a expresar oralmente y por escrito sus conjeturas. Las decisiones de un maestro sobre qué decir o no decir, preguntar o no preguntar, etc. se basa en sus observaciones sobre los alumnos y sus conversaciones. El empleo de dibujos proporciona una oportunidad posterior para la comprensión y la conversación.
- Respecto a las conexiones, es importante que los alumnos conecten los contenidos matemáticos que van aprendiendo para que vean las matemáticas como un cuerpo unificado de conocimientos y no como un conjunto complejo y desarticulado de conceptos, procedimientos y procesos. Los contextos del mundo real proporcionan oportunidades a los alumnos para conectar con su entorno lo que están aprendiendo. También es fundamental la conexión entre las matemáticas y otras disciplinas
- En cuarto lugar, nos encontramos con la representación. En la etapa 3-5 los alumnos necesitan desarrollar y usar una variedad de representaciones de ideas matemáticas para modelizar problemas, investigar relaciones matemáticas y justificar o refutar conjeturas. Los alumnos representan ideas cuando, por ejemplo, describen con palabras o con dibujos las características más importantes de un objeto. Las representaciones cumplen fundamentalmente un doble papel: son instrumentos para pensar y para comunicar. En esta etapa sus representaciones deberían ser más detalladas y seguras que en los niveles inferiores. Las representaciones deberían presentarse como herramientas útiles para cimentar la comprensión, para comunicar información y para evidenciar el razonamiento.
- Finalmente, en cuanto a la resolución de problemas, se determina que los alumnos de esta etapa deberían tener experiencias frecuentes con problemas que les interesen, los animen y los comprometan a pensar en matemáticas importantes. Los programas de enseñanza deberían capacitar a los estudiantes para que sean capaz de: construir nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas, resolver

problemas que surjan de las matemáticas y de otros contextos, aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas, y controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él. Todo esto se debe a que la resolución de problemas es la piedra angular de las matemáticas escolares, pues sin la habilidad para resolver los mismos, los conceptos y procedimientos que conozcan son de poco uso.

2.3.Tareas profesionales.

Son muchos los autores, como Sánchez y García (2009), Carrillo y Climent (2009) y Barrera-Castarnado et al. (2020), los que destacan la importancia de analizar situaciones en el aula para la formación profesional del docente. Para ello defienden que así se captan aspectos tan importantes como: las lecciones que dan los maestros y cómo lo hacen, las reacciones de los alumnos, las interacciones entre los iguales y con el maestro, etc. Es decir, estos autores proponen investigar la práctica real como medio de desarrollo profesional. (Carrillo y Climent, opus cit.).

Barrera-Castarnado et al. (opus cit.), defienden que, conectando la formación inicial con la práctica profesional, los futuros maestros y maestras, podrían adquirir un conocimiento especializado que les permita un desarrollo adecuado de su labor docente. Para esto es especialmente útil hacer uso de tareas profesionales, convirtiéndolas así en tareas educativas de la formación inicial de profesores.

Ya en 2009, Carrillo y Climent recogían los motivos por los cuales los miembros del PIC (Proyecto de Investigación Colaborativa) defendían este paso de tareas profesionales a tareas educativas, los cuales son:

- La concepción del estudiante a maestro como un docente en desarrollo, por lo que se le deben presentar situaciones de práctica real.
- Reflexión en el aula, poniendo el foco en el papel que juegan las matemáticas en el en el proceso-enseñanza de las mismas.
- Reflexión como medio para comprender teoría y práctica (razonamiento teórico sobre la práctica).

En cuanto a los tipos de tareas profesionales que se emplean en la formación inicial del profesorado de matemáticas, he de decir que hay tres tipos principales: tareas de matemáticas, situaciones en el aula y diseño, simulación y/o práctica de situaciones de aula. La que yo voy a poner en marcha es la segunda, situaciones en el aula, que consiste en la presentación en vídeo a los futuros maestros de una sesión real en un aula en la que un profesor en activo da clases de matemáticas a un grupo de alumnos para su observación y análisis profundo (Carrillo y Climent, 2009). Comparto con Climent et al. (2016) que este análisis puede generar situaciones de discusión muy ricas, tanto en contenido matemático como en contenido de la didáctica de las matemáticas, y permitir así a los estudiantes para maestro desarrollar su capacidad para activar información aprendida durante el curso, dándole sentido así a los conocimientos adquiridos.

La tarea que se propone en este trabajo, al igual que hicieron Barrera-Castarnado et al. (2020) en su trabajo, se centra en la geometría, ya que se ha descubierto que los contenidos propios de esta disciplina matemática suponen un obstáculo para muchos de los futuros docentes.

3. OBJETIVOS DEL TFG

Como puede deducirse después de haber leído la introducción y justificación de este trabajo, mi propósito con esta investigación es saber si los estudiantes del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Sevilla están preparados para dar clases de matemáticas a alumnos de dicha etapa educativa. Por ello, la pregunta a la que intentaré dar respuesta a través de este TFG es:

¿Posee una futura maestra los conocimientos adecuados y necesarios para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos matemáticos de manera satisfactoria?

A partir de esta pregunta de investigación, extraigo los siguientes objetivos:

- ❖ Identificar el conocimiento especializado que posee una futura maestra de Educación Primaria.
- ❖ Analizar los contenidos de geometría que deben trabajar los alumnos del tercer ciclo de Educación Primaria en Andalucía.
- ❖ Estudiar cuáles son los Principios y Estándares para la Educación Matemática establecidos por NCTM (2000).
- ❖ Conocer diferentes modelos que tratan sobre el conocimiento especializado que debe tener un profesor de matemáticas y, en especial, el modelo MTSK.
- ❖ Diseñar una herramienta que nos permita analizar el conocimiento especializado de futuros maestros.
- ❖ Reflexionar acerca de la importancia de una buena formación y de la utilidad del modelo MTSK a la hora de analizar una práctica docente real.

4. METODOLOGÍA

Llegados a este punto, conviene detallar profundamente la metodología que voy a llevar a cabo en esta investigación. Como ya he comentado en la introducción y el marco teórico, para realizar este trabajo utilizaré un fragmento de un vídeo en el que se puede ver una maestra con experiencia dando clase de Geometría en 5º de Primaria. Concretamente, en el fragmento en cuestión se trabajan las rectas, semirrectas y segmentos. Mi intención es analizar, a través de él, el conocimiento especializado de matemáticas que posee un estudiante para maestro de la Universidad de Sevilla.

En concordancia con la pregunta de investigación planteada y los objetivos propuestos, voy a situarme bajo el paradigma interpretativo. Este paradigma, también conocido como fenomenológico, humanista, naturalista o etnográfico, surgió como alternativa al paradigma positivista. A diferencia de este, no se pretenden hacer generalizaciones o deducciones a la población general a partir del objeto de estudio, sino que tiene como objetivo la descripción y comprensión de un fenómeno o caso concreto, de ahí que el objeto de estudio no pueda ser analizado si es separado o aislado de su realidad. Se acepta, por tanto, la idea de que la realidad es dinámica, múltiple y holística. Como es de esperar, este tipo de estudios dirige su atención a aquellos aspectos no medibles ni susceptibles de cuantificación, es decir, no se pretende recopilar datos numéricos, motivo por el cual se asocia a las investigaciones de tipo cualitativo (González-Monteagudo, 2001).

Además, y como es de esperar, voy a utilizar como método de investigación el estudio de caso, pues voy a enfocarme en una sola persona a la que voy a analizar en profundidad. Se trata, por tanto, de una investigación de tipo cualitativa.

Un caso es un objeto de estudio que se analiza en su contexto y que se considera relevante por motivos varios. El caso a estudiar puede ser un fenómeno social, una persona o un conjunto de personas (familias, tribus, organizaciones, etc.), es decir, cualquier objeto de naturaleza social. En los estudios de casos únicos, la investigación suele adquirir un carácter más descriptivo y extenso y, en muchas ocasiones, la cercanía y complicidad entre el investigador y el objeto de estudio permite resolver adecuadamente los propósitos o preguntas iniciales (Coller, 2005).

Existen diferentes formas de clasificar los casos, y son muchos los autores que establecen su propia clasificación. Skate (2005) establece tres tipos de estudios de casos según su finalidad o grado de interés que tenga para el propio investigador. En primer lugar, nos encontramos con el estudio de caso intrínseco, que es aquel que tienen un valor o importancia en sí mismo (no

porque sea representativo de otros casos) y cuyo objetivo es tener una mejor comprensión del caso. En segundo lugar, están los estudios de casos de tipo instrumental, que son casos que permiten generalizar, profundizar en un tema o perfeccionar una teoría sobre el objeto de estudio. Finalmente, encontramos el estudio de caso colectivo, en el que se seleccionan varios casos para investigar. Para ser más concretos, en esta investigación voy a realizar un estudio de caso de tipo intrínseco, pues pretendo comprender y analizar en profundidad el conocimiento especializado que posee un EPP, sin hacer generalizaciones.

A la hora de seleccionar el sujeto al que se le va a realizar este estudio de caso, he debido tener en cuenta varios aspectos. En primer lugar, como el objetivo fundamental de este trabajo es analizar el conocimiento especializado como profesor/a de matemáticas matemáticos de un/a estudiante a maestro/a, la persona elegida debía ser estudiante del Grado de Educación Primaria, en este caso de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Sevilla, pues yo soy estudiante en este lugar y es la población a la que tengo acceso más fácilmente. Además, otro criterio que he establecido es que el sujeto tenga aprobadas las asignaturas “Matemáticas Específicas para Maestros” y “Didáctica de Matemáticas para Maestros” que se cursan en 1º y 2º Grado respectivamente, ya que de no ser así difícilmente van a tener conocimientos matemáticos específicos propios de un/a profesor/a. También tuve en cuenta que fuera un futuro maestro que ya hubiera realizado las prácticas profesionales de 3º de Primaria, para que así ya haya tenido la posibilidad de observar a un docente en activo dando clase. Finalmente, el sujeto debía ser una persona que tuviera disponibilidad para visualizar y analizar el vídeo indicado y realizar posteriormente una entrevista (online o presencial) conmigo para conocer el motivo de sus respuestas.

La estudiante así elegida ha sido una chica a la que, a partir de ahora, nos referiremos bajo el pseudónimo de Alicia. Es estudiante del 4º año del Grado en Educación Primaria, en la especialidad de Educación Física, y no tiene ninguna asignatura pendiente. Aprobó la asignatura de “Matemáticas Específicas para Maestros” con un 6 y “Didáctica de Matemáticas para Maestros” con un 9. Sin embargo, no siente especial gusto por las matemáticas, de manera que, en este sentido, puedo decir que representa a una gran parte de estudiantes para maestro. A pesar de ello, su actitud siempre es positiva, tiene ganas de aprender y de mejorar y, aunque las matemáticas no sean su fuerte, le gustaría poder ofrecer a sus futuros alumnos la mejor enseñanza posible de esta materia.

Antes de pasar a realizar el estudio a esta estudiante, analicé personalmente el vídeo que forma parte de la base de toda esta investigación para detectar los elementos propios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas que la docente puso en práctica en ese momento de la sesión, pues así resultaría más fácil todo el proceso posterior.

La técnica de recogida de información que se ha utilizado en este estudio es la entrevista, pues a través de ella puedo obtener información rica y variada acerca del análisis realizado por Alicia sobre el fragmento del vídeo que estamos tratando. Primero se le proporcionó el vídeo de la maestra dando clase junto con su transcripción (anexo 1) para que lo analizara, con las únicas consignas de que lo viera y detectara cuáles eran los conocimientos que, según su criterio, estaba poniendo en práctica la docente a la hora de llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje, tanto en lo que respecta a conocimiento matemático como a conocimiento de su enseñanza-aprendizaje. En definitiva, todo lo que considerara relevante. A continuación, una vez tuve dicho análisis, preparé una entrevista para profundizar en sus respuestas y conocer el motivo de las mismas. La entrevista es un método de obtención de información en el que una serie de preguntas son formuladas verbalmente por un entrevistador, que en este caso he sido yo, a la persona entrevistada, que ha sido Alicia, la EPP. Concretamente, he planteado una entrevista semiestructurada, pues he planificado una serie de preguntas sobre los elementos en los que quería profundizar, pero a la hora de llevarla a cabo, el orden y secuenciación de las mismas podían adaptarse dependiendo de la situación (podía cambiar el orden de las mismas, modificar su formulación, obviar algunas y hacer otras preguntas nuevas, etc.), es decir, se planificaron una serie de preguntas que servían como guía, pero que no había que seguir “al pie de la letra”.

La mayoría de las preguntas han sido abiertas, para permitir total libertad en las respuestas del sujeto de estudio y obtener información más profunda. Si nos fijamos en las preguntas planteadas para la entrevista, que se añaden a continuación, hay alguna cerrada, pues se responde simplemente con un sí o un no, pero seguidamente se le ha pedido que explique el motivo de su elección. Además, he de decir que en la entrevista he tenido en cuenta algunos de los subdominios del modelo MTSK, ya que le he formulado preguntas sobre elementos específicos de ellos.

