

## DISEÑO OPTIMO DE AISLAMIENTO DE MAQUINAS

Javier Garcia-Lomas, Emilio Lopez y Jaime Dominguez

E.T.S.I. Industriales de Sevilla.

**Resumen.**- Se estudian las características y el comportamiento de los sistemas de sustentación y aislamiento de máquinas que en su funcionamiento sean susceptibles de producir y transmitir vibraciones.

Se modeliza la máquina y su sustentación como un sistema de seis grados de libertad con amortiguamiento no proporcional. De acuerdo con este modelo se realiza la determinación de las características elásticas y de amortiguamiento de los distintos elementos de la sustentación, así como, cual será la posición idónea en que tendrán que situarse, con objeto de que la solución obtenida sea la óptima desde determinados puntos de vista.

Se presentan los distintos casos realizados de acuerdo con distintas funciones objetivo o criterios de óptimo, como son, la minimización de las fuerzas transmitidas a la base (o cimentación), de las fuerzas y movimientos, para diferentes números de parámetros a determinar, todo ello dentro de un intervalo de frecuencia.

## INTRODUCCION

Quando se pretende diseñar la sustentación ó aislamiento de una máquina compleja, susceptible de producir y transmitir vibraciones a la cimentación así como a otros posibles equipos, se presenta el problema de la elección de los mejores elementos de la sustentación, aisladores, para conseguir que el funcionamiento sea el más adecuado.

La forma de obtener estos valores -- idóneos puede diferir bastante en cada caso y sobre todo dependerá fundamentalmente del caso que se esté estudiando. -- Una forma clásica de conseguir reducir las vibraciones es la utilización de los absorbentes que se dispongan sobre el sistema. En esta línea de desarrollo se encuentran los trabajos de Hunt [1] y -- Snowdon [2]. En [3] se desarrolla un algoritmo para la determinación de los parámetros de un absorbente óptimo. La determinación de esos valores óptimos también se puede analizar desde el punto de vista de la optimización paramétrica [4], [5].

En la mayoría de estos análisis ya se parte del sistema máquina-aislamiento y mediante el absorbente se intenta mejorar su comportamiento. Sin embargo, ese podría ser el segundo paso en el diseño, realizando como primer paso el diseño óptimo del sistema máquina-sustentación pa

ra pasar en una segunda etapa, y una vez conseguida la mejor disposición posible al diseño del absorbente, si es necesario, por cuanto no se consiga con el primer -- diseño los objetivos finales. Es en esta línea de búsqueda del óptimo del sistema máquina aislamiento, y más concretamente la determinación de los valores y posiciones de los aisladores, en la que se -- puede inscribir el presente trabajo, que dando como futuro desarrollo, el estudio de la optimización del sistema si se tiene en cuenta la posibilidad de montar un absorbente.

## MODELO ELEGIDO

Para el tratamiento del diseño óptimo de la sustentación de una máquina es necesario realizar una modelización del conjunto que forman la máquina en sí, -- los sistemas de aislamiento y la posición de estos aisladores. Para este estudio, se adopta como modelo, el representado en la figura 1, donde la máquina -- queda definida como un prisma rectangular, que posea la misma masa, el mismo -- centro de gravedad y los mismos momentos principales de inercia que la máquina -- real. De esta manera se consigue no tener en cuenta en el tratamiento la forma y dimensiones externas del sistema real.

