

# Trabajo Fin de Máster Máster en Ingeniería Aeronáutica

Planificación y guiado óptimos de la trayectoria de ascenso a órbita de un vehículo lanzador sometida a perturbaciones y errores de modelado

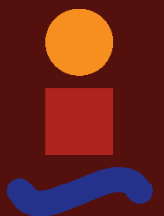
Autor: Roberto Quero Campos

Tutores: Antonio Franco Espín

Rafael Vázquez Valenzuela

**Dpto. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de  
Fluidos  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2021





Trabajo Fin de Máster  
Máster en Ingeniería Aeronáutica

**Planificación y guiado óptimos de la trayectoria  
de ascenso a órbita de un vehículo lanzador  
sometida a perturbaciones y errores de  
modelado**

Autor:

Roberto Quero Campos

Tutores:

Antonio Franco Espín  
Profesor Contratado Doctor

Rafael Vázquez Valenzuela  
Profesor Titular

Dpto. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2021



Trabajo Fin de Máster: Planificación y guiado óptimos de la trayectoria de ascenso a órbita de un vehículo lanzador sometida a perturbaciones y errores de modelado

Autor: Roberto Quero Campos  
Tutores: Antonio Franco Espín  
Rafael Vázquez Valenzuela

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:



# Agradecimientos

---

**E**N estos últimos tiempos de gran incertidumbre y sacrificio, todo el apoyo recibido ha sido innegablemente influyente. Este documento supone el final de una etapa llena de experiencias, pero asimismo el inicio de nuevos e innumerables caminos apasionantes todavía por recorrer. Todo esto no habría sido posible sin el soporte incondicional de mi familia, amigos, profesores y compañeros. Es imposible nombrar a todo aquel que contribuyó de una u otra manera a que hoy esté escribiendo esto aquí, pero sin duda todos entráis en estos agradecimientos. Por último, quería dar las gracias, de manera especial, a mis tutores Antonio y Rafael, por su dedicación tanto a nivel docente como personal, y a la confianza que han tenido en mí para la realización de este proyecto. ¡Gracias a todos!

*Roberto Quero Campos*  
*Sevilla, 2021*





# Resumen

---

**E**N este proyecto se explora el proceso de planificación y guiado óptimos de la trayectoria de un vehículo lanzador multietapa. Para la definición de la trayectoria óptima de referencia se utiliza un método de colocación indirecto, aplicando la Teoría de Control Óptimo, formulando el Principio del Mínimo de Pontryagin y resolviendo numéricamente el problema de contorno resultante. El sistema de guiado se ha basado en el desarrollo y la sintonización de controladores LQR de horizonte finito, con término integral y sistema *anti-windup*. Por último, se han evaluado las prestaciones del sistema completo sometido a distintas combinaciones de perturbaciones y errores de modelado, obteniendo resultados satisfactorios.



# Abstract

---

**I**N this project the process of development of the optimal trajectory planning and guidance of a multistage rocket is explored. To define the optimal reference trajectory an indirect transcription method is used, by first utilizing the Optimal Control Theory, formulating Pontryagin's Minimum Principle, and then numerically solving the resulting boundary value problem. The guidance system is based on the development and tuning of finite-horizon LQR controllers, including integral terms and an anti-windup system. Lastly, the performance of the overall system has been assessed, obtaining successful results.



# Índice

---

<i>Resumen</i>	III
<i>Abstract</i>	V
<i>Notación</i>	IX
<i>Glosario</i>	XI
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Motivación	1
1.2 Objetivo y alcance del proyecto	3
1.3 Estructura del documento	4
<b>2 El lanzador: Vega C</b>	<b>5</b>
2.1 Generalidades	5
2.2 Características	6
2.3 Corrección de empuje	8
2.4 Perfil de ascenso: tramos	11
<b>3 Modelado de la dinámica</b>	<b>13</b>
3.1 Hipótesis	14
3.1.1 Generalidades	14
3.1.2 Propulsión	15
3.1.3 Aerodinámica	15
3.1.4 Perfil de ascenso	17
3.2 Ecuaciones del movimiento	17
3.2.1 Adimensionalización	18
<b>4 Planificación de trayectoria: formulación</b>	<b>21</b>
4.1 Formulación del problema de optimización	22
4.2 Método de continuación	25
<b>5 Planificación de trayectoria: resultados</b>	<b>29</b>
5.1 Ascenso vertical: condiciones iniciales	29
5.2 Aproximación inicial	31
5.3 Problema monoetapa	35
5.4 Problema multietapa	38
5.4.1 Comentarios adicionales sobre la saturación del controlador	42

<b>6</b>	<b>Formulación del problema de guiado</b>	<b>43</b>
6.1	Descripción del sistema	44
6.2	Linealización del sistema	45
6.3	Diseño básico del controlador LQR	45
6.4	Mejoras al controlador LQR: término integral	46
6.5	Anti-windup	47
<b>7</b>	<b>Sintonización del controlador</b>	<b>49</b>
7.1	Casos de estudio	50
7.1.1	Error en la estimación inicial de los estados	50
7.1.2	Perturbaciones impulsivas (ráfagas)	50
7.1.3	Ruido de los sensores	50
7.1.4	Errores de modelado	51
7.2	Sintonización preliminar	52
7.3	Análisis de sensibilidad	53
<b>8</b>	<b>Evaluación del desempeño del sistema</b>	<b>57</b>
8.1	Respuesta al error en la estimación inicial de los estados	58
8.2	Respuesta a perturbaciones impulsivas (ráfagas)	63
8.3	Respuesta al ruido de los sensores	67
8.4	Respuesta a una combinación de fuentes de error	71
8.5	Respuesta a errores de modelado	78
8.5.1	Posible mejora	82
<b>9</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>85</b>
9.1	Limitaciones y trabajo futuro	86
<b>Apéndice A</b>	<b>Diagramas de flujo de programas desarrollados en MATLAB®</b>	<b>89</b>
A.1	Optimización de la trayectoria	90
A.2	Guiado de la trayectoria	91
<b>Apéndice B</b>	<b>Resultados de las simulaciones para la sintonización del controlador</b>	<b>93</b>
	<i>Índice de Figuras</i>	95
	<i>Índice de Tablas</i>	99
	<i>Bibliografía</i>	101

# Notación

---

$\lambda_x$	Adjunto asociado al estado $x$
$h$	Altitud
$h_{avg}$	Altitud promedio de operación
$A_S$	Área de salida de la tobera
$\alpha$	Ángulo de ataque
$\delta$	Ángulo de deflexión de la tobera
$\alpha'$	Ángulo del empuje respecto a la horizontal
$\gamma$	Ángulo de trayectoria
$\delta_{lim}$	Ángulo límite de deflexión de la tobera
$\alpha'_{lim}$	Ángulo límite de dirección de empuje
$\sim$	Aproximadamente
$\approx$	Aproximadamente igual
$C_D$	Coefficiente de resistencia aerodinámica
cte	Constante
$\mu_{\oplus}$	Constante másica de la Tierra
$l$	Coste corriente
$\phi$	Coste terminal
$\rho$	Densidad
$\sigma_x$	Desviación típica de la variable $x$
$x$	Distancia horizontal recorrida
$\mathcal{N}(m_x, \sigma_x^2)$	Distribución gaussiana para la variable aleatoria $x$ , de media $m_x$ y varianza $\sigma_x^2$
e.o.c.	En cualquier otro caso
$E$	Empuje
$\varepsilon$	Energía específica
$e_x$	Error relativo de la variable $x$
$a_t$	Factor de atenuación del método de continuación
f.o.	Función objetivo
$\mathbf{f}$	Función vectorial de la dinámica del sistema
$\dot{m}$	Gasto másico
$\delta_{lim}$	Giro máximo permitido por la tobera
$g$	Gravedad
$g_0$	Gravedad estándar a nivel del mar
$H$	Hamiltoniano
$\Rightarrow$	Implica
$I$	Impulso

$I_{sp}$	Impulso específico
$\mathcal{L}$	Lagrangiano
$m$	Masa
$m_{fa}$	Masa del fairing
$m_p$	Masa de propulsante
$m_s$	Masa estructural
$m_0$	Masa total de la etapa
$M_0$	Masa total del vehículo
$\mathbf{A}$	Matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{0}_{m \times n}$	Matriz de ceros de dimensión $m \times n$
$\text{diag}(\mathbf{x})$	Matriz diagonal a partir del vector $\mathbf{x}$
$\mathbf{I}_n$	Matriz identidad cuadrada de dimensión $n \times n$
$\max f$	Maximizar la función $f$
$a_{SL}$	Parámetro $a$ a nivel del mar
$a^{[j]}$	Parámetro $a$ de la etapa $j$
$a_i$	Parámetro $a$ del tramo $i$
$a_r$	Parámetro $a$ de referencia para adimensionalización
$a_{vac}$	Parámetro $a$ en vacío
$a_c$	Parámetro $a$ ponderado en el método de continuación
$\bar{a}$	Parámetro $a$ promediado entre etapas
$\forall x$	Para todo $x$
$W$	Peso
$N$	Población muestral del análisis de Monte Carlo
$L_1$	Porcentaje del rango de control disponible en la etapa 1 durante la optimización
$p$	Presión
$q$	Presión dinámica
$R_{\oplus}$	Radio de la Tierra
$D$	Resistencia aerodinámica
$r.$	Restricciones
$\psi$	Restricciones al estado final
$\Leftrightarrow$	Si y sólo si
$S_f$	Superficie frontal
$L$	Sustentación
$\arg \min_{x \in I} f$	Valor de la variable $x$ dentro del intervalo $I$ que minimiza la función $f$
$\hat{x}$	Variable $x$ adimensional
$x^*$	Variable $x$ óptima
$\mathbf{u}$	Vector de control $\mathbf{u}$
$\mathbf{x}$	Vector de estados $\mathbf{x}$
$v$	Velocidad
$V_s$	Velocidad de salida de los gases de la tobera
$t$	Tiempo
$t_{vert}$	Tiempo del tramo de ascenso vertical
$t_{PO}$	Tiempo de <i>Pitch-over</i>
$t_{BO}$	Tiempo de quemado
$t_f$	Tiempo final
$t_0$	Tiempo inicial
$x \in I$	$x$ perteneciente al intervalo $I$



# Glosario

---

**AWGN** Additive White Gaussian Noise.

**E1** Etapa 1.

**E2** Etapa 2.

**E3** Etapa 3.

**ECEF** Earth-Centered Earth-Fixed.

**ESA** European Space Agency.

**GNC** Guidance, Navigation and Control.

**GNSS** Global Navigation Satellite System.

**GPS** Global Positioning System.

**GT** Gravity Turn.

**ISA** International Standard Atmosphere.

**LEO** Low Earth Orbit.

**LQR** Linear Quadratic Regulator.

**LTV** Linear Time-Variant.

**NASA** National Aeronautics and Space Administration.

**NLP** Non-Linear Programming.

**OCP** Optimal Control Problem.

**PO** Pitch-over.

**PO** Polar Orbit.

**SSO** Sun-Synchronous Orbit.



# 1 Introducción

## 1.1 Motivación

Resulta innegable el crecimiento sostenido que la industria espacial ha estado experimentado en la última década y que, según indican las previsiones [1], seguirá manteniendo durante los próximos años con un desarrollo acelerado. Esto se traduce en una mayor cadencia de lanzamientos espaciales anuales, tal y como se aprecia en la Figura 1.1.

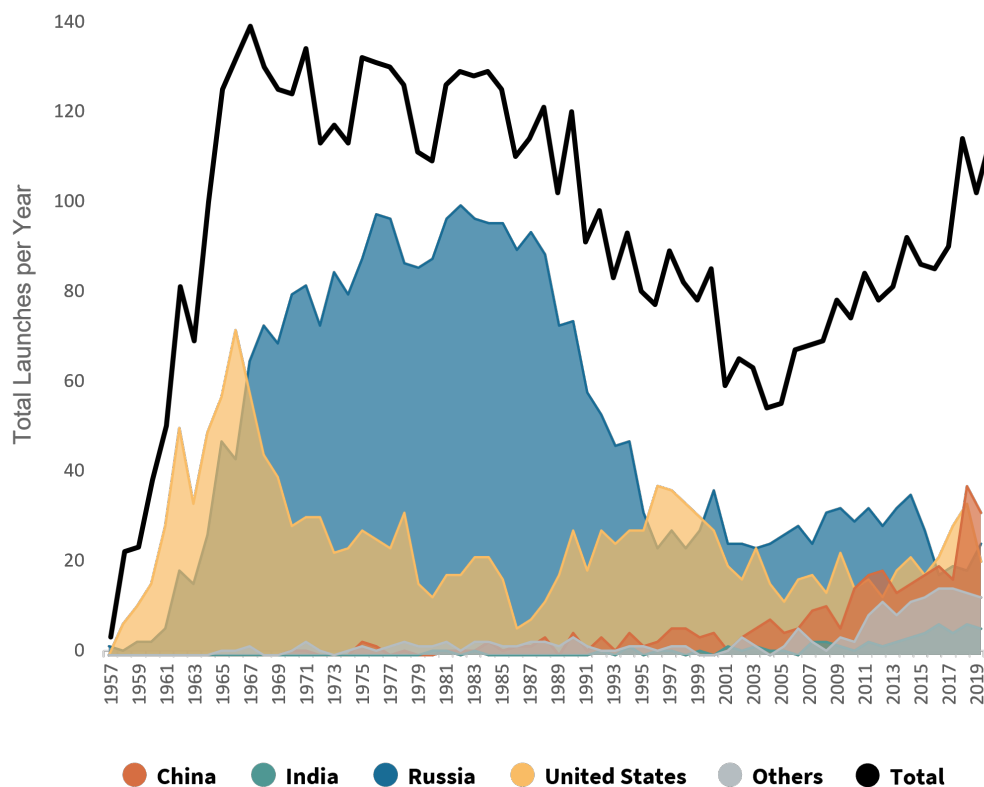


Figura 1.1 Lanzamientos espaciales anuales. Fuentes (editada): [2, 3].

Hitos como el fin de la Carrera Espacial [4] o el final de la Guerra Fría [5], supusieron un aparente receso en el sector espacial, hasta entonces altamente militarizado y con visiones fundamentalmente de carácter político y geoestratégico. No obstante, esto genera un nuevo paradigma hasta entonces inexplorado: la diversificación y comercialización del espacio [6], lo cual despierta de nuevo el

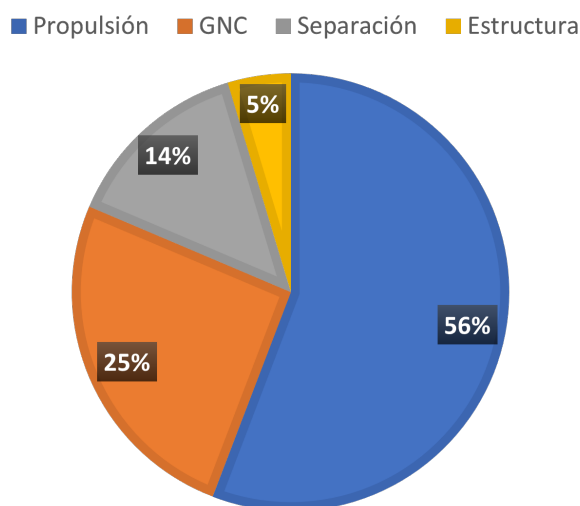
interés público y privado por el sector, buscando nuevas aplicaciones, servicios y beneficios para la sociedad y abriendo nuevas oportunidades desde el punto de vista comercial.

En los últimos años se ha gestado un escenario propicio para el desarrollo de múltiples aplicaciones con beneficio directo para la vida en la Tierra. En parte, esto es debido gracias al despliegue de constelaciones de satélites para posicionamiento como GPS [7], GLONASS [8], Galileo [9] o Beidou [10]; para comunicaciones, como las redes de Starlink [11] o OneWeb [12]; o para monitorización de la Tierra [13], cruciales en la lucha contra el cambio climático, control de inundaciones, extinción de incendios, operaciones de rescate, servicios de meteorología, etc. Todo ello sin dejar de lado las misiones clásicas de exploración espacial e interplanetarias, tanto autónomas como tripuladas, como puede ser el ambicioso Programa Artemis [14].

Otro hecho relevante es la irrupción del sector privado y la reducción de costes como proveedores independientes de sistemas de lanzamiento para otras empresas, basándose en la reusabilidad de sus vehículos. SpaceX [15], Rocket Lab [16], Virgin Orbit [17] o la startup española PLD Space [18] son claros ejemplos de esta tendencia. También existe un nuevo nicho de mercado que pretende explotar el turismo espacial y los vuelos suborbitales, con referentes como Virgin Galactic [19] o Blue Origin [20].

Toda esta fuerte financiación procedente de ambos sectores, público y privado, nos empujan a asistir a una nueva revolución espacial sin precedentes en las décadas venideras, donde la innovación, la búsqueda de nuevos recursos y tecnologías más eficientes y amigables con el medio ambiente, así como el innato interés científico del ser humano serán los motores del progreso.

Históricamente, los viajes espaciales siempre han estado asociados a complejidad y riesgo, especialmente en sus orígenes. Hoy en día, esto no deja de ser verdad. Si bien es cierto que los protocolos, los procedimientos y la tecnología en general han avanzado drásticamente desde la década de los 50, todavía existen misiones que acaban en fracaso. De hecho, de acuerdo con [21], alrededor del 7% de los lanzamientos realizados entre los años 2000 y 2014 resultaron fallidos. Aunque la mayoría de estos eventos tuvieron su origen en problemas asociados al sistema propulsivo (Figura 1.2), un nada desdeñable 25% de los casos fracasaron debido a fallos en el sistema de guiado, navegación y control (GNC), siendo un elemento crítico de los sistemas lanzadores.



**Figura 1.2** Causas de lanzamientos fallidos entre los años 2000 y 2014. Datos: [21].

En otros medios de transporte, un error en la planificación o el guiado puede implicar demoras o ciertas penalizaciones en el nivel de seguridad de la operación, en el peor de los casos. Sin embargo, como se ha visto en el caso del sector espacial, esto puede suponer la pérdida total de la misión

(como el reciente [22]) o implicar incrementos inasumibles en el coste para realizar correcciones de inserción en órbita. Es evidente, por lo tanto, que una planificación y un guiado de la trayectoria adecuados es crucial para minimizar los costes operativos, incrementar la rentabilidad y asegurar el éxito de la misión.

## 1.2 Objetivo y alcance del proyecto

En este proyecto se abordan las fases de diseño para la planificación y guiado de una trayectoria de un vehículo lanzador multietapa mediante técnicas de control óptimo, adoptando un enfoque bidimensional del problema, con un modelo puntual del cohete y una dinámica simplificada constituida por cuatro variables de estado (velocidad, altitud, masa y ángulo de trayectoria) y una variable de control (dirección de empuje).

En primer lugar, se elige un lanzador de referencia (Vega C) del que se obtienen sus parámetros característicos como el número de etapas, valores de empuje en vacío por etapa, impulsos específicos, tiempos de quemado, etc., y se infieren aquellos que no están disponibles, generando un modelo propulsivo y aerodinámico sencillos. Existen fases propulsadas y fases de vuelo balístico de tiempos de operación prefijados, por lo que se subdivide la trayectoria en tramos caracterizados por distintos parámetros. Una parte interesante de la planificación consiste en determinar precisamente los tiempos de operación de cada tramo. Para este trabajo, estos tiempos se consideran dados y se utilizan valores característicos de una misión típica.

A continuación, se busca generar una trayectoria óptima de referencia resolviendo un problema de optimización sujeto a restricciones, con el objetivo de maximizar la energía mecánica específica de las tres primeras etapas en el instante final. El problema se aborda con un método indirecto, es decir, se formulan las condiciones necesarias de optimalidad, de acuerdo a la Teoría de Control Óptimo. Posteriormente, se resuelve numéricamente el problema de contorno resultante mediante un método de colocación programado en MATLAB<sup>®</sup>. Este tipo de mecanismos de resolución es muy sensible a iterantes iniciales, por lo que se requiere de técnicas de continuación para asegurar la convergencia de un problema complejo.

El siguiente paso consiste en diseñar un sistema de guiado de alto nivel que permita al vehículo seguir la trayectoria de referencia a pesar de encontrarse sometido a perturbaciones como pueden ser el error debido a la imprecisión inherente a la estimación de las condiciones iniciales, la existencia de ráfagas, el propio ruido de los sensores o la influencia de la dinámica no modelada.

Respecto a la adquisición de señales, se asume que los estados son perfectamente medibles, sin necesidad de diseñar un observador que los reconstruya. Para simular la influencia del ruido se añade un ruido blanco gaussiano aditivo de características dependientes de los sensores empleados. En este caso, se usan valores típicos de error del sistema GPS para la estimación de la velocidad, altitud y ángulo de trayectoria.

No obstante, en un caso real, las señales ruidosas se someten a un preprocesado, incluyendo filtrado y acondicionamiento inicial, de forma que estos efectos son mitigados antes de llegar al controlador. De hecho, suelen existir varias fuentes de información redundantes (como puede ser una unidad de medidas inerciales) que se hibridan mediante un filtro diseñado apropiadamente para obtener una mejor solución de posicionamiento y poder reconstruir los estados con una mayor precisión. Estas consideraciones, que mejoran significativamente las prestaciones del sistema, no se han incluido en el análisis, quedándonos con un caso más desfavorable.

Otro aspecto importante a tener en cuenta es la tasa de refresco de los sensores. En este caso se ha supuesto que a cada iteración del cálculo de la ley de control, se dispone de una nueva medida para su uso. Sin embargo, en un sistema real, esto estaría limitado por la frecuencia de sensado. En el caso de un sistema de posicionamiento por satélite esta frecuencia se encontraría en el orden de 1 Hz.

El sistema de guiado se basa en tres controladores LQR para las fases propulsadas, incluyendo términos integrales para facilitar el seguimiento de la referencia y un sistema *anti-windup* para mitigar los problemas derivados de la saturación.

Tras la formulación, los parámetros que definen la respuesta de los controladores son sintonizados mediante simulaciones con un barrido y un análisis de sensibilidad. El criterio se mantiene en la maximización de la energía mecánica específica al término de la operación, y minimizando el incumplimiento de las restricciones impuestas.

Finalmente, se evalúan las prestaciones del sistema global haciendo uso de técnicas estadísticas de Monte Carlo para una amplia batería de casos, presentando resultados y ofreciendo propuestas de mejora.

### 1.3 Estructura del documento

El documento se estructura de la siguiente manera:

- En la Sección 2 se describe el cohete multietapa de referencia utilizado a lo largo de proyecto: el lanzador europeo Vega C.
- En la Sección 3 se plantean las hipótesis sobre las que se fundamenta el resto del trabajo y se modela la dinámica básica del vehículo.
- En las Secciones 4 y 5 se formula un problema de optimización para la planificación de la trayectoria y se resuelve de forma numérica mediante un método de colocación indirecto, respectivamente.
- En la Sección 6 se formula el problema de guiado, desarrollando un sistema de control LQR con término integral y *anti-windup*.
- En la Sección 7 se realiza la sintonización de los controladores, ajustando los parámetros mediante barridos y análisis de sensibilidad ante una serie de fuentes de error típicas.
- En la Sección 8 se evalúa el desempeño global del sistema mediante análisis de Monte Carlo y se presentan los resultados.
- Finalmente, en la Sección 9 se presentan las conclusiones del trabajo y se argumentan varias propuestas de mejora para un futuro desarrollo.

Todos los cálculos, simulaciones y resultados presentados en este trabajo han sido obtenidos con la herramienta matemática MATLAB<sup>®</sup>. Los diagramas de flujo de los *scripts* desarrollados pueden ser consultados en el Apéndice A.

Adicionalmente, en el Apéndice B se recogen las tablas generadas tras los barridos de parámetros para la sintonización de los distintos controladores.

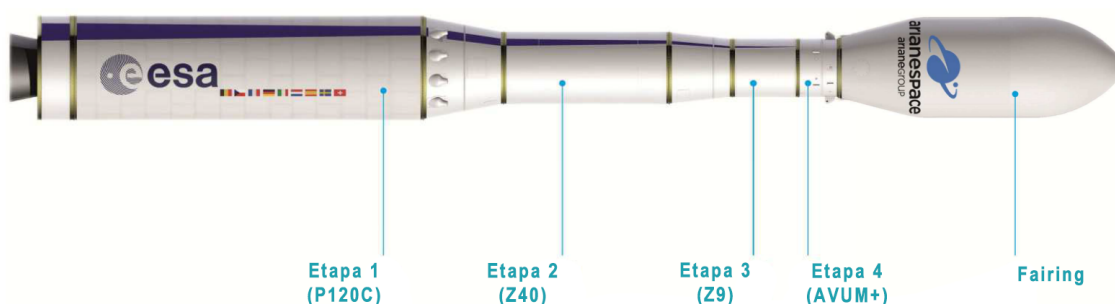
## 2 El lanzador: Vega C

---

EL cohete de referencia elegido es el Vega C (*Consolidation*). En esta sección se describen las generalidades del vehículo, sus características aerodinámicas, propulsivas y másicas, de utilidad para la resolución del problema, así como sus prestaciones y su perfil típico de ascenso. Por último, se realizan cálculos de parámetros derivados con la información disponible y se recopilan todos los datos.

### 2.1 Generalidades

El Vega C (Figura 2.1) es la nueva versión del lanzador ligero de pequeños satélites diseñado por AVIO para Arianespace y supervisado por la ESA. Actualmente se encuentra en las últimas fases de diseño y producción y tiene planificado el vuelo inaugural para el año 2022. Respecto a su predecesor, el Vega, se busca incrementar sus prestaciones, ser capaz de enviar múltiples cargas de pago y más pesadas a distintas órbitas en un solo lanzamiento, por el mismo coste [23, 24]. Además de poner en órbita pequeños satélites, el Vega C será empleado como lanzador del primer vehículo orbital reusable europeo, el Space Rider [25], y para aplicaciones al orden del día, como la eliminación de basura espacial [26].



**Figura 2.1** Vega C. Fuente (editada): [27].

El vehículo [27] consta de 4 etapas. Las 3 primeras son de propulsante sólido y, la última, de propulsante líquido. Este análisis se centrará en la optimización de la trayectoria de las primeras 3 etapas, de tiempo de operación fijo, cuyo objetivo consiste en dejar a la última etapa lo más cerca posible de la órbita deseada, tanto en altitud como en velocidad y actitud. La cuarta etapa se encarga de hacer el ajuste fino y completar la inyección en la órbita objetivo, con los parámetros necesarios,

por medio de una o varias igniciones controladas<sup>1</sup>. Al finalizar la misión, esta última etapa también es la encargada de efectuar la reentrada.

## 2.2 Características

Las características principales de los distintos elementos del Vega C, extraídas del manual de usuario [27], se recogen en las Tablas 2.1 - 2.6. Nótese que solo se han incluido los parámetros de cada uno de ellos que resultan de interés para el problema que se plantea.

**Tabla 2.1** Características de la primera etapa del Vega C.

Etapa 1 (P120C)	Símbolo	Valor	Unidad
Diámetro	$d^{[1]}$	3.4	m
Área frontal	$S_f^{[1]}$	9.08	m <sup>2</sup>
Masa total	$m_0^{[1]}$	155 027	kg
Masa de propulsante	$m_p^{[1]}$	141 634	kg
Masa estructural	$m_s^{[1]}$	13 393	kg
Gasto másico	$\dot{m}^{[1]}$	1 043.73	kg/s
Empuje máximo en vacío	$E_{max,vac}^{[1]}$	4 323	kN
Impulso específico en vacío	$I_{sp,vac}^{[1]}$	279	s
Tiempo de quemado	$t_{bo}^{[1]}$	135.7	s
Deflexión máxima de tobera	$\delta_{lim}^{[1]}$	5.9	deg

**Tabla 2.2** Características de la segunda etapa del Vega C.

Etapa 2 (Z40)	Símbolo	Valor	Unidad
Diámetro	$d^{[2]}$	2.4	m
Área frontal	$S_f^{[2]}$	4.52	m <sup>2</sup>
Masa total	$m_0^{[2]}$	40 477	kg
Masa de propulsante	$m_p^{[2]}$	36 239	kg
Masa estructural	$m_s^{[2]}$	4 238	kg
Gasto másico	$\dot{m}^{[2]}$	390.09	kg/s
Empuje máximo en vacío	$E_{max,vac}^{[2]}$	1 304	kN
Impulso específico en vacío	$I_{sp,vac}^{[2]}$	293.5	s
Tiempo de quemado	$t_{bo}^{[2]}$	92.9	s
Deflexión máxima de tobera	$\delta_{lim}^{[2]}$	5.9	deg

<sup>1</sup> Al ser una etapa de propulsante líquido, permite múltiples reencendidos de la misma, proporcionando una gran versatilidad, pero una mayor complejidad técnica.



**Tabla 2.3** Características de la tercera etapa del Vega C.

<b>Etapa 3 (Z9)</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidad</b>
Diámetro	$d^{[3]}$	1.9	m
Área frontal	$S_f^{[3]}$	2.84	m <sup>2</sup>
Masa total	$m_0^{[3]}$	12 000	kg
Masa de propulsante	$m_p^{[3]}$	10 567	kg
Masa estructural	$m_s^{[3]}$	1 433	kg
Gasto másico	$\dot{m}^{[3]}$	88.35	kg/s
Empuje máximo en vacío	$E_{max,vac}^{[3]}$	317	kN
Impulso específico en vacío	$I_{sp,vac}^{[3]}$	295.9	s
Tiempo de quemado	$t_{bo}^{[3]}$	119.6	s
Deflexión máxima de tobera	$\delta_{lim}^{[3]}$	6	deg

**Tabla 2.4** Características de la cuarta etapa del Vega C.

<b>Etapa 4 (AVUM+)</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidad</b>
Diámetro	$d^{[4]}$	2.18	m
Área frontal	$S_f^{[4]}$	3.73	m <sup>2</sup>
Masa total	$m_0^{[4]}$	1 438	kg

**Tabla 2.5** Características del fairing del Vega C.

<b>Fairing</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidad</b>
Diámetro	$d_{fa}$	3.317	m
Área frontal	$S_{f,fa}$	8.64	m <sup>2</sup>
Masa total	$m_{fa}$	860	kg

**Tabla 2.6** Características de la carga de pago del Vega C.

<b>Carga de pago</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidad</b>
Carga máxima a LEO	$m_{PL,LEO}$	3 300	kg
Carga máxima a PO	$m_{PL,PO}$	2 300	kg
Carga máxima a SSO	$m_{PL,SSO}$	2 200	kg
Carga de pago considerada	$m_{PL}$	3 300	kg

El área frontal, la masa estructural y el gasto másico de cada etapa han sido calculados con las expresiones (2.1), (2.2) y (2.3), respectivamente.

$$S_f = \frac{\pi d^2}{4} \quad (2.1)$$

$$m_s = m_0 - m_p \quad (2.2)$$

$$\dot{m} = \frac{m_p}{t_{bo}} \quad (2.3)$$

En la Tabla 2.6 se muestran los valores máximos de la carga de pago que el lanzador es capaz de

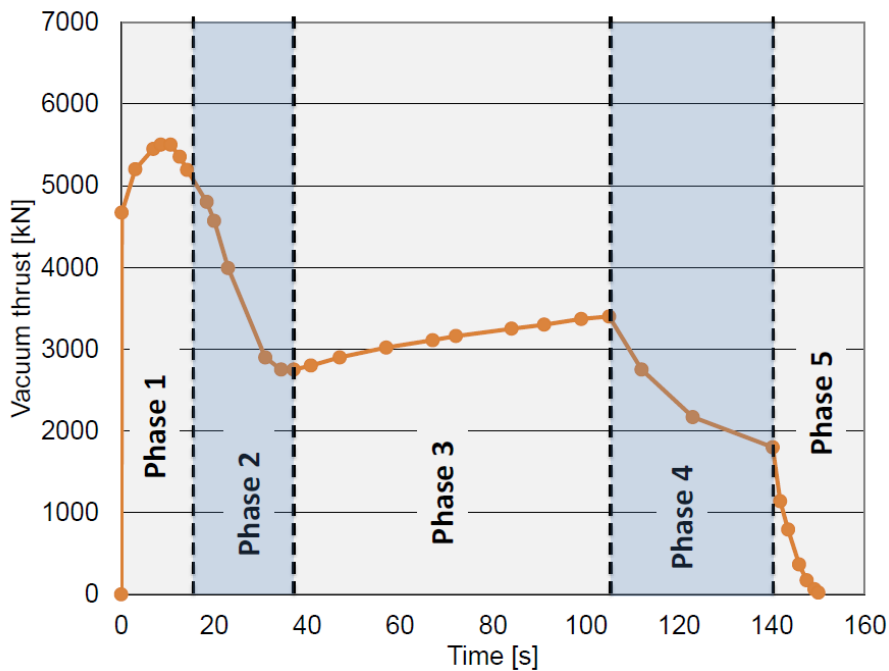
poner en órbita en función de la misión. Como referencia, se ha elegido el caso más desfavorable para el tramo inicial de ascenso, es decir, el máximo valor para una carga con destino a la órbita baja terrestre (LEO), despreciando la masa de posibles adaptadores para fijar la carga. No obstante, tal y como se refleja en el manual de usuario [27], el perfil de ascenso inicial para las 3 primeras etapas no se ve afectado especialmente ni por la carga ni por la misión específica, siendo la cuarta etapa la que juega el papel de corrector de la trayectoria final.