PREGUNTAS ENTREVISTA

1. ¿Cómo definirías la labor profesional de esta maestra en este fragmento? Si no hubieras visto el vídeo, ¿pensarías que es una profesora novata o con experiencia?
2. ¿Consideras que los recursos utilizados por la profesora son los adecuados? (KMT)
3. ¿Consideras que la profesora tiene en cuenta las posibles dificultades de los estudiantes? (KFLM)
4. ¿Por qué crees que la maestra proyecta de forma visual lo que el alumnado va indicando? (KMT)
5. ¿Los dibujos que hace son siempre iguales?, ¿crees que esto beneficia o perjudica al alumnado? (KMT)
6. ¿Crees que los ejemplos reales que pone son realmente útiles?, ¿cuál hubieras usado tú? (KMT)
7. ¿Cuál crees que es el motivo por el cual la maestra se guía constantemente por el libro? (porque lo considera un recurso útil, porque es más cómodo, etc.) (KMT)
8. ¿La maestra está de acuerdo siempre con las definiciones que aparecen en el libro?
En caso negativo, ¿en cuál no está de acuerdo?, ¿por qué?
Y tú, ¿estás de acuerdo? (KoT)
9. ¿Tiene la maestra claro cómo tiene que hacer las definiciones? Es decir ¿sabe la maestra los aspectos que debe tener en cuenta para crear una definición? (KPM)
10. ¿Para qué crees que necesitan los estudiantes saber qué es una recta, una semirrecta y un segmento? (KSM y KMLS)

Como es de esperar, a la hora de realizar la entrevista, antes de plantearle estas cuestiones, pedí permiso a Alicia para grabar en audio su entrevista, informándole de que el único propósito de ello era poder transcribir posteriormente todas sus respuestas, algo que facilitaría mi análisis; le volví a agradecer su participación y le pedí que contestara con la máxima sinceridad posible, pues solo así resultaría una investigación satisfactoria. También volví a ver con ella el vídeo y leímos las anotaciones que me mandó (anexo 4), para así ponernos en situación.

La relación y la confianza existente entre ambas, entrevistadora y entrevistada, las únicas personas presentes durante este proceso, permitió que la entrevista se llevara a cabo en un ambiente distendido y relajado.

Tras realizar todo esto, expliqué brevemente a Alicia el modelo MTSK, siendo la información proporcionada un resumen de lo añadido en el marco teórico de esta investigación, y le mostré la tabla recogida en el anexo 2. Dicha tabla consta de una primera columna con varias filas en las que se recogen los distintos subdominios del modelo MTSK, una segunda columna para que anote todos los indicios y/o evidencias que se observan en el vídeo, de cada uno de ellos, y, en último lugar, otra columna para que explique el motivo por el cual sitúa esa actuación dentro de ese subdominio. Esta tabla debía usarla Alicia en un segundo análisis del vídeo, una vez conocido el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas, MTSK. Para que pudiera realizar este último paso de una manera más relajada, se le envió por correo electrónico para que lo realizara en otro momento. Esta tabla, por tanto, supone otro instrumento de recogida de información en este estudio.

Para analizar la información, lo primero que he hecho ha sido transcribir literalmente la entrevista realizada a Alicia, incorporando gestos realizados por la entrevistada y que se consideran útiles para el estudio. Después, con ayuda de mi análisis inicial del vídeo, procedí a analizar sus respuestas, detectar los conocimientos especializados del profesor de matemáticas movilizados por la estudiante para maestro (basándonos en el modelo MTSK) y compararlas con su segundo análisis, lo cual me permitió obtener las conclusiones añadidas más adelante, en el apartado correspondiente.

5. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Antes de pasar a analizar la información, me gustaría especificar que, en los anexos 1 y 5, en los que se adjuntan las transcripciones del vídeo analizado y de la entrevista a la EPP respectivamente, he numerado los distintos párrafos o intervenciones, de manera que cada uno de ellos va a ser considerado como una unidad de información. Por ejemplo, la unidad de información del párrafo 15 de la transcripción del vídeo se nombrará en el análisis como [U15] y la unidad de información del párrafo 24 de la transcripción de la entrevista se nombrará como [E24].

5.1. Análisis personal sobre el fragmento del vídeo de la maestra dando clase.

Como ya he comentado en el apartado anterior, lo primero que he hecho a la hora de poner en marcha esta investigación es analizar personalmente el vídeo con el que se va a trabajar. Para ello he utilizado como herramienta principal la transcripción del mismo (anexo 1) y la tabla basada en el modelo MTSK creada para este fin, es decir, para detectar los conocimientos pertenecientes a cada uno de los subdominios que la maestra ha puesto en práctica a la hora de explicar los conceptos de recta, semirrecta y segmento. Esta tabla ya completada se puede ver en el anexo 3, pero a continuación realizaré un análisis más detallado.

Lo primero que me gustaría destacar es que, a pesar de tratarse de un fragmento bastante corto, lo que podría haber dificultado encontrar conocimientos propios de todas las categorías, el vídeo me ha permitido ver, en mayor o menor medida, indicios y/o evidencias de todos los subdominios del modelo MTSK.

Voy a empezar por el dominio “Conocimiento Matemático” (MK). En primer lugar, he de decir que, aunque la maestra explora las ideas previas de los alumnos sobre el tema e intenta que construyan entre todos cada definición, es decir, no es ella la que les dice directamente la definición de recta, semirrecta y segmento, se nota que tiene Conocimientos del Tema (KoT) en una profundidad mayor a la que tienen que aprenderlo los alumnos por sus propios comentarios y por cómo reacciona ante los comentarios de los alumnos. Por ejemplo, cuando están definiendo la recta, primero un alumno le dice que una recta es simplemente una línea [U2], pero luego otro discente comenta que es una línea que no tiene ni curvas ni ángulos [U5], ante lo cual ella responde “*Ya va diciéndome algo. Una línea que no tiene ni curvas ni ángulos*” [U6], lo cual es un claro indicio de que conoce las propiedades de la recta y, por tanto, sabe que ya han dicho algunas, pero faltan otras por aparecer. Así mismo, sé que tiene conocimientos

sobre la definición de recta porque va repitiendo y recalcando todas aquellas propiedades que comentan los alumnos y que son correctas: *“Todas las líneas están formadas por puntos”* [U8]; *“No tiene principio ni fin”* [U16]; *“Bueno. No tiene ni principio ni fin, ni tiene ángulos, ni tiene curvas, eso es una recta. No sabemos ni dónde empieza ni dónde acaba”* [U20]. Igualmente, demuestra sus conocimientos sobre la definición y las propiedades de las semirrectas cuando están tratando la misma: *“La mitad de la recta. Tenemos una recta y la cortamos. Como una recta es infinita, no tiene fin, donde la cortemos... la cortamos y tenemos dos semirrectas”* [U27]; *“Una semirrecta sería desde el punto a este infinito (vuelve a hacer los gestos con las manos al llegar al extremo de la pizarra) y la otra desde el punto al infinito, habría aquí dos semirrectas.”* [U31]. Finalmente, también posee conocimientos matemáticos sobre los segmentos *“Entonces cogemos dos puntos, uno aquí y otro aquí (...) esto que he cortado yo aquí entre dos puntos es el segmento”* [U40]; *“Pero los dos puntos (...) no están juntitos, tiene que haber punto, punto, punto, porque sino no tenemos segmento, como está llena de puntos, puntos, puntos, cortada por dos puntos que son los extremos”* [U42].

También, dentro de este subdominio, se encuentra el conocimiento del profesor sobre las diferentes maneras en las que puede representar un tema: simbólica, gráfica, verbal, situaciones reales, materiales manipulativos, etc. y las transformaciones entre ellas. En este caso, la maestra demuestra tener conocimiento sobre este aspecto, pues en su clase combina constantemente la representación verbal (todas las definiciones y explicaciones que acabamos de comentar) y la representación gráfica (cuando dibuja en la pizarra una curva, un segmento horizontal, dibuja puntos encima de ese segmento, etc.), además de hacer alusión a alguna situación real, como cuando pone como ejemplo de una recta los cables de la luz que se ven cuando vamos por la carretera [U20], aunque este no es un buen ejemplo. Y todo ello sin perder ni obviar propiedades al pasar de un tipo de representación a otra.



Ilustración 1. Representación de recta según la definición del primer alumno: "una línea".

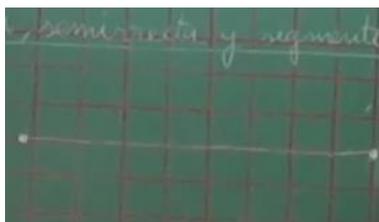


Ilustración 2. Representación de un segmento.

A continuación, nos encontramos con el Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM). Se ve que la maestra sabe que es necesario que los alumnos entiendan primero qué es una recta, para luego entender el concepto de semirrecta y segmento, pues empieza explicando precisamente lo que es una recta. Todo esto supone una secuencia de aprendizaje, ya que la maestra va de lo más general a lo más particular. También, cuando se trata la semirrecta nos encontramos con conocimientos dentro de este subdominio, y es que la docente sabe que los alumnos suelen establecer una conexión transversal entre el concepto de semirrecta y el concepto mitad (dos partes iguales) y por ello insiste en que el punto que divide a la recta en dos semirrectas no tiene que dibujarse obligatoriamente en el centro de la misma. *“Entonces, si tengo otra recta y le hacemos un punto bien aquí (dibuja un segmento horizontal en la pizarra y un punto, más o menos en la mitad), o aquí (borra el punto y luego lo vuelve a pintar en otro lugar, ostensivamente cerca de uno de los extremos de la pizarra) donde quiera. Como es infinita, yo qué sé dónde empieza ni dónde acaba, entonces pues una semirrecta sería desde el punto a este infinito (vuelve a hacer los gestos con las manos al llegar al extremo de la pizarra) y la otra desde el punto al infinito, habría aquí dos semirrectas. Definiríamos un punto y el otro extremo sería el infinito”* [U31]; *“Por eso he puesto yo distintos puntos, me da igual dónde pusiera el punto, porque como va de un punto hasta el infinito...”* [U37].

En tercer y último lugar, dentro del Conocimiento Matemático, nos encontramos con el Conocimiento de las Prácticas Matemáticas (KPM). La profesora demuestra conocimiento de las prácticas matemáticas, concretamente conocimiento sobre el quehacer matemático, pues está trabajando el proceso de definición con los alumnos y parece ser que conoce las condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones. Como indicio de ello tenemos las definiciones a las que ha llegado con sus alumnos y que ya he comentado en la primera categoría de este dominio. *“Bueno. No tiene ni principio ni fin, ni tiene ángulos, ni tiene curvas, eso es una recta”* [U20]; *“La mitad de la recta. Tenemos una recta y la cortamos. Como una recta es infinita, no tiene fin, donde la cortemos... la cortamos y tenemos dos semirrectas”*

[U27]; *“Es el trozo de recta limitado por dos puntos”* [U41]; *“Pero los dos puntos que se tocan, contiguos, no están juntitos, tiene que haber punto, punto, punto, porque sino no tenemos segmento”* [U42].

En cuanto al dominio “Conocimiento Didáctico del Contenido” (PCK), si empezamos por el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), he de decir que, respecto al conocimiento sobre los recursos materiales o virtuales más adecuados para la enseñanza de un contenido en concreto, parece ser que la maestra ve el libro de texto como el recurso más útil a la hora de planificar sus clases y ordenar el contenido, pues constantemente hace referencia al mismo: *“Ahí en el libro lo que han puesto es el nombre del punto, han puesto un puntito y han puesto “punto”. Han puesto “semirrecta””* [U33]; *¿Qué dice el libro, A., por favor?”* [U40]. También hay muestras evidentes de que la docente ve la pizarra tradicional como un medio irremplazable, ya que en él puede representar gráficamente todo aquello que sus alumnos dicen verbalmente, haciéndoles recapacitar y guiar su aprendizaje. Por ejemplo, al principio, lo que hace es representar en la pizarra líneas que cumplen lo que los alumnos dicen, pero que no son realmente una recta, para que así ellos vayan analizando lo que han dicho y dándose cuenta de sus propios fallos, lo cual supone una estrategia por su parte. También dentro de este subdominio tenemos que destacar que la profesora pone un ejemplo para que los alumnos tengan una referencia real de recta y enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje, pero a la hora de verbalizarlo, descubre que puede llevar a confusión a los alumnos, por lo que especifica a qué está haciendo referencia (*“Por ejemplo, cuando vamos por la carretera y vemos los cables de la luz, no los que están así (hace un gesto curvo con la mano) sino los que están más tensos. Los vemos y es una recta que no sabemos dónde empieza ni dónde acaba”* [U20]). Por otra parte, cuando pasan a ver la definición de semirrecta, la maestra hace una representación en la pizarra y pone el punto que divide a la recta primero justo en el medio, pero luego lo modifica y lo pone más cerca de uno de los extremos. *“Entonces, si tengo otra recta y le hacemos un punto bien aquí (dibuja un segmento horizontal en la pizarra y un punto, más o menos en la mitad), o aquí (borra el punto y luego lo vuelve a pintar en otro lugar, ostensivamente cerca de uno de los extremos de la pizarra) donde quiera. Como es infinita, yo qué sé dónde empieza ni dónde acaba, entonces pues una semirrecta sería desde el punto a este infinito (vuelve a hacer los gestos con las manos al llegar al extremo de la pizarra) y la otra desde el punto al infinito, habría aquí dos semirrectas”* [U31]. Produce así una mejor enseñanza de este concepto matemático, pues sabe que de otro modo los alumnos solo creen que la semirrecta es cuando el punto se coloca justo en el medio del trozo de recta que esté representado (conocimiento sobre

la limitación que puede producir la definición que aparece en el libro). Esto está directamente relacionado con la conexión transversal que hemos comentado antes que se produce entre semirrecta y el concepto mitad (dos partes iguales).