DISEÑO OPTIMO DE AISLAMIENTO DE MAQUINAS

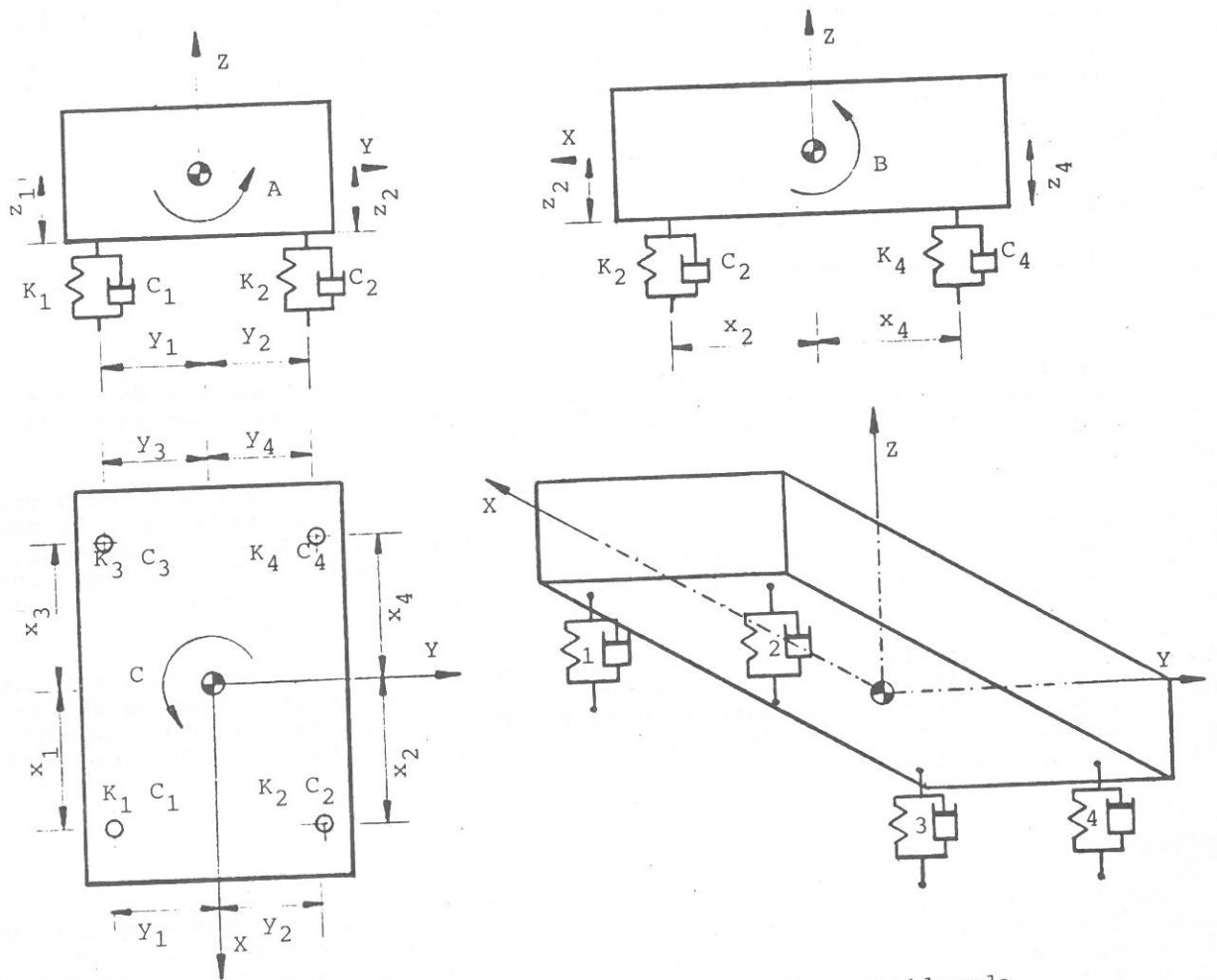


Figura 1. Modelo de la maquina. Sistema de coordenadas considerado.

De acuerdo con el modelo se toma como sistema de coordenadas el triedro trirectángulo positivo situado en el centro de gravedad del sistema, y de acuerdo con esto se consideran como grados de libertad del sistema los tres desplazamientos  $x, y, z$  y los tres giros  $A, B$  y  $C$  alrededor de los respectivos ejes  $X, Y$  y  $Z$ , con signo positivo, cuando éste se produzca en el sentido positivo de los ejes del triedro. La elección de estos seis grados de libertad, que no son otra cosa que los seis grados de libertad que tiene un sólido rígido en el espacio, consigue que el tamaño del problema en estudio no varíe aunque se cambie el número de soportes o aisladores de la máquina.

En adelante se considera que la máquina está sustentada por cuatro soportes o aisladores. Estos soportes poseen rigidez y amortiguamiento en las tres direcciones de los ejes coordenados, y que se representan de una forma esquemática según la figura 2. Esto permite un tratamiento general para distintas disposiciones de los soportes en la máquina.

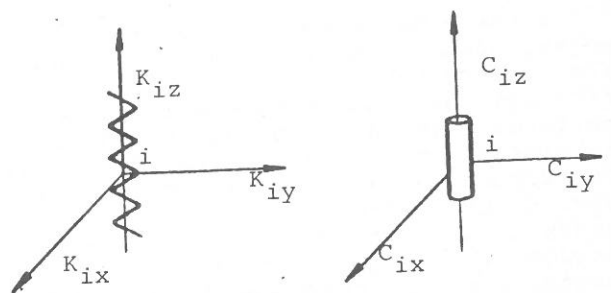


Figura 2. Representación esquemática de los aisladores.

ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Las ecuaciones de movimiento del sistema se obtienen mediante la aplicación de las ecuaciones de Lagrange, donde, como es conocido, cada ecuación para cada variable viene dada por

DISEÑO OPTIMO DE AISLAMIENTO DE MAQUINAS

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial r_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{r}_j} = Q_j ; j=1,2,\dots,n \quad (1)$$

será por tanto necesario determinar las expresiones de las energías cinética y potencial del sistema (T,V) para conocer  $L = T-V$ . Asimismo habrán de determinarse los efectos de las fuerzas no conservativas (F), que se pueden obtener haciendo uso del cálculo de los trabajos virtuales realizados por el amortiguamiento. Ahora bien, dado que donde hay un elemento con una rigidez determinado también se considera que hay amortiguamiento, la matriz de amortiguamiento será en todo análoga a la de rigidez. Es decir calculada la matriz de rigidez del sistema se conocerá la de amortiguamiento cambiando el valor de la constante de rigidez por el de la constante de amortiguamiento.

La energía cinética del sistema es:

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} I_{xx} \dot{A}^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \dot{B}^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \dot{C}^2 \quad (2)$$

donde  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  son las velocidades del centro de gravedad, y  $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$ , las velocidades angulares alrededor de los ejes X, Y, Z, principales de inercia.

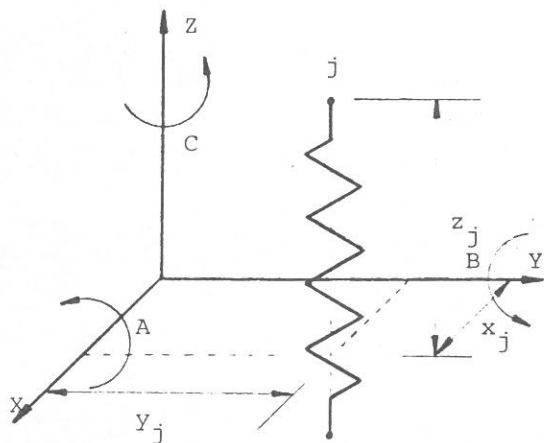


Figura 3. Aislador unido a la máquina en un punto  $j(x_j, y_j, z_j)$ .