En definitiva, la masa total del vehículo será:

$$M_0 = \sum_{j=1}^4 m_0^{[j]} + m_{fa} + m_{PL} = 212302 \text{ kg} \quad (2.4)$$

### 2.3 Corrección de empuje

En el modelo desarrollado en este trabajo, se asume un empuje medio constante para cada etapa (Hipótesis 4). No obstante, los datos de empuje proporcionados por el manual son valores máximos en vacío, lo cual correspondería con el valor de pico mostrado en la Figura 2.2. En esta figura se observa la evolución típica del empuje en vacío de un motor cohete de propulsante sólido, la cual varía en función de la geometría y, en definitiva, del área de quemado en cada instante del propulsante. El autor [28] divide temporalmente la operación en 5 fases. La primera fase suele tener el valor más elevado, lo cual es beneficioso a baja altura, con el cohete en posición vertical, para ganar velocidad lo antes posible y disminuir las pérdidas gravitatorias. Al adquirir cierta velocidad, la resistencia aerodinámica pasa a ser el factor dominante, por lo que en la segunda fase se reduce drásticamente la aceleración para evitar sufrir daños estructurales debido a una presión dinámica excesiva. Tras superar el punto crítico de máxima presión dinámica, la influencia de la atmósfera empieza a decaer, siendo posible aumentar el empuje hasta un valor aproximadamente constante durante la fase 3. Por último, a medida que se expulsa todo el propulsante, el nivel de empuje baja hasta el apagado del motor durante las fases 4 y 5.



**Figura 2.2** Evolución temporal típica del empuje de un motor cohete de propulsante sólido en vacío. Fuente: [28].

Por lo tanto, como se puede observar, el valor máximo de empuje en vacío dista de ser representativo del valor medio de empuje que desarrolla el motor a lo largo de su tiempo de quemado. Para obtener el valor medio de empuje en vacío se calcula un promediado, es decir, se parte de la definición del impulso total (área bajo la curva empuje-tiempo), asumiendo el impulso específico en vacío constante (Hipótesis 5):

$$I_{vac} = I_{sp,vac} m_p g_0 \quad (2.5)$$

y se divide entre el tiempo total de quemado:

$$E_{vac} = \frac{I_{vac}}{t_{bo}} \quad (2.6)$$

Para dotar de un mayor realismo al modelo, la primera etapa se divide en dos niveles de empuje: máximo durante los 10 segundos iniciales ( $t_{vert}$ ) que dura el ascenso vertical (Hipótesis 11) y empuje medio para el resto del tiempo hasta el quemado total. De esta forma, el empuje medio del segundo tramo de la etapa 1 se modifica, resultando:

$$I_{vac}^{[1]} = t_{vert} E_{max,vac}^{[1]} + (t_{bo}^{[1]} - t_{vert}) E_{vac}^{[1]} \Rightarrow E_{vac}^{[1]} = \frac{I_{vac}^{[1]} - t_{vert} E_{max,vac}^{[1]}}{t_{bo}^{[1]} - t_{vert}} \quad (2.7)$$

Los valores de empujes medios en vacío de las distintas etapas se recogen en la Tabla 2.7. Como es natural, estos resultan ser inferiores a los máximos.

**Tabla 2.7** Empujes medios en vacío por etapa.

$E_{vac}^{[1]}$ [kN]	$E_{vac}^{[2]}$ [kN]	$E_{vac}^{[3]}$ [kN]
2 739	1 122.8	256.4

Es bien sabido que el empuje de un motor cohete es dependiente de la altitud [29], de forma que su valor es inferior a baja altitud. Del artículo de Dumont [28] se deduce que la penalización de empuje a nivel del mar, respecto a su valor en vacío, se encuentra en torno al 12.6%. Asumiendo este valor, los empujes medios a nivel del mar por etapa toman los valores de la Tabla 2.8. De igual forma, el empuje máximo de la primera etapa,  $E_{max,SL}^{[1]}$ , también se verá afectado, reduciéndose hasta los 3 778 kN.

**Tabla 2.8** Empujes medios a nivel del mar por etapa.

$E_{SL}^{[1]}$ [kN]	$E_{SL}^{[2]}$ [kN]	$E_{SL}^{[3]}$ [kN]
2 393.8	981.3	224.1

Para obtener la ley de variación del empuje con la altitud, se parte de la ecuación de empuje de un cohete [30]:

$$E = mV_s + A_s(p_s - p) \quad (2.8)$$

donde  $V_s$ ,  $A_s$  y  $p_s$  son la velocidad, área y presión de salida de la tobera, respectivamente. La presión exterior  $p$  variará con la altitud de acuerdo al modelo de atmósfera (3.5), desarrollado más adelante. La ecuación (2.8) se puede reescribir en función del empuje medio en vacío como:

$$E = E_{vac} - A_s p \quad (2.9)$$

Asimismo, del empuje a nivel del mar se obtiene:

$$E_{SL} = E_{vac} - A_s p_{SL} \Rightarrow A_s = \frac{E_{vac} - E_{SL}}{p_{SL}} \quad (2.10)$$

Combinando las expresiones (2.9) y (2.10) se llega a una ley de evolución del empuje medio en función de la altitud y los parámetros del problema:

$$E(h) = E_{vac} - (E_{vac} - E_{SL}) \frac{p(h)}{p_{SL}} \quad (2.11)$$

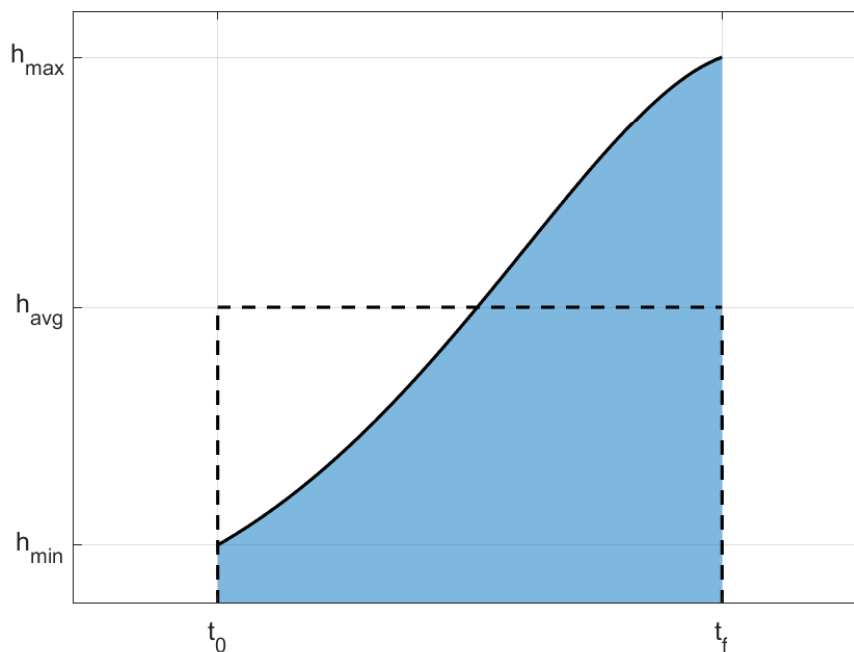
Para calcular los empujes medios en el punto de operación de cada etapa se necesita la altitud media de operación. En una primera aproximación se pueden tomar como referencia las altitudes descritas en el manual de vuelo. Así, haciendo uso de la ecuación (2.11) y el modelo de atmósfera exponencial para la presión (3.5), se llegan a los valores mostrados en la Tabla 2.9.

**Tabla 2.9** Aproximación de altitudes y empujes medios operacionales por etapa.

$h_{avg}^{[1]}$ [km]	$E^{[1]}$ [kN]	$h_{avg}^{[2]}$ [km]	$E^{[2]}$ [kN]	$h_{avg}^{[3]}$ [km]	$E^{[3]}$ [kN]
30	2 732.8	90.5	1 122.8	156.5	256.4

Para mejorar la exactitud de los valores de empuje, se debe iterar resolviendo el problema de optimización de trayectoria completo y aplicar la expresión (2.12), la cual se deduce de la Figura 2.3, de manera análoga al procedimiento de cálculo del empuje medio en vacío.

$$h_{avg} = \frac{\int_{t_0}^{t_f} h(t) dt}{t_f - t_0} \quad (2.12)$$



**Figura 2.3** Esquema de cálculo de la altitud media.

## 2.4 Perfil de ascenso: tramos

De acuerdo con el manual de usuario [27], no existe propulsión a lo largo de toda la trayectoria de ascenso, sino que existen una serie de intervalos de tiempo en los que el vehículo sigue una trayectoria balística (*coasting*) y no hay control del mismo. Así, se puede dividir la trayectoria en 8 tramos, contando con un tramo inicial 0 de ascenso vertical, cuyos parámetros se recogen en la Tabla 2.10.

**Tabla 2.10** Parámetros del cohete dependientes de cada tramo.

Etapa	Tramo $i$	$t_{0,i}$ [s]	$t_{f,i}$ [s]	$E_i$ [kN]	$\dot{m}_i$ [kg/s]	$m_{s,i}$ [kg]	$S_{f,i}$ [m <sup>2</sup> ]	$\delta_{lim,i}$ [deg]
1	0	0	10	3 778	1 043.7	0	9.08	5.9
	1	10	135.7	2 732.8	1 043.7	0	9.08	5.9
	2	135.7	142	0	0	13 393	9.08	-
2	3	142	234.9	1 122.8	390.1	0	8.64	5.9
	4	234.9	245	0	0	4 238	8.64	-
3	5	245	249	0	0	860	8.64	-
	6	249	368.6	256.4	88.4	0	3.73	6
	7	368.6	417	0	0	1 433	3.73	-

Cabe destacar que  $t_{0,i}$  y  $t_{f,i}$  hacen referencia a los instantes globales de inicio y fin de tramo,  $m_{s,i}$  corresponde con la masa estructural que se libera al final del tramo  $i$ , y  $S_{f,i}$  se trata del área frontal del subvehículo en el tramo  $i$ , es decir, la máxima superficie de todas las etapas todavía presentes en el tramo, incluyendo el fairing. Los tramos de *coasting*, por su parte, se han modelado como tramos de empuje y gasto másico nulos.

Asimismo, el parámetro  $m_{s,i}$  hace referencia a la masa estructural eyectada al final del tramo  $i$ , por lo que solo es mayor de cero cuando coincide con el final de una etapa o con el instante de la separación del fairing.

Respecto a la eyección del fairing, debería producirse cuando el flujo térmico debido al rozamiento del aire es inferior a 1 135 W/m<sup>2</sup>, con el objetivo evitar posibles daños a la carga de pago. Esta situación suele producirse muy próxima a la ignición de la etapa 3 (inicio del tramo 6). Por simplicidad, se ha hecho coincidir con este evento.

Por último, es necesario recalcar que en el problema de optimización que aquí se plantea, los instantes de encendido de los motores, así como de la separación de las distintas etapas, están fijados (Hipótesis 12) y se toman de referencia los valores de un ascenso típico del manual.



### 3 Modelado de la dinámica

---

EN esta sección se presentan las hipótesis y simplificaciones que se han llevado a cabo a la hora de abordar el problema y se desarrollan las ecuaciones dinámicas que describen el movimiento del vehículo.

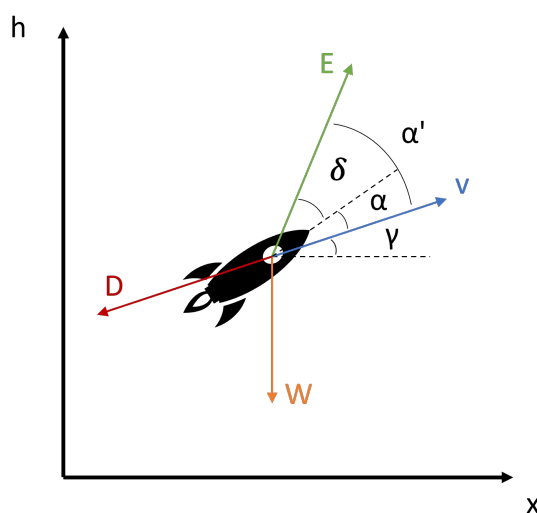


Figura 3.1 Esquema de fuerzas del modelo propuesto.

En la Figura 3.1 se presenta un esquema de las fuerzas que actúan sobre el cohete que servirá de base para la justificación de algunas de las hipótesis planteadas y la posterior formulación del modelo. Sobre el vehículo actúan 3 fuerzas: el empuje ( $E$ ), la resistencia aerodinámica ( $D$ ) y el peso ( $W$ ). En la imagen también se representa el vector velocidad ( $v$ ), el cual permite la definición de una serie de ángulos:

- Ángulo de trayectoria,  $\gamma$ : ángulo formado entre el vector velocidad y la horizontal.
- Ángulo de ataque,  $\alpha$ : ángulo formado entre el eje longitudinal de referencia del vehículo y el vector velocidad.
- Ángulo de deflexión de la tobera,  $\delta$ : ángulo formado entre el vector empuje y el eje longitudinal del cohete.
- Ángulo  $\alpha' = \alpha + \delta$ : ángulo formado entre el vector empuje y el vector velocidad. Se trata de una variable de control virtual de alto nivel elegida como grado de libertad del problema, la cual facilita enormemente la formulación del mismo. Si se implementara adicionalmente un control de bajo nivel, se debería incidir sobre el ángulo de deflexión de la tobera  $\delta$ .

## 3.1 Hipótesis

### 3.1.1 Generalidades

#### Hipótesis 1 *Tierra plana inercial*

El sistema de referencia elegido es un sistema de Tierra plana inercial, donde el eje  $x$  se corresponde con la distancia horizontal recorrida y, el eje  $h$ , la altitud sobre el nivel medio del mar, de forma que todo el movimiento está contenido en el plano  $x-h$ . Esta hipótesis no es admisible para una aplicación real, pero permite obtener una primera aproximación con un modelo sencillo, aportando información cualitativa sobre el comportamiento del vehículo a lo largo de la trayectoria.

Esta simplificación implica que no se considera el efecto de la rotación de la Tierra, ni la influencia de la ubicación del centro de lanzamiento, ni las posibles restricciones impuestas por la inclinación de la órbita objetivo. Tampoco se modelan las fuerzas de inercia de Coriolis y centrífuga, propias de utilizar un sistema de referencia no inercial, como el ECEF (*Earth-Centered Earth-Fixed*). Por último, el modelo se reduce a una única variable de control, un ángulo: la dirección del empuje contenida en el plano<sup>1</sup>.

#### Hipótesis 2 *Modelo puntual*

El modelo del lanzador es un modelo de punto, es decir, se desprecia la dinámica de la actitud, considerando que todas las fuerzas se aplican en el centro de masas y no existen pares asociados.

#### Hipótesis 3 *Modelo gravitatorio constante por etapa*

El vector aceleración de la gravedad se ha definido como constante para cada etapa y de sentido contrario al eje  $h$ . Se puede obtener un modelo sencillo de la variación de la gravedad con la altitud mediante la expresión:

$$g(h) = \frac{\mu_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)^2} \quad (3.1)$$

donde  $\mu_{\oplus} = 398600.4 \text{ km}^3/\text{s}^2$  es una constante másica de la Tierra y  $R_{\oplus} = 6378.14 \text{ km}$  es el radio medio terrestre.

En la Tabla 3.1 se recogen las aproximaciones de los valores de la aceleración de la gravedad medios utilizados inicialmente para cada etapa según las altitudes de operación recogidas en el manual [27].

**Tabla 3.1** Aproximación de altitudes y valores de gravedad medios por etapa.

$h_{avg}^{[1]}$ [km]	$g^{[1]}$ [kN]	$h_{avg}^{[2]}$ [km]	$g^{[2]}$ [kN]	$h_{avg}^{[3]}$ [km]	$g^{[3]}$ [kN]
30	9.7067	90.5	9.5260	156.5	9.3346

De forma equivalente a los empujes medios por etapa, estos valores convergen a otros más precisos resolviendo iterativamente el problema y recalculando las altitudes promedio de operación (2.12). Para el tramo de ascenso vertical, se usa el valor estándar  $g_0 = 9.8066 \text{ m/s}^2$ .

<sup>1</sup> En un sistema esférico se tendrían 2 ángulos para el control direccional de la tobera. Típicamente, para la formulación en dicho caso, se usan 3 variables de control que no son independientes, sino que representan un vector unitario de la dirección del empuje.



Así, el módulo del peso  $W$  quedaría como:

$$W(t) = m(t)g \quad (3.2)$$

siendo  $m(t)$  la masa del vehículo en todo momento.

### 3.1.2 Propulsión

#### Hipótesis 4 *Empuje constante por etapa*

El empuje de una etapa a lo largo de su trayectoria permanece constante. En realidad, evoluciona con el tiempo en función de la altitud y la superficie de quemado que, en definitiva, depende de la geometría con la que se compacte el propulsante en la cámara de combustión. El cálculo de unos valores de empuje promedio para cada etapa en el punto de operación se desarrolla en la Sección 2.3.

#### Hipótesis 5 *Impulso específico en vacío constante*

Los valores de impulso específico en vacío proporcionados por el manual [27], se consideran constantes durante todo el tiempo de quemado. Según la formulación americana [31], expresado en segundos, la definición de impulso específico es:

$$I_{sp} = \frac{E}{\dot{m}g_0} \quad (3.3)$$

Por lo tanto, el impulso total se puede escribir como:

$$I = \int_0^{t_{bo}} E dt = \int_0^{t_{bo}} I_{sp} \dot{m} g_0 dt \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ I_{sp}=\text{cte}}}{=} I_{sp} m_p g_0 \quad (3.4)$$

lo cual justifica el uso de la expresión (2.5).

#### Hipótesis 6 *Tobera bloqueada*

Se considera que en todo momento la tobera de cada etapa se encuentra bloqueada, es decir, existe un flujo con Mach unidad en la garganta de la tobera convergente-divergente. Esto implica que el valor de gasto (gasto crítico) y tiempo de quemado son fijos e iguales a los calculados en vacío, por lo que no depende de la presión exterior y, por tanto, del punto de operación [30].

### 3.1.3 Aerodinámica

#### Hipótesis 7 *Atmósfera exponencial*

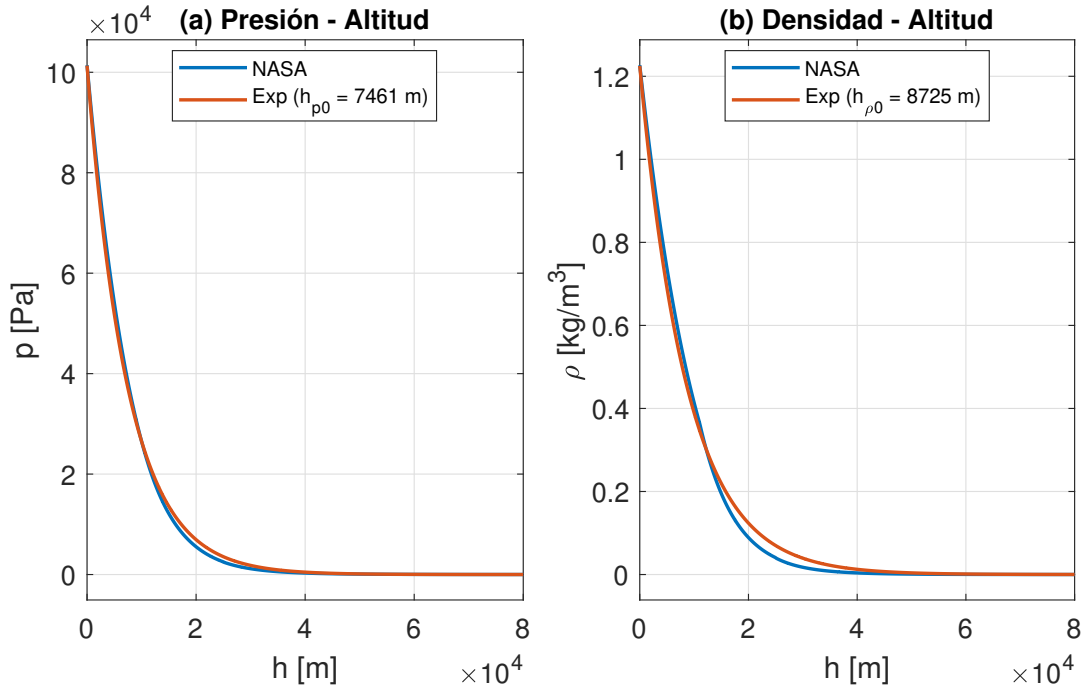
En aviación es común usar atmósfera ISA [32] para modelar la variación de la presión ( $p$ ) y la densidad ( $\rho$ ) con la altitud ( $h$ ). Sin embargo, solo está definida para los 20 primeros kilómetros de altitud, por lo que no cubre todo el rango requerido para nuestra aplicación. Existen otros modelos de atmósfera, como el propuesto por la NASA [33], que contemplan mayores altitudes dividiendo la atmósfera en 3 tramos. Esto complicaría la formulación de forma notable sin aportar un nivel de realismo adicional justificable. Por este motivo se emplea un modelo de atmósfera exponencial:

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{h}{h_{p0}}} \quad (3.5)$$

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{h}{h_{\rho 0}}} \quad (3.6)$$

donde  $p_0 = 101\,325$  Pa y  $\rho_0 = 1.225$  kg/m<sup>3</sup>.

Para la elección de las altitudes de referencia  $h_{p_0}$  y  $h_{\rho_0}$ , se ha minimizado la integral del error cuadrático respecto al modelo atmosférico de la NASA, a lo largo de los primeros 80 km, donde la influencia de la atmósfera todavía es apreciable [34]. De esta forma, se obtienen los valores  $h_{p_0} = 7461$  m y  $h_{\rho_0} = 8725$  m. En la Figura 3.2 se muestra la comparativa entre ambos modelos para la presión (a) y densidad (b).



**Figura 3.2** Comparativa del modelo atmosférico propuesto por la NASA y el modelo exponencial.

### Hipótesis 8 *Atmósfera en calma*

Se asume ausencia de viento en todo momento. Esto conlleva que la velocidad aerodinámica, la cual contribuye a la resistencia, es equivalente a la velocidad del vehículo respecto al suelo. Como consecuencia adicional, el ángulo de asiento de la velocidad aerodinámica coincide con el ángulo de trayectoria.

### Hipótesis 9 *Ángulo de ataque despreciable durante el vuelo atmosférico*

Despreciar el ángulo de ataque durante la primera etapa (en la que todavía existe influencia de la atmósfera) permite identificar directamente la variable de control elegida con el ángulo de deflexión de la tobera:

$$\alpha'^{[1]} = \alpha^{[1]} + \delta^{[1]} \approx \delta^{[1]} \quad (3.7)$$

así como establecer sus límites:

$$\alpha'_{lim}{}^{[1]} \approx \delta_{lim}{}^{[1]} \Rightarrow \begin{cases} \alpha'_{max}{}^{[1]} \approx +\delta_{lim}{}^{[1]} \\ \alpha'_{min}{}^{[1]} \approx -\delta_{lim}{}^{[1]} \end{cases} \quad (3.8)$$

Esta hipótesis es admisible, ya que en el diseño del lanzador se tiende a buscar que el ángulo de ataque  $\alpha$  sea, durante toda la fase del vuelo atmosférico, pequeño o nulo para evitar fuerzas laterales indeseables derivadas de la aparición de una sustentación, lo cual generaría esfuerzos de flexión para los que la estructura no es óptima. Esta ausencia de sustentación tiene otra implicación: la inexistencia de una resistencia inducida.

Por otra parte, en las etapas 2 y 3, prácticamente en ausencia de atmósfera, el vector empuje definido por  $\alpha'$  puede apuntar en cualquier dirección. Para mantener el sentido físico del problema, se limita entre  $\pm 90$  grados:

$$\alpha_{lim}^{[2]} = \alpha_{lim}^{[3]} = \pm \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad (3.9)$$

#### Hipótesis 10 Resistencia aerodinámica de coeficiente constante

Derivado de la Hipótesis 9, la resistencia aerodinámica solo depende de la resistencia parásita. Por tanto, el coeficiente de resistencia está determinado por el factor de forma y su valor, para un cohete, puede aproximarse por [35]:

$$C_D = C_{D_0} = 0.5 \quad (3.10)$$

Así, la resistencia ( $D$ ), siempre opuesta al vector velocidad, quedaría como:

$$D = \frac{1}{2} \rho v^2 S_f C_D \quad (3.11)$$

#### 3.1.4 Perfil de ascenso

##### Hipótesis 11 Ascenso vertical fijo

Típicamente se trata de un tramo de tiempo fijo (10 segundos en este caso) para librar obstáculos cercanos. Se podría considerar un problema aparte, donde la planificación consistiría en determinar el tiempo mínimo necesario para efectuar la maniobra según la orografía o las condiciones particulares de la base de lanzamiento. Por su parte, el control trataría de mantener el vehículo en posición vertical, centrado sobre la plataforma ante cualquier tipo de perturbación, como podría ser el viento, por ejemplo.

El tramo de ascenso vertical (tramo 0) no entra dentro del proceso de planificación y control óptimos que se expone en este trabajo. Su presencia en la formulación se reduce al cómputo de las condiciones iniciales desde las que arranca la optimización. Su exclusión tiene, además, la ventaja de eliminar una singularidad de las ecuaciones de optimización de la trayectoria, como se verá más adelante, relacionada con partir de velocidad nula.

##### Hipótesis 12 Tiempos de coasting, encendido de motores y separación fijos

Los periodos de tiempo en los que transcurren las trayectorias balísticas, los instantes de encendido de los motores y de la separación de los distintos elementos del vehículo están fijados de antemano y sus valores se recogen en una misión típica de ascenso a órbita del manual [27]. Liberar estos parámetros aporta una mayor riqueza al problema, permitiendo alcanzar una solución mejor, pero complicando enormemente la formulación del problema. Por este motivo, queda fuera del alcance de este trabajo y se plantea como una posible mejora en un trabajo futuro.

## 3.2 Ecuaciones del movimiento

Partiendo del diagrama de la Figura 3.1 y las hipótesis realizadas en el Apartado 3.1, la dinámica del vehículo lanzador se puede modelar como un sistema no lineal de 5 ecuaciones diferenciales

(3.12) - (3.16) definidas temporalmente a trozos, correspondiendo con cada uno de los 7 tramos presentados en la Tabla 2.10. Por simplicidad, se omiten las dependencias temporales.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = \frac{E_i}{m} \cos \alpha' - g_i \sin \gamma - \frac{1}{2m} \rho_0 e^{-\frac{h}{h_0}} v^2 S_{f,i} C_D \end{array} \right. \quad (3.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dh}{dt} = v \sin \gamma \end{array} \right. \quad (3.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dm}{dt} = -\dot{m}_i = \text{cte} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{E_i}{mv} \sin \alpha' - \frac{g_i}{v} \cos \gamma \end{array} \right. \quad (3.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = v \cos \gamma \end{array} \right. \quad (3.16)$$

con la variable de control  $\alpha' \in [\alpha'_{min,i}, \alpha'_{max,i}] \forall t \in [t_{0,i}, t_{f,i}]$ , para los tramos  $i = 1, \dots, 7$ , y condiciones iniciales y de continuidad:

$$\begin{aligned} v(t_{0,i}) &= v(t_{f,i-1}), & h(t_{0,i}) &= h(t_{f,i-1}), & m(t_{0,i}) &= m(t_{f,i-1}) - m_{s,i}, \\ \gamma(t_{0,i}) &= \gamma(t_{f,i-1}), & x(t_{0,i}) &= x(t_{f,i-1}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde los valores de los estados en  $t_{f,0}$  corresponden con los valores que toman en el instante final del tramo de ascenso vertical (tramo 0), empleándose como valores iniciales del tramo 1.

En la ecuación (3.15) puede observarse cómo tendría lugar la singularidad que se comentaba en el apartado anterior si la velocidad es nula en algún instante. Excluyendo el tramo de ascenso vertical del problema de optimización, se evita la condición inicial de reposo.

Nótese que la distancia horizontal recorrida (3.16), correspondiente al estado  $x$ , es independiente del resto de variables y su valor no influye en la dinámica del sistema. Por este motivo, se prescinde de la misma durante la formulación, calculándose a posteriori cuando se estime conveniente.

### 3.2.1 Adimensionalización

La adimensionalización de las ecuaciones es especialmente útil a la hora de abordar la optimización de la trayectoria, ya que permite evitar problemas numéricos al homogeneizar el orden de magnitud de las distintas cantidades con las que se operan. Para ello, se definen las siguientes variables adimensionales:

$$\hat{v} = \frac{v}{v_r}, \quad \hat{h} = \frac{h}{v_r t_r}, \quad \hat{m} = \frac{m}{m_r}, \quad \hat{t} = \frac{t}{t_r}, \quad \hat{\gamma} = \gamma, \quad \hat{\alpha}' = \alpha' \quad (3.18)$$

donde el valor de referencia  $v_r$  es la velocidad final que alcanza el lanzador al final de la tercera etapa de acuerdo con el manual de usuario [27],  $m_r$  es la masa total del cohete al despegue, y  $t_r$  es el tiempo total de la operación hasta la separación de la etapa 3. Sus valores se recogen en la Tabla 3.2.

**Tabla 3.2** Valores de referencia para la adimensionalización.

$v_r$ [m/s]	$m_r$ [kg]	$t_r$ [s]
7 564	212 302	417

Sustituyendo en (3.13) - (3.15) y operando, se llega al sistema de ecuaciones adimensional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{v}}{d\hat{t}} = \frac{\Pi_i}{\hat{m}} \cos \hat{\alpha}' - \xi_i \sin \hat{\gamma} - \frac{\sigma_i}{\hat{m}} \hat{v}^2 e^{-\frac{\hat{h}}{\hat{h}_{p0}}} \end{array} \right. \quad (3.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{h}}{d\hat{t}} = \hat{v} \sin \hat{\gamma} \end{array} \right. \quad (3.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{m}}{d\hat{t}} = -\mu_i \end{array} \right. \quad (3.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{\gamma}}{d\hat{t}} = \frac{\Pi_i}{\hat{m}\hat{v}} \sin \hat{\alpha}' - \frac{\xi_i}{\hat{v}} \cos \hat{\gamma} \end{array} \right. \quad (3.22)$$

con la variable de control  $\hat{\alpha}' \in [\alpha'_{min,i}, \alpha'_{max,i}] \forall \hat{t} \in [\hat{t}_{0,i}, \hat{t}_{f,i})$ , para los tramos  $i = 1, \dots, 7$ , y condiciones iniciales y de continuidad:

$$\hat{v}(t_{0,i}) = \hat{v}(t_{f,i-1}), \quad \hat{h}(t_{0,i}) = \hat{h}(t_{f,i-1}), \quad \hat{m}(t_{0,i}) = \hat{m}(t_{f,i-1}) - \hat{m}_{s,i}, \quad \hat{\gamma}(t_{0,i}) = \hat{\gamma}(t_{f,i-1}) \quad (3.23)$$

siendo los parámetros adimensionales:

$$\Pi_i = \frac{t_r}{m_r v_r} E_i \quad (3.24)$$

$$\sigma_i = \frac{v_r t_r}{2m_r} \rho_0 S_{f,i} C_D \quad (3.25)$$

$$\mu_i = \frac{t_r}{m_r} \dot{m}_i \quad (3.26)$$

$$\hat{m}_{s,i} = \frac{m_{s,i}}{m_r} \quad (3.27)$$

$$\xi_i = \frac{t_r}{v_r} g_i \quad (3.28)$$

$$\hat{h}_{p0} = \frac{h_{p0}}{v_r t_r} = 0.0028 \quad (3.29)$$

cuyos valores se recogen en la Tabla 3.3.

**Tabla 3.3** Parámetros adimensionales dependientes de cada tramo.

Etapas	Tramo $i$	$\hat{t}_{0,i}$	$\hat{t}_{f,i}$	$\Pi_i$	$\mu_i$	$\hat{m}_{s,i} (\cdot 10^{-2})$	$\sigma_i$	$\xi_i$
1	0	0	0.02	0.98	2.05	0	41.31	0.5406
	1	0.02	0.33	0.71	2.05	0	41.31	0.5373
	2	0.33	0.34	0	0	6.31	41.31	0.5373
2	3	0.34	0.56	0.29	0.77	0	39.32	0.5272
	4	0.56	0.59	0	0	2.00	39.32	0.5272
3	5	0.59	0.60	0	0	0.41	39.32	0.5145
	6	0.60	0.88	0.07	0.17	0	16.98	0.5145
	7	0.88	1	0	0	0.67	16.98	0.5145



## 4 Planificación de trayectoria: formulación

---

EN esta sección se describe el procedimiento de planificación de la trayectoria de ascenso mediante técnicas de control óptimo de un cohete de propulsante sólido multietapa.

