

ANALISIS DINAMICO DE CADENAS CINEMATICAS CON ELEMENTOS ELASTICOS

Riesco, P., García-Lomas, J., Domínguez, J.

Escuela T.S. Ingenieros Industriales de Sevilla.

**Resumen.** Se presenta aquí un tratamiento analítico de la evolución de una cadena de barras - en el plano, estudiándose conjuntamente la deformación elástica y el movimiento como sólido rígido. El problema queda descrito en términos de una serie de ecuaciones de vibración forzada en medio continuo. Las ecuaciones obtenidas componen un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que es posible convertir en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante un estudio modal del problema. El contenido físico del problema queda caracterizado por una gama de grupos adimensionales que controlan el movimiento.

1. INTRODUCCION

El procedimiento más común de estudio acoplado movimiento-deformación en mecanismos planos flexibles es la generación Lagrangiana de ecuaciones a partir de un esquema de elementos finitos [3], [4]. Un enfoque más directo es expresar la condición de equilibrio de un diferencial de longitud de barra genérico, atendiendo a la prescripción de compatibilidad de deformaciones y a la ley de comportamiento del material. Este último método ha sido aplicado últimamente, sin llegar a una formulación general, para casos de mecanismos simples con una sola barra flexible [1] [2]. Se pretende a continuación extender esta técnica a el caso general de un mecanismo plano con barras flexibles.

2. ECUACIONES DE LA BARRA

Sea una barra  $i$  de directriz recta, cuya referencia de deformación está definida por una orientación  $\theta_i$  y la posición de su origen A. Sea un punto P en la posición  $x_i$  de la barra sometido a una deflexión transversal  $v_i$  y axial  $u_i$ .

La posición, velocidad y aceleración absolutas de P se miden sobre unos ejes fijos en cada momento que por conveniencia son paralelos a la referencia rígida de la barra y pasan por el origen absoluto.

Una vez obtenida la aceleración absoluta de P

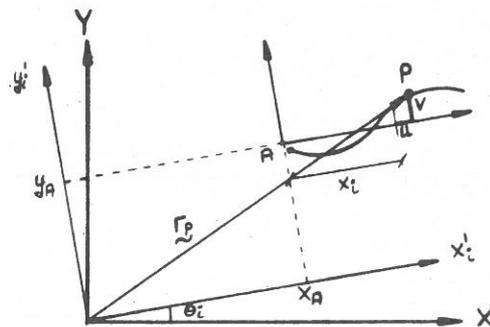


Fig. 1: Barra genérica deformada.

$$\ddot{r}^P = \begin{pmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{v}_i \end{pmatrix} + 2\dot{\theta}_i \begin{pmatrix} -\dot{v}_i \\ \dot{u}_i \end{pmatrix} + \ddot{\theta}_i \begin{pmatrix} -v_i \\ x_i + u_i \end{pmatrix} - \dot{\theta}_i^2 \begin{pmatrix} x_i + u_i \\ v_i \end{pmatrix} \quad (1)$$

el equilibrio de la rebanada P bajo una distribución de cortantes Q, axiles N y flectores M, se expresa como:

$$q_{iX} + N'_i = m_i \ddot{x}^P \quad (2)$$

$$q_{iY} + Q'_i = m_i \ddot{y}^P \quad (3)$$

$$Q_i = N_i v_i' - M_i' + \rho I_i (\ddot{\theta}_i + \ddot{v}_i') \quad (4)$$

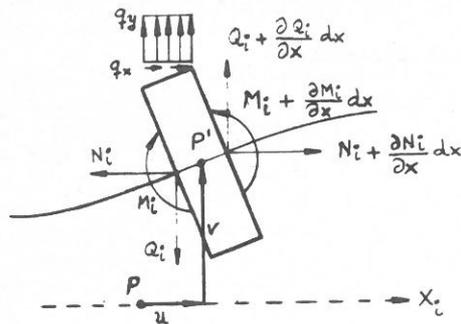


Fig. 2: Acciones sobre el elemento.