La energía potencial del sistema será la suma de las energías potenciales de los resortes más la de la masa de la máquina que se va a despreciar. La energía potencial de un resorte unido a la máquina en un punto  $j$  de coordenadas  $x_j, y_j, z_j$ , de acuerdo con la figura 3, será:

$$V_j = \frac{1}{2} k_{jx} (A_{xj})^2 + \frac{1}{2} k_{jy} (A_{yj})^2 + \frac{1}{2} k_{jz} (A_{zj})^2 \quad (3)$$

donde si el centro de gravedad sufre unos desplazamientos  $x, y, z$  y además se producen unos giros A, B, C, alrededor de los ejes será:

$$\Delta x_j = x + z_j B - y_j C \quad (4)$$

$$\Delta y_j = y - z_j A - x_j C \quad (5)$$

$$\Delta z_j = z + y_j A - x_j B \quad (6)$$

con lo que la (3) será:

$$V_j = \frac{1}{2} k_{jx} (x + z_j B - y_j C)^2 + \frac{1}{2} k_{jy} (y - z_j A + x_j C)^2 + \frac{1}{2} k_{jz} (z + y_j A - x_j B)^2 \quad (7)$$

Al ser cuatro los soportes que sustentan la máquina, la energía potencial total será:

$$V = \sum_{j=1}^4 \left[ \frac{1}{2} k_{jx} (x + z_j B - y_j C)^2 + \frac{1}{2} k_{jy} (y - z_j A + x_j C)^2 + \frac{1}{2} k_{jz} (z + y_j A - x_j B)^2 \right] \quad (8)$$

Conocidas T y V tendremos que

$$L = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} I_{xx} \dot{A}^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \dot{B}^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \dot{C}^2 - \sum_{j=1}^4 \left[ \frac{1}{2} k_{jx} (x + z_j B - y_j C)^2 + \frac{1}{2} k_{jy} (y - z_j A + x_j C)^2 + \frac{1}{2} k_{jz} (z + y_j A - x_j B)^2 \right] \quad (9)$$

luego llevando esta expresión a la (1) y operando se obtienen las ecuaciones que definirían el movimiento del sistema si no tuviese amortiguamiento y que son:

- Ecuación en X

$$M\ddot{x} + \left[ \sum_{j=1}^4 k_{jx} \right] x + \left[ \sum_{j=1}^4 z_j k_{jx} \right] B + \left[ -\sum_{j=1}^4 y_j k_{jx} \right] C = Q_x \quad (10)$$

- Ecuación en Y

DISEÑO OPTIMO DE AISLAMIENTO DE MAQUINAS

$$M\ddot{Y} + \left[ \sum_{j=1}^4 k_{jy} \right] Y + \left[ -\sum_{j=1}^4 z_j k_{jy} \right] A + \left[ \sum_{j=1}^4 x_j k_{jy} \right] C = Q_Y \quad (11)$$

- Ecuación en Z

$$M\ddot{Z} + \left[ \sum_{j=1}^4 k_{jz} \right] Z + \left[ \sum_{j=1}^4 y_j k_{jz} \right] A + \left[ -\sum_{j=1}^4 x_j k_{jz} \right] B = Q_Z \quad (12)$$

- Ecuación en A

$$I_{xx} \ddot{A} + \left[ -\sum_{j=1}^4 z_j k_{jy} \right] Y + \left[ \sum_{j=1}^4 y_j k_{jz} \right] Z + \left[ \sum_{j=1}^4 (z_j^2 k_{jy} + y_j^2 k_{jz}) \right] A + \left[ -\sum_{j=1}^4 x_j y_j k_{jz} \right] B + \left[ -\sum_{j=1}^4 x_j z_j k_{jy} \right] C = Q_A \quad (13)$$

- Ecuación en B

$$I_{yy} \ddot{B} + \left[ \sum_{j=1}^4 z_j k_{jx} \right] X + \left[ -\sum_{j=1}^4 x_j k_{jz} \right] Z + \left[ -\sum_{j=1}^4 x_j y_j k_{jz} \right] A + \left[ \sum_{j=1}^4 (z_j^2 k_{jx} + x_j^2 k_{jz}) \right] B + \left[ -\sum_{j=1}^4 y_j z_j k_{jx} \right] C = Q_B \quad (14)$$

- Ecuación en C

$$I_{zz} \ddot{C} + \left[ -\sum_{j=1}^4 y_j k_{jx} \right] X + \left[ \sum_{j=1}^4 x_j k_{jy} \right] Y + \left[ -\sum_{j=1}^4 x_j z_j k_{jy} \right] A + \left[ -\sum_{j=1}^4 y_j z_j k_{jx} \right] B + \left[ \sum_{j=1}^4 (x_j^2 k_{jy} + y_j^2 k_{jx}) \right] C = Q_C \quad (15)$$