Existen varias alternativas a la hora de llevar a cabo la optimización de forma numérica [36]:

- Métodos directos o indirectos:
  - Directos: las condiciones necesarias de optimalidad (Principio del Mínimo de Pontryagin) desarrolladas en la Teoría de Control Óptimo no se formulan explícitamente, sino que se transforma el problema en uno de optimización paramétrica (NLP, *Non-Linear Programming*). El principal problema de estos métodos es el elevado coste computacional que suelen acarrear, haciéndolos, en muchas ocasiones, inviables para aplicaciones en tiempo real.
  - Indirectos: requieren de la formulación de las condiciones necesarias de optimalidad. Tiene la ventaja de ser, en general, más preciso que los métodos directos. Por contrapartida, el estado debe ampliarse con nuevas variables complementarias denominadas adjuntos y cualquier modificación que se introduzca en la dinámica del problema conlleva a su total reformulación. Además, suelen presentar problemas de robustez y convergencia si la estimación inicial no es adecuada.
- Métodos de colocación o del disparo:
  - Colocación: permiten resolver problemas de contorno<sup>1</sup> mediante la discretización de las variables de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y de sus restricciones, transformando el problema en la resolución de un sistema de ecuaciones algebraicas. Han demostrado ser ventajosos en problemas de optimización híbridos<sup>2</sup>, donde la dinámica del sistema cambia en ciertos instantes de tiempo, tal y como ocurre en un problema de ascenso a órbita multietapa. No obstante, requieren de una buena estimación inicial de la solución general.
  - Disparo: convierten el problema de contorno en un problema de valor inicial clásico, tomando como variables de decisión las condiciones iniciales no especificadas y, como objetivo, las condiciones finales. Son muy sensibles a la estimación inicial de las condiciones iniciales, por lo que suelen necesitar un iterante inicial que respete las restricciones o que minimice su incumplimiento.

<sup>1</sup> Donde las condiciones no son necesariamente dadas en el instante inicial.

<sup>2</sup> También conocidos como problemas de contorno multipunto.

En la literatura, el problema de optimización de una trayectoria de ascenso a órbita de un vehículo ha sido abarcado tanto por métodos directos [37] como indirectos [38], teniendo este último tanto detractores [39] como defensores [40]. Asimismo, otros autores [41, 42] proponen métodos alternativos para evitar los aspectos negativos asociados a estos dos enfoques clásicos.

En nuestro caso, se estudian las bondades e inconvenientes de un método de colocación indirecto aplicado este problema, lo cual requiere la formulación del Principio del Mínimo, la ampliación del estado con los adjuntos y la discretización del sistema para la resolución del problema de contorno. Para este último punto, se emplea la función *bvp5c* de MATLAB<sup>®</sup>, la cual discretiza las funciones interpolando entre nodos con polinomios de orden 5, haciendo uso de la fórmula de Lobatto IIIa de cuatro etapas implementada como una fórmula implícita de Runge-Kutta para resolver problemas de contorno híbridos [43, 44]. Para hacer frente al hecho de necesitar una solución relativamente buena a priori de un problema tan complejo, se resuelven una serie de problemas partiendo de uno sencillo con una dinámica muy simplificada al que se van añadiendo elementos progresivamente, es decir, se aplica un método de continuación [45]. De esta forma, la solución del problema anterior sirve como iterante inicial del siguiente.

El diagrama de flujo del script desarrollado en MATLAB<sup>®</sup> para la obtención de la trayectoria óptima se recoge en el Apéndice A.1.

## 4.1 Formulación del problema de optimización

El objetivo del problema de optimización planteado consiste en la maximización de la energía específica del vehículo al final de la tercera etapa. De esta forma, el lanzador queda en buenas condiciones para la inserción final en órbita, realizada de forma precisa por la cuarta etapa. Así, el problema de control óptimo (OCP) se formula como:

$$\max \hat{e} = \max \left[ \frac{1}{2} \hat{v}(\hat{t}_f)^2 + \xi_7 \hat{h}(\hat{t}_f) \right] \quad (4.1)$$

sujeto a:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{v}}{d\hat{t}} = \frac{\Pi_i}{\hat{m}} \cos \hat{\alpha}' - \xi_i \sin \hat{\gamma} - \frac{\sigma_i}{\hat{m}} \hat{v}^2 e^{-\frac{\hat{h}}{\hat{h}_{p0}}} & (4.2) \\ \frac{d\hat{h}}{d\hat{t}} = \hat{v} \sin \hat{\gamma} & (4.3) \\ \frac{d\hat{m}}{d\hat{t}} = -\mu_i & (4.4) \\ \frac{d\hat{\gamma}}{d\hat{t}} = \frac{\Pi_i}{\hat{m}\hat{v}} \sin \hat{\alpha}' - \frac{\xi_i}{\hat{v}} \cos \hat{\gamma} & (4.5) \end{cases}$$

$$\hat{\alpha}' \in A'_i = [\alpha'_{min,i}, \alpha'_{max,i}] \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} \hat{v}(\hat{t}_{0,i}) = \hat{v}(\hat{t}_{f,i-1}) & (4.7) \\ \hat{h}(\hat{t}_{0,i}) = \hat{h}(\hat{t}_{f,i-1}) & (4.8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{m}(\hat{t}_{0,i}) = \hat{m}(\hat{t}_{f,i-1}) - \hat{m}_{s,i} & (4.9) \\ \hat{\gamma}(\hat{t}_{0,i}) = \hat{\gamma}(\hat{t}_{f,i-1}) & (4.10) \end{cases}$$

$$\hat{\gamma}(\hat{t}_f) = 0 \quad (4.11)$$

definido  $\forall \hat{t} \in [\hat{t}_{0,i}, \hat{t}_{f,i}]$ , para los tramos  $i = 1, \dots, 7$ .

Nótese que  $\hat{t}_f$ , sin subíndice, hace referencia al instante final global del problema,  $\hat{t}_{f,7}$ . De igual forma, por simplicidad, cualquier expresión que contenga  $\hat{t}_0$ , hace referencia al instante inicial global



del problema,  $\hat{t}_{0,1}$ .

Las ecuaciones (4.2) - (4.5) corresponden con las restricciones impuestas por la dinámica del modelo anteriormente desarrollado y la expresión (4.6) define los límites al control dados por criterios de diseño.

Las expresiones (4.7) - (4.10) representan las condiciones iniciales de los estados (para  $i = 1$ ) y las condiciones de continuidad de los estados entre tramos (para  $i > 1$ ). Por su parte, la expresión (4.11) es la condición para que, en el instante final, el ángulo de trayectoria  $\gamma$  sea nulo, dejando el vehículo en posición horizontal.

Basándonos en la nomenclatura presentada en [46], donde se aplica la Teoría de Control Óptimo para una formulación indirecta de un problema general de minimización, se particulariza para nuestro caso concreto. Se parte de la definición del Hamiltoniano (4.12) y del Lagrangiano en el punto final (4.13) adimensionales.

$$\hat{H}(\hat{t}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\lambda}) = \hat{l}(\hat{t}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}) + \hat{\lambda}^\top \hat{\mathbf{f}}(\hat{t}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}) \quad (4.12)$$

$$\hat{\mathcal{L}}(\hat{t}_f, \hat{\mathbf{x}}(\hat{t}_f), \hat{\mathbf{v}}) = \hat{\phi}(\hat{t}_f, \hat{\mathbf{x}}(\hat{t}_f)) + \hat{\mathbf{v}}^\top \hat{\psi}(\hat{t}_f, \hat{\mathbf{x}}(\hat{t}_f)) \quad (4.13)$$

donde  $\hat{\mathbf{x}}(t) = [\hat{v}(t) \hat{h}(t) \hat{m}(t) \hat{\gamma}(t)]^\top$  es el vector  $n$ -dimensional de estados,  $\hat{\mathbf{u}}(t) = \hat{\alpha}'(t)$  es el vector (en este caso de una sola componente, es decir, un escalar) de variables de control,  $\hat{\lambda}(t)$  es una función vectorial de  $n$  dimensiones que amplía el vector de estados (adjuntos), y  $\hat{\mathbf{v}}$  es un vector de multiplicadores de tantas dimensiones como restricciones al estado final existan (para este problema, una). Respecto a las funciones adimensionales:

- Coste corriente,  $\hat{l}(\hat{t}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}})$ : término del funcional de coste integrado a lo largo de la trayectoria. En nuestro caso, este término es nulo, por lo que el planteamiento se reduce a un problema de Mayer [47].
- Dinámica,  $\hat{\mathbf{f}}(\hat{t}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}})$ : función vectorial de 4 dimensiones definida por las ecuaciones de movimiento desarrolladas (4.2) - (4.5).
- Coste terminal,  $\hat{\phi}(\hat{t}_f, \hat{\mathbf{x}}(\hat{t}_f))$ : término de la función de coste que pondera una función de los estados finales. Esta formulación está planteada para problemas de minimización, en lugar de maximización, por lo que en nuestro caso  $\hat{\phi} = -\hat{e}$ .
- Restricciones en el estado final,  $\hat{\psi}(\hat{t}_f, \hat{\mathbf{x}}(\hat{t}_f))$ : corresponde con (4.11).

Sustituyendo en las definiciones (4.12) y (4.13) y operando se obtiene:

$$\hat{H} = \hat{\lambda}_v \left( \frac{\Pi_i}{\hat{m}} \cos \hat{\alpha}' - \xi_i \sin \hat{\gamma} - \frac{\sigma_i}{\hat{m}} \hat{v}^2 e^{-\frac{\hat{h}}{\hat{h}_{p0}}} \right) + \hat{\lambda}_h \hat{v} \sin \hat{\gamma} - \hat{\lambda}_m \mu_i + \hat{\lambda}_\gamma \left( \frac{\Pi_i}{\hat{m} \hat{v}} \sin \hat{\alpha}' - \frac{\xi_i}{\hat{v}} \cos \hat{\gamma} \right) \quad (4.14)$$

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{1}{2} \hat{v}(\hat{t}_f)^2 - \xi_7 \hat{h}(\hat{t}_f) + \hat{v}_\gamma \hat{\gamma}(\hat{t}_f) \quad (4.15)$$

Llegados a este punto, nos encontramos en disposición de aplicar las condiciones necesarias de optimalidad o Principio del Mínimo de Pontryagin:

**1. Condición de no trivialidad:** obliga a buscar una solución distinta a la trivial.

$$\left[ \hat{\lambda}_v(t) \hat{\lambda}_h(t) \hat{\lambda}_m(t) \hat{\lambda}_\gamma(t) \hat{v}_\gamma \right]^\top \neq \mathbf{0}_{5 \times 1}, \quad \forall \hat{t} \in [\hat{t}_0, \hat{t}_f] \quad (4.16)$$

- 2. Dinámica de los adjuntos:** derivando el Hamiltoniano respecto a los estados se obtienen las ecuaciones que rigen la evolución de los adjuntos asociados.

$$\frac{d\hat{\lambda}_v}{d\hat{t}} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{v}} = 2\hat{\lambda}_v \frac{\sigma_i}{\hat{m}} \hat{v} e^{-\frac{\hat{h}}{\hat{h}_{p0}}} - \hat{\lambda}_h \sin \hat{\gamma} + \frac{\hat{\lambda}_\gamma}{\hat{v}^2} \left( \frac{\Pi_i}{\hat{m}} \sin \hat{\alpha}' - \xi_i \cos \hat{\gamma} \right) \quad (4.17)$$

$$\frac{d\hat{\lambda}_h}{d\hat{t}} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{h}} = \hat{\lambda}_v \frac{\sigma_i}{\hat{h}_{p0} \hat{m}} \hat{v}^2 e^{-\frac{\hat{h}}{\hat{h}_{p0}}} \quad (4.18)$$

$$\frac{d\hat{\lambda}_m}{d\hat{t}} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{m}} = \frac{\hat{\lambda}_v}{\hat{m}^2} \left( \Pi_i \cos \hat{\alpha}' - \sigma_i \hat{v}^2 e^{-\frac{\hat{h}}{\hat{h}_{p0}}} \right) + \hat{\lambda}_\gamma \frac{\Pi_i}{\hat{m}^2 \hat{v}} \sin \hat{\alpha}' \quad (4.19)$$

$$\frac{d\hat{\lambda}_\gamma}{d\hat{t}} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{\gamma}} = \hat{\lambda}_v \xi_i \cos \hat{\gamma} - \hat{\lambda}_h \hat{v} \cos \hat{\gamma} - \hat{\lambda}_\gamma \frac{\xi_i}{\hat{v}} \sin \hat{\gamma} \quad (4.20)$$

válido  $\forall \hat{t} \in [\hat{t}_{0,i}, \hat{t}_{f,i})$ , para los tramos  $i = 1, \dots, 7$ .

- 3. Condiciones de transversalidad:** permiten obtener las condiciones finales de los adjuntos cuyos estados asociados no tienen restringido su valor final.

$$\hat{\lambda}_v(\hat{t}_f) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{v}(\hat{t}_f)} = -\hat{v}(\hat{t}_f) \quad (4.21)$$

$$\hat{\lambda}_h(\hat{t}_f) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{h}(\hat{t}_f)} = -\xi_7 \quad (4.22)$$

$$\hat{\lambda}_m(\hat{t}_f) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{m}(\hat{t}_f)} = 0 \quad (4.23)$$

- 4. Condiciones de continuidad de los adjuntos:** los adjuntos deben ser continuos incluso si la dinámica está definida a trozos.

$$\hat{\lambda}_v(\hat{t}_{0,i}) = \hat{\lambda}_v(\hat{t}_{f,i-1}) \quad (4.24)$$

$$\hat{\lambda}_h(\hat{t}_{0,i}) = \hat{\lambda}_h(\hat{t}_{f,i-1}) \quad (4.25)$$

$$\hat{\lambda}_m(\hat{t}_{0,i}) = \hat{\lambda}_m(\hat{t}_{f,i-1}) \quad (4.26)$$

$$\hat{\lambda}_\gamma(\hat{t}_{0,i}) = \hat{\lambda}_\gamma(\hat{t}_{f,i-1}) \quad (4.27)$$

para  $i = 2, \dots, 7$ .

- 5. Condición de minimización del Hamiltoniano:** el control óptimo surge de la minimización global del Hamiltoniano en cada instante de tiempo, constituyendo en sí mismo un problema de optimización paramétrica (4.28) que puede ser resuelto mediante la imposición de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

$$\hat{\alpha}'^*(\hat{t}, \hat{x}^*, \hat{\lambda}) = \arg \min_{\hat{\alpha}' \in A'_i} \hat{H}(\hat{t}, \hat{x}^*, \hat{\alpha}', \hat{\lambda}), \quad \forall \hat{t} \in [\hat{t}_0, \hat{t}_f) \quad (4.28)$$

En primer lugar, para cada punto de la trayectoria, se debe calcular un posible óptimo mediante la Condición de Euler-Lagrange:

$$\left. \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{\alpha}'} \right|_{\hat{\alpha}'^*} = 0 \Rightarrow \hat{\alpha}'^* = \arctan \left( \frac{\hat{\lambda}_\gamma}{\hat{\lambda}_v \hat{v}^*} \right) \quad (4.29)$$

Además, es necesario comprobar que se cumple la Condición de Legendre-Clebsch (4.30), que

asegura la convexidad del Hamiltoniano y, por tanto, la existencia de un mínimo en dicho punto.

$$\left. \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial \hat{\alpha}^2} \right|_{\hat{\alpha}^{l*}} \geq 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_v \leq 0 \quad (4.30)$$

En caso de que esta condición no se cumpla, el entorno del punto no sería convexo, por lo que es necesario el estudio de los extremos del intervalo, seleccionando aquel que genere un valor inferior del Hamiltoniano:

$$\hat{\alpha}^{l*} = \begin{cases} \alpha'_{min,i} & \text{si } \hat{H}(\alpha'_{min,i}) \leq \hat{H}(\alpha'_{max,i}) \\ \alpha'_{max,i} & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad (4.31)$$

Por último, es requisito indispensable imponer que el valor de  $\hat{\alpha}^{l*}$  se encuentre en todo momento dentro del rango de control admisible  $A'_i$ .

Resumiendo:

$$\hat{\alpha}^{l*} = \begin{cases} \alpha'_{min,i} & \text{si } \hat{\lambda}_v > 0, \hat{H}(\alpha'_{min,i}) \leq \hat{H}(\alpha'_{max,i}) \\ & \text{ó } \hat{\lambda}_v \leq 0, \arctan\left(\frac{\hat{\lambda}_v}{\hat{\lambda}_v \hat{v}^*}\right) \leq \alpha'_{min,i} \\ \arctan\left(\frac{\hat{\lambda}_v}{\hat{\lambda}_v \hat{v}^*}\right) & \text{si } \hat{\lambda}_v \leq 0, \arctan\left(\frac{\hat{\lambda}_v}{\hat{\lambda}_v \hat{v}^*}\right) \in A'_i \\ \alpha'_{max,i} & \text{si } \hat{\lambda}_v \leq 0, \arctan\left(\frac{\hat{\lambda}_v}{\hat{\lambda}_v \hat{v}^*}\right) \geq \alpha'_{max,i} \\ & \text{ó } \hat{\lambda}_v > 0, \hat{H}(\alpha'_{min,i}) > \hat{H}(\alpha'_{max,i}) \end{cases}, \quad \forall \hat{t} \in [\hat{t}_0, \hat{t}_f] \quad (4.32)$$

para  $i = 1, \dots, 7$ .

- 6. Condición de constancia del Hamiltoniano:** la expresión del Hamiltoniano (4.14) no depende explícitamente del tiempo al tratarse de un problema autónomo. Esto implica que el Hamiltoniano sea constante para cada tramo.

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{t}} = 0 \Rightarrow \hat{H} = \text{cte} \quad (4.33)$$

Esta condición no es necesaria imponerla de ninguna forma para la resolución de este problema, pero es de gran utilidad para verificar la formulación y depurar la programación.

Como comentario adicional, se ha de indicar que el estado referente a la masa  $\hat{m}$  (4.4) evoluciona de forma lineal (a saltos) con el tiempo, independiente del resto de estados y de forma incontrolable. Por este motivo, sería posible sustituir su expresión integrada en el resto de ecuaciones que modelan la dinámica y trabajar con 3 estados. No obstante, esto haría que el problema dejara de ser autónomo y se perdiera esta condición. Debido a esto, se ha decidido mantenerlo como estado.

Estas condiciones cierran matemáticamente el problema, reduciéndolo a la resolución de un problema de contorno formado por un sistema de 8 ecuaciones diferenciales definidas a trozos. Para su implementación mediante un método de colocación, se deben tener en cuenta una serie de consideraciones adicionales para asegurar la convergencia a partir de una buena estimación inicial de la solución.

## 4.2 Método de continuación

La estrategia de resolución consiste en abordar una serie de subproblemas, aumentando la complejidad de los mismos progresivamente hasta alcanzar el nivel del modelo desarrollado, de forma que

la solución del problema previo sirve de iterante inicial para el siguiente. Esto es lo que se conoce como método de continuación [45].

Encontrar una solución aproximada inicial lo suficientemente buena (esto es, cercana al óptimo) como para asegurar la convergencia de un problema con 7 tramos puede ser altamente complejo. Por este motivo, se propone resolver un problema simplificado de una sola etapa cuyos parámetros dependientes de la etapa activa ( $i$ ) sean los valores ponderados por el tiempo de quemado de cada una de las etapas del problema original. Estos parámetros se van modificando progresivamente mediante un factor de atenuación,  $a_t \in [0, 1]$ , para cada subproblema hasta obtener la solución del problema multietapa. De esta forma, para cada valor de  $a_t$ , quedaría modificada la dinámica:

$$\frac{d\hat{v}}{d\hat{t}} = \frac{\Pi_c}{\hat{m}} \cos \hat{\alpha}' - \xi_c \sin \hat{\gamma} - \frac{\sigma_c}{\hat{m}} \hat{v}^2 e^{-\frac{\hat{h}}{\hat{h}_{\rho_0}}} \quad (4.34)$$

$$\frac{d\hat{h}}{d\hat{t}} = \hat{v} \sin \hat{\gamma} \quad (4.35)$$

$$\frac{d\hat{m}}{d\hat{t}} = -\mu_c \quad (4.36)$$

$$\frac{d\hat{\gamma}}{d\hat{t}} = \frac{\Pi_c}{\hat{m}\hat{v}} \sin \hat{\alpha}' - \frac{\xi}{\hat{v}} \cos \hat{\gamma} \quad (4.37)$$

$$\frac{d\hat{\lambda}_v}{d\hat{t}} = 2\hat{\lambda}_v \frac{\sigma_c}{\hat{m}} \hat{v} e^{-\frac{\hat{h}}{\hat{h}_{\rho_0}}} - \hat{\lambda}_h \sin \hat{\gamma} + \frac{\hat{\lambda}_\gamma}{\hat{v}^2} \left( \frac{\Pi_c}{\hat{m}} \sin \hat{\alpha}' - \xi \cos \hat{\gamma} \right) \quad (4.38)$$

$$\frac{d\hat{\lambda}_h}{d\hat{t}} = \hat{\lambda}_v \frac{\sigma_c}{\hat{h}_{\rho_0} \hat{m}} \hat{v}^2 e^{-\frac{\hat{h}}{\hat{h}_{\rho_0}}} \quad (4.39)$$

$$\frac{d\hat{\lambda}_m}{d\hat{t}} = \hat{\lambda}_v \frac{\Pi_c}{\hat{m}^2} \cos \hat{\alpha}' + \frac{\sigma_c}{\hat{m}^2} \left( \frac{\hat{\lambda}_\gamma}{\hat{v}} \sin \hat{\alpha}' - \hat{\lambda}_v \hat{v}^2 e^{-\frac{\hat{h}}{\hat{h}_{\rho_0}}} \right) \quad (4.40)$$

$$\frac{d\hat{\lambda}_\gamma}{d\hat{t}} = \hat{\lambda}_v \xi \cos \hat{\gamma} - \hat{\lambda}_h \hat{v} \cos \hat{\gamma} - \hat{\lambda}_\gamma \frac{\xi}{\hat{v}} \sin \hat{\gamma} \quad (4.41)$$

siendo

$$\Pi_c = \bar{\Pi}(1 - a_t) + \Pi_i a_t \quad (4.42)$$

$$\sigma_c = \bar{\sigma}(1 - a_t) + \sigma_i a_t \quad (4.43)$$

$$\xi_c = \bar{\xi}(1 - a_t) + \xi_i a_t \quad (4.44)$$

$$\mu_c = \bar{\mu}(1 - a_t) + \mu_i a_t \quad (4.45)$$

Respecto al resto de condiciones, solo se vería alterada la de la masa (4.9), la cual introduce progresivamente las discontinuidades en el estado:

$$\hat{m}(\hat{t}_{0,i}) = \hat{m}(\hat{t}_{f,i-1}) - \hat{m}_{s,i} a_t, \quad (4.46)$$

la condición de transversalidad del adjunto asociado a la altitud (4.22):

$$\hat{\lambda}_h(\hat{t}_f) = \bar{\xi}(1 - a_t) + \xi_i a_t, \quad (4.47)$$

y el rango de control:

$$\hat{\alpha}' \in A'_i = [\bar{\alpha}'_{min}(1 - a_t) + \alpha'_{min,i} a_t, \bar{\alpha}'_{max}(1 - a_t) + \alpha'_{max,i} a_t] \quad (4.48)$$

para  $i = 1, \dots, 7$ .

Los valores promediados del problema simplificado se definen como:

$$\bar{\Pi} = \Pi_1 = 0.71 \quad (4.49)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^7 \sigma_i (\hat{t}_{f,i} - \hat{t}_{0,i})}{\hat{t}_f - \hat{t}_0} = 30.85 \quad (4.50)$$

$$\bar{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^7 \mu_i (\hat{t}_{f,i} - \hat{t}_{0,i})}{\hat{t}_f - \hat{t}_0} = 0.87 \quad (4.51)$$

$$\bar{\xi} = \frac{\sum_{i=1}^7 \xi_i (\hat{t}_{f,i} - \hat{t}_{0,i})}{\hat{t}_f - \hat{t}_0} = 0.5251 \quad (4.52)$$

$$\bar{\alpha}'_{min} = \alpha_{min}^{[1]} = -0.103 \text{ rad} \quad (4.53)$$

$$\bar{\alpha}'_{max} = \alpha_{max}^{[1]} = 0.103 \text{ rad} \quad (4.54)$$

Nótese que el valor  $\bar{\Pi}$  de empuje adimensional (4.49) se ha hecho coincidente con el valor de la primera etapa (empuje máximo) para asegurar que en todo momento el empuje es superior al peso, condición indispensable para que el problema tenga sentido físico.

Respecto a los límites del control (4.53) y (4.54), por simplicidad, se ha optado por utilizar los valores mínimo y máximo, respectivamente, de la primera etapa.



## 5 Planificación de trayectoria: resultados

---

A continuación, se presentan y discuten los resultados obtenidos para una trayectoria óptima del modelo multietapa desarrollado en la Sección 4, incluyendo la obtención de las condiciones iniciales derivadas del tramo de ascenso vertical, la aproximación inicial de la solución empleada como primer iterante y los resultados intermedios del subproblema monofásico. Por último, se comparan con los valores de referencia del manual de usuario [27] y se realizan consideraciones relativas a la viabilidad de desarrollar un sistema de guiado capaz de rechazar perturbaciones, proponiendo las modificaciones pertinentes al modelo.

Todos los resultados aquí expuestos se han dimensionalizado de nuevo con el objetivo facilitar la comprensión de los mismos y poder comparar con valores típicos de velocidad, altitud, etc.

### 5.1 Ascenso vertical: condiciones iniciales

La resolución de este tramo pasa por la integración analítica del sistema dimensional (3.12) - (3.16), particularizado para los parámetros recogidos del tramo 0 en la Tabla 2.10, y forzando al ángulo de dirección del empuje  $\alpha'$  a ser igual a cero (anulando el control). Se emplean las condiciones iniciales mostradas en la Tabla 5.1.

**Tabla 5.1** Condiciones iniciales del tramo de ascenso vertical.

$v(t_{0,0})$ [m/s]	$h(t_{0,0})$ [m]	$m(t_{0,0})$ [kg]	$\gamma(t_{0,0})$ [deg]	$x(t_{0,0})$ [m]
0	0	212 302	90	0

La evolución de los distintos estados (velocidad, altitud, masa y ángulo de trayectoria) se representa en la Figura 5.1 durante los 10 segundos que dura esta fase. La Figura 5.2, por su parte, recoge otras variables derivadas de interés del sistema, como pueden ser la distancia horizontal recorrida, la evolución de la presión dinámica, la trayectoria seguida (altitud respecto a distancia horizontal) y un gráfico que contrapone el valor de la altitud con el de la velocidad, las dos principales variables que permiten evaluar rápidamente la evolución de la trayectoria.

En general, la presión dinámica (5.1) tiene interés desde un punto de vista estructural, ya que va a determinar en gran medida los esfuerzos que debe soportar el vehículo a lo largo del tiempo, pudiendo imponer restricciones adicionales al problema de optimización. En la formulación desarrollada, estas limitaciones no han sido consideradas. No obstante, este gráfico es de gran interés para apreciar

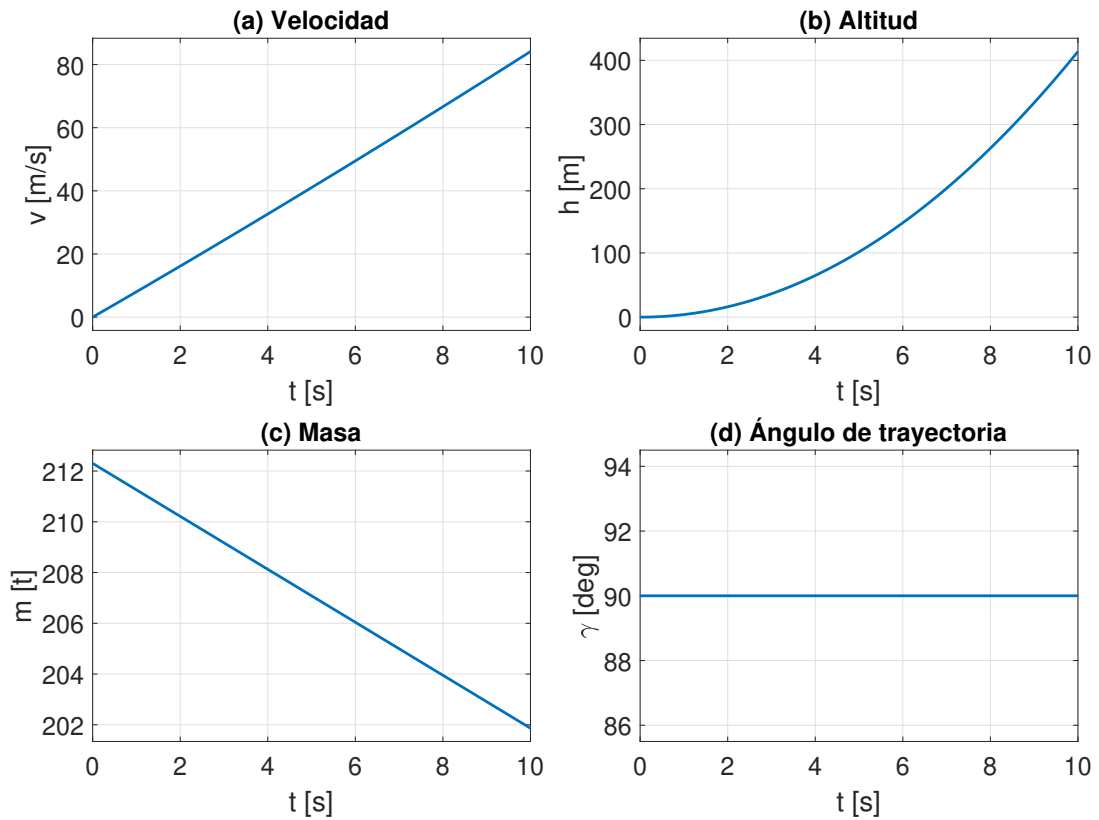


Figura 5.1 Evolución de los estados del sistema durante el ascenso vertical (tramo 0).

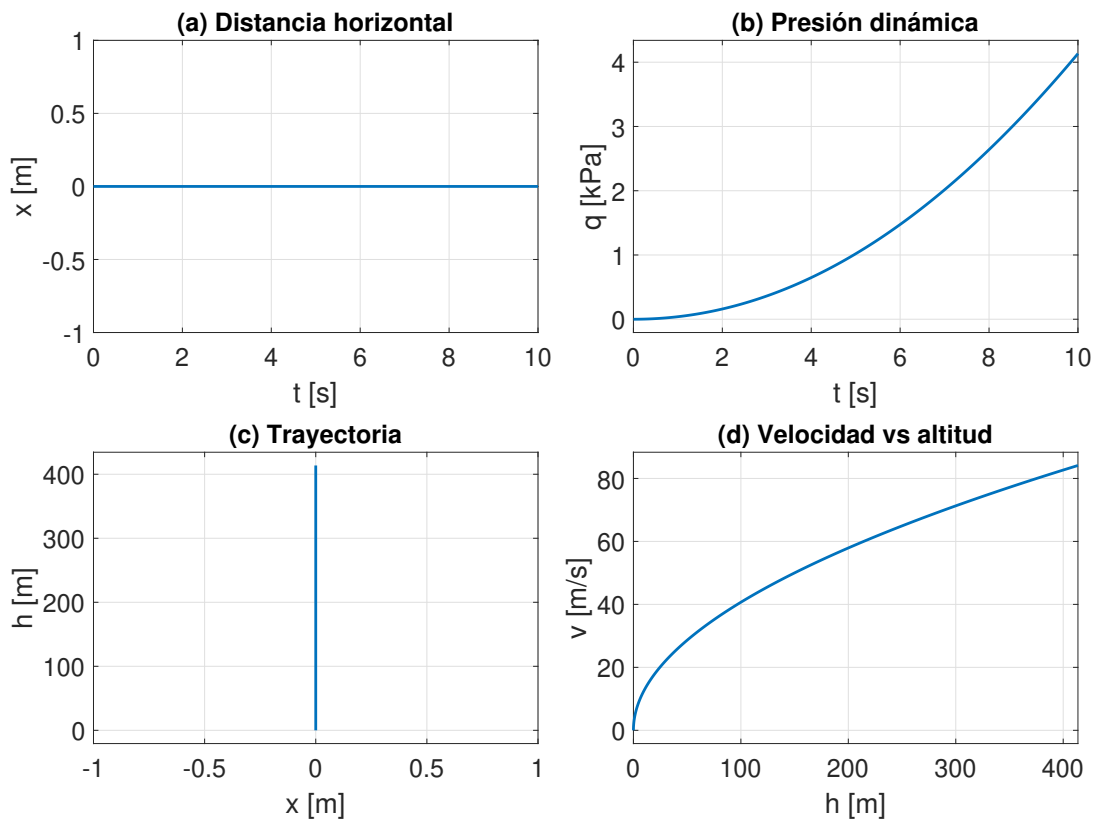


Figura 5.2 Evolución de variables adicionales del sistema durante el ascenso vertical (tramo 0).



la evolución de la influencia de la atmósfera (y por tanto de la resistencia aerodinámica) sobre el lanzador.

$$q(t) = \frac{1}{2}\rho(t)v(t)^2 \quad (5.1)$$

El valor de los distintos estados en el instante final del tramo corresponden con las condiciones iniciales del problema de optimización que se estaban buscando (Tabla 5.2). Su conversión a variables adimensionales se recoge en la Tabla 5.3.