donde  $(q_{ix}, q_{iy})$  es una carga distribuida sobre la barra  $i$ ,  $m_i$  es la masa por unidad de longitud en el punto  $P$ ,  $\rho$  es la densidad del material y  $I_i$  la inercia geométrica de la sección en  $P$ . Haciendo uso de las leyes de comportamiento

$$N = EA u' \quad , \quad M = EI v'' \quad (5)$$

se obtiene

$$q_{ix} + EA_i u_i'' = m_i (\ddot{x}_A + \ddot{u}_i - 2\dot{\theta}_i \dot{v}_i - \ddot{\theta}_i v_i - \dot{\theta}_i^2 (x_i + u_i)) \quad (6)$$

$$q_{iy} - EI_i v_i^{iv} + EA_i (u_i' v_i')' = m_i (\ddot{y}_A + \ddot{v}_i + 2\dot{\theta}_i \dot{u}_i + \ddot{\theta}_i (x_i + u_i) - \dot{\theta}_i^2 v_i) \quad (7)$$

A continuación se evalúa la frecuencia de excitación  $\omega$ , se elige una longitud de referencia  $l_0$  en el sistema y se adimensionaliza:

$$\tau = \omega t \quad , \quad \alpha_i = \frac{l_i}{l_0} \quad , \quad \xi_i = \frac{x_i}{l_i} \quad , \quad \zeta_i = \frac{u_i}{l_i} \quad ,$$

$$\eta_i = \frac{v_i}{l_i} \quad , \quad \phi_i = \theta_i \quad , \quad \dot{\phi}_i = \frac{d\theta_i}{d\tau} \quad , \quad \ddot{\phi}_i = \frac{d^2\theta_i}{d\tau^2} \quad ,$$

$$\bar{\gamma}_i = \frac{q_{iy}}{m_i l_i \omega^2} \quad , \quad \bar{\beta}_i = \frac{q_{ix}}{m_i l_i \omega^2} \quad , \quad \lambda_i = \frac{EA_i}{m_i l_i^2 \omega^2} \quad ,$$

$$\mu_i = \frac{EI_i}{m_i l_i^4 \omega^2} \quad , \quad \rho_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i}$$

Se llega así a las ecuaciones adimensionales de la barra  $i$

$$\lambda_i \zeta_i'' + \bar{\beta}_i = |\ddot{x}_A|_i + \zeta_i - 2\dot{\phi}_i \dot{\eta}_i - \ddot{\phi}_i \eta_i - \dot{\phi}_i^2 (\zeta_i + \zeta_i) \quad (8)$$

$$-\mu_i \eta_i^{IV} + \lambda_i (\eta_i' \zeta_i') + \bar{\gamma}_i = |\ddot{y}_A|_i + \ddot{\eta}_i + 2\dot{\phi}_i \dot{\zeta}_i + \ddot{\phi}_i (\zeta_i + \zeta_i) - \dot{\phi}_i^2 \eta_i \quad (9)$$

donde  $|\ddot{r}_A|_i = \begin{pmatrix} |\ddot{x}_A|_i \\ |\ddot{y}_A|_i \end{pmatrix}$  es la aceleración absoluta de  $A$  con la referencia y adimensionalización propias de la barra  $i$  a la que pertenece.

Es fácil ver que, siendo  $(0, 1, \dots, j, \dots, i)$  una cadena de barras articuladas y siendo  $A_j$  el punto inicial de la barra  $j$  (su articulación con la  $j-1$ ), la expresión de  $|\ddot{r}_{Ai}|_i$  es de la forma:

$$|\ddot{r}_{Ai}|_i = \sum_{j=i}^0 R_{ji} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \begin{pmatrix} \hat{\zeta}_j - 2\dot{\phi}_j \hat{\eta}_j - \ddot{\phi}_j \hat{\eta}_j - \dot{\phi}_j^2 (1 + \hat{\zeta}_j) \\ \hat{\eta}_j + 2\dot{\phi}_j \hat{\zeta}_j + \ddot{\phi}_j (1 + \hat{\zeta}_j) - \dot{\phi}_j^2 \hat{\eta}_j \end{pmatrix} \quad (10)$$

donde

$$R_{ji} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_j - \theta_i) & -\sin(\theta_j - \theta_i) \\ \sin(\theta_j - \theta_i) & \cos(\theta_j - \theta_i) \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\hat{\eta}_j = \eta_j \Big|_{\xi_j=1}$$

incorporando (10) a (8) y (9) se obtiene una pareja de ecuaciones derivadas parciales por barra.