De acuerdo con (10-15) los términos no nulos de la matriz de rigidez serán:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \sum_{j=1}^4 k_{jx} & k_{33} &= \sum_{j=1}^4 k_{jz} \\ k_{15} &= -\sum_{j=1}^4 z_j k_{jx} & k_{34} &= \sum_{j=1}^4 y_j k_{jz} \\ k_{16} &= -\sum_{j=1}^4 y_j k_{jx} & k_{35} &= -\sum_{j=1}^4 x_j k_{jz} \\ k_{22} &= \sum_{j=1}^4 k_{jy} & k_{44} &= \sum_{j=1}^4 (z_j^2 k_{jy} + y_j^2 k_{jz}) \\ k_{24} &= -\sum_{j=1}^4 z_j k_{jy} & k_{45} &= -\sum_{j=1}^4 x_j y_j k_{jz} \\ k_{26} &= \sum_{j=1}^4 x_j k_{jy} & k_{46} &= -\sum_{j=1}^4 x_j z_j k_{jy} \\ k_{55} &= \sum_{j=1}^4 (z_j^2 k_{jx} + z_j^2 k_{jz}) & k_{56} &= -\sum_{j=1}^4 y_j z_j k_{jx} \\ k_{66} &= \sum_{j=1}^4 (x_j^2 k_{jy} + y_j^2 k_{jx}) & & \end{aligned} \quad (16)$$

y de acuerdo con lo anteriormente expresado los términos no nulos de la matriz de amortiguamiento serán:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \sum_{j=1}^4 c_{jx} & c_{44} &= \sum_{j=1}^4 (z_j^2 c_{jy} + y_j^2 c_{jz}) \\ c_{15} &= \sum_{j=1}^4 z_j c_{jx} & c_{45} &= -\sum_{j=1}^4 x_j y_j c_{jz} \\ c_{16} &= -\sum_{j=1}^4 y_j c_{jx} & c_{46} &= -\sum_{j=1}^4 x_j z_j c_{jy} \\ c_{22} &= \sum_{j=1}^4 c_{jy} & c_{55} &= \sum_{j=1}^4 (z_j^2 c_{jx} + x_j^2 c_{jz}) \\ c_{24} &= -\sum_{j=1}^4 z_j c_{jy} & c_{56} &= -\sum_{j=1}^4 y_j z_j c_{jx} \\ c_{26} &= \sum_{j=1}^4 x_j c_{jy} & c_{66} &= \sum_{j=1}^4 (x_j^2 c_{jy} + y_j^2 c_{jx}) \\ c_{33} &= \sum_{j=1}^4 c_{jz} & c_{35} &= -\sum_{j=1}^4 x_j c_{jz} \\ c_{34} &= \sum_{j=1}^4 y_j c_{jz} & & \end{aligned} \quad (17)$$

por tanto el sistema de ecuaciones de movimiento será:

$$M\ddot{X} + c_{11} \dot{X} + c_{15} \dot{B} + k_{11} X + k_{15} B + k_{16} C = Q_x \quad (18)$$

DISEÑO OPTIMO DE AISLAMIENTO DE MAQUINAS

$$M\ddot{y} + c_{22} \dot{y} + c_{24} \dot{a} + c_{26} \dot{c} + k_{22} y + k_{24} a + k_{26} c = Q_y \quad (19)$$

$$M\ddot{z} + c_{33} \dot{z} + c_{34} \dot{a} + c_{25} \dot{b} + k_{33} z + k_{34} a + k_{35} b = Q_z \quad (20)$$

$$I_{xx} \ddot{a} + c_{24} \dot{y} + c_{34} \dot{z} + c_{44} \dot{a} + c_{45} \dot{b} + c_{46} \dot{c} + k_{24} y + k_{34} z + k_{44} a + k_{45} b + k_{46} c = Q_A \quad (21)$$

$$I_{yy} \ddot{b} + c_{15} \dot{x} + c_{35} \dot{z} + c_{45} \dot{a} + c_{55} \dot{b} + c_{56} \dot{c} + k_{15} x + k_{35} z + k_{45} a + k_{55} b + k_{56} c = Q_B \quad (22)$$

$$I_{zz} \ddot{c} + c_{16} \dot{x} + c_{26} \dot{y} + c_{46} \dot{a} + c_{56} \dot{b} + c_{66} \dot{c} + k_{16} x + k_{26} y + k_{46} a + k_{56} b + k_{66} c = Q_C \quad (23)$$

que en forma matricial será:

$$[M]\{\ddot{r}\} + [C]\{\dot{r}\} + [k]\{r\} = \{Q\} \quad (24)$$

donde [M] es una matriz de 6x6, diagonal, matriz de masa del sistema, estando las matrices de rigidez y amortiguamiento formadas de acuerdo con la expresiones (16-17).

SOLICITACIONES DEL SISTEMA. VECTOR DE CARGAS

Las cargas a que se encuentra sometido el sistema se considera que son debidas a desequilibrios existentes en los distintos motores y rotores que existan en la máquina. El vector de cargas total será la suma de las cargas que produzcan cada uno de los motores y rotores del sistema.

De acuerdo con la figura 4 se considera la acción de un motor con un desequilibrio que se puede expresar por:

$$D = m_0 \rho_0 \quad (25)$$

Los ejes X', Y', Z' son paralelos a los del sistema y estarán situados en el centro de gravedad (0) del motor (X<sub>go</sub>, Y<sub>go</sub>,

Z<sub>go</sub>) y el eje de giro del motor está contenido en un plano vertical que forma un ángulo α con el plano Z'X' y un ángulo β con el plano horizontal X'Y'.