Otro subdominio dentro de PCK es el Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM). Respecto a esto, hay indicios de que la maestra sabe, gracias a su experiencia, que el concepto de infinito, al no poder representarse gráficamente (nunca acaba y todo lo que representamos es finito), es especialmente difícil de recordar y comprender para los alumnos, es decir, la propia naturaleza del contenido a aprender genera dificultades en su aprendizaje. Muestra de ello es el hincapié que hace sobre este asunto *“No tiene principio ni fin (amplía el segmento hasta los extremos de la pizarra y hace un gesto con las manos para indicar que seguiría por ambos extremos)”* [U16]; *“Como es infinita, yo qué sé dónde empieza ni dónde acaba, entonces pues una semirrecta sería desde el punto a este infinito (vuelve a hacer los gestos con las manos al llegar al extremo de la pizarra) y la otra desde el punto al infinito, habría aquí dos semirrectas”* [U31]. La maestra también es consciente de que los alumnos presentan dificultades a la hora de aprender conceptos matemáticos únicamente con una definición verbal, por lo que continuamente usa representaciones gráficas y ejemplos para que sus alumnos comprendan (y no solo memoricen) los contenidos. Sin embargo, ha dibujado en la pizarra constantemente las rectas, semirrectas y segmentos de manera horizontal, algo que podría considerarse conocimiento sobre las formas de representar más adecuadas para que los alumnos entiendan los conceptos indicados, pero que, a la larga, puede convertirse en un obstáculo ya que estos podrían no reconocer estos elementos matemáticos cuando estén representados en cualquier otra dirección.



Ilustración 3. Representación de una recta.



Ilustración 4. Representación de un segmento

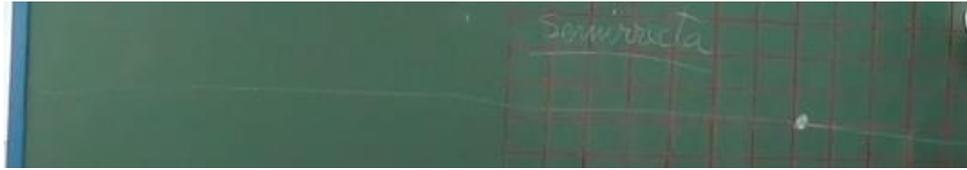


Ilustración 5. Representación de una semirrecta.

También hay que destacar, como último aspecto dentro de este subdominio, algo a lo que ya he hecho referencia, y es el conocimiento sobre la dificultad que puede suponer para los alumnos la definición de semirrecta que aparece en el libro, pues puede llevarles a pensar que el punto que divide a la recta en dos semirrectas debe estar justo en el centro de la misma, siendo esto incorrecto, por eso dibuja ese punto primero en el centro y luego más cerca de uno de los extremos.

Finalmente, tenemos el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS). Sobre este subdominio he de decir que, entre los contenidos que se recogen en la Orden del 17 de marzo de 2015, por el que se desarrolla el currículum de Educación Primaria en Andalucía, hay uno que hace referencia a los elementos, relaciones y clasificación de figuras planas, dentro del cual incluiríamos las rectas, semirrectas y segmentos, pues son elementos formados por puntos del plano. Supongo, por tanto, que la maestra conoce lo que se recoge en el currículum y sabe que debe trabajarlo como introducción a contenidos más complejos; aunque también podría ser que los esté tratando simplemente porque aparecen en el libro de texto. No puedo afirmar ninguna de las dos suposiciones, pues no hay evidencia clara de ello en el vídeo. Respecto a este subdominio, también me gustaría destacar que la maestra continuamente pide a sus alumnos exponer sus ideas para que sean debatidas en el grupo, expliciten sus ideas y esto ayude a que mejore su razonamiento matemático, esto podría ser un indicio del conocimiento que posee la docente sobre los principios y estándares que se recogen en NCTM (2000) y que, como ya he detallado en el marco teórico, recoge que en la etapa en la que se encuentran los alumnos de 5º de Primaria se va a producir un cambio en su razonamiento matemático, para lo cual es muy útil pedirles que continuamente verbalicen sus pensamientos y se establezcan debates en clase.

5.2. Primer análisis de Alicia sobre el vídeo de la maestra.

A continuación, adjunto las observaciones que hizo la EPP la primera vez que vio el vídeo, sin conocer el modelo MTSK, y con las únicas consignas de que apuntara todo aquel conocimiento que ella creía que estaba poniendo en juego la maestra para poder dar esa clase, ya fuera

conocimiento de las matemáticas, de didáctica general, de didáctica de las matemáticas, etc. (Esta información también se ha añadido en el anexo número 4).

- La docente parte de las ideas previas del alumnado. Lo hace a través de preguntas.
- Va completando las aportaciones de unos con otros hasta formar una definición, de esta forma, plantea una metodología en la que el concepto lo van construyendo poco a poco entre todos.
- Proyecta de forma visual (a través de dibujos en la pizarra) lo que el alumnado le va indicando.
- Para completar la definición y que el alumnado tenga una idea más próxima, es decir, que les sea familiar, pone ejemplos reales: “el póster de la luz”.
- Continuamente plantea que plasmen lo que han ido diciendo en el cuaderno, y que añadan un dibujo al lado, para que a la hora de estudiar les sea más fácil. Mientras que van escribiendo en el cuaderno ella repite de nuevo la definición que ha quedado del concepto.
- Se guía por el libro. A la vez que van dando definiciones, la comparan con la del libro.
- Sigue una secuencia así: primero deja que el alumnado diga una definición; después lo explica ella misma junto con ayuda visual (dibujos pizarra); y finalmente lo compara con el libro y hace que el alumnado lo lea de ahí.
- Otros aspectos: utiliza bastante el libro, no emplea material manipulativo y exige que escriban en el cuaderno, para su posterior estudio, todo lo que van diciendo.

Al analizar las observaciones que hace Alicia, detecto conocimientos principalmente sobre didáctica general y conocimientos sobre didáctica de las matemáticas, echando en falta algún que otro comentario sobre las matemáticas como disciplina escolar. No obstante, creo que es un buen análisis o punto de partida si tenemos en cuenta que no conoce el modelo MTSK que he descrito en el marco teórico y que he utilizado yo en mi análisis.

Según ella, para llevar a cabo el fragmento de sesión que aparece en el vídeo, la maestra está movilizand o conocimientos sobre metodología (didáctica general). Alicia detecta que la actuación de la profesora del vídeo se enmarca dentro del constructivismo social, pues dice que los conceptos se van formando poco a poco a través de las aportaciones que hacen los alumnos. Además, Alicia también nos deja indicios de que sabe lo que es el aprendizaje significativo y

cómo puede llevarse a cabo pues, aunque no utiliza explícitamente esta terminología, destaca que la maestra, a través de preguntas, parte de las ideas previa de los alumnos.

También demuestra conocimientos que se situarían dentro del subdominio “Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas”, pues habla de los recursos que utiliza la maestra para desarrollar su clase, que son la pizarra tradicional y el libro de texto. Viendo sus palabras, entiendo que Alicia cree que la profesora proyecta de forma visual en la pizarra lo que los alumnos le van diciendo para que se den cuenta de sus propios fallos, por lo que sería una estrategia que la maestra del vídeo usa a la hora de enseñar esta materia. No obstante, no tengo información suficiente para asegurar al cien por cien esta cuestión, por lo que intentaré obtener esta información en la entrevista posterior. También recojo dentro del Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas el comentario que hace la EPP sobre el ejemplo que se verbaliza en el vídeo en cuestión, pues interpreto que sabe que los ejemplos son una buena forma de que el alumnado entienda mejor un concepto matemático que les puede resultar algo abstracto.

El hecho de que la EPP sea capaz de detectar estos conocimientos en la maestra del vídeo en cuestión, quiere decir que ella también los posee, pues de no ser así no podría detectarlos, no se daría cuenta de todos los detalles comentados. Además, tras realizarle la entrevista, cuya transcripción completa puede verse en el anexo 5 de este trabajo, detecto más conocimientos relacionados con el conocimiento especializado que debe poseer un profesor de matemáticas. Supongo, por tanto, que la EPP posee más conocimientos de los que muestra en su análisis inicial, solo necesita algún estímulo para ponerlos en juego (en este caso el estímulo ha sido la citada entrevista).

5.3. Análisis de la entrevista a la futura maestra.

Después de leer y releer en varias ocasiones la entrevista realizada a Alicia, puedo decir que ha servido para que la EPP movilice más conocimientos especializados sobre las matemáticas y su didáctica. Como ya comenté en la metodología, he tenido en cuenta algunos de los subdominios del modelo MTSK a la hora de realizarle las preguntas para obtener la máxima información posible y facilitar su posterior análisis.

Para seguir un orden lógico, voy a comenzar por los conocimientos propios del dominio “Conocimiento Matemático” (MK). Respecto al *Conocimiento de los Temas (KoT)*, se preguntó a la EPP si la maestra del vídeo estaba de acuerdo con todas las definiciones que aparecen en

el libro (definición de recta, semirrecta y segmento) y si ella misma lo estaba. Ella piensa que la maestra sí que está de acuerdo con el libro [E32], pues siempre asiente cuando los alumnos leen lo que pone en él. Solo detecta una pequeña confusión por parte de la maestra ante la definición que aparece de segmento, pero parece que esta queda conforme cuando un alumno se lo aclara a través de un comentario “*Bueno, lo de los extremos últimos, aunque el niño la ha corregido, ella ha dicho “bueno, extremos, extremos no puede tener”, se ha liado un poco creo yo, porque el niño le ha dicho “no, extremos son los puntos”. Entonces, yo creo que sí, porque siempre asiente, siempre que están leyendo, asiente y dice “sí, sí, es lo que acabamos de decir”, más o menos*” [E32]. La EPP también está de acuerdo con el libro de texto, aunque me asegura que ella, por sí misma, no lo hubiera definido exactamente igual [E34]. Entiendo, por tanto, que Alicia sabe lo que es un segmento, aunque podría presentar dificultades para definirlo. Sin embargo, podemos ver que Alicia no ha detectado que la maestra del vídeo no termina de estar totalmente de acuerdo con la definición de semirrecta que se da en el libro, pues al leerla en voz alta ella obvia que en la semirrecta, un punto divide la recta en dos partes iguales (obvia “dos partes iguales”) porque esto puede llevar a confusión al alumnado y hacerles pensar que el punto debe estar siempre en la mitad del fragmento de recta representado, mientras que, en realidad, cualquier punto de la recta la divide en dos partes iguales llamadas semirrectas. Esto está directamente relacionado con el otro dominio de conocimiento que recoge el modelo MTSK, el Conocimiento Didáctico del Contenido. Al no comentar nada respecto a esto, no puedo saber cómo hubiera definido ella la semirrecta, y si hubiera obviado o no este aspecto.

Respecto al subdominio *Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM)*, se le preguntó a la EPP para qué creía ella que necesitan los estudiantes saber qué es una recta, una semirrecta y un segmento, ante lo que nos respondió: “*Yo también me lo pregunto*” [E40] y se rio, pero luego no nos dijo nada más, por lo que podría ser que la EPP no sepa a ciencia cierta el motivo por el cual los alumnos deben aprender estos contenidos. Además, luego me comentó que ella siempre había echado en falta en las clases de matemáticas que sus profesores les enseñaran la utilidad que tienen los contenidos de esta materia y que eso es algo que ella también ha echado en falta en esta sesión [E42]. Entiendo, por tanto, que el día de mañana ella intentará que los estudiantes relacionen constantemente los contenidos matemáticos con su entorno más próximo, lo comprendan y lo interioricen, para poder así profundizar posteriormente en características de otros objetos matemáticos (polígonos, poliedros...).

Por último, respecto al subdominio *Conocimiento de las Prácticas Matemáticas (KPM)*, sobre el cual le he preguntado a la EPP si la maestra del vídeo tiene claro cómo se hace una definición,

es decir, si sabe qué aspectos son necesarios que aparezcan en una definición para que lo sea. En este caso su respuesta es un poco más incierta, no tiene claro qué contestarme. Aunque al principio me dice que no lo sabe, porque realmente lo único que ha hecho es unir las características que le han ido diciendo los alumnos, posteriormente me dice que cree que la maestra sí sabe cómo hacer las definiciones por el hecho de que le ha dado un orden lógico a todas esas propiedades para formar la definición. Le pregunto, por tanto, si ella piensa que la maestra cree que son necesarios todas esas características o propiedades que le han dicho los alumnos para realizar la definición, a lo que me responde: “*exacto*” [E38], lo cual puede ser un indicio de que sabe cómo se forma una definición, aunque echo en falta algún comentario adicional, pues en 2º curso ya trabajamos que, para dar una definición, es necesario que se den todas las propiedades imprescindibles, sin las cuales el objeto no estaría definido y que el objeto puede tener otras características que no impiden que siga siendo un ejemplo del concepto.