Es preciso añadir tantas ecuaciones de cierre como lazos independientes tenga el sistema, del tipo:

$$\sum \alpha_j R_j \begin{pmatrix} 1 + \hat{\zeta}_j \\ \hat{\eta}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

donde  $K$  es un vector constante. Si alguna unión

intermedia es deslizante se sustituye  $\begin{pmatrix} 1 + \hat{\zeta}_j \\ \hat{\eta}_j \end{pmatrix}$  por  $\begin{pmatrix} \beta_j + \hat{\zeta}_j^* \\ \hat{\eta}_j^* \end{pmatrix}$  siendo  $\beta_j$  la longitud variable de la barra y  $\zeta_j^* = \zeta_j \Big|_{\beta_j}$ ,  $\eta_j^* = \eta_j \Big|_{\beta_j}$ .

Si el guiado del mecanismo es cinemático — hay que añadir la prescripción de posición para la barra de entrada.

### 3.1. Condiciones de contorno

Es preciso especificar dos condiciones para cada función axil  $\zeta_i$  y cuatro para la transver-

sal  $\eta_i$ . El origen de estas condiciones es diverso:

a) Elección de la referencia de deformación. Da lugar a dos condiciones para  $\eta_i$  y otra para  $\zeta_i$ .

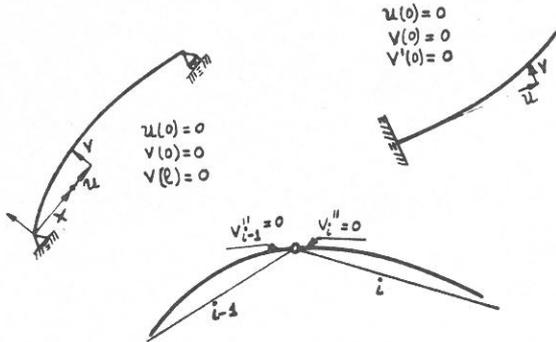


Fig. 3: Condiciones de referencia y momento nulo.

b) Condiciones de momento nulo en las articulaciones intermedias. Si el guiado del sistema es dinámico, se conoce el momento aplicado a la entrada y puede añadirse una condición más

$$M_0 = EI v''_0 \quad (12)$$

c) Ecuaciones de equilibrio de las articulaciones intermedias. Su expresión adimensional es:

$$\alpha_{i-1}^2 R_{i-1} \begin{pmatrix} \lambda_{i-1} \hat{\zeta}_{i-1} \\ -\mu_{i-1} \hat{\eta}_{i-1} + \lambda_{i-1} \hat{\zeta}_{i-1} \hat{\eta}_{i-1} \end{pmatrix} = \alpha_i^2 R_i \begin{pmatrix} \lambda_i \zeta_i \\ -\mu_i \hat{\eta}_i + \lambda_i \zeta_i \hat{\eta}_i \end{pmatrix} \quad (13)$$

donde  $\zeta_i = \zeta \Big|_{\xi=0}$ ,  $\hat{\zeta}_i = \zeta \Big|_{\xi=1}$ .

Se dispone pues de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, acoplado con un conjunto de ecuaciones algebraicas de cierre que se completa con las correspondientes condiciones iniciales en posición y velocidad, y las de contorno geométricas y dinámicas (implícitas).

#### 4. CONVERSION EN UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Es preciso en primer lugar eliminar el carácter mixto algebraico diferencial del sistema anterior, lo cual se consigue substituyendo las ecuaciones de cierre en posición por sus derivadas segundas en el tiempo.

A continuación se pretende eliminar la variable espacial. Para ello se aplica la técnica de los residuos ponderados, expresando las funciones de deformación como el producto escalar de un vector de funciones de forma por un vector de funciones del tiempo. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de equilibrio (8)-(9) e integrando con respecto a la variable espacial sobre la longitud de la barra, se reduce el problema a un sistema diferencial ordinario cuyas incógnitas son las variaciones temporales de las amplitudes.

Sea, para una barra genérica,  $\zeta = \phi(\xi) f(\tau)$  y  $\eta = \psi^T(\xi) g(\tau)$ . Para poder ponderar los residuos hace falta que las funciones de prueba  $\phi$  y  $\psi$  satisfagan todas las condiciones de contorno. Dado que no es posible disponer a priori de funciones de forma que satisfagan las condiciones implícitas (13), para generar funciones de forma manejables se substituyen estas condiciones por condiciones homogéneas, es decir, de esfuerzos nulos. Posteriormente se introducen las reacciones entre barras como acciones aplicadas exteriormente.