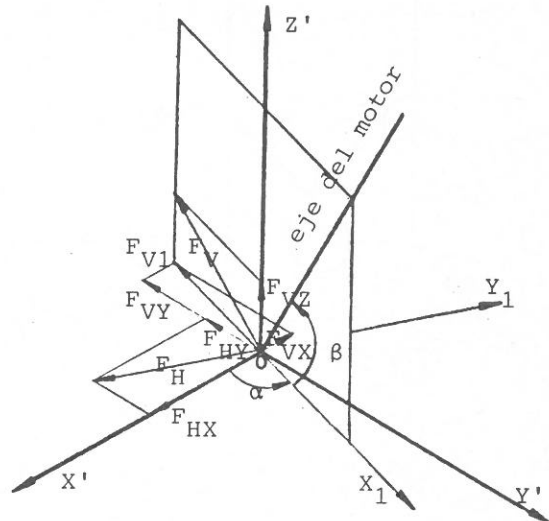


Figura 4. Descomposición de las fuerzas excitadoras.

Las fuerzas debidas al desequilibrio del rotor se descomponen en dos perpendiculares al eje, una F<sub>H</sub> contenida en el plano horizontal y la otra F<sub>V</sub> en el plano vertical que contiene al eje. Estas fuerzas producidas al girar el motor con una velocidad ω serán:

$$F_H = D \omega^2 \cos \omega t \quad (26)$$

$$F_V = D \omega^2 \sin \omega t \quad (27)$$

que proyectadas sobre los ejes X', Y', Z' serán:

$$F_{X'} = F_H \sin \alpha - F_V \sin \beta \cos \alpha \quad (28)$$

$$F_{Y'} = -F_H \cos \alpha - F_V \sin \beta \sin \alpha \quad (29)$$

$$F_{Z'} = F_V \cos \beta \quad (30)$$

que llevadas a los ejes de la máquina, figura 5, y desarrollando se obtendrán las fuerzas actuantes sobre los distintos grados de libertad

$$F_X = (D \omega^2 \cos \omega t) \sin \alpha - (D \omega^2 \sin \omega t) \sin \beta \cos \alpha \quad (31)$$

$$F_Y = -(D \omega^2 \cos \omega t) \cos \alpha + (D \omega^2 \sin \omega t) \sin \beta \sin \alpha \quad (32)$$

$$F_Z = (D \omega^2 \sin \omega t) \cos \beta \quad (33)$$

DISEÑO OPTIMO DE AISLAMIENTO DE MAQUINAS

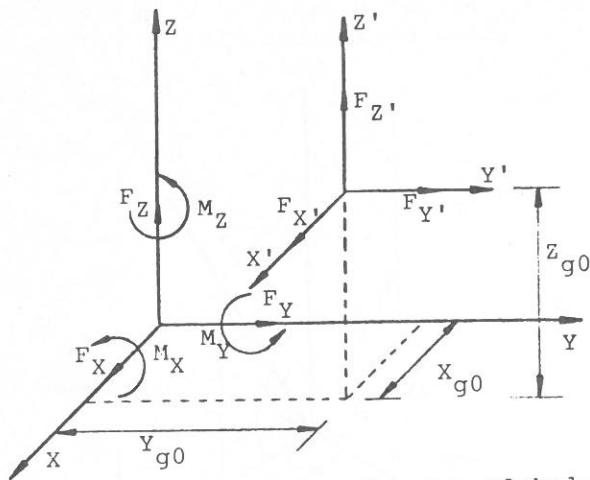


Figura 5. Fuerzas en coordenadas globales

$$M_x = Y_{g0} (D \omega^2 \sin \omega t) \cos \beta + z_{g0} (D \omega^2 \cos \omega t) \cos \alpha + (D \omega^2 \sin \omega t) \sin \beta \sin \alpha \quad (34)$$

$$M_y = z_{g0} (D \omega^2 \cos \omega t) \sin \alpha - (D \omega^2 \sin \omega t) \sin \beta \cos \alpha - x_{g0} (D \omega^2 \sin \omega t) \cos \beta \quad (35)$$

$$M_z = -x_{g0} (D \omega^2 \cos \omega t) \cos \alpha + (D \omega^2 \sin \omega t) \sin \beta \sin \alpha - y_{g0} (D \omega^2 \cos \omega t) \sin \alpha - (D \omega^2 \sin \omega t) \sin \beta \cos \alpha \quad (36)$$

que de acuerdo con

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \quad (37)$$

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \quad (38)$$

se convertirán en:

$$F_x = \left[ \frac{D}{2} (\sin \alpha + i \sin \beta \cos \alpha) \omega^2 \right] e^{i\omega t} + \left[ \frac{D}{2} (\sin \alpha - i \sin \beta \cos \alpha) \omega^2 \right] e^{-i\omega t} \quad (39)$$

$$F_y = \left[ \frac{D}{2} (-\cos \alpha + i \sin \beta \sin \alpha) \omega^2 \right] e^{i\omega t} + \left[ \frac{D}{2} (-\cos \alpha - i \sin \beta \sin \alpha) \omega^2 \right] e^{-i\omega t} \quad (40)$$

$$F_z = \left[ \frac{D}{2} (-i \cos \beta) \omega^2 \right] e^{i\omega t} + \left[ \frac{D}{2} (i \cos \beta) \omega^2 \right] e^{-i\omega t} \quad (41)$$