**Tabla 5.2** Condiciones iniciales del problema de optimización.

$v(t_{0,1})$ [m/s]	$h(t_{0,1})$ [m]	$m(t_{0,1})$ [kg]	$\gamma(t_{0,1})$ [deg]	$x(t_{0,1})$ [m]
84.12	413.71	201 865	90	0

**Tabla 5.3** Condiciones iniciales adimensionales del problema de optimización.

$\hat{v}(\hat{t}_{0,1})$	$\hat{h}(\hat{t}_{0,1})$	$\hat{m}(\hat{t}_{0,1})$	$\hat{\gamma}(\hat{t}_{0,1})$ [rad]
$1.11 \cdot 10^{-2}$	$1.31 \cdot 10^{-4}$	0.951	$\pi/2$

## 5.2 Aproximación inicial

Existen varias estrategias [48] para obtener una solución inicial aproximada de la trayectoria óptima, como puede ser usar una ley lineal de la tangente del ángulo de trayectoria, la cual resulta ser la solución óptima analítica para el problema planteado, en ausencia de atmósfera, que maximiza la velocidad horizontal para una altitud final dada. No obstante, este enfoque no es adecuado cuando se contemplan los efectos aerodinámicos, ya que presupone ángulos de ataque elevados que, por una parte, introducirían cargas transversales indeseadas sobre la estructura y, por otra, contradice la Hipótesis 9 de ángulo de ataque despreciable.

Por este motivo se ha preferido el empleo de una maniobra asistida por gravedad, o *Gravity Turn*, que mantiene el ángulo de ataque nulo o cercano a cero en todo momento. Esta se compone de dos tramos:

- Un *Pitch-over* (PO) de duración determinada que permite la transición desde la posición vertical del cohete al final del tramo de ascenso vertical hasta una con cierta inclinación. Durante este tramo,  $\hat{\alpha}' = \text{cte} < 0$ .
- El *Gravity Turn* (GT) propiamente dicho, donde la dirección del empuje coincide con la dirección de la velocidad ( $\hat{\alpha}' = 0$ ), eliminando las pérdidas por desalineamiento y reduciendo las gravitatorias al utilizar la gravedad para rotar progresivamente el vector velocidad (giro asistido).

Para calcular la duración del *Pitch-over*, usando el máximo ángulo de deflexión de la tobera ( $\hat{\alpha}' = \hat{\alpha}'_{min}$ ), se impone la condición de obtener un ángulo de trayectoria nulo (4.11) al finalizar el *Gravity Turn*, es decir, una vez transcurrido el tiempo de quemado del combustible. Sustituyendo los datos del problema en la dinámica adimensionalizada (4.34) - (4.37), con  $a_t = 0$ , las condiciones iniciales de la Tabla 5.3 calculadas en el apartado anterior, y resolviendo para  $t_{PO}$  la ecuación (4.11), el *Pitch-over* tiene lugar durante 6.8 segundos tras la finalización del tramo de ascenso vertical.

En la Figura 5.3 se presenta la evolución de los distintos estados de la aproximación inicial, diferenciando entre la fase de *Pitch-over* (en azul) y el *Gravity Turn* (en naranja). Cabe destacar la elevada velocidad (a) que se alcanza ( $\sim 17$  km/s), muy superior a la velocidad de escape (en torno

a 11 km/s para esa altitud [49]), lo cual dista mucho de las prestaciones reales del cohete. Esto es debido a la simplificación de un problema multietapa a uno monoetapa, donde se ha elegido usar un empuje constante muy elevado durante toda la trayectoria, lo cual no es realista. No obstante, más que los valores concretos, nos interesa la evolución de los distintos estados y adjuntos, la cual se va a ir adaptando conforme se sucedan las distintas iteraciones del método de continuación hasta llegar al problema multietapa final.

De igual forma y por el mismo motivo, se puede comprobar que la altitud (b) alcanzada de 275 km también es muy superior a la esperable (190 km), según el manual de usuario [27]. Esto hace que el valor dimensional de la función objetivo, en valor absoluto, tome un valor muy elevado: 149 MJ/kg.

Respecto al ángulo  $\gamma$  de trayectoria (d) se observa que evoluciona de acuerdo a las condiciones impuestas: partiendo de la situación de verticalidad, se reduce hasta hacerse nulo en el instante final.

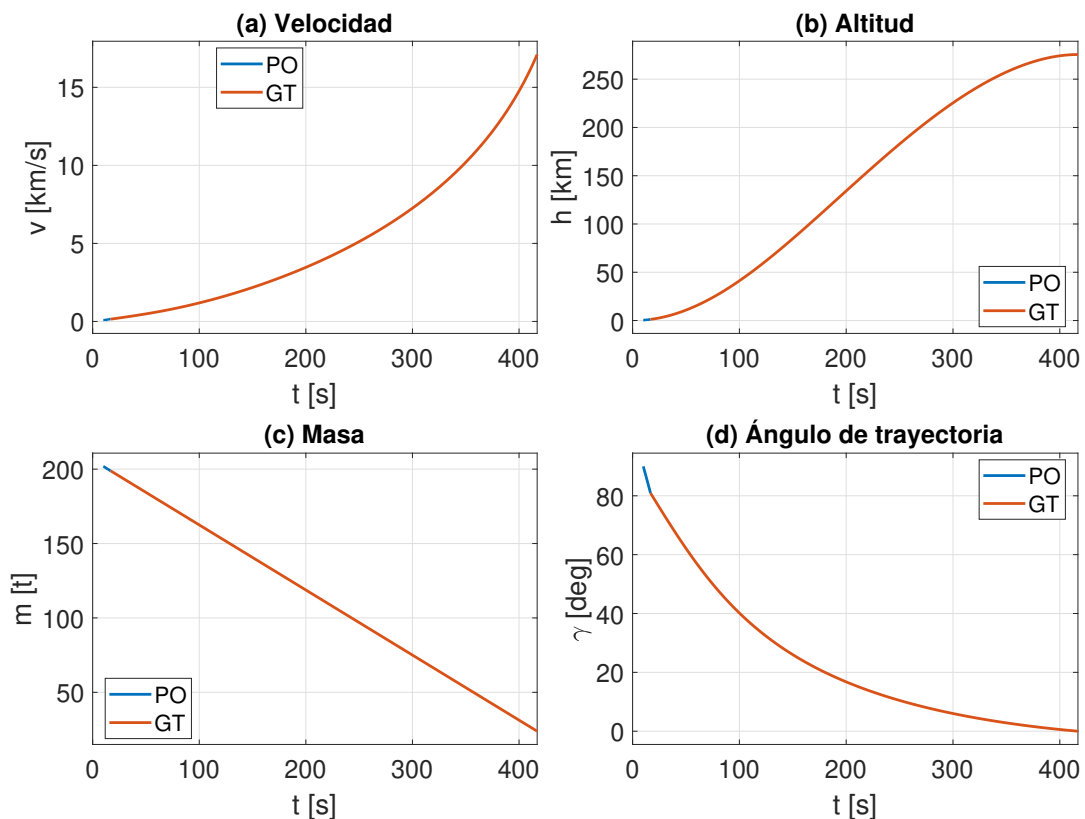


Figura 5.3 Evolución de los estados de la aproximación inicial.

De forma análoga al apartado anterior, también se muestra la evolución de las variables adicionales en la Figura 5.4, donde la distancia horizontal presente en (a) y (c) se computa, en todos los casos, a posteriori con la ecuación (3.16). Cabe mencionar la evolución típica de la presión dinámica (b), que asciende progresivamente conforme se incrementa la velocidad llegando a un máximo, a partir del cual comienza decrecer debido al enrarecimiento de la atmósfera, es decir, debido a la disminución de la densidad hasta que su influencia se hace despreciable.

Por último, se incluye la variación del ángulo de control en la Figura 5.5, donde el esfuerzo de control se reduce a una deflexión máxima negativa de la tobera durante el *Pitch-over*.

Para obtener un iterante inicial del problema de optimización para el algoritmo de colocación, es necesario computar, adicionalmente, una aproximación de la evolución de los adjuntos. Es posible integrar hacia atrás la dinámica de los cuatro adjuntos (4.38) - (4.41), siendo  $a_t = 0$ , junto a las tres condiciones finales derivadas de las condiciones de transversalidad (4.21) - (4.23). Para cerrar el

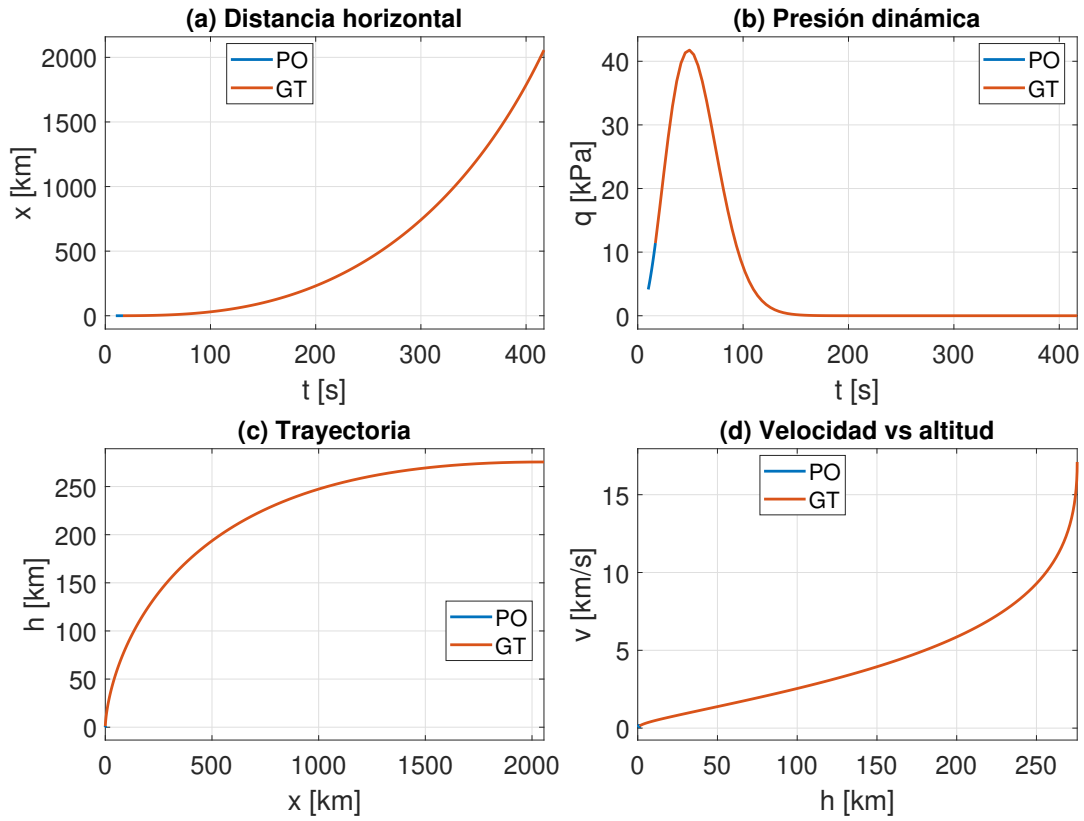


Figura 5.4 Evolución de variables adicionales de la aproximación inicial.

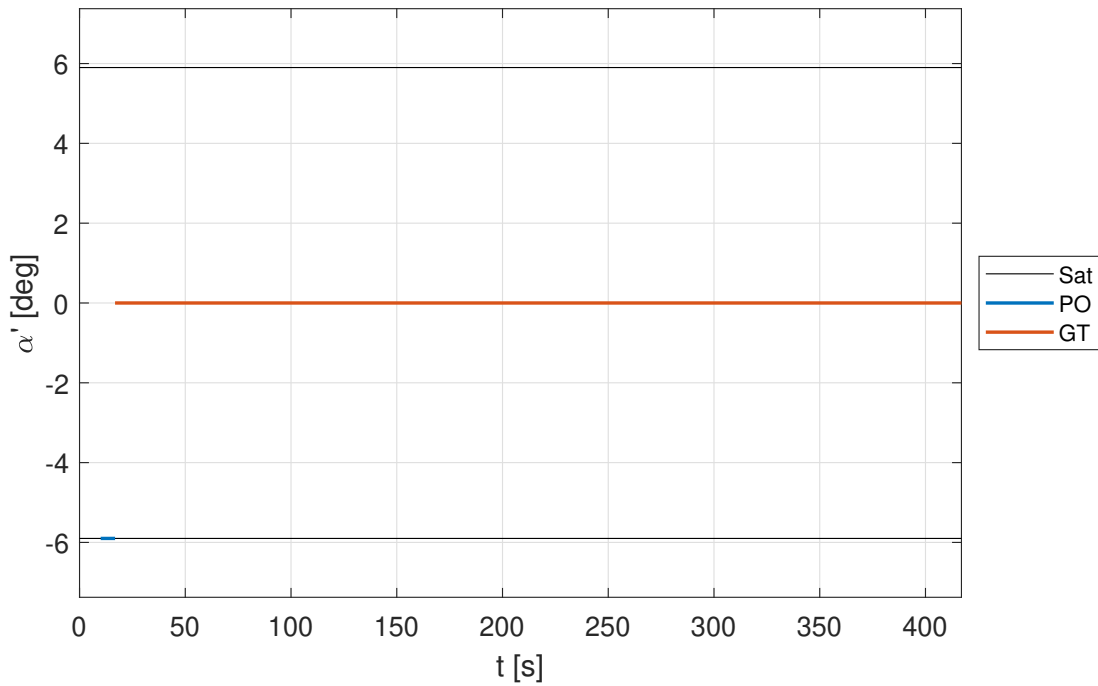


Figura 5.5 Evolución del control de la aproximación inicial.

problema es necesario estimar el valor final del adjunto asociado al ángulo de trayectoria,  $\hat{\lambda}_\gamma(\hat{t}_f)$ . Para ello, se puede partir de la expresión del control óptimo (4.29), despejando y particularizándola en el instante final:

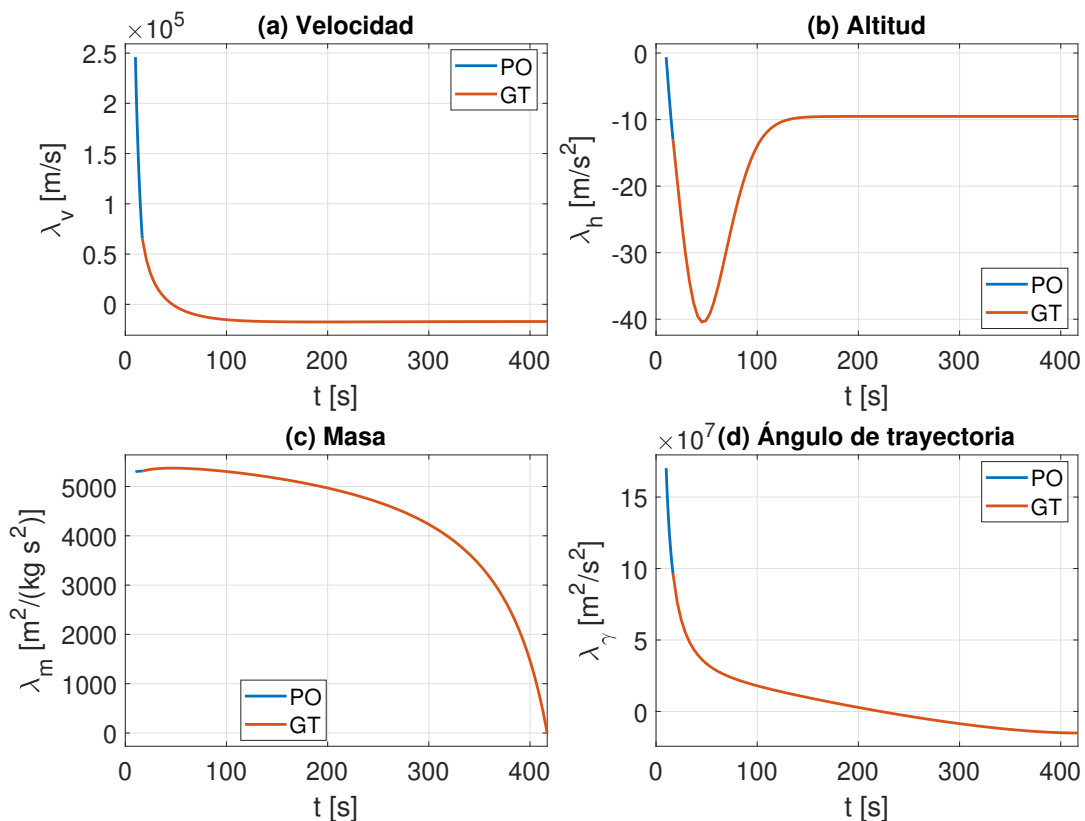
$$\hat{\lambda}_\gamma(\hat{t}_f) = \hat{\lambda}_v(\hat{t}_f)\hat{v}^*(\hat{t}_f) \tan \hat{\alpha}'^*(\hat{t}_f) = -\hat{v}^*(\hat{t}_f)^2 \tan \hat{\alpha}'^*(\hat{t}_f) \quad (5.2)$$

Por un lado, se puede asumir que la velocidad óptima en el instante final se parecerá a la velocidad aproximada que ya ha sido calculada. Por otra parte, el control ha sido impuesto, otorgándole un valor nulo en este tramo. No obstante, el control óptimo puede distar de este valor. De hecho, suele ser ligeramente positivo para contrarrestar la gravedad, una vez que el vehículo está en posición horizontal. Por este motivo se asume que toma un valor igual a la mitad del ángulo máximo permitido:

$$\hat{\lambda}_\gamma(\hat{t}_f) \approx -\hat{v}(\hat{t}_f)^2 \tan \frac{\bar{\alpha}'_{max}}{2} \quad (5.3)$$

Nuevamente, no es importante que el valor concreto escogido sea exacto, lo crucial es que sea coherente con la formulación desarrollada y esté lo suficientemente cerca de la solución del siguiente problema en el método de continuación.

La evolución de los adjuntos asociados a cada uno de los estados se presentan en las cuatro gráficas de la Figura 5.6. Como comentario adicional, tal y como se deduce de la expresión (4.38), la dinámica del adjunto  $\lambda_h$  asociado a la altitud (b) está dominado por las características aerodinámicas, por lo que rápidamente se vuelve constante en cuanto se libran las capas más densas de la atmósfera.

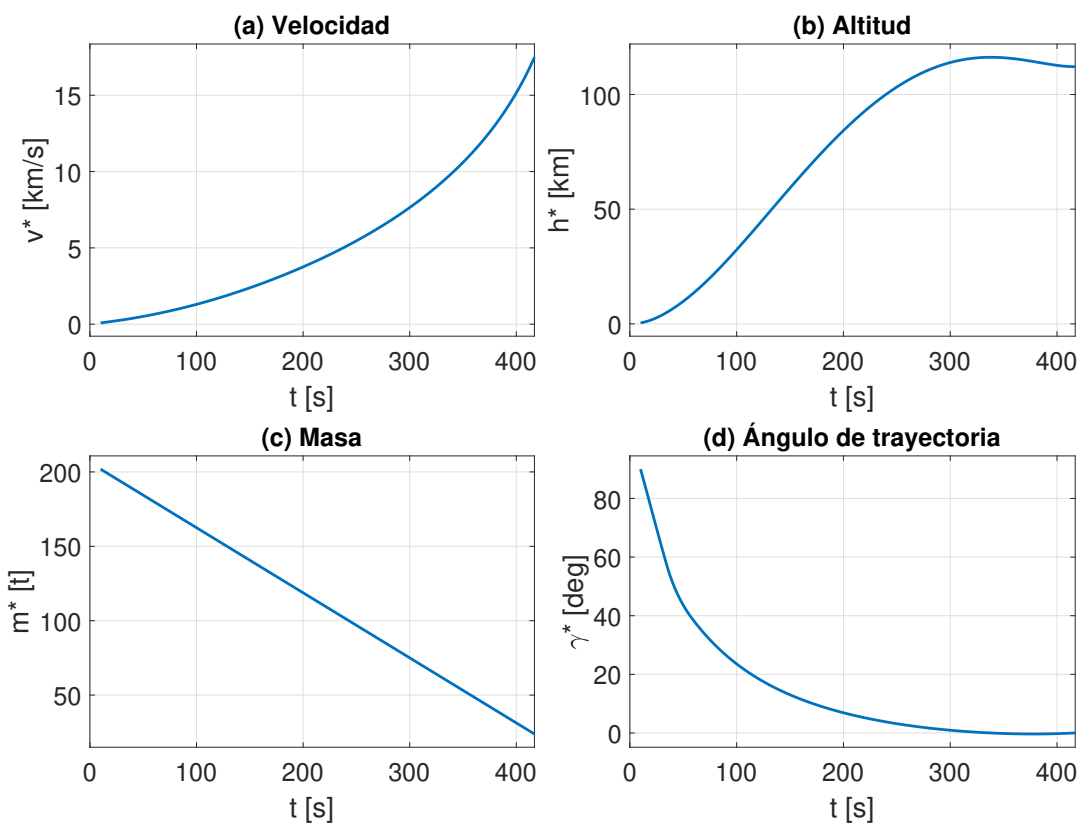


**Figura 5.6** Evolución de los adjuntos de la aproximación inicial.

### 5.3 Problema monoetapa

Ahora nos encontramos en disposición de abordar el primer problema de optimización propiamente dicho. Para ello, se resuelve el problema de contorno planteado en el Apartado 4.2, para un factor de atenuación  $a_t = 0$  (problema monoetapa puro), mediante un algoritmo de colocación y empleando los resultados del apartado anterior como iterante inicial.

En la Figura 5.7 se muestra la evolución de los estados óptimos. Se puede comprobar que las curvas poseen una forma similar a las de la solución aproximada. Sin embargo, la altitud (b) es considerablemente inferior (112 km al final de la trayectoria) y se produce un intercambio entre energía potencial y cinética, muy característico de este tipo de trayectorias, incrementando la velocidad final (a) hasta los 17.5 km/s. Con esto, el valor óptimo de la función objetivo, es decir, de la energía específica toma un valor de 154 MJ/kg, el cual es superior al de la aproximación inicial, tal y como era de esperar, ya que se ha optimizado.

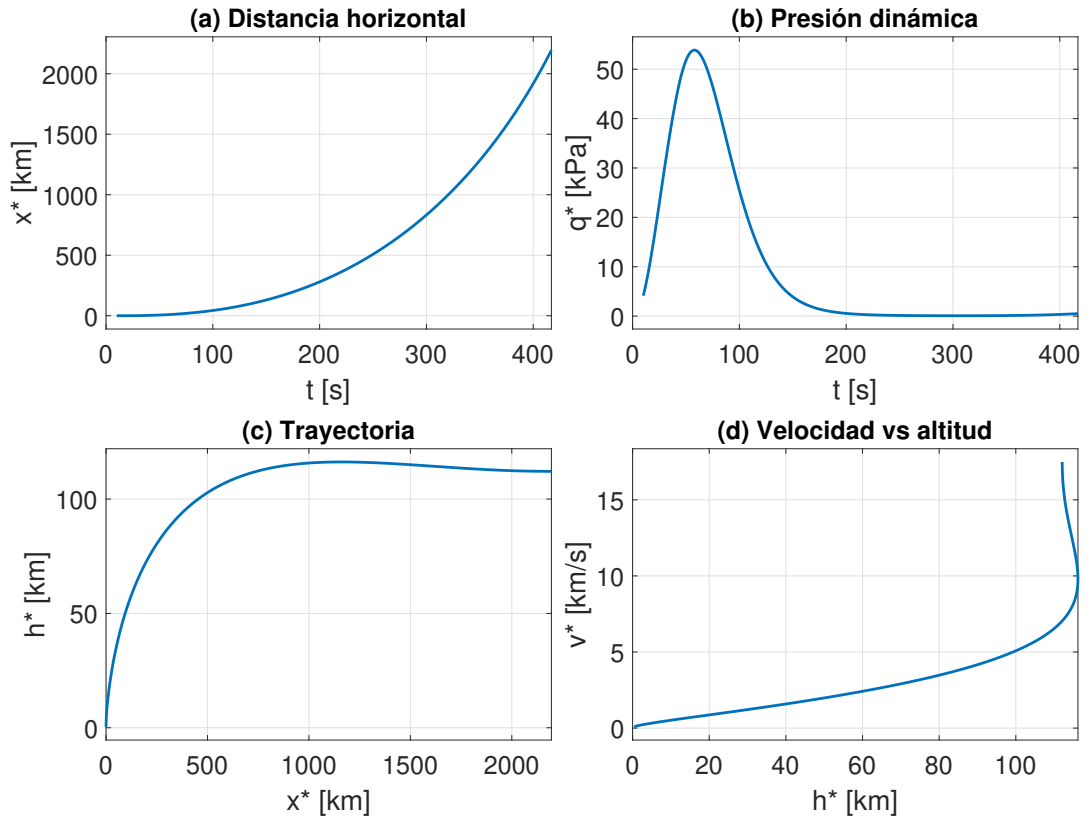


**Figura 5.7** Evolución de los estados del problema monoetapa.

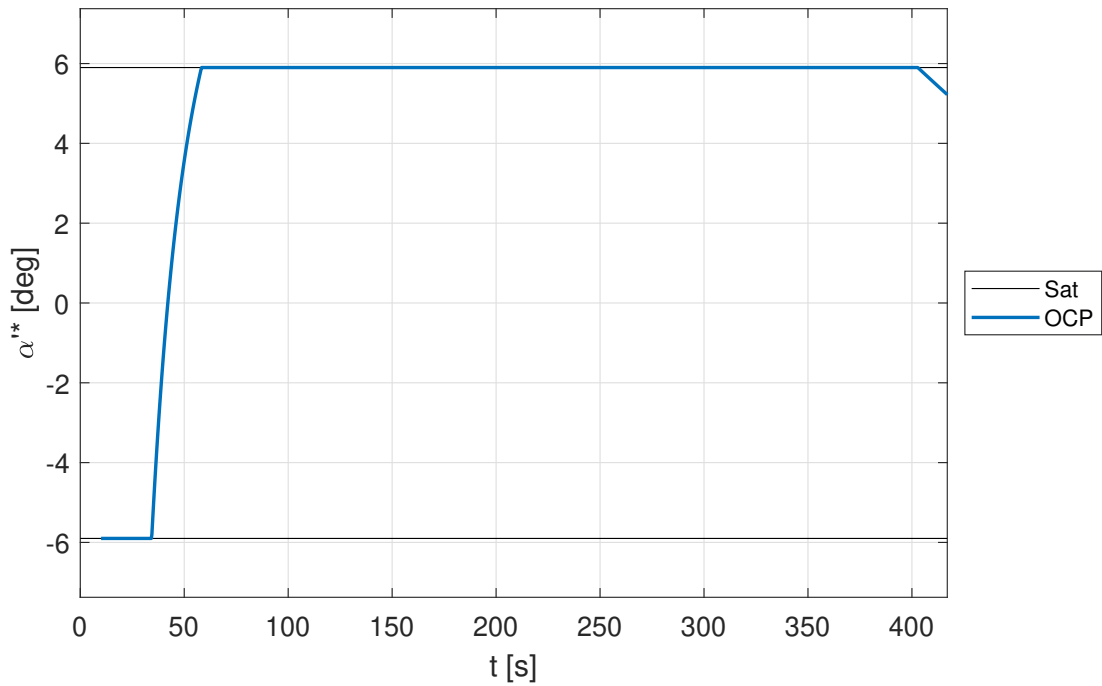
Respecto a las variables adicionales presentadas en la Figura 5.8, cabe destacar el ensanchamiento de la campana de la presión dinámica (b) debido a una operación a una menor altitud y, por ende, una presencia de la atmósfera por mayor tiempo. Por otra parte, también es posible observar la forma típica de una trayectoria (c) donde se produce el intercambio energético (d).

La evolución del control óptimo se refleja en la Figura 5.9 junto a los márgenes de saturación. También se representa el valor del Hamiltoniano en función del tiempo (Figura 5.10), donde se puede comprobar que se cumple con la condición de constancia del Hamiltoniano para problemas autónomos, siendo indicativo de que el problema ha sido resuelto correctamente.

Por último, se incluye la evolución de adjuntos asociados en la Figura 5.11. Estos siguen, en general, una distribución similar a la prevista en el apartado anterior.



**Figura 5.8** Evolución de variables adicionales del problema monoetapa.



**Figura 5.9** Evolución del control del problema monoetapa.

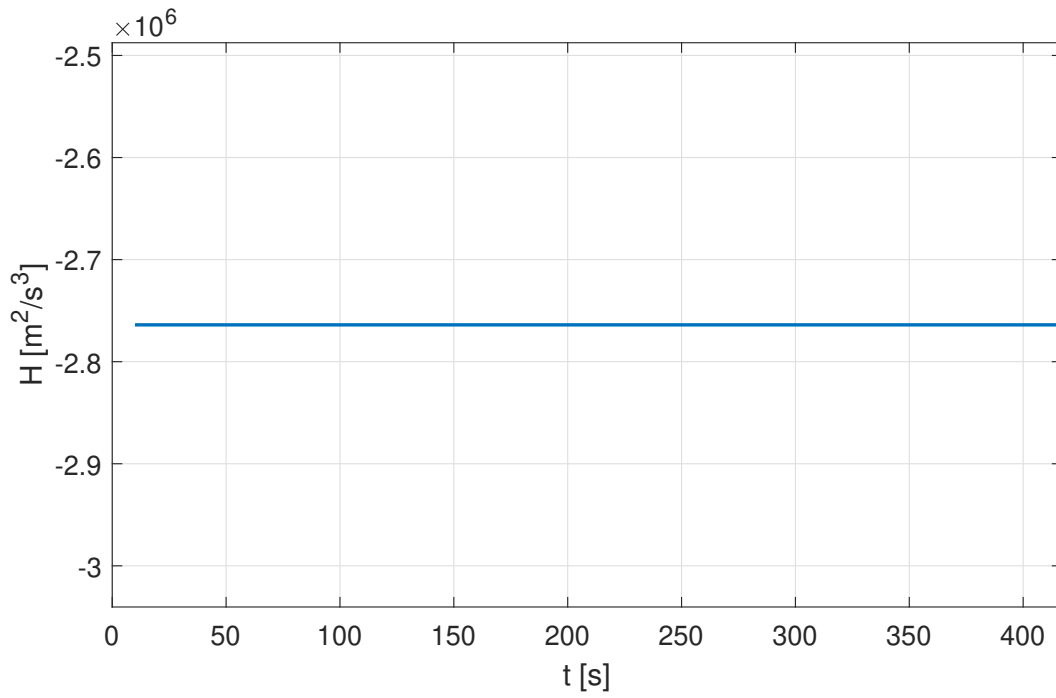


Figura 5.10 Evolución del Hamiltoniano del problema monoetapa.

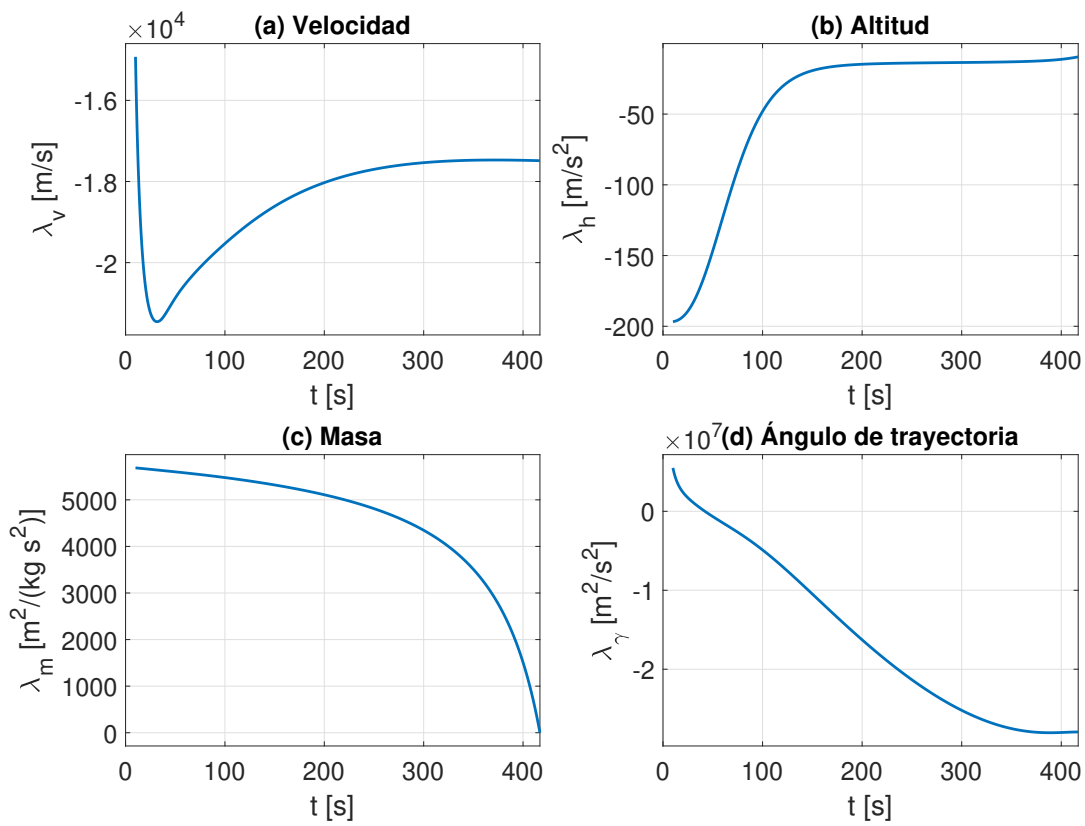


Figura 5.11 Evolución de los adjuntos del problema monoetapa.

## 5.4 Problema multietapa

A partir de este momento se continúa resolviendo el problema de optimización del Apartado 4.2, incrementando progresivamente el valor de  $a_t$  hasta llegar a la unidad (problema multietapa original), usando los resultados anteriores como nuevos iterantes iniciales.