Para incluir en la formulación las fuerzas puntuales se define

$$\bar{\beta} = \beta(\xi, \tau) + \sum B_K(\tau) \delta_K \quad (14)$$

$$\bar{\gamma} = \gamma(\xi, \tau) + \sum \Gamma_K(\tau) \delta_K \quad (15)$$

donde  $\delta_K$  es la función delta de Dirac aplicada en  $\xi_K$ . Ponderando e integrando con respecto a  $\xi$  el sistema (8-9) se obtiene:

$$(\beta, \phi) + \sum B_K \phi \Big|_{\xi_K} + \lambda(\phi, \phi'') f = |\ddot{x}_A| (\phi, 1) + \ddot{f}(\phi, \phi) - 2\dot{\phi}(\phi, \psi^T) \dot{g} - \ddot{\phi}(\phi, \psi^T) g - \dot{\phi}^2((\phi, \xi) + (\phi, \phi) f) \quad (16)$$

$$(\gamma, \psi) + \sum \Gamma_K \psi \Big|_{\xi_K} + \lambda(\psi, (\phi' \psi^T) g) f - \mu(\psi, \psi^{IVT}) g = |\ddot{y}_A| (\psi, 1) + \ddot{\phi}((\psi, \xi) + (\psi, \phi) f) + 2\dot{\phi} \dot{f}(\psi, \phi) + (\psi, \psi^T) \ddot{g} - \dot{\phi}^2(\psi, \psi^T) g \quad (17)$$

la notación ( ) indica producto expandido seguido de integración.

$$(\psi, \psi^{IVT}) = \int_0^1 \psi \psi^{IVT} d\xi$$

Se dispone de un sistema diferencial que hay que integrar en el tiempo a partir de unas condiciones iniciales

$$\tau = 0, f = f_0, g = g_0, \dot{f} = \dot{f}_0$$

$$\dot{g} = \dot{g}_0$$

#### 4.1. Evaluación de reacciones

Sólo una parte de las reacciones vinculares

precisa ser calculada. En efecto, una elección - adecuada de la referencia rígida permite que la deformada pase por cero en al menos una de las uniones, por lo que las reacciones en tales puntos no interesan ya que su trabajo es nulo.

Como ejemplo, en la barra de Fig. 4 pueden - adoptarse dos modelos diferentes:

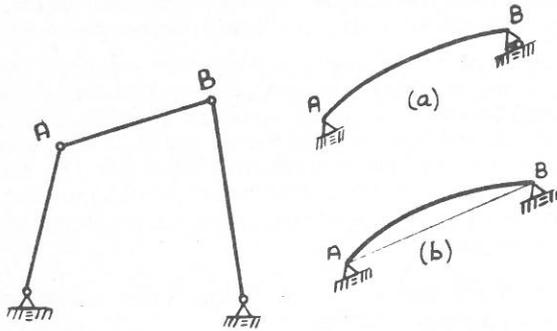


Fig. 4: Reacciones que dan trabajo no nulo.

a) Sólo la reacción horizontal en B da lugar a - un trabajo. Según el resto de las reacciones, el desplazamiento es nulo.

b) No hace falta conocer ninguna reacción. Esta simplificación conlleva sin embargo, la pérdida de acoplamiento elástico rígido ya que se prescribe una longitud invariable de barra.

Para proceder a la evaluación de las reacciones necesarias, aparecen dos vías:

1) Las reacciones actuantes sobre la barra i se deducen de las deformaciones en las barras contiguas aplicando la ley de comportamiento en las uniones y después la ecuación de equilibrio (13).

2) Mediante equilibrio global de las barras concurrentes en la unión seguido de equilibrio local de la unión se determinan todas las reacciones en ella.

La principal limitación de 1) estriba en que dado que la función de forma reproduce sólo aproximadamente la deformada real, al derivar varias veces para obtener los esfuerzos locales en la unión los errores se acentúan hasta valores inaceptables. Es por ello preferible hacer uso del segundo procedimiento.

5. ESTUDIO CUASIESTÁTICO

La solución permanente o cuasiestática es la respuesta a la que se llega cuando existe amortiguamiento interno tras un número suficiente de ciclos. Corresponde a una sucesión de posiciones de equilibrio en que este se alcanza sin oscilaciones adaptándose en cada momento a las cargas de inercia actuantes.