En cuanto al dominio “Conocimiento Didáctico del Contenido” (PCK), en primer lugar, con relación al *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)*, he de decir que es el subdominio sobre el que he realizado más preguntas a Alicia y a través de las cuales he confirmado mis suposiciones sobre su análisis inicial. Ante la pregunta: “¿*Por qué crees tú que la maestra proyecta de forma visual lo que el alumno va diciendo?*” [E21], la EPP responde: “*Para que los niños vayan viendo y corrigiendo... que los alumnos se den cuenta de lo que están diciendo está mal dicho. A pesar de que ellos sepan lo que es... al decirlo tienen que usar las palabras adecuadas*” [E24], es decir, la futura maestra sabe que dibujar en la pizarra lo que los alumnos están verbalizando es una buena estrategia para que detecten sus propios errores, mejoren su forma de expresarse y comunicarse, y mejorar así la enseñanza. Pero es que, además, he detectado nuevos conocimientos dentro de este subdominio, conocimientos que antes no se habían visto movilizados. Por ejemplo, cuando le pregunté por el ejemplo de los cables de la luz que usa la maestra [E9], me dijo que es un ejemplo que podría no servirle a todos los niños, pues puede que alguno de ellos no suela viajar y no tenga la oportunidad de ver los cables de la luz que hay cerca de las autopistas, por lo que ella usaría otros ejemplos que les puedan ser más cercanos y útiles al alumnado (las líneas de una avenida, el horizonte del mar, etc.) [E10, E16]. Si ella estuviera en el lugar de la maestra del vídeo, se preocuparía por llevar a cabo una enseñanza que llegara de igual modo a todos los estudiantes presentes. El tema de los ejemplos está un poco repartido en el modelo. Como puede verse, hay una categoría, la que estamos tratando en este instante, KMT, en la que se habla específicamente sobre los ejemplos. Sin embargo, en esta ocasión, también podría interpretarse, por ejemplo, como Conocimiento de

los Temas (KoT), pues la futura maestra es capaz de dar otros ejemplos válidos sobre el concepto que se está tratando, lo cual puede ser una evidencia de que domina el contenido en cuestión. Por este mismo motivo, por llegar a todos los alumnos de clase, utilizaría otros recursos, además de la pizarra y el libro de texto, pues como sabe que cada alumno aprende de una manera distinta y existen inteligencias múltiples, puede que haya niños y niñas que necesiten materiales manipulables como, por ejemplo, un ovillo de lana para trabajar las rectas: *“Lo malo, entre comillas, es que utiliza demasiado el libro y, a lo mejor, podría haber utilizado un hilo de lana para explicar lo de la recta o lo de los segmentos, así los niños a los que les cuesta un poco más de trabajo o que no estaban prestando mucha atención lo tienen en sus manos y a la hora luego de estudiar o de plasmarlo en una prueba escrita les es más fácil”* [E2]. También se le ha hecho otra pregunta para que reflexione acerca de los dibujos que la maestra hace en la pizarra: *“Y los dibujos que ha hecho, ¿son siempre iguales?”* [E25], ante lo que ella contesta: *“Sí, porque en todo momento ha dibujado líneas, no ha dibujado nada más”* [E26]. Al escuchar su respuesta, le pregunté si pensaba que eso beneficiaba o perjudicaba a los alumnos [E27]. Ante esta pregunta, la EPP recordó algo que tratamos en la asignatura Didáctica de Matemáticas para Maestros: *“Al hacerlo siempre igual, el niño va a tener en mente como que eso es la recta sí o sí. Como lo del cuadrado que nos explicó el profesor, que si tú le pones el cuadrado así (hace con sus manos un gesto con el que pretende representar un cuadrado de base horizontal), cuando lo vea un poquito así (gira sus manos, de manera que ahora su base ya no estaría horizontal), va a decir que es otra cosa, entonces le perjudica en ese sentido. Si ella lo representa siempre así les va a beneficiar, pero en la vida se lo van a encontrar de distintas formas. Y, además, siempre horizontal, porque también lo podría haber puesto vertical, diagonal o de distintas formas”* [E28], por lo tanto, demuestra que sabe que el hecho de representar la recta, semirrecta o segmento siempre de manera horizontal puede suponer un obstáculo ya que pueden no detectarlos en otras posiciones. Entiendo, consecuentemente, que, si la EPP estuviera en el papel de la maestra del vídeo, haría otro tipo de representaciones (verticales, diagonales, etc.), por lo que posee conocimientos sobre las distintas formas de representar un concepto, sus potencialidades y sus limitaciones.

Con relación al subdominio *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)*, dentro del cual quería saber si la entrevistada había detectado algún aspecto que le hiciera pensar que la maestra en activo estaba teniendo en cuenta las posibles dificultades que los alumnos podrían tener a la hora de entender lo que es una recta, una semirrecta y un segmento. Ella me contestó que no, que bajo su punto de vista la maestra

simplemente estaba preocupada en que los alumnos llegaran a una definición común de esos conceptos y no mostraba preocupación hacia aquellos alumnos a los que les costaba más trabajo entenderlo. “Yo creo que no, porque lo deja todo muy “venga qué sabéis” y yo creo que muchos de los niños ni han hablado y otros se han fijado del libro, entonces yo creo que solo quiere que se lo digan, que lo definan, creo eh, desde lo que yo he visto, y ya está. Hace hincapié, pero para aquellos que les cuesta más yo creo que no” [E20]. Hay varios aspectos que echo en falta dentro de este subdominio pues, bajo mi punto de vista, sí que la maestra ha demostrado su preocupación ante posibles dificultades que podrían presentar los alumnos. Por ejemplo, insiste continuamente sobre el concepto infinito, algo muy abstracto para los alumnos de Primaria, por lo que incluso hace gestos con sus manos para expresar que la recta continúa hacia los lados, aunque en la pizarra no pueda representarse. Para finalizar, he de decir que, sobre el subdominio *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)*, tampoco he detectado grandes conocimientos, pues al preguntarle a Alicia para qué cree que necesitan saber los alumnos qué es una recta, una semirrecta y un segmento, no me comenta explícitamente que lo hace porque son contenidos que se recogen en el currículo para 5º de Primaria ni nos habla de la secuenciación de temas, pero sí que piensa la maestra lo trata porque los alumnos deben aprenderlo [E42]. Esto puede ser indicio de que conoce el currículo de Educación Primaria en Andalucía, pero no podemos afirmarlo.

5.4. Segundo análisis de Alicia sobre el vídeo (después de conocer el modelo MTSK).

Tras haber concluido la entrevista, mostré a Alicia la *Figura 3: Subdominios del modelo MTSK*, y le expliqué resumidamente cada uno de los dominios y subdominios de ese modelo. Le proporcioné la tabla adjunta en el anexo 2 y le pedí que volviera a analizar tranquilamente el vídeo y completara la tabla.

En líneas generales, puedo decir que, tras su conocimiento del modelo MTSK, su análisis es más completo, habiendo detectado aspectos que antes había pasado por alto. A continuación, voy a proceder a su análisis, en el mismo orden en que he analizado la entrevista realizada. Empezaré, por tanto, por el dominio “Conocimiento Matemático” (MK), y más concretamente por el *Conocimiento de los Temas (KoT)*. La EPP cree que la maestra del vídeo tiene conocimientos pertenecientes a este subdominio, y establece como indicio o evidencia de ello el hecho de que haga continuamente dibujos en la pizarra y los haga de manera correcta, pues supone una forma gráfica de representar los conceptos que está tratando. Aún así ella nos insiste

en que hubiera utilizado materiales manipulativos. También resalta los ejemplos de situaciones reales que proporciona a los alumnos. Anteriormente, en su análisis inicial, ya había hecho referencia a estos asuntos, la diferencia es que ahora sabe clasificar ese conocimiento, sabiendo así que pertenece al conocimiento de los temas de matemáticas. Respecto a las relaciones que hay entre unos conceptos matemáticos y otros, es decir, al *Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM)*, la EPP no destacó nada en su análisis inicial. En la entrevista le pregunté por qué pensaba ella que la maestra estaba tratando estos temas, con el objetivo de que me dijera algún contenido que se base en estos conceptos, o algún otro concepto previo que deban comprender los alumnos para asimilar el concepto de recta, semirrecta y segmento. Sin embargo, no obtuve información de este tipo, pues la entrevistada fue por otro camino. Después de darle a conocer este modelo de análisis de conocimiento matemático, sí que nos comenta que, aunque no encuentra referencia clara en el vídeo, supone que estos contenidos los trata la docente para crear una base para posteriores aprendizajes como, por ejemplo, los polígonos. Aunque también podría ser también que, como aparece en el libro de texto, se vea obligada a darlo. Nos demuestra aquí la EPP que sabe que en matemáticas hay unos conocimientos que se sustentan sobre otros, de ahí la importancia de tratar progresivamente, de menos a más complejidad, los contenidos en esta asignatura. Como muestra de todo ello destaca, en la tabla añadida en el anexo 6, el momento en el que un alumno dice que una recta es una línea que no tiene ni curvas ni ángulos, haciendo referencia a U5, pues para afirmar esto tiene que haber aprendido previamente qué es una curva y qué es un ángulo.

En cuanto al *Conocimiento de las Prácticas Matemáticas (KPM)*, simplemente destaca las representaciones que hace la maestra en la pizarra, algo que ya había comentado en la entrevista y que nosotros habíamos interpretado como Conocimiento de la Enseñanza Matemática, pues parecía que la estudiante destacaba los dibujos que la profesora hacía en la pizarra como un método o estrategia para que los alumnos recapitaran sobre sus propias palabras y mejorar así el proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, en esta ocasión, la EPP ha incorporado este aspecto al subdominio Conocimiento de las Prácticas Matemáticas pues, tal y como ella indica de manera muy acertada, lo que hace la profesora del vídeo es poner contraejemplos con la intención de que los alumnos recapiten sobre sus propias palabras. Se demuestra, por tanto, que Alicia sabe qué es un ejemplo y qué es un contraejemplo, así como sus funcionalidades.

Por otra parte, con relación al “Conocimiento Didáctico del Contenido” (PCK), respecto al subdominio *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)*, no hay nada nuevo que decir, pues se trató en mayor profundidad que el resto en su análisis inicial y en la entrevista

posterior. La EPP destaca nuevamente en este apartado el hecho de que la maestra realice dibujos en la pizarra, algo que ayuda a la comprensión de los conceptos por parte de los alumnos; el hecho de que continuamente realice preguntas a los alumnos para detectar las ideas previas de los mismos y creen una definición conjuntamente; y, finalmente, el hecho de que le pida continuamente a los discentes que escriban en su cuaderno las conclusiones a las que van llegando.

En cuanto al *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)*, simplemente destaca algo que también he comentado con anterioridad, en la entrevista, y es que la maestra representa siempre los dibujos de la misma forma (siguiendo una misma dirección, en horizontal). La EPP cree que esto supone un obstáculo en el pensamiento matemático de los alumnos, pues en ningún momento la docente interrumpe para aclarar que las rectas las pueden estar representadas en cualquier dirección (vertical, oblicua, además de horizontal), lo que puede ocasionar que, cuando los alumnos se encuentren una recta dispuesta en otra dirección, tengan dificultad para identificarla y relacionarla con todo lo visto en clase. Ante este comentario, interpreto que la futura maestra tiene conocimientos sobre cómo aprenden los alumnos de primaria, y sabe que pueden asociar los conceptos a un tipo de representación concreta y presentar dificultades cuando estos cambian de dirección o sentido. Aunque cuando he analizado la entrevista con Alicia yo he incluido esta cuestión en el subdominio anterior, también se podría, tal y como ha hecho la EPP, incluir en este subdominio, pues ambos van de la mano: los profesores enseñan en función de cómo aprenden los alumnos y los alumnos aprenden según les enseñan sus profesores.

Finalmente, Alicia no destaca nada en el subdominio de *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)*, algo muy entendible, pues el vídeo analizado es corto, a penas dura unos minutos, y todo lo que se pudiera decir en este apartado serían meras especulaciones. Esto se ve favorecido porque, además, es muy probable que la EPP no recuerde los “Principios y Estándares para la educación matemática”, pues se estudió muy brevemente en la asignatura cursada en el 2º curso.

6. CONCLUSIONES

Tras haber finalizado la investigación llevada a cabo en este TFG, puedo decir que estoy muy satisfecha con el resultado obtenido, pues la información recogida en el marco teórico ha sido de gran utilidad, los objetivos se han cumplido en su totalidad y la metodología usada para ello ha demostrado ser eficaz ya que me ha permitido recoger toda la información necesaria.

Dando respuesta a la pregunta de investigación planteada, “¿Posee una futura maestra los conocimientos adecuados y necesarios para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos matemáticos de manera satisfactoria?”, puedo decir, en líneas generales, que la EPP seleccionada es capaz de identificar el conocimiento especializado necesario para dar clase, por lo que podría estar preparada para dar clase en un aula de Primaria. No obstante, esto último no puedo asegurarlo, para ello haría falta otra investigación en la que se observara y analizara a Alicia dando clase a un grupo de alumnos de esta etapa educativa. Obviamente, sus respuestas pueden ser diferentes a las que podríamos esperar de un docente en activo, pues la experiencia te da unos conocimientos que, personalmente, considero irremplazables. A pesar de ello, ha identificado conocimientos de casi todos los subdominios recogidos en el modelo MTSK, a pesar de haber analizado un vídeo muy breve. Además, ha dado muestra de su conocimiento especializado a la hora de hacer propuestas alternativas. El subdominio en el que no ha mostrado explícitamente conocimientos es el KMLS, *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas*. Por una parte, esto puede ser entendible, pues en este apartado se recoge información de estándares definidos por grupos de investigación o profesionales de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como, por ejemplo, el NCTM (2000), algo que no tuvimos la oportunidad de estudiar en profundidad en clase, simplemente se nombró en alguna ocasión, al igual que otros documentos curriculares. Pero, por otra parte, sí que podría haber añadido algún tipo de información relativa al currículo y no lo ha hecho.