En este apartado se presentan los resultados finales del proceso de optimización completo ( $a_t = 1$ ). En las gráficas aquí presentes se realiza una distinción entre fases propulsadas (en azul) y de *coasting* (en rojo) con el objetivo de clarificar la dinámica del problema. No obstante, es importante remarcar que todo el conjunto de fases está siendo optimizado de forma global. Además, se trazan líneas verticales divisorias para delimitar la evolución de las distintas etapas (E1, E2 y E3).

La Figura 5.12 muestra el comportamiento de los estados a lo largo del tiempo. La velocidad (a) crece en los tramos propulsados y se mantiene aproximadamente constante en los tramos balísticos, invirtiendo la energía cinética en ganar altitud (b), que evoluciona de forma monótona creciente en este caso. La velocidad final se sitúa alrededor de los 7.39 km/s, valor mucho más coherente y cercano a los 7.56 km/s (error del 2.2 %) que se deberían alcanzar según la trayectoria nominal descrita en el manual de usuario [27] del cohete. Respecto a la altitud, el algoritmo arroja un valor de 198 km en el punto final de la trayectoria respecto a los 190 km especificados en el manual (error relativo del 4.2 %).

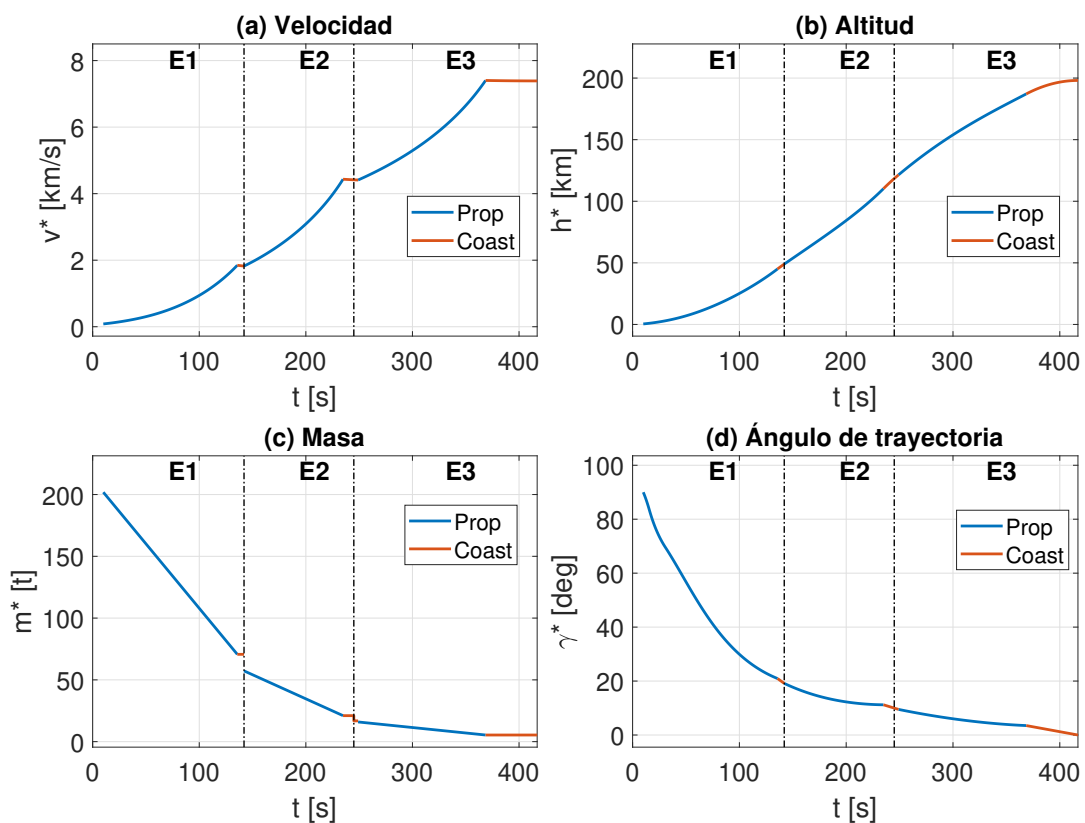


Figura 5.12 Evolución de los estados del problema multietapa.

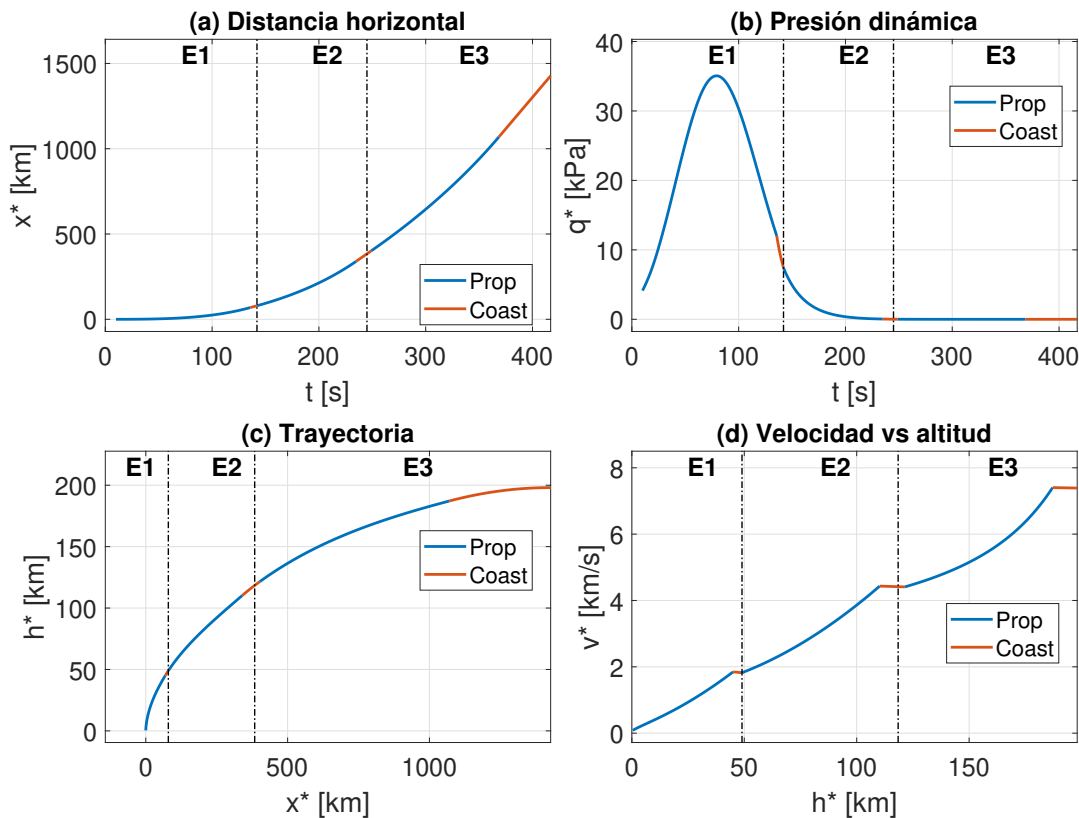
Con el objetivo de realizar una comparación más fidedigna se computa la energía mecánica específica en el instante final que es, en definitiva, la cantidad optimizada. Para el problema planteado se obtiene un valor de 29.15 MJ/kg, mientras que los datos del manual proporcionan 30.5 MJ/kg, lo que supone un error aproximado del 4.4 %. Esto no es en absoluto un mal resultado, más aún considerando que se ha desarrollado un modelo de punto en un sistema de tierra plana con una



dinámica muy simplificada. Además, se desconoce la función objetivo, los criterios de optimización o las restricciones adicionales que han dado lugar a trayectoria presentada en el manual. Por todo esto, el método aquí descrito puede plantearse como una primera aproximación a un problema mucho más complejo, con el que obtener valiosa información cualitativa de la evolución de los distintos estados a un coste computacional relativamente bajo.

Continuando con el análisis de los estados, se puede apreciar cómo la evolución temporal de la masa ( $c$ ) es ahora discontinua debido a la separación progresiva de las distintas etapas, así como del *fairing*. También se observa cómo existe pérdida continua de masa solo en los tramos propulsados, donde su pendiente corresponde con el gasto másico de cada etapa. En cuanto al ángulo de trayectoria ( $d$ ) se refiere, nuevamente evoluciona entre los 90 grados iniciales hasta la condición final de horizontalidad impuesta.

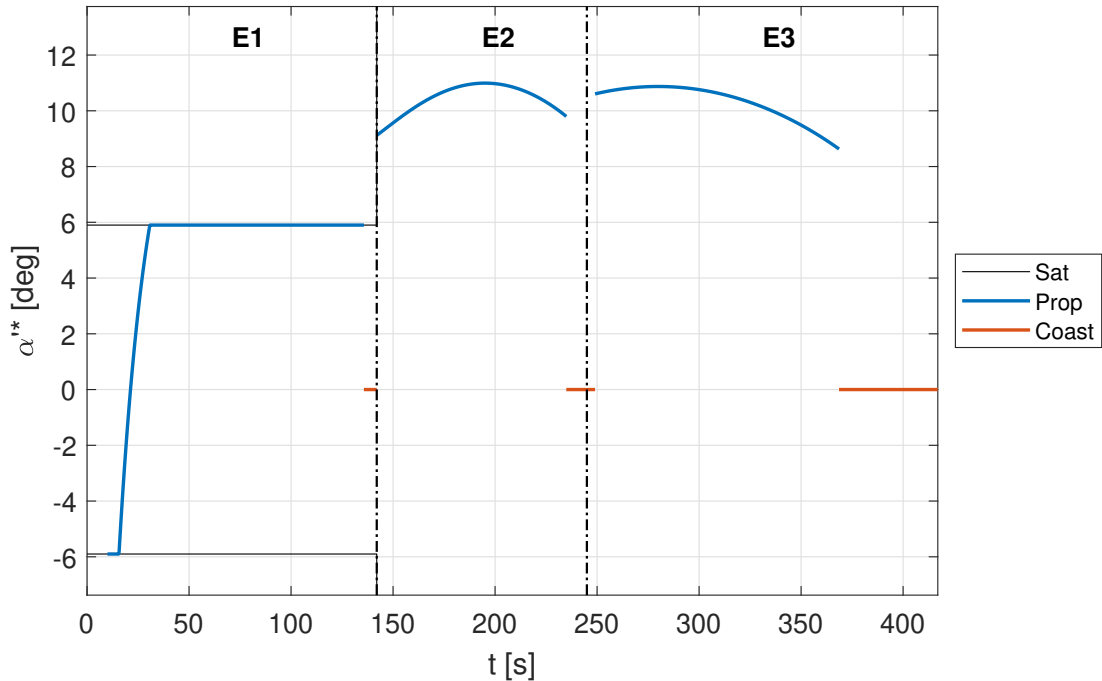
Respecto al resto de variables complementarias de interés, presentadas en la Figura 5.13, cabe destacar la distancia horizontal recorrida (a). El total de la trayectoria tiene lugar en un espacio sobre la superficie terrestre (plana) que abarca 1 427 km, lo cual supondría un 3.5% de la circunferencia terrestre en el ecuador (o un arco de  $12.8^\circ$  aproximadamente). Con tales dimensiones, la Hipótesis 1 de Tierra plana puede seguir considerándose aceptable. No obstante, el efecto de esta simplificación en la solución obtenida y el cálculo del error introducido se deja como una posible ampliación de este trabajo.



**Figura 5.13** Evolución de variables adicionales del problema multietapa.

La Figura 5.14 recoge la evolución de la variable de control con el tiempo. La forma obtenida es, como era de esperar, muy similar a la solución monofásica en la primera etapa. Como se observa, existe una primera deflexión completa negativa que permite sacar de la verticalidad al vector velocidad. Posteriormente, progresa hasta la saturación positiva, donde se mantiene hasta el final de la etapa. Esta saturación prolongada del control tiene importantes implicaciones en el guiado, tal y como se discutirá en el Subapartado 5.4.1. Por otra parte, el control en las etapas 2

y 3 evoluciona libremente, ya en ausencia de atmósfera, alcanzando valores en la dirección del empuje de hasta 11 grados sobre la dirección del vector velocidad. Por último, se ha de comentar que aunque se han representado los tramos de *coasting* en rojo, con valor nulo, no existe control propiamente dicho durante su transcurso.



**Figura 5.14** Evolución del control del problema multietapa.

El Hamiltoniano (Figura 5.15), en este caso, es constante a trozos, señal de que es posible depositar una cierta confianza en los resultados obtenidos.

Por otra parte, se recuerda que los valores de empuje medio utilizados para hacer los cálculos (Tabla 2.9), así como los valores de la aceleración de la gravedad por etapa (Tabla 3.1), eran valores aproximados derivados de los datos del manual. Por este motivo, se ha iterado en el problema global hasta obtener las altitudes medias de operación reales con la expresión (2.12) y, por ende, unos empujes medios (2.11) y valores gravitatorios (3.1) de cada etapa más exactos. Los resultados numéricos concretos se recogen en la Tabla 5.4.

**Tabla 5.4** Altitudes, empujes medios operacionales y valores de gravedad por etapa.

Etapa	$h_{avg}$ [km]	$E$ [kN]	$g$ [ $m/s^2$ ]
1	16.8	2 702.9	9.7467
2	77.8	1 122.8	9.5636
3	157.2	256.4	9.3326

Por último, se representan los adjuntos dimensionales en la Figura 5.16. Estos son continuos y presentan tendencias similares a los mostrados en los problemas simplificados.

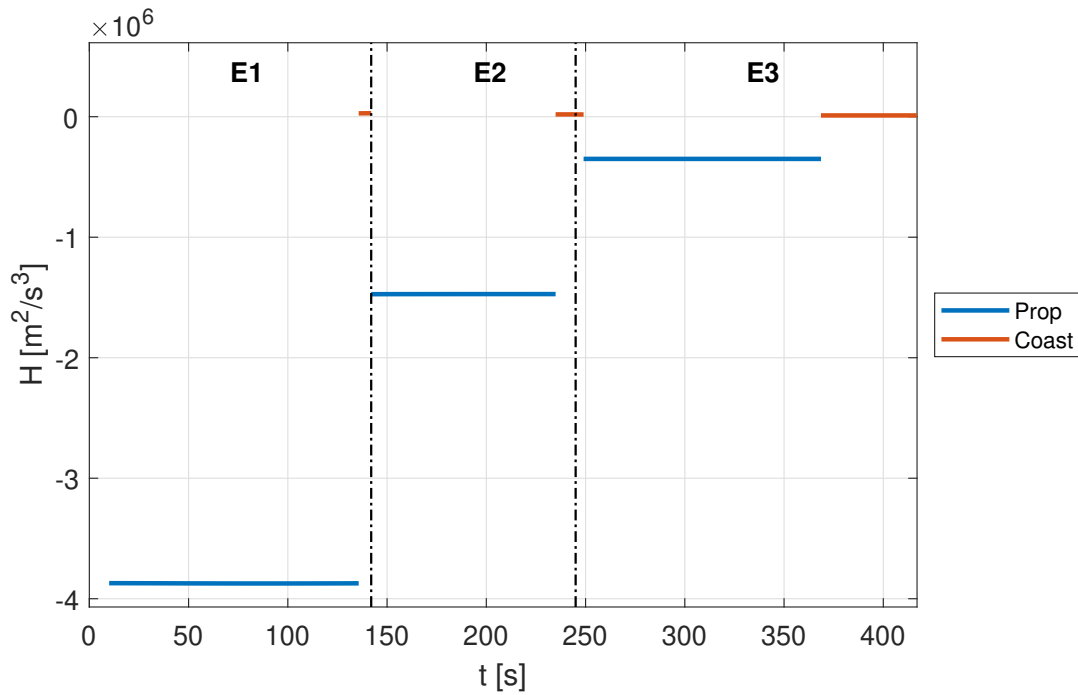


Figura 5.15 Evolución del Hamiltoniano del problema multietapa.

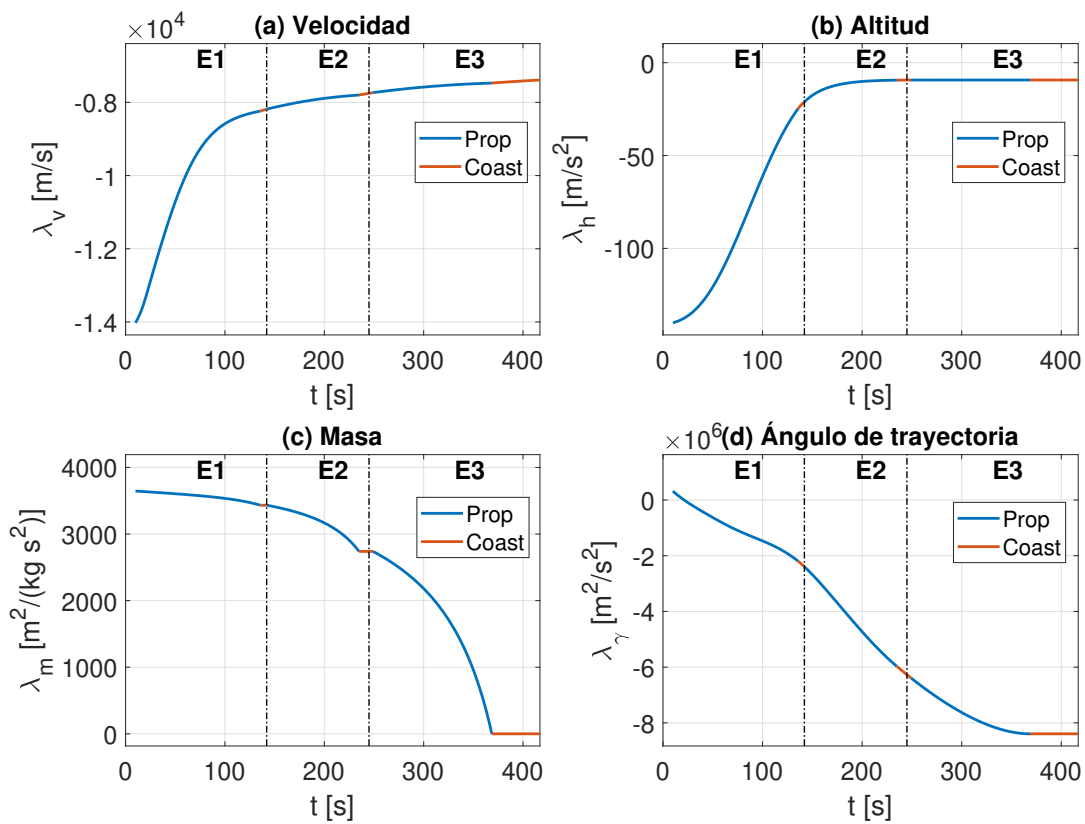
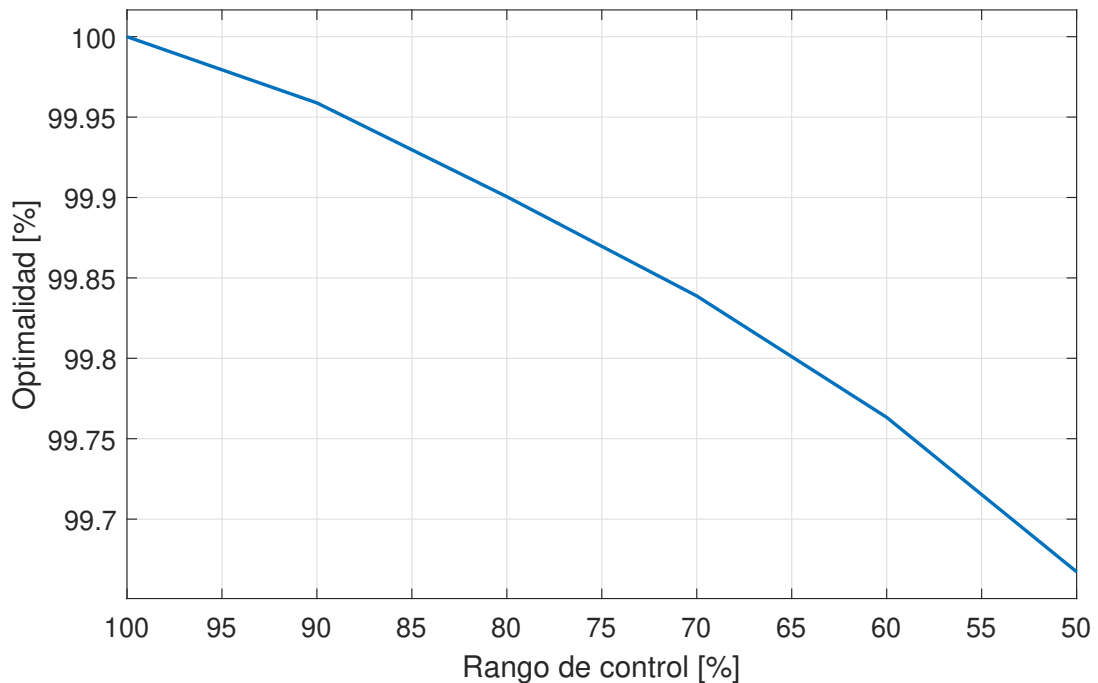


Figura 5.16 Evolución de los adjuntos del problema multietapa.

### 5.4.1 Comentarios adicionales sobre la saturación del controlador

El hecho de que el controlador de la primera etapa se encuentre saturado la mayor parte del tiempo para alcanzar la trayectoria óptima (Figura 5.14), conlleva que el sistema de guiado se vea sin margen adicional de control durante esa fase crítica y, por tanto, en una situación de incapacidad para rechazar perturbaciones en la mayoría de los casos, lo cual es inadmisibles. Para solventar este inconveniente se propone limitar artificialmente el rango de control disponible para la optimización de la trayectoria en la etapa 1, de forma que se obtiene un margen adicional para el guiado. No obstante, esto acarrea necesariamente una penalización del valor de la función objetivo. Así pues, se debe buscar un compromiso entre tolerancia a perturbaciones y la optimalidad de la trayectoria a ejecutar.

En la Figura 5.17 se plantea un análisis de sensibilidad donde se estudia la caída porcentual del valor de la función objetivo respecto al rango de control utilizado, limitando el rango de la primera etapa. Se puede observar que aun reduciendo el margen de control hasta el 50% de su valor máximo, la penalización de la energía mecánica específica seguiría siendo inferior al 0.5%.



**Figura 5.17** Análisis de sensibilidad de la función objetivo ante la limitación del rango de control.

En la Sección 7 de sintonización del controlador se analiza el margen de control adicional necesario para obtener una respuesta adecuada ante las distintas situaciones planteadas.

## 6 Formulación del problema de guiado

---

EN esta sección se resuelve el problema de guiado mediante el diseño de un algoritmo de control apropiado para asegurar que el vehículo siga adecuadamente la trayectoria óptima obtenida en el capítulo anterior, a pesar de la presencia de perturbaciones. Estas perturbaciones pueden ser debidas a errores en la estimación de las condiciones iniciales ( $\delta \mathbf{x}_0$ ), ruido en las medidas ( $\mathbf{n}(t)$ ), variaciones impulsivas de los estados ( $\delta \mathbf{x}_g$ ) o a la dinámica no modelada ( $\mathbf{e}(t)$ ). Se trata de un problema de guiado (y no de control) al tratarse de un proceso de más alto nivel, no considerando la dinámica de la actitud ni el actuador real, sino una variable virtual  $\alpha'$  que representa, directamente, la dirección del empuje en relación al vector velocidad. No obstante, como no hay confusión posible, en ocasiones se abusará del lenguaje refiriéndonos al problema de guiado como "control".

Existen distintos enfoques y técnicas de control para abordar este problema, tal y como el control predictivo [50] o el control LQR (*Linear Quadratic Regulator*) de horizonte finito [51]. El control predictivo se trata de un método control avanzado que puede basarse en cualquier esquema de optimización. Este algoritmo se ejecuta en tiempo real en un computador a bordo del vehículo durante el vuelo, recalculando las acciones de control a cortos intervalos. Por este motivo, la elección del horizonte temporal considerado y la velocidad de cálculo son elementos críticos, ya que determinan el tiempo de computación y, en parte, la capacidad de reacción. No obstante, para esta aplicación, se ha optado por el diseño de un controlador LQR de horizonte finito: un algoritmo de control óptimo más sencillo que permite la obtención analítica, a priori, de una ley de control. Uno de los desarrollos futuros de este trabajo sería la comparativa entre las prestaciones y respuestas que ofrecen ambas técnicas de control.

El esquema del sistema realimentado se presenta en la Figura 6.1, junto a las distintas perturbaciones consideradas. Cabe destacar que el controlador LQR es lineal, por lo que la salida y la entrada del mismo deben estar referenciadas al punto de operación. Por su parte, el error debido a la dinámica no modelada no se incluye en el esquema, ya que surge directamente de utilizar un modelo más complejo en el bloque correspondiente, en lugar de utilizar la considerada para el diseño del sistema de guiado. Por último, es importante señalar que se ha considerado la hipótesis de que el estado es directamente medible sin la necesidad de incluir (y diseñar) un observador que lo reconstruya.

Aunque se recuerda y se describe la dinámica del sistema a controlar, esta sección se centra principalmente en la formulación general del controlador, es decir, en la obtención analítica de una expresión para la ganancia de control  $\mathbf{K}(t)$ . El diagrama de flujo del programa desarrollado en MATLAB<sup>®</sup> utilizado para el diseño del sistema de guiado puede consultarse en el Apéndice A.2.

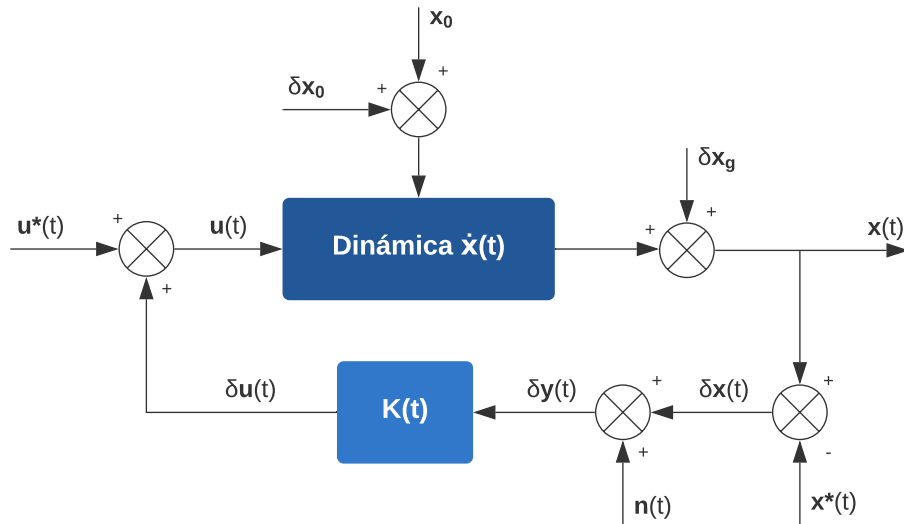


Figura 6.1 Esquema de control del sistema realimentado.

## 6.1 Descripción del sistema

El sistema a controlar está constituido por siete tramos temporales, contando tanto las fases propulsadas como las balísticas. De estos, solo los tres tramos propulsados son controlables, por lo que se plantean tres controladores independientes (uno para cada tramo). La dinámica es idéntica para cada tramo a excepción del valor de sus parámetros, por lo que, por simplicidad se plantea una formulación general del algoritmo de control.

Así, recuperando las ecuaciones desarrolladas en la Sección 3 de modelado, nos enfrentamos al sistema no lineal (6.1) - (6.4), caracterizado por cuatro estados:  $\mathbf{x}(t) = [v(t) \ h(t) \ m(t) \ \gamma(t)]^\top$ , y una variable de control:  $\mathbf{u}(t) = \alpha'(t)$ .

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{E}{m} \cos \alpha' - g \sin \gamma - \frac{1}{2m} \rho_0 e^{-\frac{h}{h_0}} v^2 S_f C_D & (6.1) \\ \frac{dh}{dt} = v \sin \gamma & (6.2) \\ \frac{dm}{dt} = -\dot{m} = \text{cte} & (6.3) \\ \frac{d\gamma}{dt} = \frac{E}{mv} \sin \alpha' - \frac{g}{v} \cos \gamma & (6.4) \end{cases}$$

con  $\alpha'(t) \in [\alpha'_{min}, \alpha'_{max}] \ \forall t \in [t_0, t_f]$ , donde  $t_0$  y  $t_f$  hacen referencia al instante inicial y final del tramo. Para una mayor concisión y con el objetivo de aumentar la legibilidad de las expresiones, se han omitido las dependencias temporales.

Respecto a los límites de saturación del controlador, recuperando la Hipótesis 9, se asume que  $\alpha' = \alpha + \delta \approx \delta$  para la primera etapa, considerando el rango completo de movimiento de la tobera ( $\alpha'_{lim} = \delta_{lim}$ ), según se especifica en el manual de usuario [27], independientemente de si el rango de control se limita en mayor medida durante la planificación y optimización de la trayectoria. Para el caso de la segunda y tercera etapa, se mantiene la posibilidad de que el ángulo varíe libremente entre el primer y el cuarto cuadrante ( $\pm 90$  grados).

Por otro lado, es relevante recalcar que el estado correspondiente a la masa (6.3) es independiente del resto de variables, siguiendo una evolución lineal con el tiempo predeterminada. Se trata de un estado incontrolable, el cual puede ser tratado como un parámetro más dependiente del tiempo. Las principales ventajas de este enfoque son la reducción del tiempo de computación y la minimización

de posibles problemas numéricos a la hora de operar con matrices de grandes dimensiones de forma reiterada. Todo ello es de vital importancia para una posible aplicación futura en tiempo real, donde la precisión y la carga computacional son factores críticos. Por este motivo, se ha reducido el sistema a tres estados y una variable de control.

## 6.2 Linealización del sistema

El controlador LQR de horizonte finito es de aplicación para sistemas lineales variantes con el tiempo (LTV), por lo que es necesario linealizar el sistema en torno a la trayectoria óptima de referencia:  $\mathbf{x}^*(t)$ ,  $\mathbf{u}^*(t)$ , para obtener un sistema de la forma:

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{A}(t)\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\delta\mathbf{u}(t) \quad (6.5)$$

donde  $\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)$  y  $\delta\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*(t)$ . Las matrices  $\mathbf{A}(t)$  y  $\mathbf{B}(t)$  corresponden con las derivadas parciales de la dinámica respecto a  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{u}$ , evaluadas en  $\mathbf{x}^*$  y  $\mathbf{u}^*$ . Operando se obtiene el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{v}(t) \\ \delta\dot{h}(t) \\ \delta\dot{\gamma}(t) \end{bmatrix} \approx \mathbf{A}(t) \begin{bmatrix} \delta v(t) \\ \delta h(t) \\ \delta\gamma(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}(t)\delta\alpha'(t) \quad (6.6)$$

siendo  $\mathbf{A}(t)$  y  $\mathbf{B}(t)$ :

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{\rho_0 S_f C_D}{m^*(t)} e^{-\frac{h^*(t)}{h_0}} v^*(t) & \frac{\rho_0 S_f C_D}{2m^*(t)h_0} e^{-\frac{h^*(t)}{h_0}} v^*(t)^2 & -g \cos \gamma^*(t) \\ \sin \gamma^*(t) & 0 & v^*(t) \cos \gamma^*(t) \\ \frac{g}{v^*(t)^2 \cos \gamma^*(t)} - \frac{E}{m^*(t)v^*(t)^2} \sin \alpha'^*(t) & 0 & \frac{g}{v^*(t)} \sin \gamma^*(t) \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{E}{m^*(t)} \sin \alpha'^*(t) \\ 0 \\ \frac{E}{m^*(t)v^*(t)} \cos \alpha'^*(t) \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

con  $\alpha'(t) \in [\alpha'_{min}, \alpha'_{max}] \forall t \in [t_0, t_f]$ .

## 6.3 Diseño básico del controlador LQR

Este controlador se basa en la minimización del funcional de coste cuadrático:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [\delta\mathbf{x}^\top(t)\mathbf{Q}(t)\delta\mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{u}^\top(t)\mathbf{R}(t)\delta\mathbf{u}(t)] dt + \delta\mathbf{x}^\top(t_f)\mathbf{Q}_{fin}\delta\mathbf{x}(t_f) \quad (6.9)$$

donde  $\mathbf{Q}(t)$  es una matriz definida positiva y dependiente del tiempo que pondera el valor de los estados en cada instante a lo largo de la trayectoria,  $\mathbf{Q}_{fin}$  es una matriz definida positiva que pondera el valor de los estados finales y  $\mathbf{R}(t)$  es una matriz semidefinida positiva dependiente del tiempo que pondera el valor de las acciones de control a cada instante. De esta forma, la sintonización de un controlador LQR se reduce a la elección de los valores de estas matrices. Así pues, se puede penalizar la agresividad del controlador aumentando el valor de  $\mathbf{R}(t)$  o priorizar reducir el error de los estados incrementado  $\mathbf{Q}(t)$  (o su valor en el instante final con  $\mathbf{Q}_{fin}$ ).