A partir de la formulación de (16)-(17) puede generarse la componente estática haciendo cero todas las velocidades y aceleraciones de deformación  $\dot{f}$ ,  $\dot{g}$ ,  $\ddot{f}$ ,  $\ddot{g}$ . Surge así un sistema algebraico compuesto por:

a) Ecuaciones de deformación de las barras:

$$(\beta, \phi) + \sum B_K \phi | \epsilon_K + \lambda(\phi'', \phi) f = | \ddot{x}_A |^* (\phi, 1) + \ddot{\phi}(\phi, \psi^T) g - \dot{\phi}^2((\epsilon, \phi) + (\phi, \phi) f) \quad (18)$$

$$(\psi, \gamma) + \sum \Gamma_K \psi | \epsilon_K + \lambda(\psi, \psi^{IVT}) g + \lambda f(\psi, (\phi' \psi^T)') g = | \ddot{y}_A |^* (\psi, 1) + \ddot{\psi} | (\psi, \epsilon) + f(\psi, \phi) | - \dot{\psi}^2(\psi, \psi^T) g \quad (19)$$

donde

$$| \ddot{x}_A |^* = | \ddot{x}_A | | \dot{f}_i, \dot{g}_i, \ddot{f}_i, \ddot{g}_i = 0$$

b) Ecuaciones de cierre en posición, velocidad y aceleración. Las incógnitas son las amplitudes de deformación y la posición, velocidad y aceleración de las barras  $\phi_j$ ,  $\dot{\phi}_j$  y  $\ddot{\phi}_j$ . Es sin embargo, más cómodo sustituir directamente en a) los resultados de un análisis como mecanismo rígido. Se obtiene así un sistema cuasilineal de fácil resolución iterativa

$$A y = B + f(y) \quad (20)$$

y es el vector de amplitudes de deformación.

Es importante destacar como desde la forma inicial del problema, sistema mixto algebraico diferencial en derivadas parciales con condiciones de contorno implícitas, se llega a esta expresión sencilla que en gran parte de los casos da resultados altamente satisfactorios.

6. EJEMPLOS

Se ilustra seguidamente la Teoría anterior mediante la resolución numérica de tres ejemplos de los que se disponen resultados [4] obtenidos mediante otras técnicas. Ver la referencia citada para conocer los datos.

6.1. Mecanismo biela manivela

Se trata de una biela manivela sin excentricidad cuya manivela es infinitamente rígida y su acoplador es flexible longitudinal y transversalmente. Se desprecia el amortiguamiento interno. La manivela gira a velocidad angular constante  $\omega$ . Se desprecia la masa de la deslizadora.

Los números adimensionales de rigidez son, para los datos del ejemplo:

$$\lambda = 18246. \quad \mu = 0.495$$

Se hace uso de un sólo nodo para la deformada transversal y longitudinal del acoplador, que es modelado como viga biapoyada deslizante en B

$$\zeta = f(\tau) \phi(\xi) \quad \eta = g(\tau) \psi(\xi)$$

$$\phi = \text{sen } \pi/2 \xi \quad \psi = \text{sen } \pi \xi$$

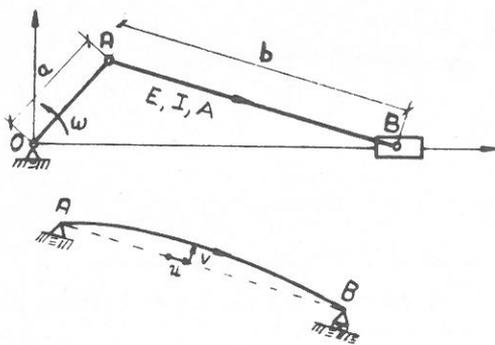
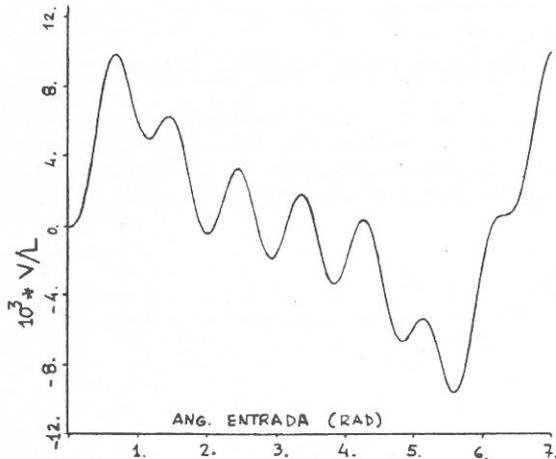