En cuanto a los objetivos planteados, he de decir que se han cumplido de manera satisfactoria. En primer lugar, he podido analizar cuáles son los contenidos de geometría que se trabajan en el tercer ciclo de Educación Primaria en Andalucía, acudiendo a la Orden del 17 de marzo de 2015. Esto es fundamental, ya que es lo que me ha permitido saber si la maestra del vídeo está tratando contenidos curriculares del nivel en el que nos encontramos o está tratando contenidos extracurriculares. En este caso, se estaban tratando contenidos curriculares, concretamente se el contenido 4.7. *Figuras planas: elementos, relaciones y clasificación* (Orden 17 marzo 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía, p. 405).

Por otra parte, la elaboración del marco teórico de esta investigación también me ha permitido estudiar cuáles son los principios y estándares para la Educación Matemática establecidos por NCTM (2000). Personalmente, considero que toda persona que se vaya a decidir a enseñar matemáticas, en cualquier nivel educativo, pero sobre todo en Educación Primaria, debería conocer este libro, pues proporciona información y consejos muy útiles que pueden ser de gran ayuda para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje y conseguir que el alumnado vea la utilidad y la importancia de las matemáticas en su vida. Además, todo ello basado en la evidencia y en experiencias reales en el aula. En cuanto al tercer objetivo propuesto, gracias a esta investigación he tenido la oportunidad de conocer el modelo MTSK, “*The Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge*”, traducido al español como “Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas”, creado por los miembros del SIDM (Carrillo et. al, 2018). Además de conocerlo, también he podido comprobar por mí misma su utilidad, pues he descubierto cómo, tras conocer este modelo, la EPP moviliza más conocimientos sobre las matemáticas y su didáctica, a pesar de no haber aumentado los mismos. El objetivo “Diseñar una herramienta que nos permita analizar el conocimiento matemático de futuros maestros” también se ha cumplido satisfactoriamente. Por una parte, he creado una entrevista para realizar a la EPP con la que he obtenido información valiosa para analizar los conocimientos especializados de un profesor de matemáticas que posee, planteando preguntas relativas a algunos de los subdominios del modelo MTSK, algo que también me ha facilitado mucho el posterior análisis de las respuestas. Por otra parte, he utilizado la tabla creada por algunos de los miembros del SIDM (anexo 2), que permite a aquellas personas que están analizando una clase de matemáticas, ya sea en directo, a través de vídeos o a través de transcripciones, clasifiquen fácilmente los conocimientos detectados en cada uno de los subdominios del modelo en el que nos hemos centrado.

Este trabajo me ha servido para reforzar, una vez más, mi idea de que para ser profesor/a de matemáticas es necesario tener una buena formación, ganas de aprender e interés, pues a través del modelo MTSK hemos comprobado todos los ámbitos en los que un profesor de matemáticas debe demostrar conocimientos y he de decir que no son pocos. Obviamente, nuestra formación universitaria es una base fundamental para llevar a cabo un buen proceso de enseñanza-aprendizaje con alumnos de Educación Primaria, pero creo que no deberíamos conformarnos y deberíamos seguir formándonos en nuestro día a día ya que en las asignaturas cursadas no da tiempo a ver y aprender todos los conocimientos que aportan las investigaciones matemáticas y didácticas de esta materia.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5). DOI: [10.1177/0022487108324554](https://doi.org/10.1177/0022487108324554)
- Barrera-Castarnado, V.J. y Liñán-García, M.M. (2020). El conocimiento especializado en matemáticas en las tareas formativas para la formación inicial de profesores de Educación Primaria. En Romero, J.M., Ramos, M., Rodríguez, C. y Sola, J.M. (Eds.) *Escenarios educativos investigadores: hacia una educación sostenible* (pp. 934-946). Dykinson.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, R., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20:3, 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo, J. y Climent, N. (2009). From Professional Tasks in Collaborative Environments to Educational Tasks in Mathematics Teacher Education. *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education*, 215-234. DOI: [10.1007/978-0-387-09669-8_15](https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8_15)
- Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Montes, M.A., Escudero-Ávila, D. y Flores-Medrano, E. (2016). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros de Educación Primaria*. Paraninfo.
- Climent, N., Montes, M.A., Contreras, L.C., Carrillo, J., Liñán-García, M.M., Muñoz-Catalán, M., Barrera-Castarnado, V.J. y León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las matemáticas a través del análisis de videos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 9, 85 -103.
- Coller, X. (2005). *Cuadernos metodológicos: Estudio de casos*. CIS: Centro de Investigaciones Sociológicas.
- González-Monteagudo, J. (2001). El paradigma interpretativo en la investigación social y educativa: nuevas respuestas para viejos interrogantes. *Cuestiones pedagógicas*, 15, 227-246.

- Leal, A. (2014). El Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC): Una herramienta que contribuye en la configuración de la identidad profesional del profesor. *Magistro*, 8(15), 89-110. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5023852>
- Liñán-García, M. (2017). *Conocimiento especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria*. (Tesis doctoral, Universidad de Huelva). http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/14230/Conocimiento_especializado_en_geometria.pdf?sequence=15
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum.
- Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En Berciano Alcaraz, A., Gutiérrez Pereda, G., Climent Rodríguez, N. & Estepa Castro, A. *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 404-410). Universidad del País Vasco.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Traducción SAEM Thales (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: SAEM Thales.
- Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (BOJA)*, 60, del 27 de marzo de 2015.
- Pinto, J. E. y González, M. T. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación Matemática*, 20(3), 83-100. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262008000300005
- Sánchez, V. y García, M. (2009). Tasks for Primary Student Teachers: A Task of Mathematics Teacher Educators. *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education*, 37-49. DOI: [10.1007/978-0-387-09669-8_4](https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8_4)
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15, 4-14. <https://www.jstor.org/stable/1175860?seq=1>
- Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. En N.K. Denzin y Y.S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research. Third edition* (pp. 443-166). Thousand Oaks: Sage Publications.

8. ANEXOS

ANEXO 1: Transcripción del vídeo de la maestra dando clase.

1. M. A ver quién sabe decirme qué es una recta.
2. A. Una línea
3. A. Recta. Una línea recta.
4. M. Una línea (dibuja en la pizarra una curva)
5. A. No, una línea recta. Es algo recto. Una línea es una línea que no tiene ni curvas ni ángulos.
6. M. Ya va diciéndome algo. Una línea que no tiene ni curvas ni ángulos (dibuja segmento horizontal) ¿Qué más, A?
7. A. Tiene puntos
8. M. Todas las líneas están formadas por puntos. (Dibuja puntos encima del segmento anterior mientras lo dice).
9. A. Dos puntos
10. M. ¿Dos puntos?
11. A. Al final de la línea
12. M. (pone dos puntos, uno al inicio y otro al final, como se lo indica el alumno)
13. A. Nooo, pero entonces se acaba. Eso no es una línea, es un segmento.
14. M. Entonces... Estamos hablando de la recta, en un principio. Esto no es (borra los puntos marcados) Entonces, A.
15. A. No tiene ni principio ni fin
16. M. No tiene principio ni fin (amplía el segmento hasta los extremos de la pizarra y hace un gesto con las manos para indicar que seguiría por ambos extremos).
17. A. Es infinita... Te ha salido con un poquito de curva, seño.
18. M. Sí, me ha salido con un poco de barriguita (corrige el dibujo en una zona en la que se hace ostensible que “no es recta”)
19. A. Bueno, da igual. Está gorda la línea
20. M. Bueno. No tiene ni principio ni fin, ni tiene ángulos, ni tiene curvas, eso es una recta. No sabemos ni dónde empieza ni dónde acaba. Por ejemplo, cuando vamos por la carretera y vemos los cables de la luz, no los que están así (hace un gesto curvo con la mano) sino los que están más tensos. Los vemos y es una recta que no sabemos dónde empieza ni dónde acaba.
21. A. La carretera también

22. M. Si no tienen curvas. Si tienen curvas... Claro, si tienen curvas ya no es una recta. Si son rectas, rectas, también.
23. A. Una rotonda ya no vale.
24. M. Una rotonda por supuesto que no. Bueno, pues vamos a poner en el cuaderno: recta, hacemos una y ponemos las características: es una línea de puntos, claro, es que todas las líneas están formadas por puntos, es una línea de puntos que no tiene ni principio ni fin y además no tiene líneas curvas ni ángulos. Y la dibujamos.
25. M. Ahora vamos a ver lo que es una semirrecta.
26. A. Media recta. La mitad
27. M. La mitad de la recta. Tenemos una recta y la cortamos. Como una recta es infinita, no tiene fin, donde la cortemos... la cortamos y tenemos dos semirrectas. Voy a poner la palabra semirrecta para que os fijéis que lleva dos erres. Bueno, entonces, según esto, S., ¿Qué será una semirrecta?
28. A. Un punto que divide a la recta en dos partes iguales
29. M. Bien.
30. A. Es lo que dice el libro.
31. M. Sí, lo ha leído muy bien. Entonces, si tengo otra recta y le hacemos un punto bien aquí (dibuja un segmento horizontal en la pizarra y un punto, más o menos en la mitad), o aquí (borra el punto y luego lo vuelve a pintar en otro lugar, ostensivamente cerca de uno de los extremos de la pizarra) donde quiera. Como es infinita, yo qué sé dónde empieza ni dónde acaba, entonces pues una semirrecta sería desde el punto a este infinito (vuelve a hacer los gestos con las manos al llegar al extremo de la pizarra) y la otra desde el punto al infinito, habría aquí dos semirrectas. Definiríamos un punto y el otro extremo sería el infinito.
32. Nota: el libro dice, en la definición de semirrecta: “un punto divide a una recta en dos partes iguales, llamadas semirrectas, con principio, pero si fin”, y la maestra la lee. Obvia, al volver a dibujarla en la pizarra la afirmación “dos partes iguales”.
33. M. Ahí en el libro lo que han puesto es el nombre del punto, han puesto un puntito y han puesto “punto” Han puesto “semirrecta” Quiere decir que la han dividido en dos. Y aquí lo mismo, “semirrecta” (escribe los tres conceptos en la pizarra, señalando la parte del dibujo que los representa) Algunos creen que la semirrecta nada más que es una... hay dos. Un punto divide una recta en dos mitades. Lo dibujamos.
34. A. Pero una es más larga que la otra, ¿no, seño? Una es más larga que otra.

35. M. ¿Cómo?
36. A. Que una es más larga que otra
37. M. Bueno, es que son infinitas, y el infinito...Puede ser el mismo centro. Si es infinito es que no se termina nunca. Por eso he puesto yo distintos puntos, me da igual dónde pusiera el punto, porque como va de un punto hasta el infinito...
38. M. Tenemos la recta, semirrecta y ahora vamos a ver el segmento. F., ¿qué es un segmento?
39. A. Es el trozo de recta limitado por dos puntos.
40. M. Pues ahora tenemos el segmento, igual que antes tenemos la recta, la madre de todas (dibuja en la pizarra un segmento de extremo a extremo de la pizarra y señala dos puntos de la misma). Entonces cogemos dos puntos, uno aquí y otro aquí, por qué no, pues esto que he cortado yo aquí entre dos puntos es el segmento. ¿Qué dice el libro, A., por favor?
41. A. Es un trozo de recta delimitada por dos puntos.
42. M. Pero los dos puntos que se tocan, contiguos, no están juntitos, tiene que haber punto, punto, punto, porque sino no tenemos segmento, como está llena de puntos, puntos, puntos, cortada por dos puntos que son los extremos. Yo lo de los extremos no lo entiendo, porque ¿tiene que ser aquí y allí? (señala dos puntos extremos de la pizarra), no, como es infinito, pues puede ser donde quiera. Esto se llama segmento.
43. A. Los puntos se llaman extremos.
44. Los puntos que hemos hecho se llaman extremos. (Escribe la palabra “extremo” en cada uno de los puntos que ha dibujado en la recta y que delimitan el segmento) han delimitado la recta infinita, cortada dos veces, entonces sale un segmento. Esto es facilísimo, vamos.

ANEXO 2: Tabla 1. Tabla sobre el modelo MTSK para el análisis del vídeo (Carrillo et al., 2016, pp.331-332).