$$M_x = \left\{ \frac{D}{2} (z_{g0} \cos \alpha - i(y_{g0} \cos \beta + z_{g0} \sin \beta \sin \alpha) \omega^2) e^{i\omega t} + \left\{ \frac{D}{2} (z_{g0} \cos \alpha + i(y_{g0} \cos \beta + z_{g0} \sin \beta \sin \alpha) \omega^2) e^{-i\omega t} \right\} \right\} \quad (42)$$

$$M_y = \left\{ \frac{D}{2} [z_{g0} \sin \alpha + i(z_{g0} \sin \beta \cos \alpha + x_{g0} \cos \beta)] \omega^2 e^{i\omega t} + \left\{ \frac{D}{2} [z_{g0} \sin \alpha - i(z_{g0} \sin \beta \cos \alpha + x_{g0} \cos \beta)] \omega^2 e^{-i\omega t} \right\} \right\} \quad (43)$$

$$M_z = \left\{ \frac{D}{2} [-(x_{g0} \cos \alpha + y_{g0} \sin \alpha) + i(x_{g0} \sin \beta \sin \alpha - y_{g0} \sin \beta \cos \alpha)] \omega^2 e^{i\omega t} + \left\{ \frac{D}{2} [-(x_{g0} \cos \alpha + y_{g0} \sin \alpha) - i(x_{g0} \sin \beta \sin \alpha - y_{g0} \sin \beta \cos \alpha)] \omega^2 e^{-i\omega t} \right\} \right\} \quad (44)$$

luego las cargas que actúan sobre cada grado de libertad del sistema son en forma genérica,

$$Q_j = Q_{1j} e^{i\omega t} + Q_{2j} e^{-i\omega t} \quad (45)$$

donde  $u$  indica el grado de libertad correspondiente y  $Q_{1j}$ ,  $Q_{2j}$  son magnitudes complejas cuyos valores están recogidos en (39-44).

METODO DE RESOLUCION

Admitiendo que el sistema es lineal - se puede suponer que la respuesta total del mismo a las excitaciones (39-44) será la suma de la respuesta a la carga  $Q_{1j} e^{i\omega t}$  más la respuesta a la carga  $Q_{2j} e^{-i\omega t}$  que no son otra cosa que las conjugadas de las  $Q_{1j} e^{i\omega t}$ . Luego, resolviendo tan solo para  $Q_{1j} e^{i\omega t}$  podemos obtener la respuesta del sistema sin resolver de nuevo.

DISEÑO OPTIMO DE AISLAMIENTO DE MAQUINAS

De acuerdo con todo lo anterior, la expresión (24) puede transformarse en

$$[M]\{\ddot{r}\} + [c]\{\dot{r}\} + [k]\{r\} = \{Q_1\} e^{i\omega t} + \{Q_2\} e^{-i\omega t} \quad (46)$$

que para la carga será

$$[M]\{\ddot{r}\}^* + [c]\{\dot{r}\}^* + [k]\{r\}^* = \{Q_1\} e^{i\omega t} \quad (47)$$

donde  $\{\ddot{r}\}^*$ ,  $\{\dot{r}\}^*$  y  $\{r\}^*$  son las variables de respuesta del sistema a esa carga.

La solución general estará formada por la solución de la homogénea, más una solución particular del sistema no homogéneo. Como solución particular se ensaya

$$\{r\}^* = \{R\} e^{i\omega t} \quad (48)$$

donde los elementos de  $\{R\}$  son complejos que dependen de  $\{Q\}$  de  $\omega$  y de las características propias del sistema, que llevado a (47) dará

$$(-\omega^2 [M] + i\omega [c] + [k]) \{R\} = \{Q_1\} \quad (49)$$

sistema de ecuaciones lineales complejo, que una vez resuelto proporciona los términos  $\{R\}$  con lo que se consigue conocer la solución particular buscada. Si el analista se centra en el estudio de régimen permanente, la respuesta total del sistema será de la forma

$$r_j = 2r_{j0} \cos(\omega t + \phi_j) \quad (50)$$

donde  $r_{j0}$  y  $\phi_j$  son el módulo y el argumento del  $R_j$  correspondiente. Conocidos los desplazamientos en función del tiempo, será inmediato determinar las velocidades y aceleraciones de los grados de libertad del sistema.

CRITERIO DE OPTIMO. FUNCION OBJETIVO

Entre las muchas condiciones posibles de óptimo al estar tratando de optimizar el aislamiento de una máquina, en principio y como primera idea de función objetivo se puede plantear, el que las fuerzas transmitidas por los soportes a la cimentación sean lo más pequeñas posibles. Sin embargo, en determinadas ocasiones, puede desearse también que los movimientos sean los menores posibles, considerando tanto en un caso como en otro, el estudio en un intervalo de frecuencias. Es por ello, que se adopta como función objetivo, la integral en el dominio de la frecuencia de la suma de los valores máximos de la suma de los movimientos según las direcciones de los tres ejes coordenados de los puntos de

unión de la máquina a los soportes, afectada de un coeficiente de ponderación -- mas la suma de las fuerzas máximas transmitidas a la base en dichos soportes, según las mismas direcciones, afectada también del correspondiente coeficiente de ponderación. Así será:

$$F.O_0 = \int_{\omega_{in}}^{\omega_f} [(\text{SUMOV})_{\max} \cdot c_{f0} + (\text{SUFOR})_{\max} \cdot c_{f1}] d\omega \quad (51)$$