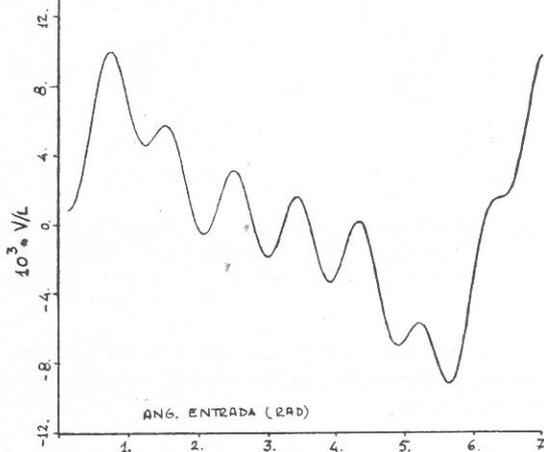
Fig. 5: Mecanismo biela-manivela. Modelo de la biela.

La sección longitudinal en B, única que trabaja, puede evaluarse por equilibrio de la unión B una vez conocida la reacción transversal en dicho punto, que a su vez se determina a través de la ley de comportamiento o bien por equilibrio de momentos con respecto a A.

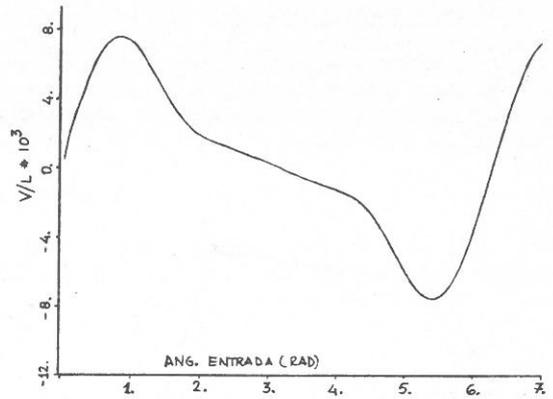
Se presentan los resultados de la deflexión transversal y alargamiento de la biela para los dos primeros ciclos de excitación así como la respuesta estática obtenida.



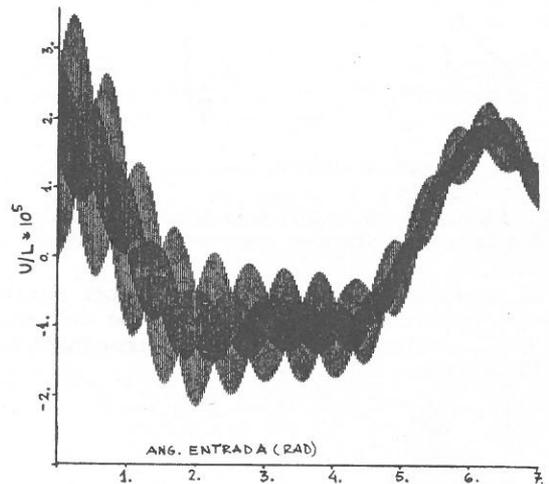
G.1. Deflexión transversal (D.T.).



G.2. Segundo ciclo de la D.T.



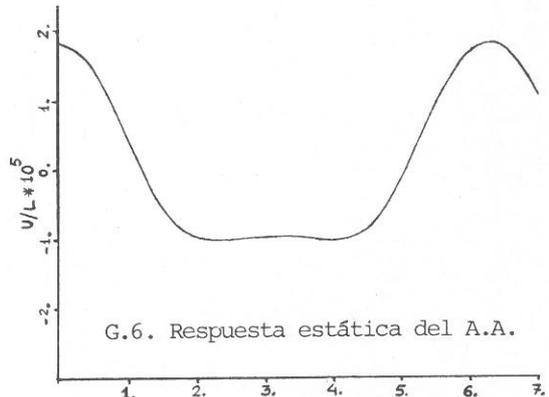
G.3. Respuesta estática de la D.T.



G.4. Alargamiento adimensional del mecanismo (A.A.).



G.5. Segundo ciclo del A.A.



G.6. Respuesta estática del A.A.

6.2. Mecanismo cuatro barras

El cuadrilátero articulado de la Fig. 6 — consta de tres barras flexibles. La manivela gira a velocidad angular constante. Se adimensionaliza con la frecuencia y longitud de la manivela.