Aspectos a observar	Lo que observo	Lo que interpreto
Conocimiento matemático (MK)		
<p style="text-align: center;">Conocimiento de los temas (KoT)</p> <p>Conocimiento de los conceptos, procesos y procedimientos matemáticos en sí mismos. Definiciones, propiedades y sus fundamentos. Conexiones intraconceptuales. Conocimientos del profesor sobre los fenómenos relacionados con un tema que pueden generar conocimiento matemático y los usos y aplicaciones del mismo. Conocimiento del profesor sobre las diferentes maneras en las que puede representar un tema: simbólica, gráfica, verbal, situaciones reales, materiales manipulativos, etc. y las transformaciones entre ellas, así como la notación y vocabulario asociado.</p>		
<p style="text-align: center;">Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)</p> <p>Conexiones interconceptuales, referidas al conocimiento del profesor sobre las relaciones entre distintos contenidos, ya sean del curso corriente, anteriores o posteriores, teniendo en cuenta la temporalidad y la interconceptualidad.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Conexiones de complejización: relacionar contenidos actuales con otros que formarán parte de momentos posteriores en la formación académica. - Conexiones de simplificación: relacionar contenidos actuales con otros que ya formaron parte de la formación académica. - Conexiones transversales: aquellas existentes entre contenidos diferentes que tienen cualidades en común. - Conexiones auxiliares: se establecen entre aquellos conocimientos que se relacionan entre sí como apoyo para un fin. 		
<p style="text-align: center;">Conocimiento de la práctica matemática (KPM)</p> <p>Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos. Formas de validación y demostración, contendría el conocimiento sobre las diferentes maneras de validar y demostrar, como los procesos abductivos, inductivos y deductivos, incluso la comprobación a través de la ejemplificación como paso previo a la demostración, al igual que la denominación. Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal. Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas. Prácticas particulares del quehacer matemático, incluye actividades matemáticas como la modelación o la algoritmización. Conocimiento de las condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones, indica el conocimiento de un maestro sobre lo necesario para que una definición lo sea.</p>		

Conocimiento didáctico del contenido (PCK)		
Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)		
Dentro de este subdominio, tenemos el conocimiento sobre las teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático, que pueden ser personales o formales, y que un maestro puede adquirir a través de su propia observación y experiencia o bien a través de investigaciones publicadas. También se encuadra aquí el conocimiento sobre los recursos materiales o virtuales más adecuados para la enseñanza de un contenido concreto. Por otra parte, tenemos el conocimiento que el profesor tiene sobre la potencialidad y limitación de las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos que puede poner en práctica con los medios de los que dispone.		
Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)		
Considera el conocimiento de aspectos relacionados con el aprendizaje de sus estudiantes. Primero nos encontramos con el conocimiento del profesor sobre las formas de aprender el contenido matemático de sus alumnos, que incluyen teorías sobre el desarrollo cognitivo para las matemáticas. Luego tenemos un conocimiento sobre los errores, obstáculos y dificultades en el pensamiento matemático, ya sea por la naturaleza del contenido a aprender o por errores de tipo didáctico (relacionados con una enseñanza no correcta). Igualmente, nos encontramos aquí con el conocimiento sobre las fortalezas que tiene el grupo de estudiantes ante un determinado tema. También tiene cabida en este apartado el conocimiento sobre las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático, es decir, los procedimientos o estrategias que sus alumnos suelen poner en práctica ante un tipo de ejercicio determinado, el lenguaje y las representaciones que suelen usar, etc. Finalmente, este subdominio recoge el conocimiento sobre los intereses y expectativas de los estudiantes con respecto a las matemáticas.		
Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)		
Incluimos aquí el conocimiento del currículo y de otros estándares definidos por grupos de investigación o asociaciones profesionales de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como el NCTM: National Council of Teachers of Mathematics. Distinguimos aquí tres categorías: las expectativas de aprendizaje (conocimiento de lo que tiene que aprender un estudiante en un curso determinado), el nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar y la secuenciación con temas anteriores y posteriores a un determinado momento escolar, desde un punto de vista temporal y no conceptual.		

ANEXO 3: Tabla 2. Tabla sobre el modelo MTSK para el análisis del vídeo completada por mí.

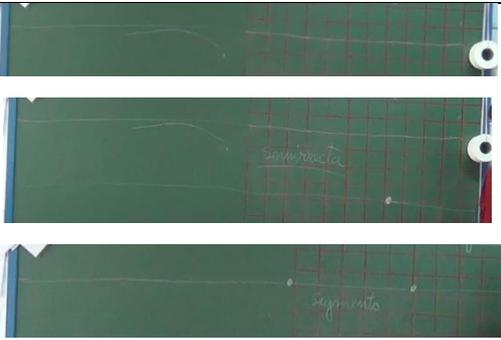
Aspectos a observar	Lo que observo	Lo que interpreto
<p>Conocimiento matemático (MK)</p>		
<p>Conocimiento de los temas (KoT)</p> <p>Conocimiento de los conceptos, procesos y procedimientos matemáticos en sí mismos. Definiciones, propiedades y sus fundamentos. Conexiones intraconceptuales. Conocimientos del profesor sobre los fenómenos relacionados con un tema que pueden generar conocimiento matemático y los usos y aplicaciones del mismo. Conocimiento del profesor sobre las diferentes maneras en las que puede representar un tema: simbólica, gráfica, verbal, situaciones reales, materiales manipulativos, etc. y las transformaciones entre ellas, así como la notación y vocabulario asociado.</p>	<p><i>“Ya va diciéndome algo. Una línea que no tiene ni curvas ni ángulos”; “Todas las líneas están formadas por puntos”; “No tiene principio ni fin”; “Bueno. No tiene ni principio ni fin, ni tiene ángulos, ni tiene curvas, eso es una recta. No sabemos ni dónde empieza ni dónde acaba”</i></p> <p><i>“La mitad de la recta. Tenemos una recta y la cortamos. Como una recta es infinita, no tiene fin, donde la cortemos... la cortamos y tenemos dos semirrectas”; “Entonces, si tengo otra recta y le hacemos un punto bien aquí (dibuja un segmento horizontal en la pizarra y un punto, más o menos en la mitad), o aquí (borra el punto y luego lo vuelve a pintar en otro lugar, ostensivamente cerca de uno de los extremos de la pizarra) donde quiera. Como es infinita, yo qué sé dónde empieza ni dónde acaba, entonces pues una semirrecta sería desde el punto a este infinito (vuelve a hacer los gestos con las manos al llegar al extremo de la pizarra) y la otra desde el punto al infinito, habría aquí dos semirrectas. Definiríamos un punto y el otro extremo sería el infinito”; ““Un punto divide una recta en dos mitades”.</i></p> <p><i>“Entonces cogemos dos puntos, uno aquí y otro aquí, por qué no, pues esto que he cortado yo aquí entre dos puntos es el segmento”; “Pero los dos puntos que se tocan, contiguos, no están juntitos, tiene que haber punto, punto, punto, porque sino no tenemos segmento, como está llena de puntos, puntos, puntos, cortada por dos puntos que son los extremos. Yo lo de los extremos no lo entiendo, porque ¿tiene que ser aquí y allí? (señala dos puntos extremos de la pizarra), no, como es</i></p>	<p>Se nota que la maestra sabe qué es una recta, una semirrecta y un segmento (definiciones y propiedades) en una profundidad mayor a la que tienen que aprenderlo los alumnos por sus propios comentarios y por cómo reacciona ante los comentarios de los alumnos. Sin embargo, cuando están definiendo la recta, realmente la profesora no es la que les da a los alumnos la definición, pero cuando uno de los alumnos le dice que es una línea que no tiene ni curvas ni ángulos después de que otro le dijera simplemente que era una línea, ella dice “ya va diciéndome algo”, lo que es un indicio de que conoce las propiedades de la recta y, por tanto, que ya han dicho algunas, pero faltan otras por aparecer.</p>

	<p><i>infinito, pues puede ser donde quiera. Esto se llama segmento”; “Los puntos que hemos hecho se llaman extremos”.</i></p> <p>Representaciones verbales: todas las que acabamos de añadir en el cuadrante anterior.</p> <p>Representaciones gráficas: (dibuja en la pizarra una curva), (dibuja segmento horizontal), (dibuja puntos encima del segmento anterior mientras lo dice), (pone dos puntos, uno al inicio y otro al final, como se lo indica el alumno), (amplía el segmento hasta los extremos de la pizarra y hace un gesto con las manos para indicar que seguiría por ambos extremos), (dibuja un segmento horizontal en la pizarra y un punto, más o menos en la mitad), (borra el punto y luego lo vuelve a pintar en otro lugar, ostensivamente cerca de uno de los extremos de la pizarra), (vuelve a hacer los gestos con las manos al llegar al extremo de la pizarra), todas (dibuja en la pizarra un segmento de extremo a extremo de la pizarra y señala dos puntos de la misma).</p> <p>Situación real: <i>“Por ejemplo, cuando vamos por la carretera y vemos los cables de la luz, no los que están así (hace un gesto curvo con la mano) sino los que están más tensos. Los vemos y es una recta que no sabemos dónde empieza ni dónde acaba”.</i></p>	<p>La profesora tiene conocimientos sobre las distintas maneras en las que se puede representar los conceptos que se están tratando. En su clase utiliza sobre todo la representación verbal y la representación gráfica, aunque también hace alusión a alguna situación real. Además, sabe cómo pasar perfectamente de unas a otras sin perder propiedades.</p>
<p>Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)</p> <p>Conexiones interconceptuales, referidas al conocimiento del profesor sobre las relaciones entre distintos contenidos, ya sean del curso corriente, anteriores o posteriores, teniendo en cuenta la temporalidad y la interconceptualidad.</p>	<p>Empieza (“A ver quién sabe decirme qué es una recta”), continúa (“Ahora vamos a ver lo que es una semirrecta”) y finalmente (“Tenemos la recta, semirrecta y ahora vamos a ver el segmento. F., ¿qué es un segmento?”).</p>	<p>Se ve que la maestra sabe que es necesario que los alumnos entiendan primero qué es una recta, para luego entender el concepto de semirrecta y segmento, pues empieza explicando precisamente lo que es una recta. Todo esto supone una secuencia de aprendizaje, la maestra va de lo más general a lo más particular.</p>

<ul style="list-style-type: none"> - Conexiones de complejización: relacionar contenidos actuales con otros que formarán parte de momentos posteriores en la formación académica. - Conexiones de simplificación: relacionar contenidos actuales con otros que ya formaron parte de la formación académica. - Conexiones transversales: aquellas existentes entre contenidos diferentes que tienen cualidades en común. - Conexiones auxiliares: se establecen entre aquellos conocimientos que se relacionan entre sí como apoyo para un fin. 	<p><i>“Entonces, si tengo otra recta y le hacemos un punto bien aquí (dibuja un segmento horizontal en la pizarra y un punto, más o menos en la mitad), o aquí (borra el punto y luego lo vuelve a pintar en otro lugar, ostensivamente cerca de uno de los extremos de la pizarra) donde quiera. Como es infinita, yo qué sé dónde empieza ni dónde acaba, entonces pues una semirrecta sería desde el punto a este infinito (vuelve a hacer los gestos con las manos al llegar al extremo de la pizarra) y la otra desde el punto al infinito, habría aquí dos semirrectas. Definiríamos un punto y el otro extremo sería el infinito”;</i> <i>“Bueno, es que son infinitas, y el infinito...Puede ser el mismo centro. Si es infinito es que no se termina nunca. Por eso he puesto yo distintos puntos, me da igual dónde pusiera el punto, porque como va de un punto hasta el infinito...”.</i></p>	<p>También podemos apreciar la relación que se establece entre semirrecta y el concepto mitad (dos partes iguales), lo que supone una conexión transversal. La profesora sabe esto y por eso insiste en que el punto que divide a la recta en dos semirrectas no tiene que dibujarse obligatoriamente en el centro.</p>
<p style="text-align: center;">Conocimiento de la práctica matemática (KPM)</p> <p>Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos. Formas de validación y demostración, contendría el conocimiento sobre las diferentes maneras de validar y demostrar, como los procesos abductivos, inductivos y deductivos, incluso la comprobación a través de la ejemplificación como paso previo a la demostración, al igual que la denominación. Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal. Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas. Prácticas particulares del quehacer matemático, incluye actividades matemáticas como la modelación o la algoritmización. Conocimiento de las</p>	<p><i>“Bueno. No tiene ni principio ni fin, ni tiene ángulos, ni tiene curvas, eso es una recta”;</i> <i>“La mitad de la recta. Tenemos una recta y la cortamos. Como una recta es infinita, no tiene fin, donde la cortemos... la cortamos y tenemos dos semirrectas”;</i> <i>“Es el trozo de recta limitado por dos puntos... Pero los dos puntos que se tocan, contiguos, no están juntitos, tiene que haber punto, punto, punto, porque sino no tenemos segmento”.</i></p>	<p>La profesora demuestra conocimiento de la práctica matemática, concretamente conocimiento sobre el quehacer matemático, pues está trabajando el proceso de definición con los alumnos y parece ser que conoce las condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones. Como indicio de ello tenemos las definiciones a las que ha llegado con sus alumnos y que acabamos de mostrar en el anterior cuadrante.</p>

<p>condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones, indica el conocimiento de un maestro sobre lo necesario para que una definición lo sea.</p>		
<p>Conocimiento didáctico del contenido (PCK)</p>		
<p>Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)</p> <p>Dentro de este subdominio, tenemos el conocimiento sobre las teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático, que pueden ser personales o formales, y que un maestro puede adquirir a través de su propia observación y experiencia o bien a través de investigaciones publicadas. También se encuadra aquí el conocimiento sobre los recursos materiales o virtuales más adecuados para la enseñanza de un contenido concreto. Por otra parte, tenemos el conocimiento que el profesor tiene sobre la potencialidad y limitación de las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos que puede poner en práctica con los medios de los que dispone.</p>	<p><i>(Dibuja en la pizarra una curva), (Dibuja segmento horizontal), (Dibuja puntos encima del segmento anterior mientras lo dice), (Amplía el segmento hasta los extremos de la pizarra y hace un gesto con las manos para indicar que seguiría por ambos extremos), (Dibuja un segmento horizontal en la pizarra y un punto, más o menos en la mitad), (Dibuja en la pizarra un segmento de extremo a extremo de la pizarra y señala dos puntos de la misma), (Señala dos puntos extremos de la pizarra).</i></p> <p><i>Aquí en el libro lo que han puesto es el nombre del punto, han puesto un puntito y han puesto “punto”; “Han puesto “semirrecta””; ¿Qué dice el libro, A., por favor?”.</i></p> <p><i>“Por ejemplo, cuando vamos por la carretera y vemos los cables de la luz, no los que están así (hace un gesto curvo con la mano) sino los que están más tensos. Los vemos y es una recta que no sabemos dónde empieza ni dónde acaba”.</i></p>	<p>Los recursos que utiliza son la pizarra tradicional y el libro de texto básicamente, lo que me hace pensar que la maestra ve el libro de texto como el recurso más útil a la hora de planificar sus clases, ordenar el contenido, etc. (algo con lo que estoy de acuerdo ya que creo que, aunque no debe ser el único recurso en el que nos basemos, creo que si es un material con una gran potencialidad, de ahí que se hayan usado durante muchísimos años y se siga utilizando hoy en día a pesar de haber ido surgiendo muchos otros). En cuanto a la pizarra, supongo que la profesora lo ve como un medio irremplazable ya que en él puede representar gráficamente todo aquello que sus alumnos dicen verbalmente, haciéndoles recapacitar y guiar su aprendizaje. Al principio lo que hace es representar en la pizarra líneas que cumplen lo que los alumnos dicen, pero que no son realmente una recta, para que así ellos vayan analizando lo que han dicho y dándose cuenta de sus propios fallos, lo cual supone una estrategia por parte de la maestra.</p> <p>La profesora pone un ejemplo para que los alumnos tengan una referencia real de recta y enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje, pero a la hora de verbalizarlo, descubre que puede llevar a confusión a los alumnos, por lo que especifica a qué está haciendo referencia.</p>