Se puede demostrar que la ley de control que minimiza el funcional de coste  $J$  (6.9) es:

$$\delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(t) \delta \mathbf{x}(t) \quad (6.10)$$

de forma que la ley de control completa, incluyendo el punto de operación, será:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t) + \mathbf{K}(t) [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)] \quad (6.11)$$

La ganancia  $\mathbf{K}(t)$  del controlador, se obtiene de la expresión:

$$\mathbf{K}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^\top(t) \mathbf{P}(t) \quad (6.12)$$

donde  $\mathbf{P}(t)$  es una matriz que se obtiene por integración hacia atrás de la ecuación diferencial de Riccati:

$$-\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A}^\top(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) - \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^\top(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t), \quad \mathbf{P}(t_f) = \mathbf{Q}_{\text{fin}} \quad (6.13)$$

En nuestro caso particular, las matrices  $\mathbf{Q}(t)$  y  $\mathbf{Q}_{\text{fin}}$  son matrices 3x3 (al considerar tres estados) y, las matrices  $\mathbf{R}(t)$  se reducen a un solo número, al contemplar exclusivamente una variable de control. Como criterio de diseño de las matrices  $\mathbf{Q}(t)$  se ha buscado homogeneizar la importancia de los distintos estados respecto a su valor de referencia en todo instante de tiempo. Para las matrices  $\mathbf{Q}_{\text{fin}}$  se ha hecho lo propio empleando las condiciones finales en  $t_f$ , para cada fase controlada. De esta forma, se tienen las matrices diagonales:

$$\mathbf{Q}(t) = \text{diag} \left( \left[ \frac{1}{\sqrt{v^*(t)}} \quad \frac{1}{\sqrt{h^*(t)}} \quad 1 \right] \right) \quad (6.14)$$

$$\mathbf{Q}_{\text{fin}} = \text{diag} \left( \left[ \frac{1}{\sqrt{v^*(t_f)}} \quad \frac{1}{\sqrt{h^*(t_f)}} \quad 1 \right] \right) \quad (6.15)$$

Nótese que el valor de  $\gamma(t)$  ya se encuentra adimensionalizado por definición.

Respecto  $\mathbf{R}(t)$ , idealmente se deben buscar unos valores que proporcionen un control suave, reduciendo las inestabilidades asociadas a un controlador agresivo y previniendo daños estructurales en los actuadores mecánicos de la tobera. El valor concreto se obtiene mediante un análisis de sensibilidad en la Sección 7 de sintonización.

## 6.4 Mejoras al controlador LQR: término integral

En los problemas de *tracking* es habitual que la referencia a seguir sea imperfecta, es decir, que para las entradas de control  $\mathbf{u}^*(t)$  no se correspondan los estados  $\mathbf{x}^*(t)$  esperados para todo instante de tiempo. A parte del propio error que introduce una linealización, esto es debido, principalmente, a imperfecciones del modelo que, en definitiva, no deja de ser una simplificación de una realidad más compleja en la que otros factores no contemplados pueden entrar en juego. Entonces, la dinámica real del sistema incorpora un término extra de orden cero  $\mathbf{e}(t)$  que representa el error respecto al modelo linealizado. Este término tendrá un mayor peso cuanto peor se haya modelado la realidad.

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \delta \mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t) \quad (6.16)$$

En definitiva, la integración de este término hace que se acabe operando fuera del punto de diseño y la linealización puede dejar de ser válida. Esto puede implicar, por lo tanto, que la ley de control



desarrollada en apartado anterior tenga un comportamiento degradado y la respuesta del sistema sea insatisfactoria. Este efecto se pone de manifiesto en el Apartado 8.5 de resultados.

Este error adicional de seguimiento se puede mitigar mediante la inclusión de un término integral a la ley de control. Un ejemplo de ello lo encontramos en [52].

Sea el vector  $\mathbf{z}$ , de tres componentes:

$$\mathbf{z}(t) = \int_{t_0}^t \delta \mathbf{x}(\tau) d\tau \quad (6.17)$$

por lo que

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \delta \mathbf{x}(t) \quad (6.18)$$

de forma que se puede ampliar el sistema (6.5) con unos nuevos estados  $\mathbf{z}$  que acumulan el error del sistema:

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} \approx \mathbf{A}'(t) \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}'(t) \delta \alpha'(t) \quad (6.19)$$

siendo  $\mathbf{A}'(t)$  y  $\mathbf{B}'(t)$  las matrices ampliadas:

$$\mathbf{A}'(t) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}(t) & \mathbf{0}_{6 \times 3} \\ \hline \mathbf{I}_3 & \end{array} \right] \quad (6.20)$$

$$\mathbf{B}'(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

con  $\alpha'(t) \in [\alpha'_{min}, \alpha'_{max}] \forall t \in [t_0, t_f]$ .

Finalmente, la ley de control quedaría como:

$$\delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{K}'(t) \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{K}'_1(t) \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{K}'_2(t) \int_{t_0}^t \delta \mathbf{x}(\tau) d\tau \quad (6.22)$$

donde la ganancia  $\mathbf{K}'(t)$  se calcula de igual forma al procedimiento descrito con las expresiones (6.12) y (6.13).

Por último, es necesario ampliar las matrices  $\mathbf{Q}(t)$  y  $\mathbf{Q}_{fin}(t)$ . Siguiendo la misma filosofía del Apartado 6.3 se ha llegado a las matrices diagonales ampliadas:

$$\mathbf{Q}(t) = \text{diag} \left( \left[ \frac{1}{\sqrt{v^*(t)}} \quad \frac{1}{\sqrt{h^*(t)}} \quad 1 \quad \frac{1}{\sqrt{\beta v^*(t)}} \quad \frac{1}{\sqrt{\beta h^*(t)}} \quad \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right] \right) \quad (6.23)$$

$$\mathbf{Q}_{fin} = \text{diag} \left( \left[ \frac{1}{\sqrt{v^*(t_f)}} \quad \frac{1}{\sqrt{h^*(t_f)}} \quad 1 \quad \frac{1}{\sqrt{\beta v^*(t_f)}} \quad \frac{1}{\sqrt{\beta h^*(t_f)}} \quad \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right] \right) \quad (6.24)$$

donde  $\beta$  es un parámetro que modifica la importancia del término integral. De igual forma que las matrices  $\mathbf{R}(t)$ , su efecto y valor se estudia en la Sección 7.

## 6.5 Anti-windup

Un problema clásico que puede aparecer cuando se incluye un término integral en un controlador es el fenómeno conocido como *windup*. En general, este término integral mitigará el error acumulado debido a una referencia imperfecta. No obstante, puede darse que el controlador sature en algún momento y no pueda seguir contrarrestando el error, de forma que el valor integral sigue incrementándose. Esto provoca un retraso en la respuesta del controlador cuando el error respecto a la

referencia se reduce, ya que debe compensar el error integral acumulado primero. Para evitar esto existen diversas soluciones conocidas como técnicas de *anti-windup* [53].

El enfoque que se ha adoptado para este proyecto consiste simplemente en interrumpir la integración durante los períodos de saturación del controlador, de forma que la ganancia del término integral resulta:

$$\mathbf{K}'_1(t) = \begin{cases} \mathbf{K}'_2(t) & \text{si el controlador no satura} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad (6.25)$$

siendo  $\mathbf{K}'_2(t)$  la ganancia correspondiente al término integral calculada en el apartado anterior. De esta manera, este término solo actúa en condiciones normales de operación, evitando la aparición del *windup*.

## 7 Sintonización del controlador

---

EN esta sección se lleva a cabo el ajuste de los parámetros  $\mathbf{R}(t)$  y  $\beta$  de los tres controladores a sintonizar. Por simplicidad, se considera que los valores  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  y  $\mathbf{R}_3$ , correspondientes a cada una de las etapas, se reducen a tres constantes a determinar y  $\beta$ , el parámetro que ajusta la importancia relativa del término integral, es constante y común para todos los controladores.

Adicionalmente, se estudia la influencia de limitar el rango de control durante la planificación de la trayectoria para el controlador de la primera etapa con el objetivo de disponer de un mayor margen durante el proceso de guiado, tal como se introdujo en el Subapartado 5.4.1. De esta forma, se genera un parámetro adicional ( $L_1$ ) que es necesario establecer. Este representa el porcentaje del rango de control disponible para la optimización.

Para llevar a cabo el ajuste, se realiza un barrido de todos estos parámetros sobre cuatro casos arquetípicos de referencia con distintas fuentes de error, donde se busca minimizar el error de la función de coste (6.9) empleada para la optimización de la trayectoria (energía mecánica específica en el instante final) respecto al valor alcanzado en la simulación:

$$e_\varepsilon [\%] = -100 \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon^*} = -100 \frac{\varepsilon - \varepsilon^*}{\varepsilon^*} \quad (7.1)$$

siendo  $\varepsilon^*$  el valor óptimo de energía específica, la cual dependerá a su vez de la limitación impuesta por el valor  $L_1$ .

Nótese que se ha incluido un signo negativo en la definición, de forma que cualquier valor positivo de  $e_\varepsilon$  implica una penalización en la energía específica. Aunque a priori el objetivo del guiado podría ser ajustarse a la referencia predefinida en todo momento, es posible obtener una mejoría respecto a la trayectoria óptima ( $e_\varepsilon < 0$ ) calculada debido a que las condiciones son diferentes:

- Existen perturbaciones que alteran la evolución nominal de los estados.
- El rango de control de la etapa 1 es variable durante la planificación, y dependiente del parámetro  $L_1$ . Durante el guiado se considera el rango completo.
- A diferencia del proceso de planificación, en el guiado se permite un cierto grado de incumplimiento de las restricciones.

Esto permite alcanzar una mejor solución global al problema de optimización y guiado de forma conjunta, aunque la trayectoria resultante pueda diferir ligeramente de la referencia original.

Respecto al cumplimiento de las restricciones, durante el proceso de optimización, el único requisito establecía que el ángulo de trayectoria  $\gamma$  debía ser nulo en el instante final. Como criterio

del cumplimiento de esta restricción, se ha considerado admisible una desviación de  $\pm 0.9$  grados, lo que se puede expresar como (7.2).

$$e_{\gamma_f} [\%] = 100 \frac{|\gamma(t_f)|}{\pi/2} < 1 \% \quad (7.2)$$

con  $\gamma(t_f)$  en radianes. Esto es equivalente a admitir un error máximo del 1% respecto al valor máximo dentro del rango valores de  $\gamma(t) \in [-\pi/2, \pi/2]$ .

## 7.1 Casos de estudio

### 7.1.1 Error en la estimación inicial de los estados

En un caso real es complicado conocer con exactitud todas las condiciones iniciales desde las que el vehículo comienza su operación. En concreto, partiendo de una situación de reposo es común que sea en la estimación de la masa de cada una de las etapas y, por ende, de la masa inicial del cohete donde puedan presentarse más imprecisiones, sobretodo teniendo en cuenta la complejidad del sistema global. Esta perturbación inicial genera un sesgo permanente en la evolución de la masa que afecta rápidamente al resto de estados, sacando la trayectoria de su referencia y generando un error que se ha de corregir.

Aunque en la sección de resultados (Sección 8) se evalúa el comportamiento del controlador para una amplia variedad de errores de estimación de la masa de cada una de las etapas, para el proceso de sintonización se ha considerado un incremento del 5% respecto a la masa estructural de la primera etapa, lo cual equivale aproximadamente a 670 kg adicionales. Esto sitúa al vehículo en una clara desventaja desde el punto de vista del guiado, ya que debe compensar este peso incrementando el ángulo  $\alpha'$ , que se encuentra de por sí saturado (o cerca de la saturación) durante esta etapa.

### 7.1.2 Perturbaciones impulsivas (ráfagas)

Los fuertes gradientes de presión, densidad y temperatura que pueden darse en la atmósfera son el origen de numerosas inestabilidades que afectan de forma determinante a la mecánica del vuelo de los vehículos que se mueven por su seno. Entre los fenómenos que pueden aparecer destacan las ráfagas o las cizalladuras de viento, las cuales se pueden modelar como agentes externos que introducen perturbaciones impulsivas en la dinámica del lanzador, variando alguno de sus estados de forma instantánea.

En nuestro caso bidimensional, estas perturbaciones se introducen como una variación en escalón del ángulo de trayectoria  $\gamma$ , durante el quemado de la primera etapa, a una altitud aproximada de 15 km sobre el nivel del mar, donde la atmósfera sigue teniendo relevancia. Para la sintonización, esta perturbación se fija en  $-1$  grado. Una variación instantánea negativa del ángulo de trayectoria se trata, de nuevo, del caso más desfavorable, ya que el controlador debe actuar hacia la zona de saturación para contrarrestar el efecto.

### 7.1.3 Ruido de los sensores

Los estados utilizados para la realimentación del controlador no son medibles con precisión absoluta. Estas señales son ruidosas, por lo que tienen aparejado un error aleatorio de ciertas características. Para nuestro problema en concreto, se utiliza como modelo de este error un ruido blanco gaussiano aditivo (AWGN) para cada estado observado, con una función de densidad de probabilidad  $\mathcal{N}(m_n = 0, \sigma_n^2)$  de media cero y desviación típica queda determinada por la técnica de sensado utilizada en cada caso.

Es importante recalcar que esto es una simplificación, ya que en la práctica existen términos acoplados, como la velocidad y la altitud, dando lugar a una matriz de covarianza del error con términos no nulos fuera de la diagonal.

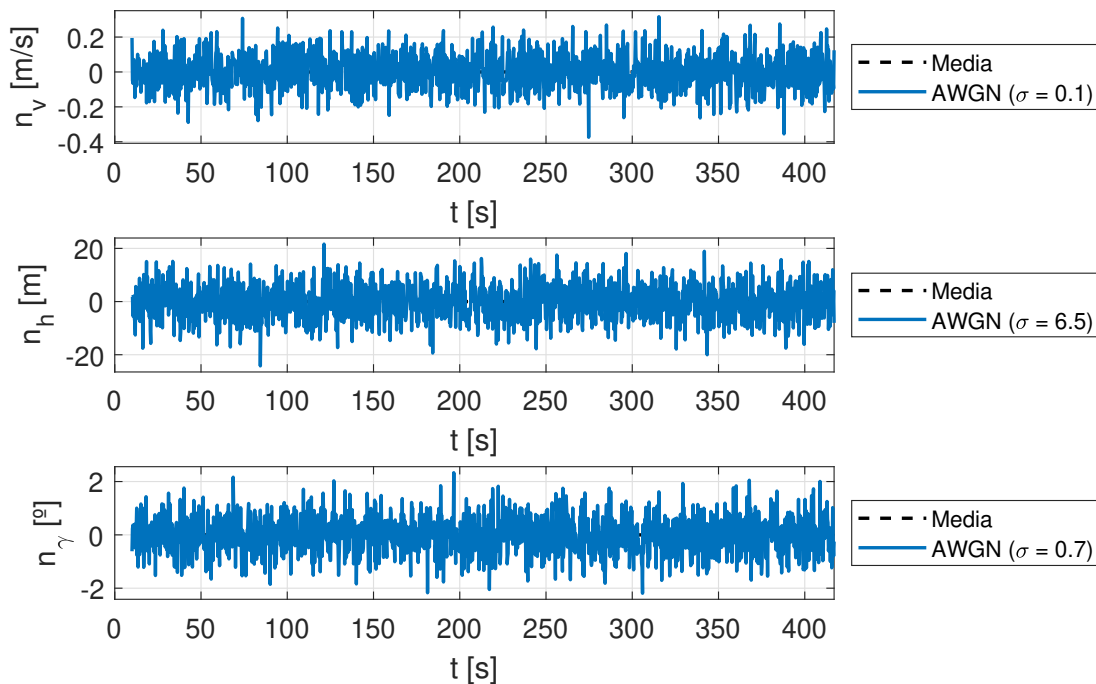
Aunque la trayectoria libre de control realimentado no se ve afectada por el ruido, una mala sintonización puede hacer que el controlador intente seguir estas perturbaciones de alta frecuencia, pudiendo obtener el efecto contrario al deseado: que el sistema de control saque al vehículo de su trayectoria nominal. Es por ello por lo que se debe contemplar esta situación y asegurar que el sistema es tolerante al ruido.

Para la aplicación se ha considerado que todas las medidas proceden de un sistema de posicionamiento por satélite (GNSS), con varias antenas receptoras ubicadas en el fuselaje. En concreto, se toman como referencia los valores de precisión del sistema norteamericano GPS [54, 55] para determinar la velocidad, la altitud y la actitud (ángulo de trayectoria) del vehículo. En la Tabla 7.1 se recogen los valores de precisión para cada caso respectivamente.

**Tabla 7.1** Desviaciones típicas del ruido presente en las medidas de los estados.

$\sigma_{n_v}$ [m/s]	$\sigma_{n_h}$ [m]	$\sigma_{n_\gamma}$ [°]
0.1	6.5	0.7

En la Figura 7.1 se muestra un ejemplo del ruido inyectado a las medidas de cada uno de los estados del sistema.



**Figura 7.1** Ejemplo de ruido inyectado a la medida de cada estado.

#### 7.1.4 Errores de modelado

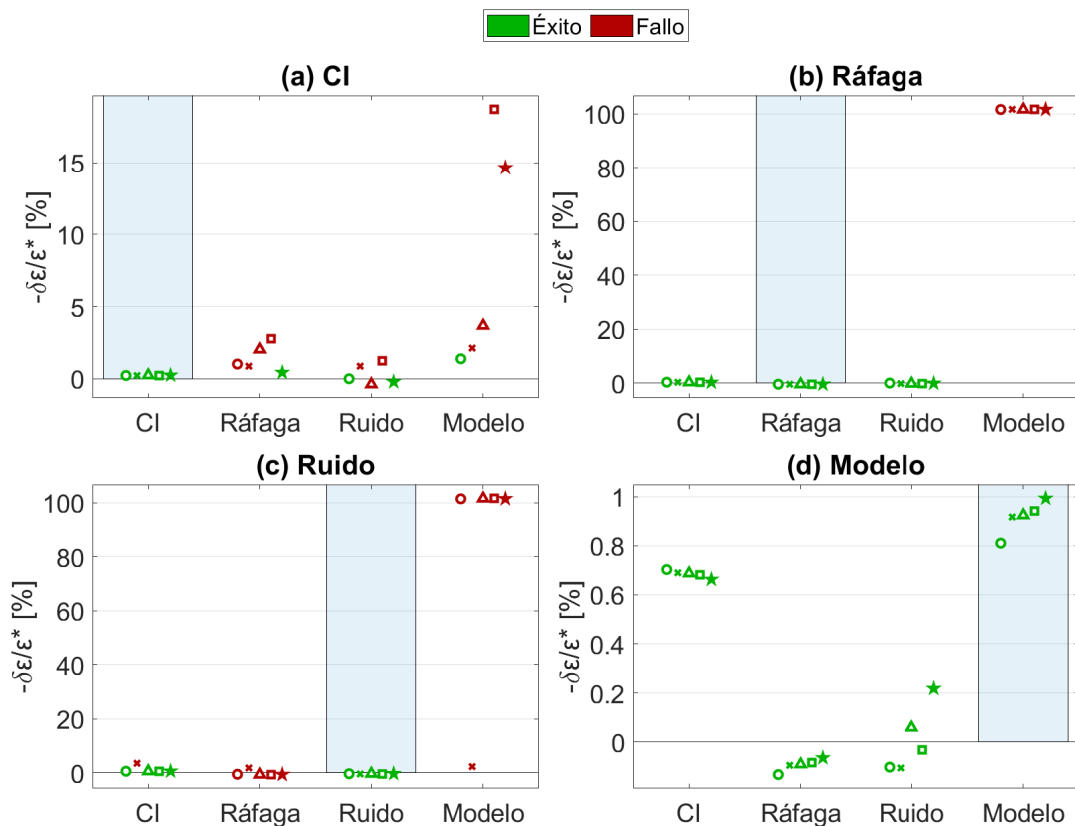
Todo modelo se reduce a una simplificación de la realidad. Para evaluar los efectos que introducen estas simplificaciones, se enfrenta el sistema de guiado desarrollado ante a una dinámica algo más elaborada. En particular se introducen tres cambios respecto al modelo considerado. En primer

lugar, se prescinde de la Hipótesis 3 por la cual la gravedad adquiere un valor constante para cada etapa y se emplea un modelo continuo dependiente de la altitud (3.1). Por otra parte, se sustituye la Hipótesis 4 de empuje constante por el modelo variable en altitud descrito con la expresión (2.11). Por último, se implementa el modelo atmosférico desarrollado por la NASA en [33], el cual se introduce y comparó con el modelo exponencial utilizado en la Hipótesis 7.

## 7.2 Sintonización preliminar

En primer lugar se busca la mejor combinación de parámetros, con un paso de iteración relativamente grande, que cumpla los requisitos para todos los casos planteados. Para ello, se han evaluado 16 875 combinaciones de parámetros para cada tipología de error, lo que da un total de 67 500 simulaciones para la sintonización mediante barrido.

Para representar gráficamente la estrategia seguida, se seleccionan las 5 mejores combinaciones de parámetros que minimizan el error de la función objetivo para cada situación y cumplen con las restricciones impuestas. Estas combinaciones, así como los valores de error de la energía mecánica específica respecto al valor óptimo y el grado de cumplimiento de las restricciones se pueden consultar en el Apéndice B. A continuación, se evalúan dichas combinaciones en el resto de casos para comprobar si, efectivamente, también cumplen con los requerimientos exigidos. De esta forma surge la Figura 7.2, donde se representa el error relativo obtenido de las combinaciones de parámetros óptimas (cada una representada con un símbolo distinto) para cada situación estudiada, aplicadas al resto de casos. Aquellas situaciones en las que se cumplen las restricciones se muestran en verde; mientras que las que no cumplen, se presentan en rojo.



**Figura 7.2** Desempeño del controlador óptimo sintonizado para rechazar las perturbaciones de las situaciones (a), (b), (c) y (d) y su respuesta aplicada al resto de casos.

Así pues, se puede comprobar, por ejemplo, que no todas las combinaciones óptimas de parámetros que mejor rechazan las perturbaciones en las condiciones iniciales (a), respetan las restricciones en el resto de situaciones (ante una ráfaga, ruido o errores de modelado). También se puede observar que existen combinaciones de parámetros que mejoran el valor de la función objetivo ( $e_\varepsilon < 0$ ), tal y como se avanzaba anteriormente que podía ocurrir.

Es evidente que la situación más crítica se da ante errores de modelado, ya que prácticamente ninguna combinación respeta las restricciones (incluso con errores del orden del 100% en la función objetivo), excepto cuando estos parámetros se optimizan para esta situación en particular (d). Además, cualquiera de esas combinaciones es válida para el resto de casos, manteniendo el error inferior siempre al 1%, incluso mejorando el valor de energía específica para el caso de la ráfaga y del ruido. Por este motivo, se elige la mejor entre estas combinaciones, recogiendo sus valores en la Tabla 7.2, los cuales constituyen la primera estimación para la sintonización del controlador.

**Tabla 7.2** Parámetros óptimos tras la sintonización preliminar.

$L_1$ [%]	$\beta$	$\mathbf{R}_1$ ( $\cdot 10^6$ ) [-]	$\mathbf{R}_2$ ( $\cdot 10^9$ ) [-]	$\mathbf{R}_3$ ( $\cdot 10^9$ ) [-]
50	257.5	25.75	25.75	75.25

Con esta elección de parámetros, se limita el margen de saturación de la primera etapa al 50% de su valor máximo durante la planificación de la trayectoria. Esto implica que la energía mecánica específica óptima en el instante final cae hasta los 29.05 MJ/kg, lo que supone una penalización del 0.34% respecto al caso sin limitación desarrollado en la Sección 5.

### 7.3 Análisis de sensibilidad

El objetivo de este apartado es explorar el entorno del conjunto de parámetros elegidos inicialmente, fijando el margen de saturación  $L_1$  obtenido en el apartado anterior. Se busca realizar un ajuste fino, reduciendo el paso de búsqueda, para determinar si es posible mejorar las prestaciones del sistema. Un algoritmo de optimización paramétrica sería de aplicación para esta función. No obstante, el cómputo de la función objetivo es compleja y extremadamente costosa<sup>1</sup> y se aplica simultáneamente a cuatro escenarios independientes, constituyendo una función multiobjetivo que debe ser minimizada globalmente. Además, presenta discontinuidades, lo que complica el cálculo del gradiente, generando problemas numéricos, y dificultando el cómputo de la dirección de avance. Por último, también se debería incluir la restricción de ángulo de trayectoria nulo en el instante final, por lo que numerosas consideraciones adicionales deberían plantearse, lo que queda fuera del alcance y del objetivo de este proyecto. Por este motivo, una sintonización manual es suficiente y adecuada para nuestro propósito.

Para asegurarnos de que el movimiento realizado en el espacio tetradimensional compuesto por las variables  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$ ,  $\mathbf{R}_3$  y  $\beta$  nos conduce efectivamente a un valor más óptimo, se realiza el análisis modificando, a cada paso, un solo parámetro. Además, como criterio para establecer los límites del análisis de cada variable, se ha utilizado el paso de barrido de la sintonización inicial, realizando la búsqueda hacia ambos lados del valor obtenido a priori.

A continuación, se representan exclusivamente los casos de éxito, de forma que si alguna de las simulaciones realizadas tras la variación de los parámetros no cumpliera con las restricciones, se mostraría una curva con partes discontinuas a tramos. Cada figura está asociada a uno de los

<sup>1</sup> En un ordenador con un procesador Intel Core i7-9750H a 2.60 GHz, una memoria RAM instalada de 24 GB y una arquitectura de 64 bits, una evaluación de un escenario se sitúa en el orden del segundo, lo que supone un total de 4 segundos para la ejecución de la función multiobjetivo. Un algoritmo de optimización puede hacer uso de miles de iteraciones, lo que dispara el tiempo total de ejecución al orden de horas e incluso días.

parámetros a estudiar, de forma que se representa la variación del error relativo de la función objetivo cometido para cada una de las 4 situaciones, respecto a un incremento o decremento del valor del parámetro a sintonizar en cuestión.

En la Figura 7.3 se puede observar cómo aumentar el valor de  $\mathbf{R}_1$  mejora la respuesta frente a errores de modelado y la tolerancia al ruido. Sin embargo, respecto a variaciones de las condiciones iniciales y perturbaciones impulsivas tiene una ligera tendencia creciente. Incrementar el valor también conlleva acercarse a la zona de incumplimiento de restricciones en el caso de la respuesta a errores de modelado. Por todo ello, se ha mantenido el valor  $\mathbf{R}_1 = 25.75 \cdot 10^6$ .

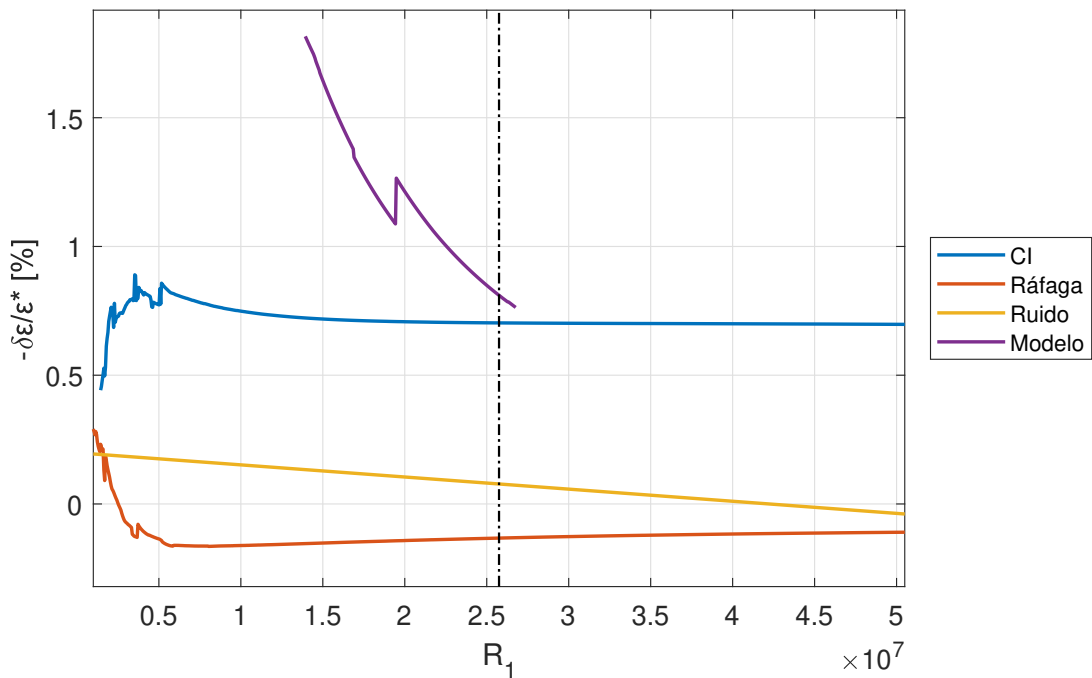


Figura 7.3 Análisis de sensibilidad respecto a  $\mathbf{R}_1$ .

La Figura 7.4 pone de manifiesto cómo un incremento sustancial de  $\mathbf{R}_2$  supone una mejoría ante errores de modelado y respuesta a ráfagas, manteniendo el resto de situaciones prácticamente inalteradas, por lo que se ha aumentado su valor a  $32.50 \cdot 10^9$ .

Nuevamente, se presenta en la Figura 7.5 una situación muy equilibrada, donde cualquier variación no implica una mejora global de la función objetivo. Por ello, se conserva el valor de  $\mathbf{R}_3 = 75.25 \cdot 10^9$ .

Por último, la Figura 7.5 muestra el análisis respecto al parámetro  $\beta$ , el cual controla el peso del término integral. Tal y como se puede apreciar, mantener su valor en 257.5 resulta conveniente para no penalizar ninguna situación. Podría ser prudente reducir ligeramente su valor para asegurar un mayor margen respecto al límite donde comienza el incumplimiento de la restricción del ángulo de trayectoria, aunque perjudique su respuesta. No obstante, no se ha estimado necesario, ya que no es un caso donde se plantee variabilidad en la evaluación de sus prestaciones.

En la Tabla 7.3, se recogen los resultados finales de los parámetros escogidos para el controlador tras el análisis de sensibilidad realizado en una iteración consistente en 16 000 simulaciones adicionales. Como se puede comprobar, la estimación inicial era bastante buena, ya que solo el parámetro  $\mathbf{R}_2$  se ha visto afectado.



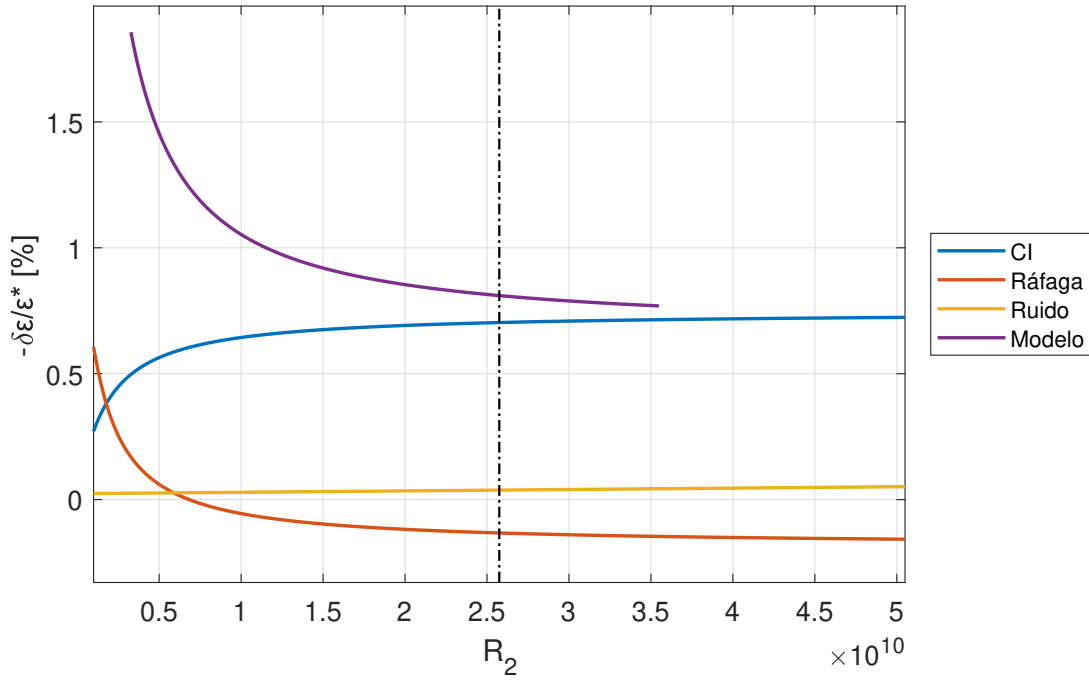


Figura 7.4 Análisis de sensibilidad respecto a  $R_2$ .