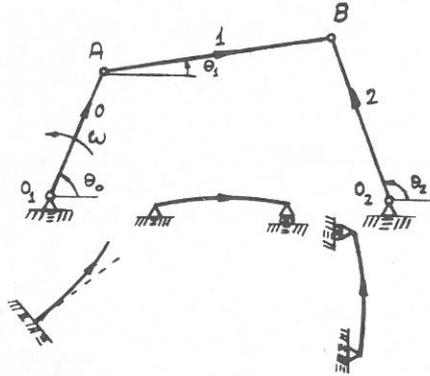
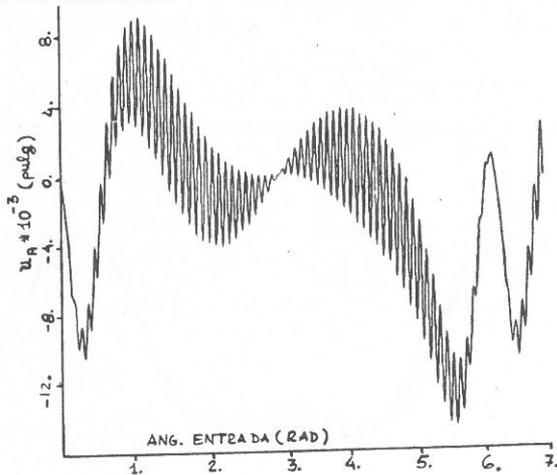


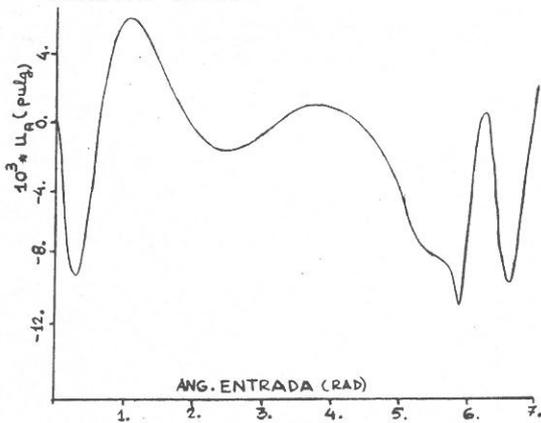
Fig. 6: Cuatro barras. Modelos empleados.

La manivela es modelizada como un voladizo y las dos barras restantes como vigas biapoyadas.

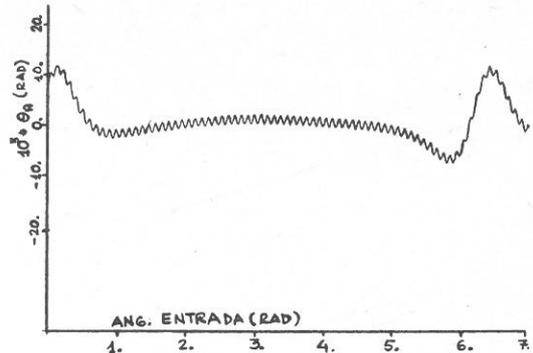
Se presenta la componente horizontal absoluta de la deflexión en A y el ángulo de deformación en A, contrastando la solución dinámica con la estática.



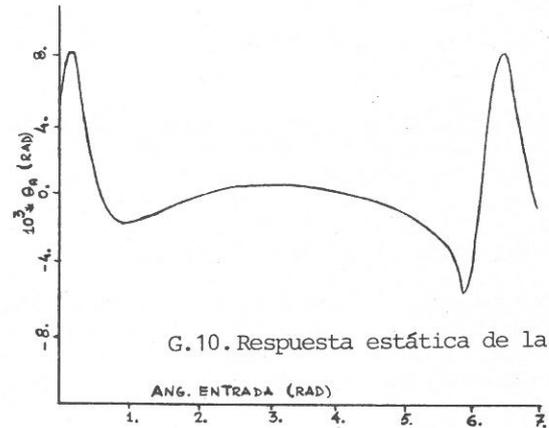
G.7. Deflexión horizontal del extremo de la manivela (D.H.).



G.8. Régimen estático de la D.H.



G.9. Deformación angular en el extremo de la manivela (D.A.).



G.10. Respuesta estática de la D.A.

6.3. Mecanismo biela manivela invertido

El biela manivela invertido de la Fig. 7 — consta de dos barras flexibles. Se tiene en cuenta la masa localizada de la deslizadora. La manivela gira con una velocidad angular constante.