	<p><i>“Entonces, si tengo otra recta y le hacemos un punto bien aquí (dibuja un segmento horizontal en la pizarra y un punto, más o menos en la mitad), o aquí (borra el punto y luego lo vuelve a pintar en otro lugar, ostensivamente cerca de uno de los extremos de la pizarra) donde quiera. Como es infinita, yo qué sé dónde empieza ni dónde acaba, entonces pues una semirrecta sería desde el punto a este infinito (vuelve a hacer los gestos con las manos al llegar al extremo de la pizarra) y la otra desde el punto al infinito, habría aquí dos semirrectas. Definiríamos un punto y el otro extremo sería el infinito”.</i></p>	<p>Cuando pasan a ver la definición de semirrecta, la maestra hace una representación en la pizarra y pone el punto que divide a la recta primero justo en el medio, pero luego lo modifica y lo pone más cerca de uno de los extremos. Produce así una mejor enseñanza de este concepto matemático, pues sabe que de otro modo los alumnos solo creen que la semirrecta es cuando el punto se coloca justo en el medio del trozo de recta que esté representado (conocimiento sobre la limitación que puede producir la definición que aparece en el libro).</p>
<p>Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)</p> <p>Considera el conocimiento de aspectos relacionados con el aprendizaje de sus estudiantes. Primero nos encontramos con el conocimiento del profesor sobre las formas de aprender el contenido matemático de sus alumnos, que incluyen teorías sobre el desarrollo cognitivo para las matemáticas. Luego tenemos un conocimiento sobre los errores, obstáculos y dificultades en el pensamiento matemático, ya sea por la naturaleza del contenido a aprender o por errores de tipo didáctico (relacionados con una enseñanza no correcta). Igualmente, nos encontramos aquí con el conocimiento sobre las fortalezas que tiene el grupo de estudiantes ante un determinado tema. También tiene cabida en este apartado el conocimiento sobre las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático, es decir, los procedimientos o</p>	<p><i>“No tiene principio ni fin (amplía el segmento hasta los extremos de la pizarra y hace un gesto con las manos para indicar que seguiría por ambos extremos)”;</i> <i>“Como es infinita, yo qué sé dónde empieza ni dónde acaba, entonces pues una semirrecta sería desde el punto a este infinito (vuelve a hacer los gestos con las manos al llegar al extremo de la pizarra) y la otra desde el punto al infinito, habría aquí dos semirrectas. Definiríamos un punto y el otro extremo sería el infinito”.</i></p> <p><i>(Dibuja en la pizarra una curva), (Dibuja segmento horizontal), (Dibuja puntos encima del segmento anterior mientras lo dice), (Amplía el segmento hasta los extremos de la pizarra y hace un gesto con las manos para indicar que seguiría por ambos extremos), (Dibuja un segmento horizontal en la pizarra y un punto, más o menos en la mitad), (Dibuja en la pizarra un segmento de extremo a extremo de la pizarra y señala dos puntos de la misma), (Señala dos puntos extremos de la pizarra).</i></p>	<p>Personalmente creo que la maestra sabe, gracias a su experiencia, que el concepto de infinito, al no poder representarse gráficamente (nunca acaba y todo lo que representamos es finito), es especialmente difícil de recordar y comprender, por lo que hace especial hincapié en este asunto ya que la propia naturaleza del contenido a aprender genera dificultades en su aprendizaje.</p> <p>La maestra también es consciente de que los alumnos presentan dificultades a la hora de aprender conceptos matemáticos únicamente con una definición verbal, por lo que continuamente usa representaciones gráficas y ejemplos para que sus alumnos comprendan (y no solo memoricen) los contenidos.</p>

<p>estrategias que sus alumnos suelen poner en práctica ante un tipo de ejercicio determinado, el lenguaje y las representaciones que suelen usar, etc. Finalmente, este subdominio recoge el conocimiento sobre los intereses y expectativas de los estudiantes con respecto a las matemáticas.</p>	 <p><i>“La mitad de la recta. Tenemos una recta y la cortamos. Como una recta es infinita, no tiene fin, donde la cortemos.. la cortamos y tenemos dos semirrectas”;</i> <i>“Entonces, si tengo otra recta y le hacemos un punto bien aquí (dibuja un segmento horizontal en la pizarra y un punto, más o menos en la mitad), o aquí (borra el punto y luego lo vuelve a pintar en otro lugar, ostensivamente cerca de uno de los extremos de la pizarra) donde quiera. Como es infinita, yo qué sé dónde empieza ni dónde acaba, entonces pues una semirrecta sería desde el punto a este infinito (vuelve a hacer los gestos con las manos al llegar al extremo de la pizarra) y la otra desde el punto al infinito, habría aquí dos semirrectas. Definiríamos un punto y el otro extremo sería el infinito”.</i></p> <p>Nota: el libro dice, en la definición de semirrecta: “un punto divide a una recta en dos partes iguales, llamadas semirrectas, con principio, pero si fin”, y la maestra la lee. Obvia, al volver a dibujarla en la pizarra la afirmación “dos partes iguales”.</p>	<p>La profesora ha dibujado en la pizarra constantemente las rectas, semirrectas y segmentos de manera horizontal, algo que podría considerarse conocimiento sobre las formas de representar más adecuadas para que los alumnos entiendan los conceptos indicados pero que, a la larga, puede convertirse en un obstáculo ya que estos podrían no reconocer estos elementos matemáticos cuando estén representados en cualquier otra dirección.</p> <p>La profesora tiene conocimientos sobre la dificultad que puede suponer para los alumnos la definición de semirrecta que aparece en el libro, pues puede llevar a los alumnos a pensar que el punto que divide a la recta en dos semirrectas debe estar justo en el centro de la misma, siendo esto incorrecto, por eso lo dibujo primero en el centro y luego más cerca de uno de los extremos.</p>
<p>Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)</p> <p>Incluimos aquí el conocimiento del currículo y de otros estándares definidos por grupos de</p>	<p><i>“A ver quién sabe decirme qué es una recta”;</i> <i>“Ahora vamos a ver lo que es una semirrecta”;</i> <i>“Tenemos la recta, semirrecta y ahora vamos a ver el segmento. F., ¿qué es un segmento?”.</i></p>	<p>Aunque en los contenidos que se recogen en la orden del 17 de marzo de 2015, por el que se desarrolla el currículo de Educación Primaria en Andalucía no se explicita que los alumnos del tercer ciclo deben tratar las rectas, semirrectas y segmentos, la profesora sabe que debe trabajarlo como</p>

<p>investigación o asociaciones profesionales de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como el NCTM: National Council of Teachers of Mathematics. Distinguimos aquí tres categorías: las expectativas de aprendizaje (conocimiento de lo que tiene que aprender un estudiante en un curso determinado), el nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar y la secuenciación con temas anteriores y posteriores a un determinado momento escolar, desde un punto de vista temporal y no conceptual.</p>	<p><i>“A ver quién sabe decirme qué es una recta”;</i> <i>“¿Qué más, A?”;</i> <i>“S., ¿Qué será una semirrecta?”;</i> <i>“¿Cómo?”;</i> <i>“Tenemos la recta, semirrecta y ahora vamos a ver el segmento. F., ¿qué es un segmento?”</i></p>	<p>introducción a contenidos que sí que aparecen de manera explícita.</p> <p>La maestra continuamente pide a sus alumnos exponer sus ideas para que sean debatidas en el grupo, expliciten sus ideas y esto ayude a que mejore su razonamiento matemático.</p>
--	--	--

ANEXO 4: Análisis inicial de Alicia.

- La docente parte de las ideas previas del alumnado. Lo hace a través de preguntas.
- Va completando las aportaciones de unos con otros hasta formar una definición, de esta forma, plantea una metodología en la que el concepto lo van construyendo poco a poco entre todos.
- Proyecta de forma visual (a través de dibujos en la pizarra) lo que el alumnado le va indicando.
- Para completar la definición y que el alumnado tenga una idea más próxima, es decir, que les sea familiar, pone ejemplos reales: “el póster de la luz”.
- Continuamente plantea que plasmen lo que han ido diciendo en el cuaderno, y que añadan un dibujo al lado, para que a la hora de estudiar les sea más fácil.
Mientras que van escribiendo en el cuaderno ella repite de nuevo la definición que ha quedado del concepto.
- Se guía por el libro. A la vez que van dando definiciones, la comparan con la del libro.
- Sigue una secuencia así: primero deja que el alumnado diga una definición; después lo explica ella misma junto con ayuda visual (dibujos pizarra); y finalmente lo compara con el libro y hace que el alumnado lo lea de ahí.
- Otros aspectos: utiliza bastante el libro, no emplea material manipulativo y exige que escriban en el cuaderno, para su posterior estudio, todo lo que van diciendo.

ANEXO 5: Transcripción de la entrevista a Alicia

(Tras haber vuelto a ver el fragmento de vídeo de la maestra dando clases en el aula y haber repasado su análisis previo)

1. E: A modo general, ¿cómo definirías la actuación de la maestra?, ¿crees que lo ha hecho bien o lo podría haber hecho mejor?
2. A: A ver, yo creo que lo ha hecho bien porque así el aprendizaje es más significativo, ya que va, como ya he dicho, partiendo de lo que saben todos y entre todos van creando ese concepto que se plantea en clase. El alumnado así, el día del examen, por ejemplo (si es que hay una prueba escrita o lo que sea), se acuerda de ese día de clase, y como ha sido él mismo el que ha hecho la definición, no le cuesta tanto estudiarlo. Lo malo, entre comillas, es que utiliza demasiado el libro y, a lo mejor, podría haber utilizado un hilo de lana para explicar lo de la recta o lo de los segmentos, así los niños a los que les cuesta un poco más de trabajo o que no estaban prestando mucha atención lo tienen en sus manos y a la hora luego de estudiar o de plasmarlo en una prueba escrita les es más fácil. Todo depende de cada alumno.
3. E: Muy bien, entonces, ¿crees que los recursos que ha utilizado la maestra son adecuados?
4. A: Por una parte, sí, porque utiliza un apoyo, no es que explique y lo deje todo en “standby”, sino que lo dibuja, hace que ellos lo dibujen... pero podría utilizar otro material que a otros niños les sirva como de más motivación y digan: “ostras que guay, vamos a manipular, vamos a hacer otra cosa distinta”, que no sea todo ver en la pizarra algo que es muy abstracto realmente.
5. E: Vale, entonces, tú consideras que es adecuado, pero que sería mejor complementarlo con otro material, ¿no?
6. A: Claro, porque como hay muchos niveles y ritmos distintos, como ya sabemos, y a algunos les cuesta más. Para algunos el método que usa está bien, pero otros necesitan algo más.
7. E: Tú, por ejemplo, ¿hubieras usado el ovillo de lana?
8. A: Sí, la lana.
9. E: También te quería preguntar si crees que el ejemplo que ella ha puesto, el de los cables de la luz, es útil para los alumnos.
10. A: A ver, yo cuando lo dijo me quedé un poco pillada, la verdad. El niño que no va nunca por la carretera o no se fija en esas cosas y nunca lo ha visto, realmente.... lo de las líneas de la carretera, por ejemplo, vale, menos cuando hace la curva como ella ha especificado.
11. E: Sí, en una autopista, por ejemplo, ¿no?