donde SUMOV es la suma de los movimientos y SUFOR lo es de las fuerzas. Será necesario calcular los máximos de estos valores para cada frecuencia. El uso de los coeficientes de ponderación  $c_{f0}$  y  $c_{f1}$  permite de acuerdo con el valor que tenga, dar más o menos importancia a una parte que a otra. De acuerdo con esto, el diseño se puede formular como la determinación de un vector  $\{Z\}$  formado por todas las variables de diseño, de forma que haga

$$\text{Min} \int_{\omega_i}^{\omega_f} [(\text{SUMOV})_{\max} c_{f0} + (\text{SUFOR})_{\max} c_{f1}] d\omega \quad (52)$$

además se le impondrán restricciones a las variables de diseño, por cuanto no siempre podrán tener cualquier valor. Así, para variables de diseño que sean valores de rigideces o amortiguamiento, tendrán un valor máximo y mínimo posibles, al igual que para las coordenadas de los puntos en los que se sitúen los soportes, deberán estar en una zona restringida en suma:

$$l_i \leq z_i \leq h_i \quad i=1,2,\dots,n \quad (53)$$

donde  $n$  es la dimensión del vector de diseño.

Además se pueden imponer restricciones a las variables de estado o comportamiento de sistema, como pueden ser limitar los valores máximos de las fuerzas transmitidas y de los movimientos.

RESULTADOS

Para la realización de la optimización, se hace uso de una variante del programa OPRIS [6] que admite restricciones, y que combina el uso de cuatro algoritmos diferentes, así como de otro programa que efectúa el algoritmo "Complex" [7].

En la realización numérica se toma como modelo una máquina cuyas características inerciales sean:

DISEÑO OPTIMO DE AISLAMIENTOS DE MAQUINAS

$M = 1500 \text{ Kg.m.}$

$I_{xx} = 427.18 \text{ Kg.m.}^2$

$I_{yy} = 419.28 \text{ Kg.m.}^2$

$I_{zz} = 726.54 \text{ Kg.m.}^2$

La máquina se encuentra sometida a la acción de dos motores cuyas características son:

-Motor 1-	-Motor 2-
$D = 0.025 \text{ Kg}_m \cdot \text{m}$	$D = 0.018 \text{ Kg}_m \cdot \text{m}$
$x_{go} = 0$	$x_{go} = 0.5 \text{ m}$
$y_{go} = -0.5 \text{ m}$	$y_{go} = 0.25 \text{ m}$
$z_{go} = -0.6 \text{ m}$	$z_{go} = -0.4 \text{ m}$
$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
$\beta = 0^\circ$	$\beta = 90^\circ$

El intervalo de frecuencias en el que se realiza la integración será:

$\omega_i = 1000 \text{ r.p.m.}$

$\omega_f = 2000 \text{ r.p.m.}$

Se considera como vector de diseño el formado por los valores de las rigideces de los soportes, sus amortiguamientos, así como a la posición en que se colocarán. El vector  $\{Z\}$  será de la forma:

$$\{Z\}^T = \{k_{1x}, k_{2x}, k_{3x}, k_{4x}, k_{1y}, k_{2y}, k_{3y}, k_{4y}, k_{1z}, k_{2z}, k_{3z}, k_{4z}, c_{1x}, c_{2x}, c_{3x}, c_{4x}, c_{1y}, c_{2y}, c_{3y}, c_{4y}, c_{1z}, c_{2z}, c_{3z}, c_{4z}, x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3, z_4\}$$

A los valores de las variables de diseño se les imponen las siguientes restricciones:

$2 \cdot 10^5 \leq k \leq 4 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

$300 \leq c \leq 4000 \frac{\text{N} \cdot \text{seg}}{\text{m}}$

estando las posiciones posibles de los aisladores restringidas a las zonas rayadas en la figura 6. Además al sistema se le imponen las restricciones de funcionamiento siguiente

$MOV_{\max} \leq 0,002 \text{ m}$

$FTR_{\max} \leq 1500 \text{ N}$

De acuerdo con todos estos datos se realiza la optimización para varios casos con distinto número de variables de diseño a determinar y en la consideración o no de los movimientos en la función objetivo.

-Caso 1- a.

Se consideran como variables de diseño los 24 primeros términos de vector de diseño  $\{Z\}$  quedando fijas las posiciones de los soportes en los valores que se indican en la Tabla I, y se representan en la figura 6

TABLA I

i	$X_i$	$Y_i$	$Z_i$
1	0.5	-1.0	-0.7
2	0.5	1.0	-0.7
3	-0.5	-1.0	-0.7
4	-0.5	1.0	-0.7

- Caso 1.(a,b)
- △ Caso 2.a
- ▲ Caso 2.b

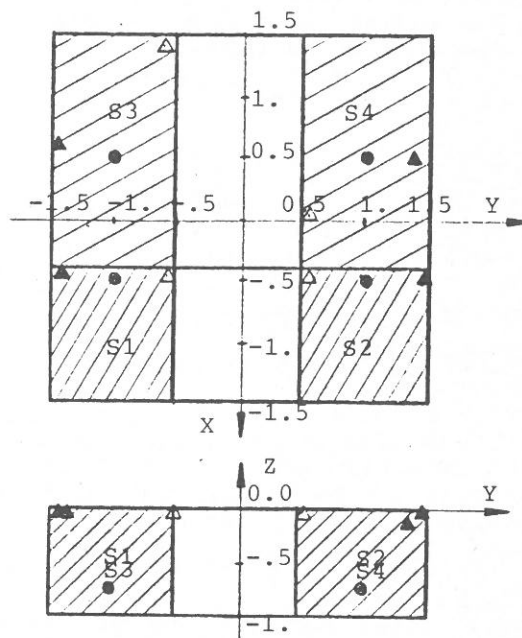


Figura 6. Zonas posibles de fijación de los aisladores. Resultados obtenidos.