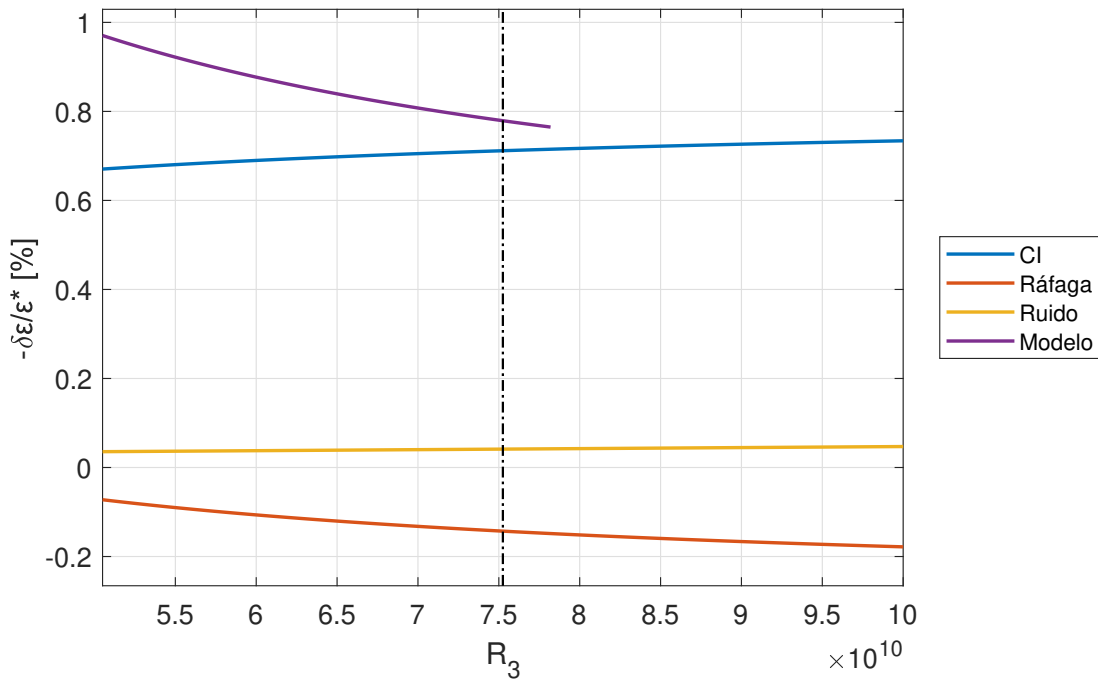


Figura 7.5 Análisis de sensibilidad respecto a  $R_3$ .

Tabla 7.3 Parámetros óptimos tras el análisis de sensibilidad.

$L_1$ [%]	$\beta$	$R_1$ ( $\cdot 10^6$ ) [-]	$R_2$ ( $\cdot 10^9$ ) [-]	$R_3$ ( $\cdot 10^9$ ) [-]
50	257.5	25.75	32.50	75.25

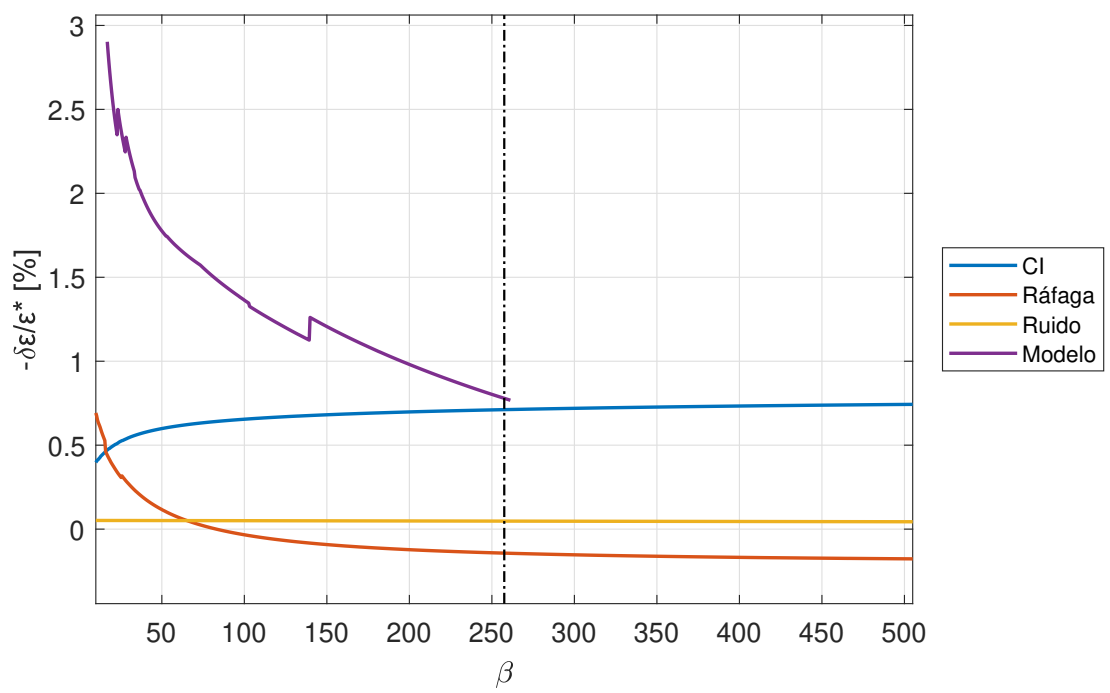


Figura 7.6 Análisis de sensibilidad respecto a  $\beta$ .

## 8 Evaluación del desempeño del sistema

---

A continuación se recogen una serie de casos típicos a los que se podría enfrentar el vehículo lanzador y, por ende, el controlador implementado, con el objetivo de evaluar el desempeño global del sistema. Es común tener que lidiar distintas fuentes de error que tenderán a sacar al cohete de su trayectoria nominal. En concreto, se analizan situaciones planteadas durante la sintonización, ampliando la variabilidad de parámetros y explorando nuevas combinaciones de casos.

Debido a que el controlador se ha diseñado partiendo de una simplificación de la dinámica real a controlar (se ha linealizado el sistema), no se puede asegurar matemáticamente su correcto funcionamiento para toda la casuística y para la totalidad de combinaciones de parámetros y perturbaciones posibles, incluso limitándonos al conjunto de casos que aquí se tratan. Por ello, se plantea un análisis estadístico usando un método de Monte Carlo [56], determinando los casos en los cuáles se cumple con una serie de criterios y asumiendo una distribución uniforme de probabilidad del error de las variables consideradas.

Se ha definido como caso de éxito aquel que cumpla con dos requisitos. El primero es que el error relativo de la función objetivo (7.1) sea inferior al 5%, asumiendo como aceptable un error del orden del cometido durante la optimización de la trayectoria ( $\sim 4.4\%$ ) respecto al valor obtenido del manual de usuario [27]. El segundo impone que el error en el cumplimiento de las restricciones no supere el 1%, equivalente al criterio empleado durante la sintonización (7.2).

Para evaluar la significancia del tamaño muestral de valores utilizados en los estudios y, por lo tanto, de la calidad de análisis, se propone el uso de la expresión desarrollada en [57] como criterio de parada para métodos de Monte Carlo. Operando y adaptando esta expresión a nuestro caso, se puede obtener una estimación del error relativo máximo de la media muestral respecto a la media real (desconocida) del valor de la función objetivo, dependiente del número de simulaciones  $N$  (tamaño de la muestra), asegurado con una probabilidad  $P$  del 99%:

$$e_{\bar{\epsilon}}[\%] \leq 100 \frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1-P}{2}\right) \sigma_{\epsilon}}{\bar{\epsilon} \sqrt{N}} \quad (8.1)$$

donde  $\Phi^{-1}$  es la función de distribución acumulada inversa normal, y  $\bar{\epsilon}$  y  $\sigma_{\epsilon}$  son la media y la desviación típica muestral de la energía específica en el instante final, respectivamente.

Adicionalmente, se ha incluido un ejemplo concreto de cada categoría con una cierta combinación de parámetros fijos para visualizar el desempeño del controlador para los distintos casos.

Además, para el análisis de errores a lo largo de la trayectoria se han definido los errores relativos de los estados como:

$$e_{\mathbf{x}}(t)[\%] = 100 \frac{|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)|}{\mathbf{x}^*(t)} \quad (8.2)$$

A excepción del ángulo de trayectoria, ya que no está bien definido para todos sus posibles valores, ya que puede anularse. Por ello, se adopta una definición alternativa:

$$e_\gamma(t) [\%] = 100 \frac{|\gamma(t) - \gamma^*(t)|}{\pi/2} \quad (8.3)$$

normalizando por el valor máximo  $\pi/2$  rad.

## 8.1 Respuesta al error en la estimación inicial de los estados

Durante la sintonización se consideró exclusivamente un error en la masa estructural de la primera etapa. En este caso se incluyen posibles variaciones de hasta el  $\pm 10\%$  en cualquiera de las tres etapas de forma simultánea.

En la Tabla 8.1 se recogen los resultados estadísticos del análisis de Monte Carlo. En particular, se presentan la media y desviación típica de la función objetivo y de las restricciones, así como el porcentaje de casos de éxito que cumplen tanto con la función objetivo (f.o.) como con las restricciones (r.). Además, se incluye el parámetro  $e_{\bar{\varepsilon}}$  que refleja una estimación del error del estudio, y el tamaño muestral o número de simulaciones  $N$ . Como se puede observar, en esta batería de situaciones el número de casos de éxito es prácticamente absoluto.

**Tabla 8.1** Resultados del análisis de Monte Carlo para errores en la estimación inicial de la masa estructural de cada etapa.

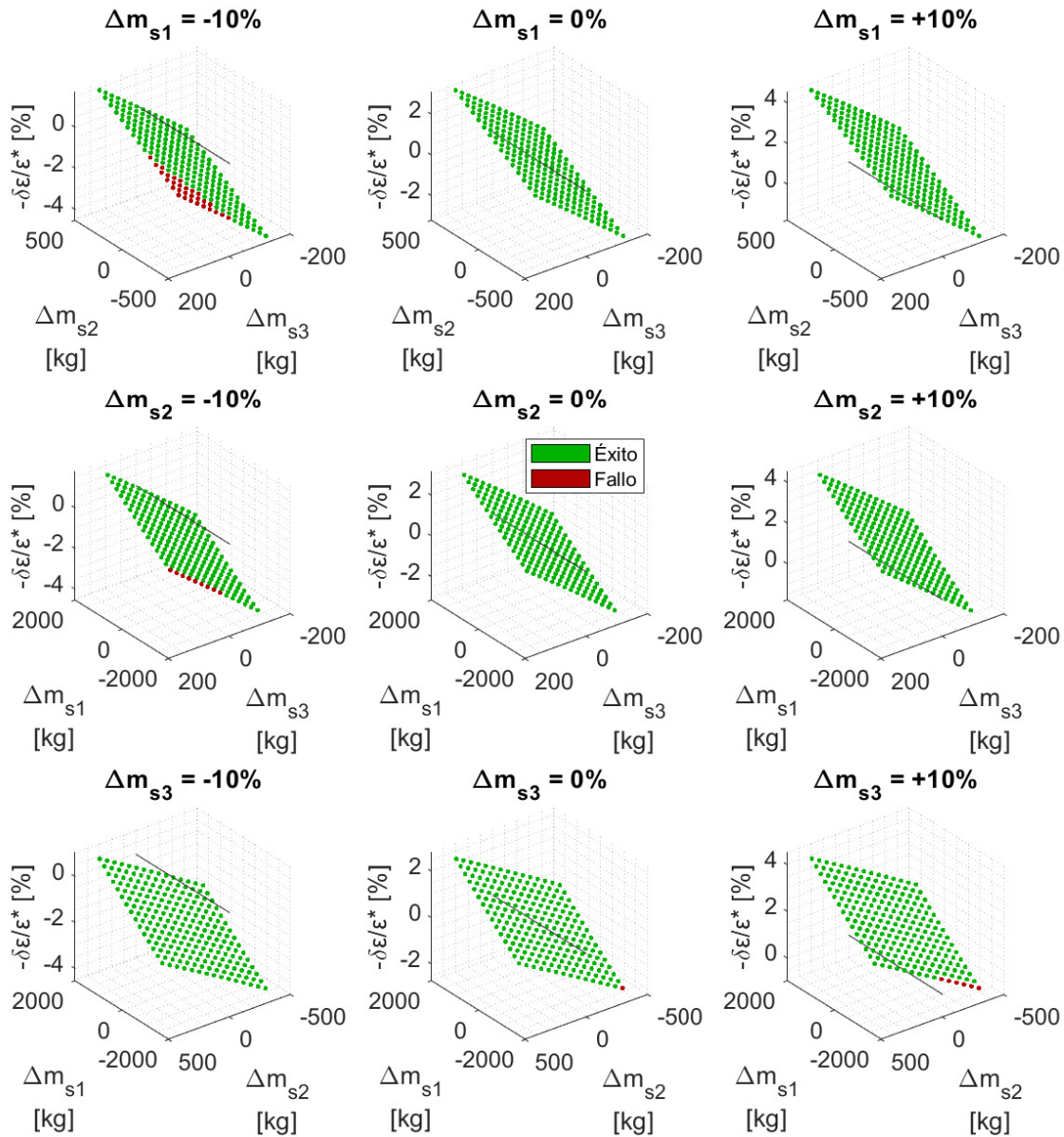
$\bar{\varepsilon}$ [MJ/kg]	$\sigma_{\varepsilon}$ [MJ/kg]	$\bar{\gamma}$ [deg]	$\sigma_{\gamma}$ [deg]	% éxito f.o.	% éxito r.	$e_{\bar{\varepsilon}}$ [%]	$N$
29.053	0.473	-0.014	0.475	100	99.141	0.072	27 000

En la Figura 8.1 se muestran los resultados de los barridos más representativos de la variación de estas masas estructurales. En verde se recogen los casos de éxito que cumplen con los criterios establecidos y, en rojo, aquellas simulaciones que incumplen alguno de estos requisitos. Como se puede observar, la inmensa mayoría de las situaciones son favorables, aunque puede surgir algún problema con decrementos elevados de la masa estructural de la segunda etapa ( $\Delta m_{s,2}$ ), principalmente.

A modo de ejemplo se analiza en detalle el caso particular en el error en la estimación inicial de la masa estructural de la primera etapa de 670 kg (+5%). A continuación, se incluyen una serie de gráficas que complementan los comentarios realizados. En ellas se muestra la referencia o trayectoria nominal (línea negra discontinua), la evolución de los estados para los distintos tramos sin la realimentación  $\delta u$  del controlador (línea negra punteada señalada como *No FB*) y la evolución de los estados ante la acción del control realimentado para cada fase (en azul cuando el LQR está actuando y en rojo cuando se trata de un tramo libre balístico). Además se remarca la división temporal entre etapas mediante líneas verticales. Estos criterios se mantienen para toda la sección de resultados salvo que se indique lo contrario.

En la Figura 8.2 se muestra la evolución de los estados a lo largo del tiempo de quemado. Nótese que se ha incluido la masa como estado con el fin de adquirir una mejor comprensión del problema. Como se puede observar, esa pequeña variación en la estimación inicial de la masa provocaría que la trayectoria se desviara sustancialmente de la nominal. Esto es más notable con la altitud (b). El controlador corrige esta desviación consiguiendo un error respecto al óptimo de la función objetivo del 0.71% y un incumplimiento del ángulo de trayectoria en el instante final de 0.65%, ambos valores holgadamente dentro de los límites permitidos.

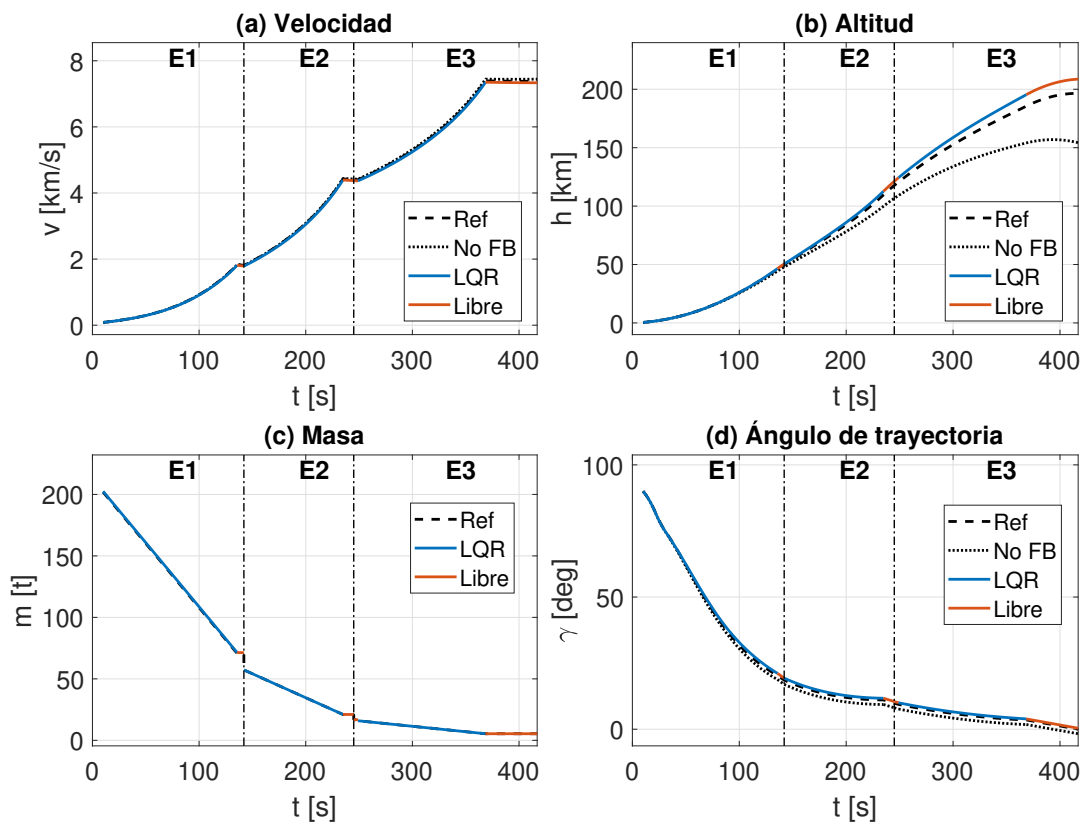
Las Figuras 8.3 y 8.4 presentan, respectivamente, los errores absolutos y relativos de los estados. Mientras que los gráficos que presentaban la evolución de los estados dan una visión global del



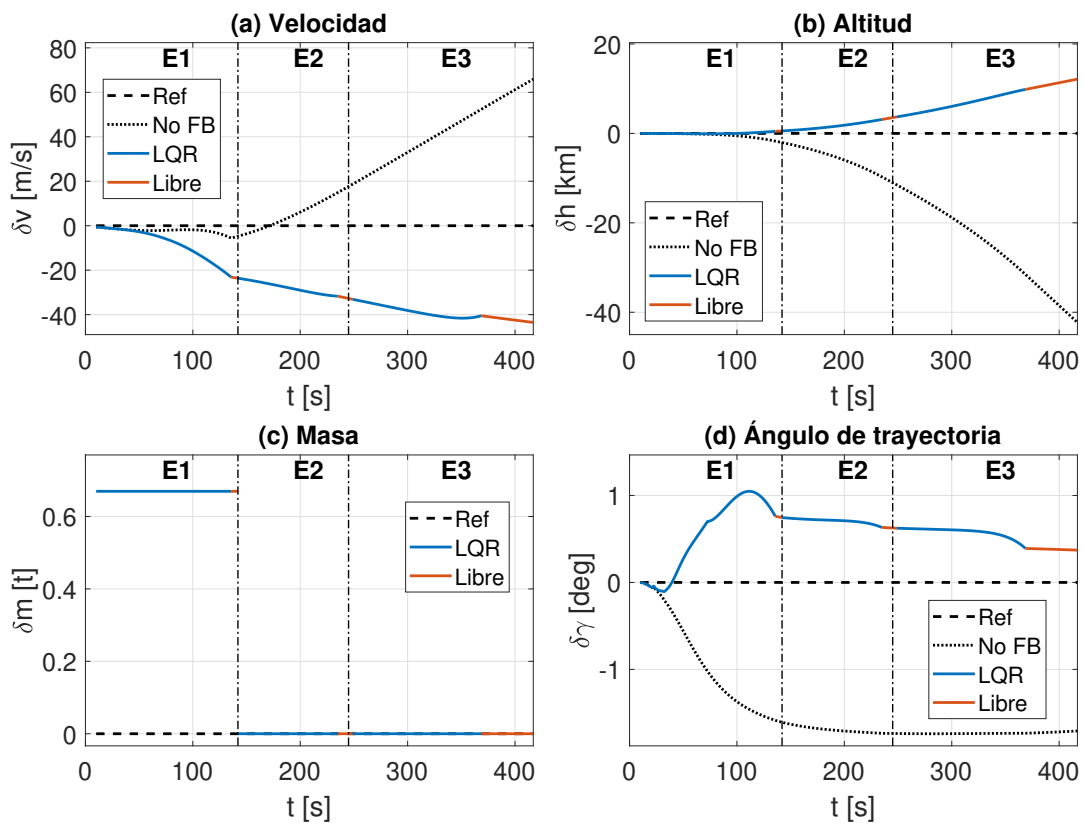
**Figura 8.1** Análisis de Monte Carlo para errores en la estimación inicial de la masa estructural de cada etapa.

desarrollo del sistema, estos aportan información detallada local en cada instante, eliminando el problema de la escala. Así pues, se puede comprobar cómo el seguimiento no es perfecto, pero todas las variables controladas quedan acotadas dentro de unos valores razonables. Cabe destacar cómo la perturbación en la masa (c) desaparece tras la eyección de la etapa 1, por lo que se trata de un error en escalón con un flanco de subida y otro de bajada.

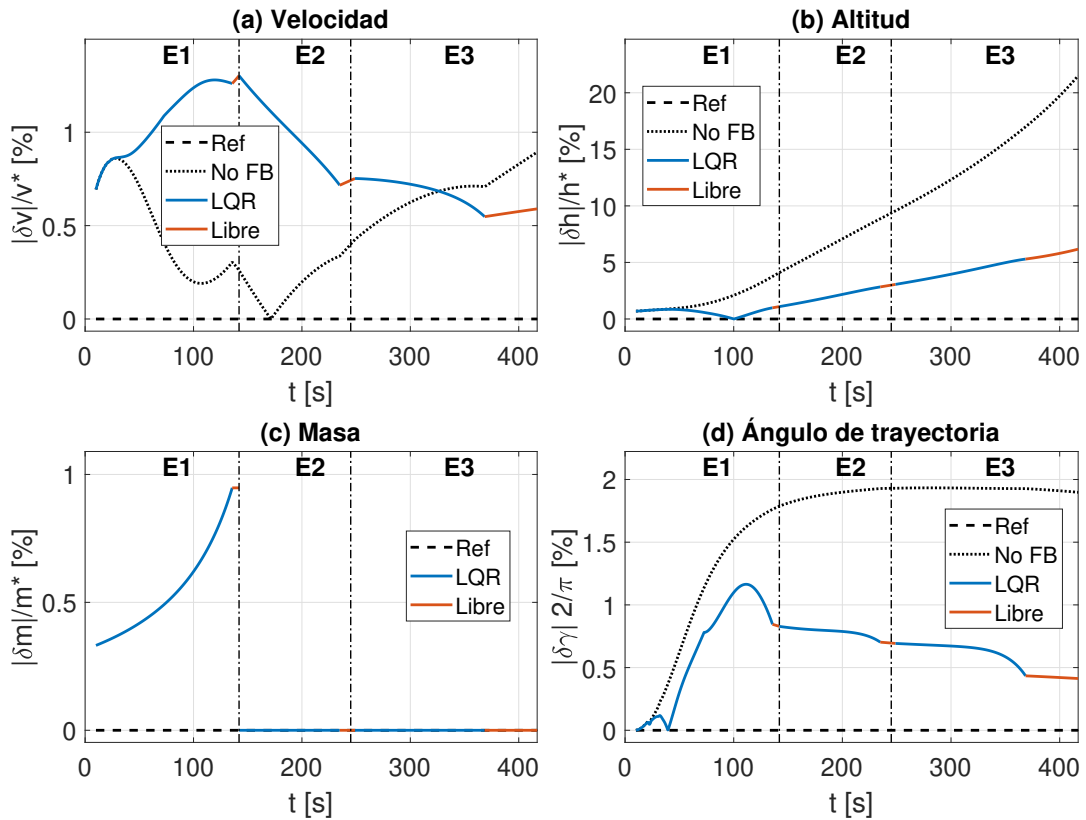
Respecto al esfuerzo de control, en la Figura 8.5 se muestra la evolución de  $\alpha'(t)$ . Se puede observar un comportamiento suave en todo momento, sin llegar a alcanzar la saturación en la etapa 1 gracias al efecto de haber limitado su rango de control durante la planificación y optimización de la trayectoria (línea discontinua).



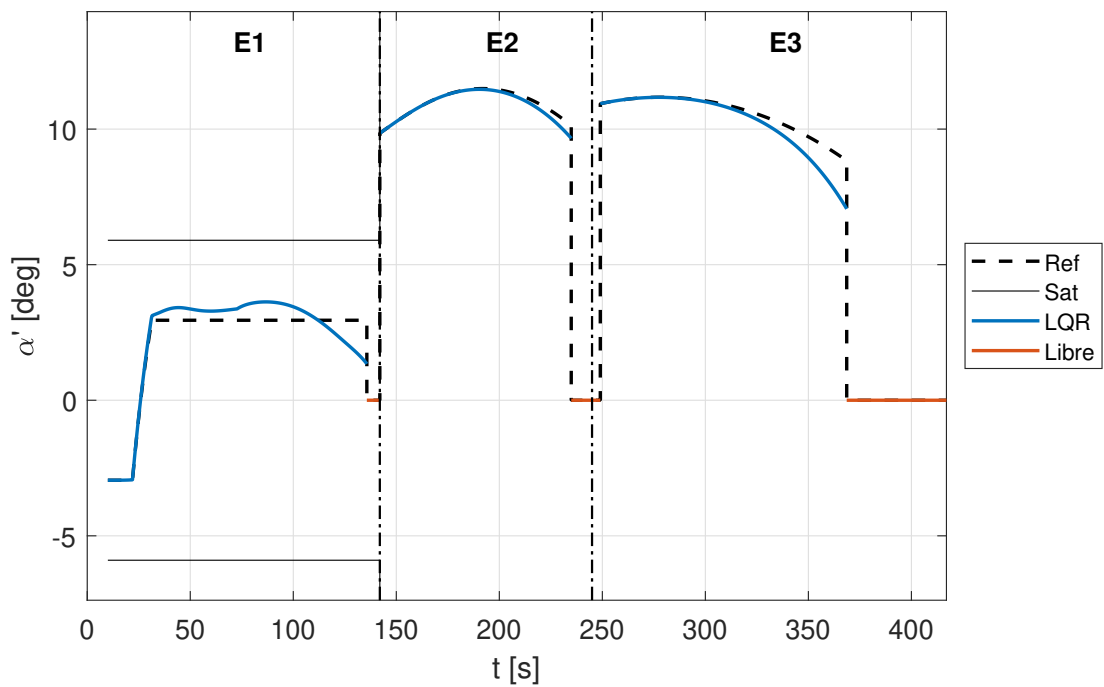
**Figura 8.2** Evolución de los estados del sistema con error de +5% en la estimación inicial de la masa estructural de la etapa 1.



**Figura 8.3** Evolución del error absoluto de los estados del sistema con error de +5% en la estimación inicial de la masa estructural de la etapa 1.



**Figura 8.4** Evolución del error relativo de los estados del sistema con error de +5% en la estimación inicial de la masa estructural de la etapa 1.



**Figura 8.5** Evolución de la variable de control del sistema con error de +5% en la estimación inicial de la masa estructural de la etapa 1.



## 8.2 Respuesta a perturbaciones impulsivas (ráfagas)

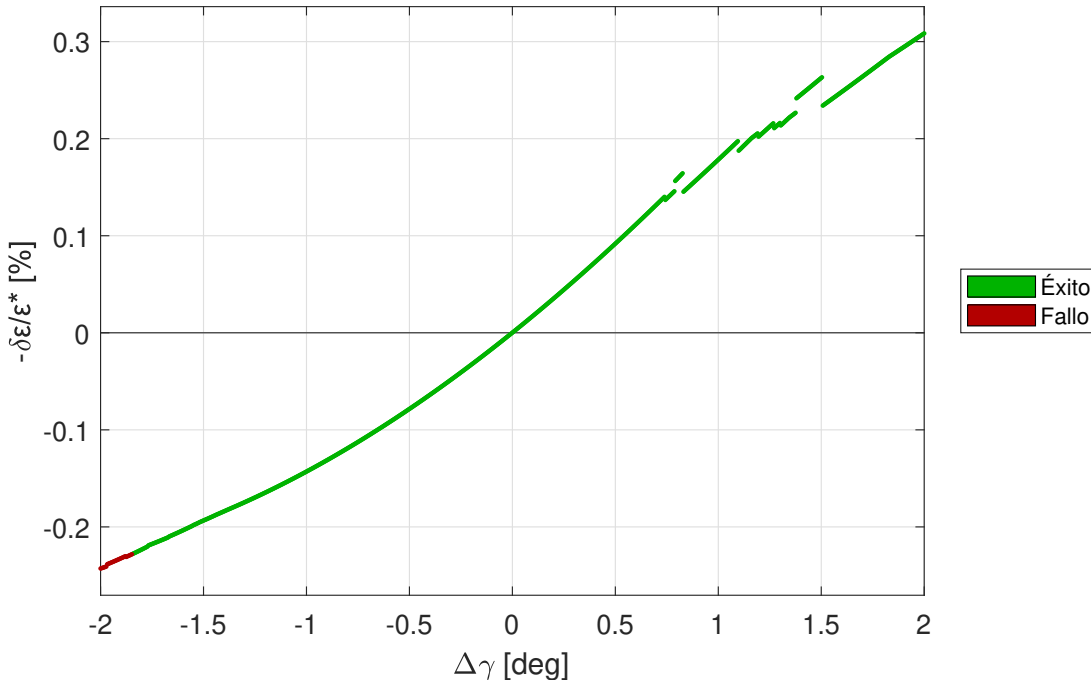
De forma análoga al proceso de sintonización, se modelan posibles ráfagas de viento en el plano vertical como variaciones instantáneas del ángulo de trayectoria  $\gamma(t)$  del cohete, las cuales tienen lugar en el instante intermedio del tiempo de quemado de la primera etapa. En este caso, se estudia un rango ampliado de  $\pm 2$  grados.

En la Tabla 8.2 se presentan los resultados del análisis de Monte Carlo. Se puede apreciar que en esta situación, aunque todas las combinaciones cumplen con los criterios fijados para la función objetivo, un 3.9% de los casos fallan en respetar la condición de ángulo de trayectoria nulo (error inferior al 1%) en el instante final.

**Tabla 8.2** Resultados del análisis de Monte Carlo para errores debidos a perturbaciones impulsivas.

$\bar{\epsilon}$ [MJ/kg]	$\sigma_\epsilon$ [MJ/kg]	$\bar{\gamma}$ [deg]	$\sigma_\gamma$ [deg]	% éxito f.o.	% éxito r.	$e_{\bar{\epsilon}}$ [%]	$N$
29.048	0.050	-0.044	0.485	100	96.1	0.014	1 000

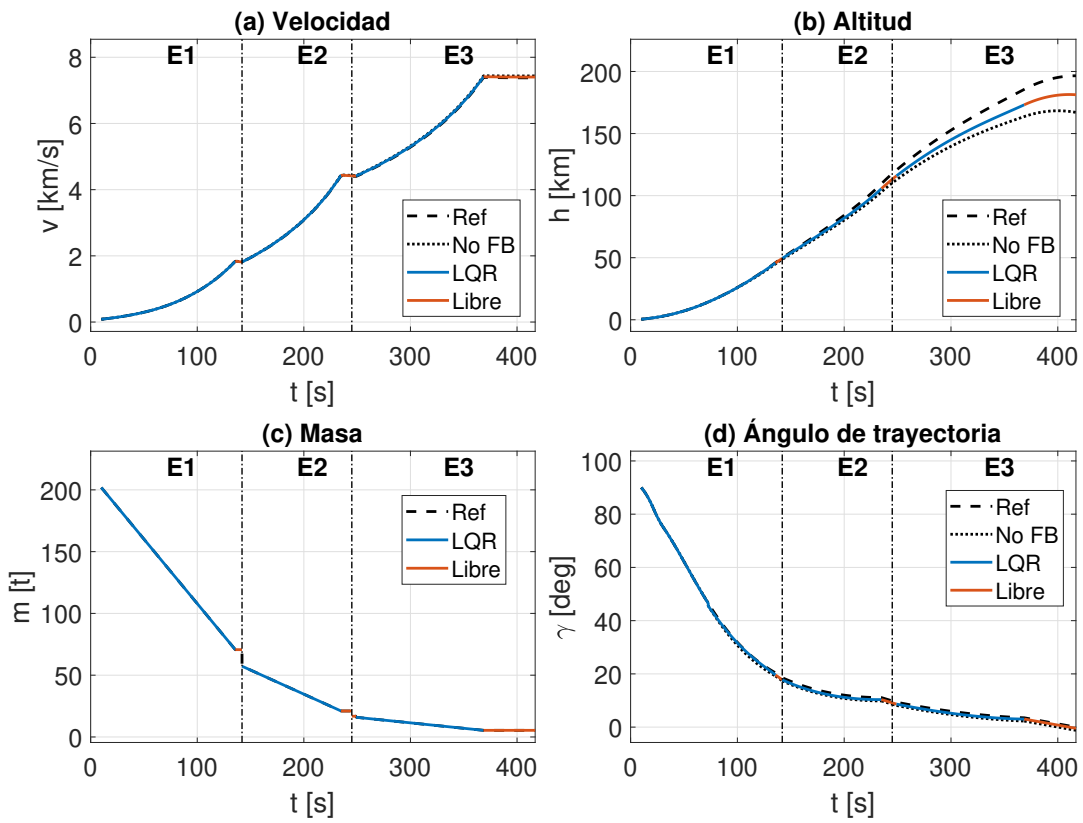
Representando el análisis en la Figura 8.6, se adquiere información adicional. Se puede comprobar cómo el error de la función objetivo se encuentra muy acotado e inferior al 0.3%. También se observa cómo cualquier perturbación negativa acaba mejorando el valor de la función objetivo ( $e_\epsilon < 0$ ), lo cual tiene sentido, ya que la sintonización fue optimizada para esta zona (la más problemática). No obstante, se aprecia que conforme nos acercamos a un impulso de -2 grados, el controlador empieza a fallar, lo cual es coherente con el hecho de que lo estemos empujando aún más hacia la zona de saturación y acabe por no poder contrarrestar la perturbación.