12. A: Exacto, en una autopista, eso sí es más visual, porque incluso en una calle o lo que sea...
13. E: En una avenida.
14. A: Claro, eso, en una avenida, el niño lo ve, pero un cable de luz... uf, es algo demasiado grande para los niños.
15. E: Te iba a preguntar cuál hubieras usado tú, pero supongo que hubieras usado las líneas de la carretera.
16. A: Claro, las líneas de la carretera y... no sé la verdad, a lo mejor el rastro que dejan los aviones, podría ser, pero es que claro, algo tan infinito... el horizonte del mar, quizás, podría ser, se me acaba de ocurrir.
17. E: Y si yo no te hubiese enseñando el vídeo y solo hubieras tenido la transcripción, ¿hubieras pensado que es una maestra que tiene mucha o poco experiencia?
18. A: Mmmm... pues no lo sé, la verdad. Es que en la transcripción había algunas veces que me liaba un poco, entonces hubiera necesitado el vídeo.
19. E: De acuerdo. Y, yendo a otro asunto, ¿tú crees que la docente, cuando está explicando los conceptos a los alumnos, está teniendo en cuenta las posibles dificultades que esos conceptos conllevan, es decir, las dificultades que puedan tener los alumnos a la hora de entender lo que es una recta, una semirrecta o un segmento?
20. A: Yo creo que no, porque lo deja todo muy “venga qué sabéis” y yo creo que muchos de los niños ni han hablado y otros se han fijado del libro, entonces yo creo que solo quiere que se lo digan, que lo definan. Eso es lo que yo creo eh, desde lo que yo he visto, y ya está. Hace hincapié en los conceptos, pero para aquellos que les cuesta más yo creo que no.
21. E: Esto en parte ya me lo has contestado, pero, en conclusión, ¿por qué crees tú que la maestra proyecta de forma visual lo que el alumno va diciendo?
22. A: Porque, por ejemplo, lo de la línea, “es una línea” y ella dibujaba la curva.
23. E: ¿Por qué crees que hace eso?
24. A: Para que los niños vayan viendo y corrigiendo. A ver que saben y yo lo voy escribiendo. Ella lo dibuja y dice “Esto, esto no es ¿no?”. Quiere que los alumnos se den cuenta de que lo que están diciendo está mal dicho. A pesar de que ellos sepan lo que es, (no sé si me estoy explicando), que ellos saben lo que es, pero al decirlo tienen que usar las palabras adecuadas para que esté bien dicho, porque puede haber confusión, como la profesora al dibujar lo primero que ha dibujado.
25. E: Y los dibujos que ha hecho, ¿son siempre iguales?
26. A: Sí, porque en todo momento ha dibujado líneas, no ha dibujado nada más.
27. E: Tú crees que eso, ¿beneficia o perjudica a los alumnos?

28. A: Al hacerlo siempre igual, el niño va a tener en mente como que eso es la recta sí o sí. Como lo del cuadrado que nos explicó el profesor, que si tú le pones el cuadrado así (hace con sus manos un gesto con el que pretende representar un cuadrado de base horizontal), cuando lo ven un poquito así (gira sus manos, de manera que ahora su base ya no estaría horizontal), va a decir que es otra cosa, entonces le perjudica en ese sentido. Si ella lo representa siempre así les va a beneficiar, pero en la vida se lo van a encontrar de distintas formas. Y, además, siempre horizontal, porque también lo podría haber puesto vertical, diagonal o de distintas formas.
29. E: Muy bien. ¿Cuál crees que es el motivo por el que la maestra se guía constantemente por el libro: porque no sabe hacerlo sin él, porque cree que es un recurso útil, ¿porque es más cómodo...?
30. A: Yo creo que es una mezcla de todo porque, al fin y al cabo, los deberes que va a mandar, porque los va a mandar, los va a coger del libro, entonces pensará que es mejor que cuando vayan a hacer los deberes hayan visto el libro. Porque si luego hacen los deberes que están en el libro y yo le he dicho otra cosa o hemos visto otra cosa que no esté exactamente igual, eso puede llevarles a confusión y a no hacer los problemas. Utilidad, apoyo, ya que está aquí el libro lo vamos a usar para todo. Una mezcla de todo.
31. E: La maestra, ¿está siempre de acuerdo con las definiciones que aparecen en el libro?
32. A: Bueno, lo de los extremos últimos, aunque el niño la ha corregido, ella ha dicho “bueno, extremos, extremos no puede tener”, se ha liado un poco creo yo, porque el niño le ha dicho “no, extremos son los puntos”. Entonces, yo creo que sí, porque siempre asiente, siempre que están leyendo, asiente y dice “sí, sí, es lo que acabamos de decir”, más o menos.
33. E: ¿Y tú estarías entonces también de acuerdo con las definiciones que aparecen en el libro?, ¿con las definiciones que han dado?
34. A: Por lo que yo he escuchado, cuando lo han dicho en voz alta, sí. O sea, yo no lo hubiera definido nunca así, porque es un libro, pero yo creo que sí, que más o menos la idea es la misma, porque los niños han dicho una cosa y realmente al leerlo en el libro era prácticamente lo mismo.
35. E: ¿Tú crees que la maestra tiene claro cómo tiene que hacer las definiciones, es decir, la maestra sabe los aspectos que tiene que tener una definición para que lo sea?
36. A: Mmmm... pues no lo sé, ahora mismo no lo sé, porque ha juntado las cosas que le han ido diciendo, pero si es cierto que a la hora de definirlo ella ya cuando los alumnos han estado copiando, tenía un orden lógico. Entonces yo creo que sí, que ella ha unido todo y luego lo ha puesto bien.

37. E: Claro, ella cree que se necesitan todas esas características o propiedades para definir esos conceptos, ¿no?
38. A: Exacto.
39. E: Por último, ¿para qué crees que necesitan los estudiantes saber qué es una recta, una semirrecta y un segmento?
40. A: Yo también me lo pregunto (risas).
41. E: ¿Tú crees que se lo explica así porque sí, es decir, hoy ha dado estos conceptos y mañana dará otras cosas que no tienen nada que ver?
42. A: Bueno, es que hay cosas que se dan porque se tienen que dar, pero lo que tiene que hacer la profesora realmente es buscarle la utilidad, cuando está explicando cualquier tema, ya sean polígonos o lo que sea, es buscarle la utilidad, porque sino el niño va a aprender algo que luego no va... va a pensar: “bueno, esto lo he aprendido porque me entraba en el examen”, igual que los logaritmos y todas esas cosas que hemos aprendido en la ESO y que a mí no me han servido de nada. A mí me tendrían que haber dicho esto sirve para tal cosa, y ver la utilidad. El toque final de esa sesión podría haber sido explicar para que sirve todo esto.
43. E: Entonces, ¿eso es lo que tú echas más en falta en esta sesión, en este fragmento?
44. A: Sí.

ANEXO 6: Tabla 3. Tabla sobre el modelo MTSK para el análisis del vídeo completada por Alicia.

Aspectos a observar	Lo que observo	Lo que interpreto
Conocimiento matemático (MK)		
<p style="text-align: center;">Conocimiento de los temas (KoT)</p> <p>Conocimiento de los conceptos, procesos y procedimientos matemáticos en sí mismos. Definiciones, propiedades y sus fundamentos. Conexiones intraconceptuales. Conocimientos del profesor sobre los fenómenos relacionados con un tema que pueden generar conocimiento matemático y los usos y aplicaciones del mismo. Conocimiento del profesor sobre las diferentes maneras en las que puede representar un tema: simbólica, gráfica, verbal, situaciones reales, materiales manipulativos, etc. y las transformaciones entre ellas, así como la notación y vocabulario asociado.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Dibujos de los conceptos en la pizarra. - Ejemplos de situaciones reales: cables de la luz y líneas de la carretera. 	<ul style="list-style-type: none"> - Los dibujos son una forma de gráfico para presentar el tema, por este motivo se encuentra dentro de conocimiento del tema. Ha sabido emplear este recurso para plasmar la información de los conceptos. Sin embargo, yo hubiera utilizado materiales manipulativos, ya que habrá niños que simplemente con un dibujo no lo comprendan y les sean más complicado acordarse posteriormente. - Con respecto a los ejemplos, estaría dentro del conocimiento de los temas, ya que es una situación real, que forma parte de las experiencias familiares del alumnado. No obstante, no creo que sea un ejemplo claro para todos, ya que puede que algunos hayan viajado poco en coche o en autobús, o nunca se hayan fijado en los cables de la luz.
<p style="text-align: center;">Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)</p> <p>Conexiones interconceptuales, referidas al conocimiento del profesor sobre las relaciones entre distintos contenidos, ya sean del curso corriente, anteriores o posteriores, teniendo en cuenta la temporalidad y la interconceptualidad.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Conexiones de complejización: relacionar contenidos actuales con otros que formarán parte de momentos posteriores en la formación académica. 	<ul style="list-style-type: none"> - Una línea que no tiene ni curvas ni ángulos. 	<ul style="list-style-type: none"> - No hay referencia clara en el vídeo, pero supongo que estos contenidos que la docente se encuentra definiendo con el alumnado son para crear una base para posteriores aprendizajes como por ejemplo los polígonos. Puede ser también que, como aparece en el libro se vea obligada a darlo, ya que como se ha visto, es un recurso que emplea durante toda la sesión. - Ha habido una relación de este contenido: los ángulos, con lo que se estaba viendo en clase. Esto me hace pensar que el concepto de ángulo se ha

<ul style="list-style-type: none"> - Conexiones de simplificación: relacionar contenidos actuales con otros que ya formaron parte de la formación académica. - Conexiones transversales: aquellas existentes entre contenidos diferentes que tienen cualidades en común. - Conexiones auxiliares: se establecen entre aquellos conocimientos que se relacionan entre sí como apoyo para un fin. 		<p>visto anteriormente ya que es mencionado para definir la recta.</p>
<p>Conocimiento de la práctica matemática (KPM)</p> <p>Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos. Formas de validación y demostración, contendría el conocimiento sobre las diferentes maneras de validar y demostrar, como los procesos abductivos, inductivos y deductivos, incluso la comprobación a través de la ejemplificación como paso previo a la demostración, al igual que la denominación. Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal. Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas. Prácticas particulares del quehacer matemático, incluye actividades matemáticas como la modelación o la algoritmización. Conocimiento de las condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones, indica el conocimiento de un maestro sobre lo necesario para que una definición lo sea.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Una línea (dibuja en la pizarra una curva). 	<ul style="list-style-type: none"> - Este ejemplo sería un conocimiento de la práctica matemática porque se correspondería con un contraejemplo que la docente ha empleado, mientras que el alumnado definía el concepto, para que el grupo se explicase mejor.
<p>Conocimiento didáctico del contenido (PCK)</p>		
<p>Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)</p> <p>Dentro de este subdominio, tenemos el conocimiento sobre las teorías de enseñanza asociadas a un</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Realización de dibujos en la pizarra. 	<ul style="list-style-type: none"> - La docente deja ver que tiene cierto conocimiento en cuanto a que los dibujos y en general todo lo visual ayuda a la comprensión de los conceptos, en especial en la asignatura de matemáticas, en la cual, para la resolución de problemas, muchas veces estos

<p>contenido matemático, que pueden ser personales o formales, y que un maestro puede adquirir a través de su propia observación y experiencia o bien a través de investigaciones publicadas. También se encuadra aquí el conocimiento sobre los recursos materiales o virtuales más adecuados para la enseñanza de un contenido concreto. Por otra parte, tenemos el conocimiento que el profesor tiene sobre la potencialidad y limitación de las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos que puede poner en práctica con los medios de los que dispone.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Una línea que no tiene ni curvas ni ángulos, ¿Qué más, A? - Pues vamos a poner en el cuaderno: recta, hacemos una y ponemos las características. 	<p>ayudan a comprenderlos mejor y encontrar la solución. No obstante, desde mi percepción existen otros recursos más atractivos e interesantes que se pueden emplear en las matemáticas: material manipulativo, fotografías de lugares familiares para el alumnado, vídeos.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Este ejemplo correspondería con este bloque, ya que a través de esas preguntas que va realizando para que se vaya creando un concepto de cada contenido, emplea distintas estrategias y técnicas, guiando el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esas cuestiones son para averiguar las ideas previas que poseen los discentes y para que conjuntamente, la mayoría participe y aporte a la definición algún aspecto o característica. - Este ejemplo iría aquí porque es otra forma en cuanto al estilo de enseñanza. La docente pretende que una vez expuesto en clase los conceptos los vayan escribiendo y plasmando en sus cuadernos de trabajo para que les sean más fácil recordar esos contenidos posteriormente.
<p style="text-align: center;">Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)</p> <p>Considera el conocimiento de aspectos relacionados con el aprendizaje de sus estudiantes. Primero nos encontramos con el conocimiento del profesor sobre las formas de aprender el contenido matemático de sus alumnos, que incluyen teorías sobre el desarrollo cognitivo para las matemáticas. Luego tenemos un conocimiento sobre los errores, obstáculos y dificultades en el pensamiento matemático, ya sea por</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Los dibujos siempre siguen una dirección. 	<ul style="list-style-type: none"> - Se relaciona con el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas, ya que la forma en la que van a aprender los conceptos, el alumnado, va a ser de una única forma: horizontalmente. Los diagramas de la pizarra están realizados en una sola dirección y en ningún momento la docente interrumpe para aclarar que las rectas las pueden encontrar dibujadas hacia otras direcciones: en vertical, en diagonal, entre otros. Con esto la docente está obstaculizando el aprendizaje, ya que en el caso de que, el alumnado,

<p>la naturaleza del contenido a aprender o por errores de tipo didáctico (relacionados con una enseñanza no correcta). Igualmente, nos encontramos aquí con el conocimiento sobre las fortalezas que tiene el grupo de estudiantes ante un determinado tema. También tiene cabida en este apartado el conocimiento sobre las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático, es decir, los procedimientos o estrategias que sus alumnos suelen poner en práctica ante un tipo de ejercicio determinado, el lenguaje y las representaciones que suelen usar, etc. Finalmente, este subdominio recoge el conocimiento sobre los intereses y expectativas de los estudiantes con respecto a las matemáticas.</p>		<p>se encontrasen alguno de los conceptos de otra forma dispuestos, tendrían más dificultad para identificarlos y relacionarlos con lo visto en clase.</p>
<p>Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)</p> <p>Incluimos aquí el conocimiento del currículo y de otros estándares definidos por grupos de investigación o asociaciones profesionales de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como el NCTM: National Council of Teachers of Mathematics. Distinguimos aquí tres categorías: las expectativas de aprendizaje (conocimiento de lo que tiene que aprender un estudiante en un curso determinado), el nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar y la secuenciación con temas anteriores y posteriores a un determinado momento escolar, desde un punto de vista temporal y no conceptual.</p>		