Además, el coeficiente de ponderación de los movimientos se hace igual a cero con lo que se minimizan las fuerzas transmitidas en el intervalo de frecuencias.  $To$



DISEÑO OPTIMO DE AISLAMIENTO DE MAQUINAS

mando como valores iniciales para la optimización

$$k_i = 10^6 \frac{N}{m} \quad i=1....12$$

$$c_i = 600 \frac{N \cdot \text{seg}}{m} \quad i=1....12$$

que se representan con línea continua - en las figuras 7 y 8 y que corresponde una función objetivo de partida de valor

$$F.O_{in} = 86648.14$$

quedando reducida después de la optimización a

$$F.O_{fi} = 99.55$$

con el vector de diseño indicado en las figuras 7 y 8, en las que se recogen los resultados de los cuatro casos estudiados.

-Caso 1- b.

Si en vez de considerar  $c_{f0}$  como cero, y teniendo en cuenta la diferencia entre los ordenes de magnitud, se toma como  $c_{f0} = 10^7$ , se obtiene para el mismo vector de partida una función objetivo inicial de

$$F.O_{in} = 950333.6$$

que después de realizada la optimización, queda reducida a

$$F.O_{fi} = 30160.262$$

- Caso 1.a
- Caso 1.b
- △ Caso 2.a
- ▲ Caso 2.b

--- Vector inicial

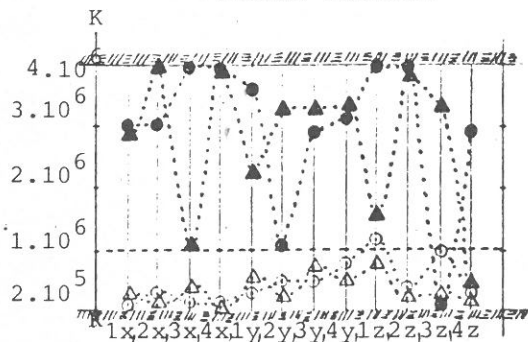


Figura 7. Resultados obtenidos para las rigideces de los aisladores en los distintos casos.

- Caso 1.a
- Caso 1.b
- △ Caso 2.a
- ▲ Caso 2.b

--- Vector inicial

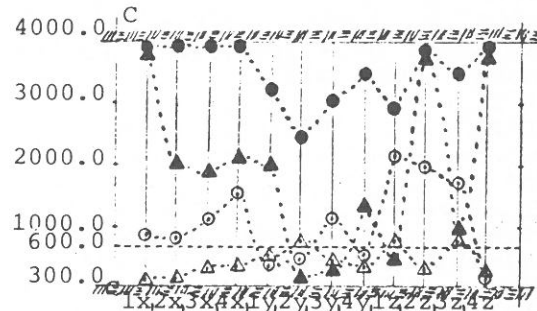


Figura 8. Resultados obtenidos para los valores del amortiguamiento en los distintos casos.

-Caso 2- a.

En este caso las posiciones de los aisladores no serán fijas y por tanto, el vector de diseño tendrá 36 variables. Tomando como vector inicial el mismo que en el caso anterior, añadiendo como valores iniciales de las coordenadas de posición los que antes se consideraron fijos. Tras la optimización se obtiene, considerando sólo las fuerzas transmitidas, que

$$F.O_{fin} = 42.06704$$

La posición de los soportes obtenida es la presentada en la figura 6.

Realizando la misma optimización, pero con  $c_{f0} = 10^7$ , se obtiene

$$F.O_{fin} = 92861.922$$

CONCLUSIONES

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, y los resultados obtenidos, se puede decir que la utilización de la metodología propuesta permita la elección adecuada de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento que deberán poseer los elementos que constituyan la sustentación de una máquina. De igual forma, se determina la posición idónea de los mismos.

El proceso de determinación de estos valores óptimos es independiente de los materiales elegidos para su realización física, siempre y cuando tengan las ca-

DISEÑO OPTIMO DE AISIAMIENTO DE MAQUINAS

racterísticas deseadas. La formulación es independiente del tamaño y forma física de la máquina, admitiendo que existan múltiples posibles fuentes de excitación.

REFERENCIAS

- 1.- HUNT, J.B. "Dynamic vibration absorbers" Mechanical Engineering Publications, Ltd, 1979.
- 2.- SNOWDON, J.C. "Vibrations and shock in damped mechanical systems" Wiley 1968.
- 3.- SILVA, C.W. "An algorithm for the optimal design of passive vibrations controllers for flexible systems" Journal of Sound and Vibrations, 1981, 74 pp. 495-502.
- 4.- KWAK, B.N., HAUG, E.J., "Parametric optimal design" Journal of Optimization Theory and Applications. Vol. 20, n° 1, Sep. 1976.
- 5.- HAUG, E.J., ARORA, J.S., "Applied optimal design" Wiley, 1979.
- 6.- GARCIA-LOMAS, J., "Mecanismos con elementos de dimensión variable. Síntesis óptima de generación de trayectorias". Tesis Doctoral. Sevilla, Febrero, 1982.
- 7.- RAO, S.S., "Optimization Theory and Applications". Wiley, 1978.