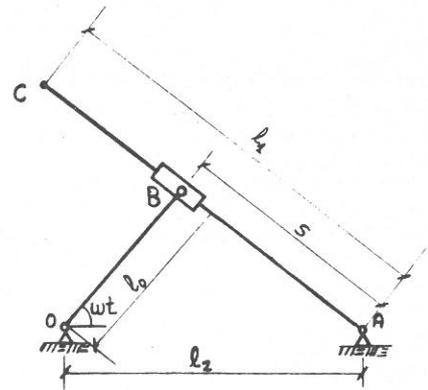


Fig. 7: Biela manivela invertido.

El modelo adoptado para la manivela es un voladizo y el usado para la barra acopladora, una viga biapoyada de distancia variable entre apoyos.

Este último modelo obliga a modificar el esquema de separación de variables seguido. Se define en efecto

$$\eta = g \psi \begin{cases} g = g(\tau) \\ \psi = \psi(\xi, \beta) \\ \beta = \beta(\tau) \end{cases}$$

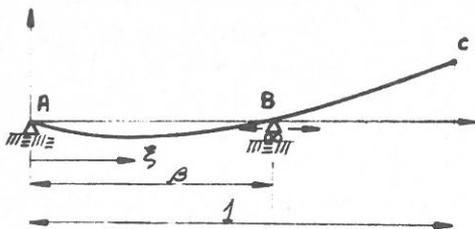
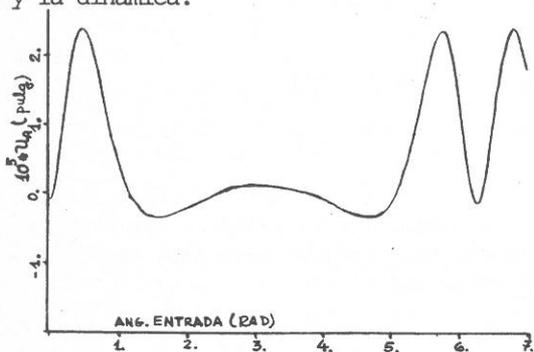


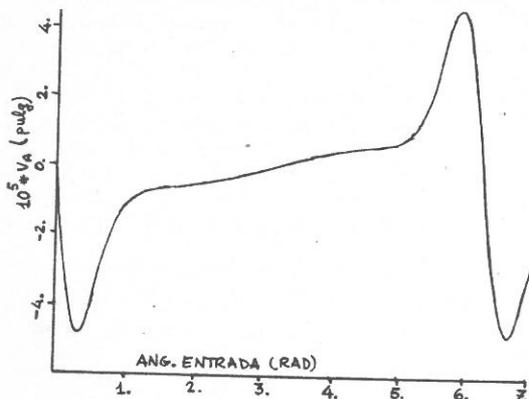
Fig. 8: Modelo de la barra acoplada.

apareciendo con ello una nueva formulación de las ecuaciones obtenidas mediante residuos ponderados.

Se muestran los dos componentes de deformación del extremo A de la manivela, según y perpendicularmente a la biela. En este caso no se aprecian diferencias entre la respuesta estática y la dinámica.



G.11. Deflexión según la dirección de la barra de salida del extremo de la manivela.



G.12. Deflexión perpendicular a la barra de salida del extremo de la manivela.

7. CONCLUSIONES

Se ha presentado una forma general de las ecuaciones que rigen la dinámica de un mecanismo flexible. Queda abierta la posibilidad de una resolución numérica directa del sistema en derivadas parciales original. Se desarrolla un proceso que conduce a formas sucesivamente más simples del problema, cuya resolución numérica queda por tanto considerablemente facilitada. Es particu-

larmente útil la forma cuasilineal de las ecuaciones del problema cuasiestático. Los números adimensionales permiten confrontar componentes de la respuesta y suministran un orden de magnitud de las amplitudes y frecuencias de vibración.

8. REFERENCIAS

1. Badlani, M., Midha, A., "Effect of Internal Material Damping on the Dynamics on a Slider-Crank Mechanism". ASME paper No. 82-DET-2.
2. Chu, S.C., Pan, K.C., "Dynamic Response of a High Speed Slider Crank Mechanism with an Elastic Connecting Rod". Journal of Engineering for Industry, pp. 542-550, May 1975.
3. Shabana, A.A. "Dynamic Analysis of Large Scale Inertia Variant Flexible Systems". The University of Iowa, PH.D. Thesis, 1982.
4. Song, J.O. "Dynamic Analysis of Flexible Mechanism", The University of Iowa, PH. D. Thesis, 1979.