**Figura 8.6** Análisis de Monte Carlo para errores debidos a perturbaciones impulsivas.

Como caso particular, se ejemplifica la situación en la que existe un  $\Delta\gamma = -1$  grado, de forma que nos permita analizar un caso en el que la función objetivo es mejorada. Los estados evolucionan de acuerdo a las gráficas mostradas en la Figura 8.7. Como se aprecia, en ausencia de guiado (línea

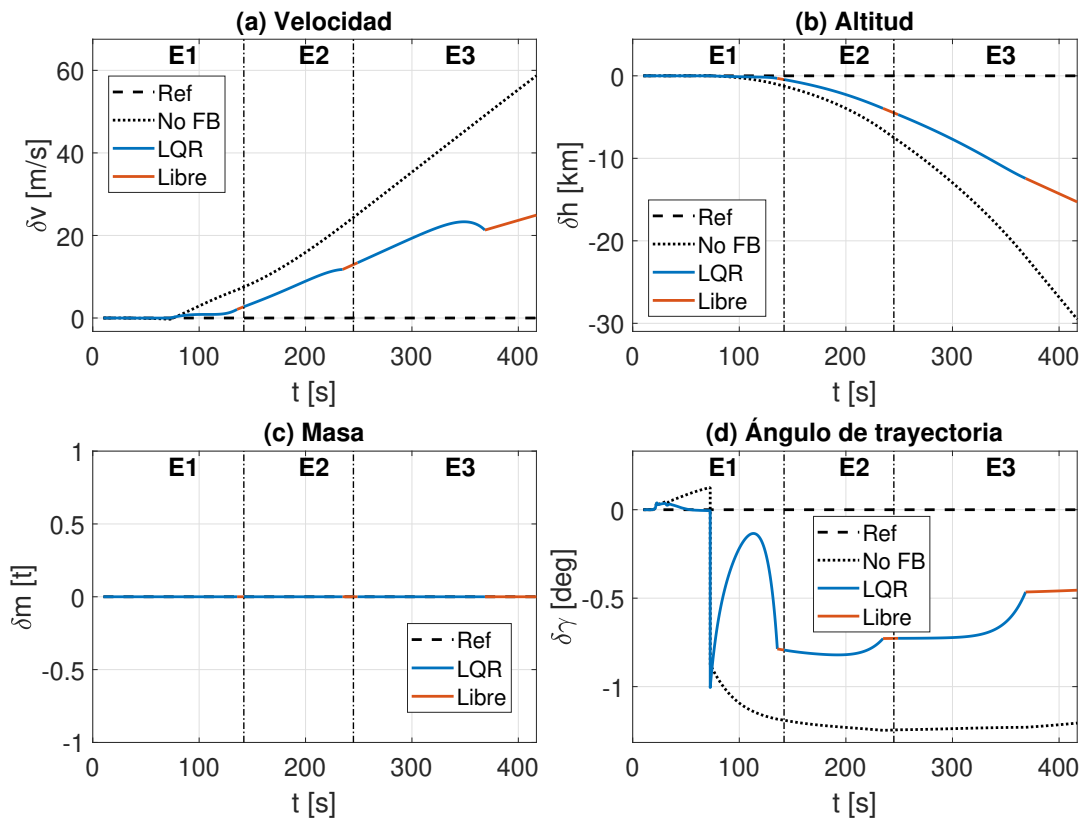
punteada) este incremento de ángulo de trayectoria conlleva alcanzar una mayor altitud (b), en detrimento de la velocidad (a) final.



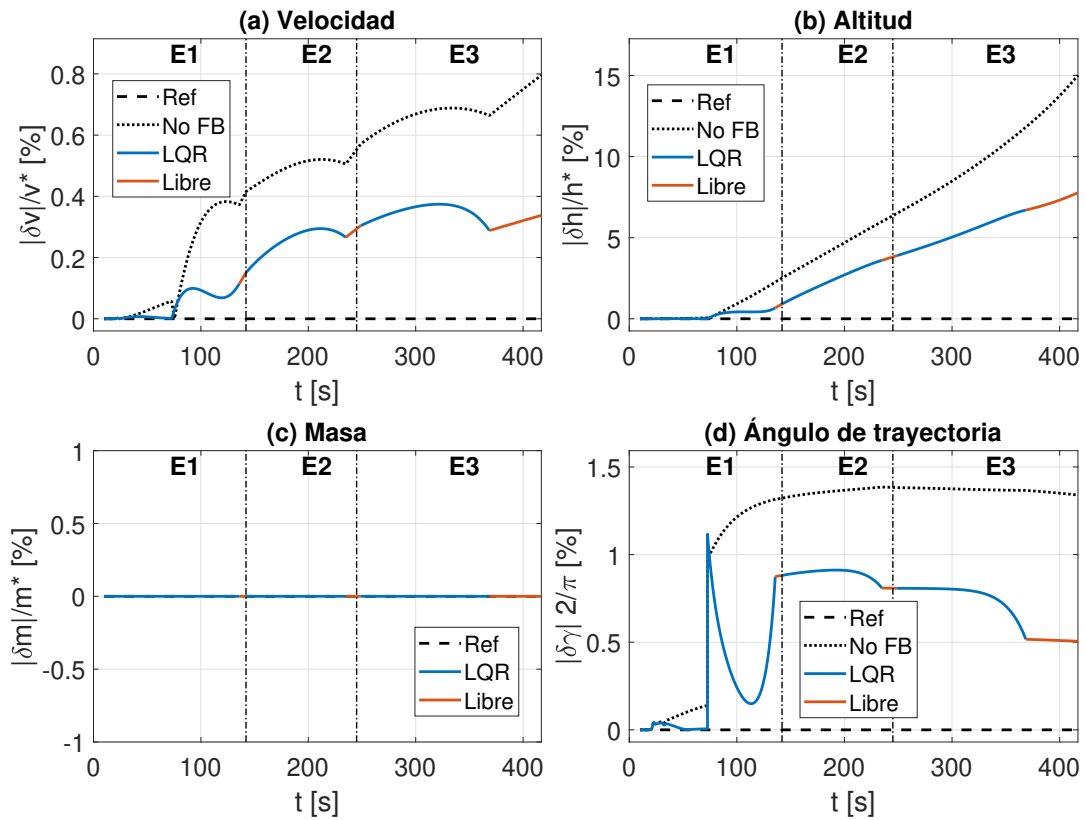
**Figura 8.7** Evolución de los estados del sistema ante una perturbación impulsiva de -1 grado en el ángulo de trayectoria.

Nuevamente, se representan los errores absolutos y relativos de los estados en las Figura 8.8 y 8.9, respectivamente. En estos gráficos se puede apreciar claramente cómo en torno al segundo 73 se produce la perturbación en el ángulo de trayectoria (d) y comienza la deriva del resto de estados. Asimismo, se comprueba cómo el controlador lucha acto seguido en contra de ese impulso, pero no corrige totalmente la desviación, ya que aprovecha el intercambio energético entre altitud y velocidad para obtener un mejor valor de energía mecánica específica. En particular, la trayectoria resultante mejora a la trayectoria de referencia en un 0.14%, manteniendo el cumplimiento de las restricciones con un 0.51% de error. El hecho de que se pueda asumir una desviación tan notable de los estados (en particular de la altitud) con el objetivo de mejorar la trayectoria inicialmente propuesta es un hecho que se puede discutir en función de los requerimientos y restricciones de la misión. En el Subapartado 8.5.1 se propone una posible alternativa en caso de que se quiera priorizar la predictibilidad de la trayectoria.

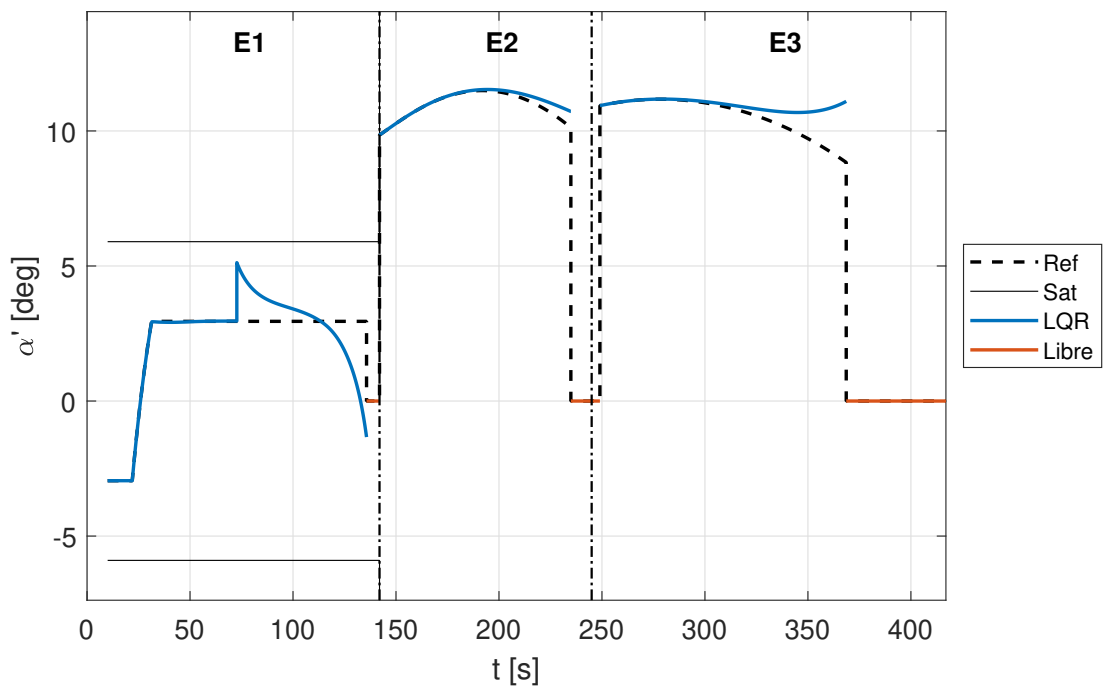
La Figura 8.10 muestra la evolución de la dirección del empuje. Es notoria la reacción del controlador ante la perturbación, actuando instantáneamente en sentido opuesto a la misma. Esto se manifiesta en el pico producido hacia la mitad de la duración de la primera etapa. Nótese también que en una situación real, esta reacción espontánea no sería viable debido al retraso introducido por la dinámica del actuador. No obstante, como se comentó anteriormente, el guiado es un proceso de alto nivel que generaría una nueva referencia para un controlador de más bajo nivel.



**Figura 8.8** Evolución del error absoluto de los estados del sistema ante una perturbación impulsiva de -1 grado en el ángulo de trayectoria.



**Figura 8.9** Evolución del error relativo de los estados del sistema ante una perturbación impulsiva de -1 grado en el ángulo de trayectoria.



**Figura 8.10** Evolución de la variable de control del sistema ante una perturbación impulsiva de -1 grado en el ángulo de trayectoria.

### 8.3 Respuesta al ruido de los sensores

Los resultados del análisis de Monte Carlo tras 1 000 simulaciones con el ruido blanco gaussiano aleatorio definido para cada estado en el Subapartado 7.1.3, se recogen en la Tabla 8.3.

**Tabla 8.3** Resultados del análisis de Monte Carlo para tolerancia al ruido.

$\bar{\epsilon}$ [MJ/kg]	$\sigma_{\epsilon}$ [MJ/kg]	$\bar{\gamma}$ [deg]	$\sigma_{\gamma}$ [deg]	% éxito f.o.	% éxito r.	$e_{\bar{\epsilon}}$ [%]	$N$
29.040	0.027	0.032	0.234	100	100	0.008	1 000

Para poder apreciar claramente el efecto que una mala sintonización puede acarrear a la tolerancia al ruido de un sistema, se compara la sintonización optimizada presentada anteriormente en la Tabla 7.3, con una elección alternativa más deficiente de parámetros, en términos de rechazo al ruido, mostrados en la Tabla 8.4. Este último caso se dibuja en las gráficas en línea punteada bajo el nombre *Alt.*

**Tabla 8.4** Parámetros alternativos no tolerantes al ruido.

$L_1$ [%]	$\beta$	$\mathbf{R}_1$ ( $\cdot 10^6$ ) [-]	$\mathbf{R}_2$ ( $\cdot 10^9$ ) [-]	$\mathbf{R}_3$ ( $\cdot 10^9$ ) [-]
50	10	1	1	1

Resulta evidente, en la Figura 8.11, que la presencia de ruido puede jugar un papel crucial en guiado del vehículo. Obviamente, este caso se ha exagerado a consciencia, pero la idea que se pretende transmitir es que se debe ser cuidadoso para que la elección de parámetros de sintonización no incite a que el controlador acabe acoplándose al ruido, obteniendo una respuesta completamente indeseada, a pesar de la ausencia de cualquier otro tipo de perturbación.

Tal y como puede apreciarse, para el caso en el que la sintonización no es adecuada, tanto la velocidad (a) como la altitud (b) se desvían de forma notoria, siendo el error máximo en el instante final, obteniendo un error del 46% de la función objetivo y un incumplimiento de las restricciones superior al 14% (ambos claramente superiores a los límites fijados).

Con una buena elección de parámetros, por el contrario, el efecto se mitiga de forma adecuada y su influencia es casi nula en la trayectoria, manteniendo el error de la energía mecánica específica en el instante final del orden del 0.01% y el incumplimiento del ángulo de trayectoria (d) en el 0.21%.

Esto se puede apreciar con más detalle en las Figuras 8.12 y 8.13, donde se presenta el error absoluto y relativo, respectivamente. El principal problema radica en el intento del controlador mal sintonizado en capturar las variaciones de alta frecuencia introducidas por el ruido. El efecto es evidente en el ángulo de trayectoria (d). Existe un instante en el que ya no es capaz, y crece desmesuradamente incrementando la amplitud de sus oscilaciones y desviando al resto de estados hasta valores inaceptables.

Desde el punto de vista del control, plasmado en la Figura 8.14, obtenemos las mismas conclusiones: una ley rápida y agresiva generará fuertes picos a uno y otro sentido y tenderá a sacar al sistema del equilibrio, mientras que reduciendo su esfuerzo, actúa como un filtro, ignorando parte de esas oscilaciones perniciosas.

Nuevamente se ha de recalcar que existen técnicas de preprocesado aquí no contempladas que atenúan la presencia del ruido en los sensores, de modo que sus efectos se verían mitigados.

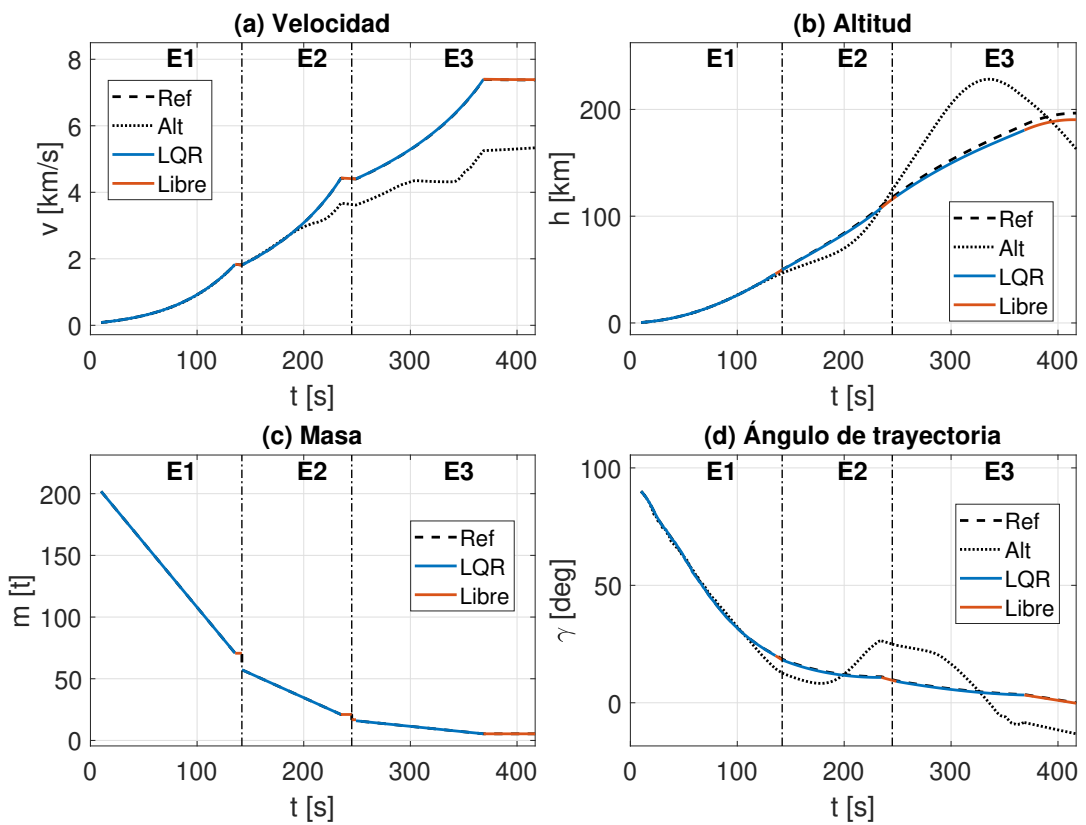
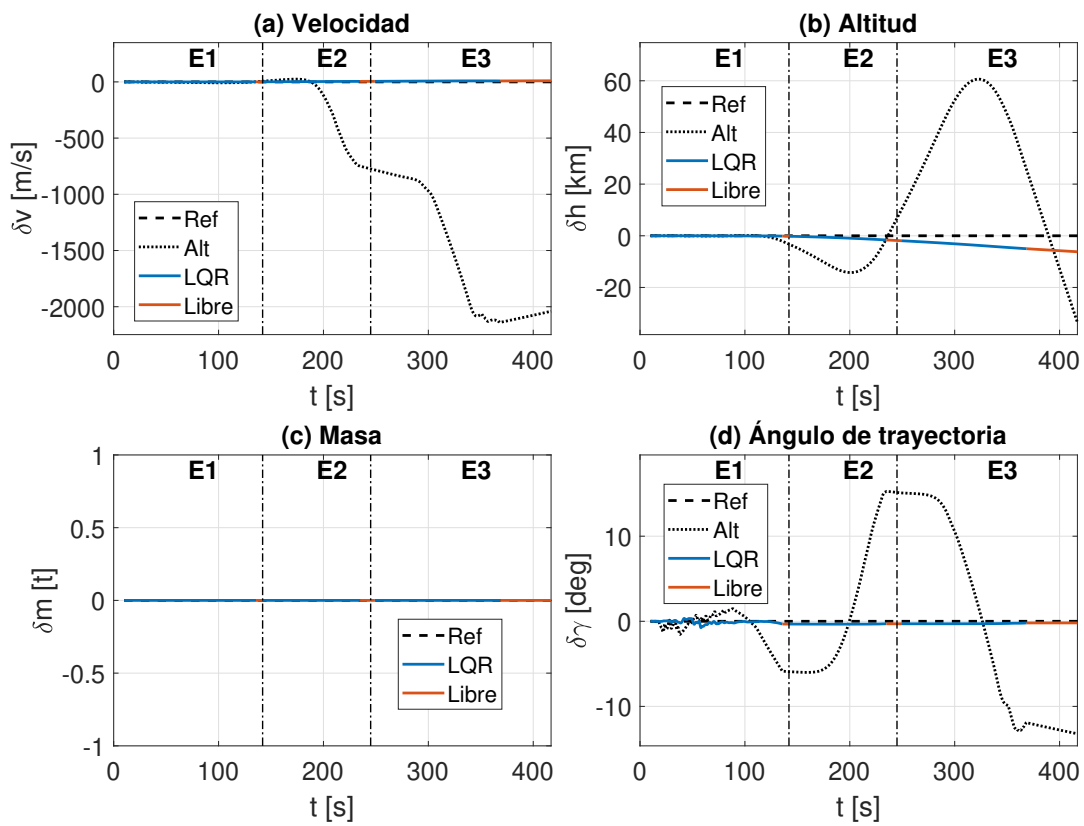


Figura 8.11 Evolución de los estados del sistema ante la presencia de ruido en los sensores.



**Figura 8.12** Evolución del error absoluto de los estados del sistema ante la presencia de ruido en los sensores.

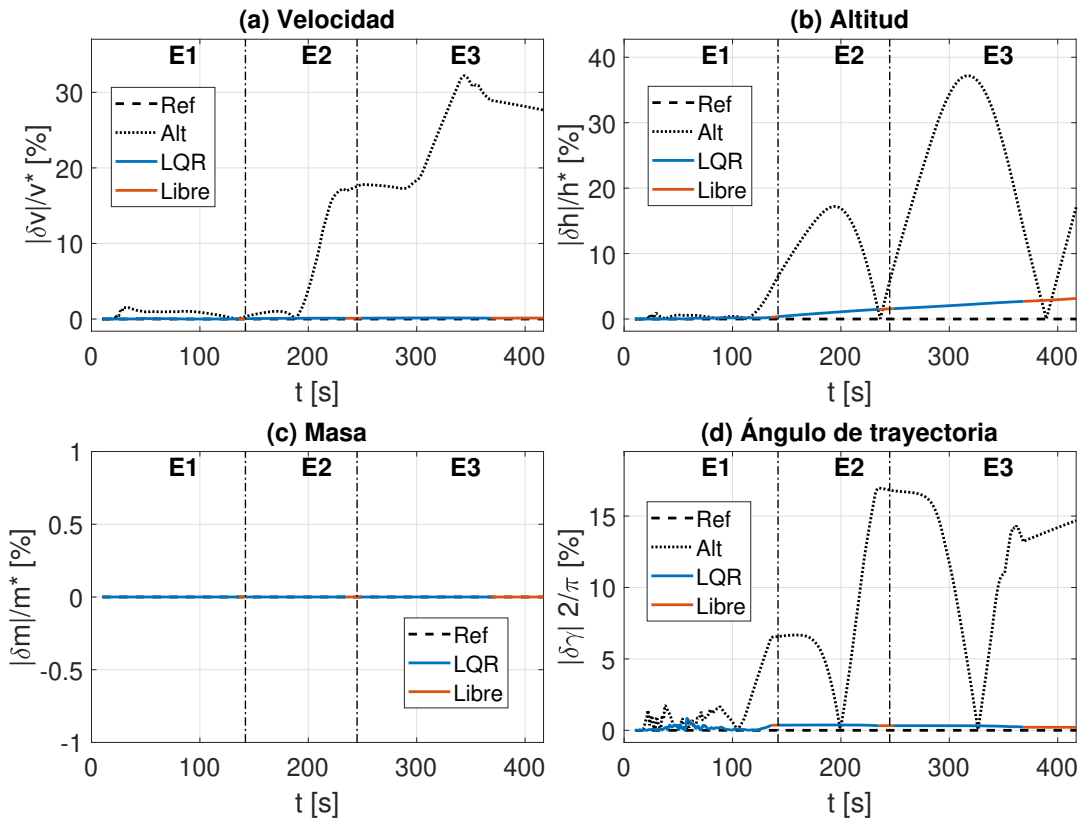


Figura 8.13 Evolución del error relativo de los estados del sistema ante la presencia de ruido en los sensores.

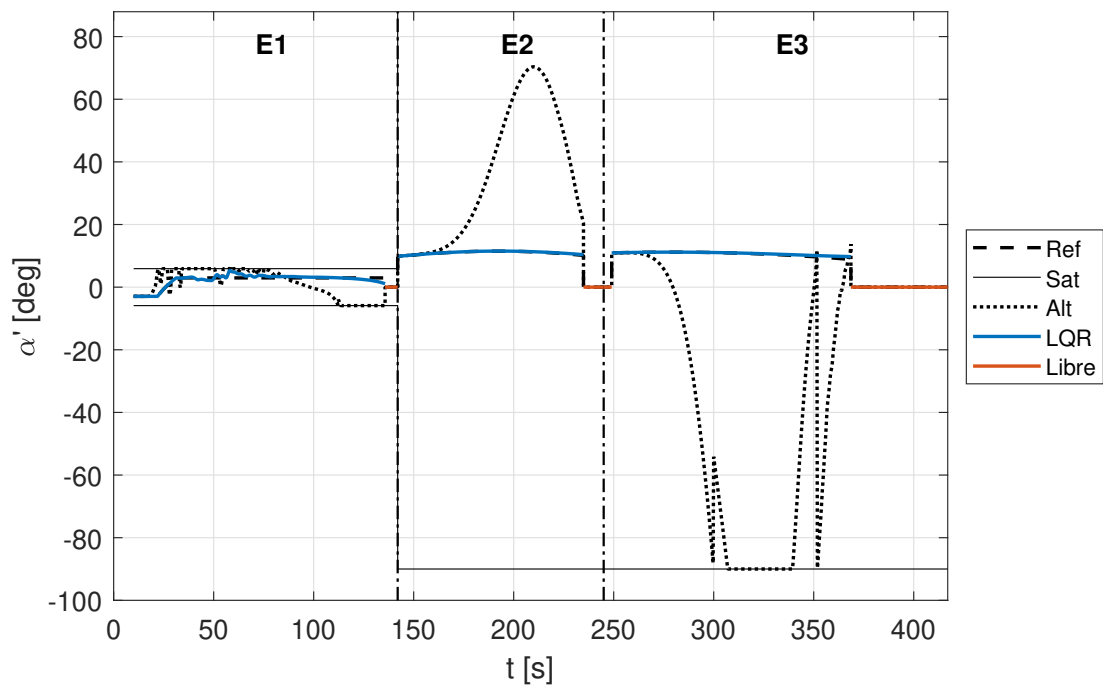


Figura 8.14 Evolución de la variable de control del sistema ante la presencia de ruido en los sensores.



## 8.4 Respuesta a una combinación de fuentes de error

Hasta ahora se han analizado distintas fuentes de error que pueden afectar negativamente al sistema de forma individual. No obstante, en la vida real, estas distintas tipologías coexisten y perturban al vehículo de forma continuada, por lo que el sistema de control debe ser capaz de rechazarlas de forma simultánea para garantizar el éxito de la misión. Este apartado pretende someter al controlador a errores en la estimación de la masa inicial, perturbaciones impulsivas y ruido en los sensores para evaluar el desempeño del mismo en una situación más completa y realista.

Realizando de forma conjunta los barridos de parámetros de los apartados anteriores se llega a los resultados estadísticos presentados en la Tabla 8.5. Casi la totalidad de la simulaciones conduce a un error de la función objetivo inferior al 5%, mientras que cerca del 25% incumplen las restricciones fijadas. A priori puede parecer un porcentaje elevado, pero observando la media y desviación típica de este parámetro se comprueba que la dispersión no es muy elevada y se encuentra cercana a 0. De hecho, se puede asegurar que el 99.7% de los casos ( $3 - \sigma$ ) no superan un error superior a -2.3 grados.

**Tabla 8.5** Resultados del análisis de Monte Carlo para combinaciones de fuentes de error.

$\bar{\varepsilon}$ [MJ/kg]	$\sigma_{\varepsilon}$ [MJ/kg]	$\bar{\gamma}$ [deg]	$\sigma_{\gamma}$ [deg]	% éxito f.o.	% éxito r.	$e_{\varepsilon}$ [%]	$N$
29.041	0.473	-0.069	0.733	99.998	75.567	0.017	50 625

Para dar una idea más precisa de los casos en los que falla el sistema, se representan las situaciones más desfavorables del análisis, es decir, los casos extremos con ráfagas máximas negativas (Figura 8.15) y positivas (Figura 8.16), barriendo para todas las variaciones de masas estructurales consideradas.

A modo de ejemplo se incluye el caso en el que existe un error en la estimación inicial de la masa de la primera etapa de un -10% de su masa estructural. Además, una ráfaga induce un incremento de 1 grado en el ángulo de trayectoria a la mitad del tiempo de quemado de la primera etapa y los sensores se ven perturbados por la presencia de un ruido blanco gaussiano.

La evolución de los estados se presenta en la Figura 8.17. Como puede observarse, la combinación de parámetros y fuentes de error, en ausencia de control, implicaría un ángulo de trayectoria (d) elevado durante toda la trayectoria, lo que a su vez conlleva un ascenso muy vertical. Esto daría como resultado un decremento notable de la velocidad (a) final (la cual es el término de mayor peso en la energía específica) y un aumento significativo de la altitud (b). No obstante, el controlador diseñado se desenvuelve con éxito, permitiendo al vehículo lanzador ajustarse a la trayectoria óptima, consiguiendo mejorar el valor de la energía específica en un 1.2%. El error del ángulo de trayectoria en el instante final es inferior al 0.4%.

Para analizar más en detalle la desviación, se incluyen las Figuras 8.18 y 8.19, que representan el error absoluto y relativo, respectivamente. Se puede apreciar claramente la discrepancia inicial de masa (c), el impacto de la perturbación impulsiva en  $\gamma(t = 73 \text{ s})$  o el efecto del ruido en las pequeñas oscilaciones de alta frecuencia, principalmente en el ángulo de trayectoria (d). En todo momento, el error de todos los estados se mantienen inferior al 5% y, la mayor parte del tiempo, inferior o del orden del 1%, respetando la restricción de ángulo de trayectoria nulo en el instante final.

En cuanto a la evolución del control (Figura 8.20), se observa una pequeña zona de saturación, así como la influencia del ruido en el pequeño rizado (bastante mitigado) y la abrupta corrección tras la perturbación impulsiva.

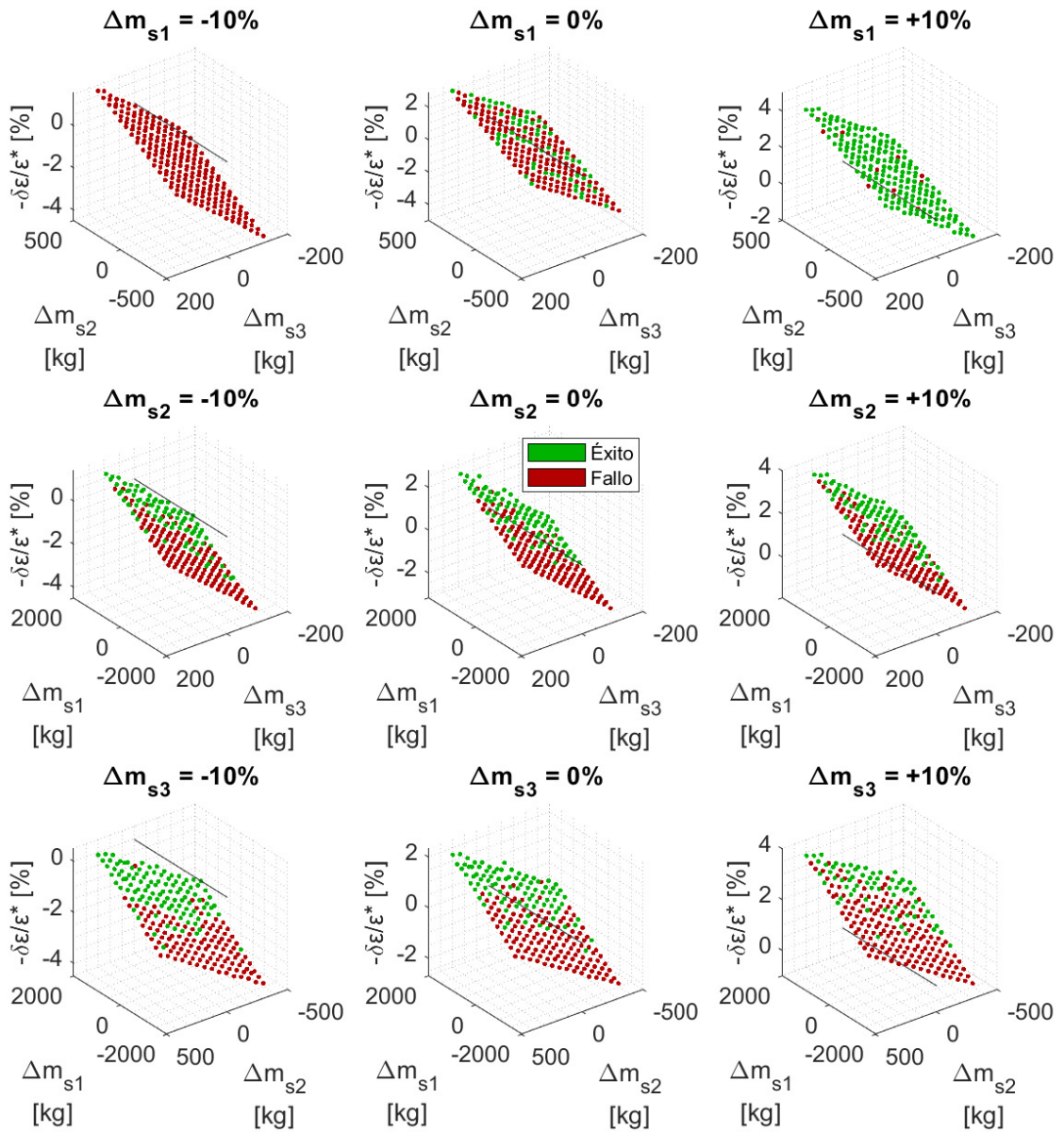
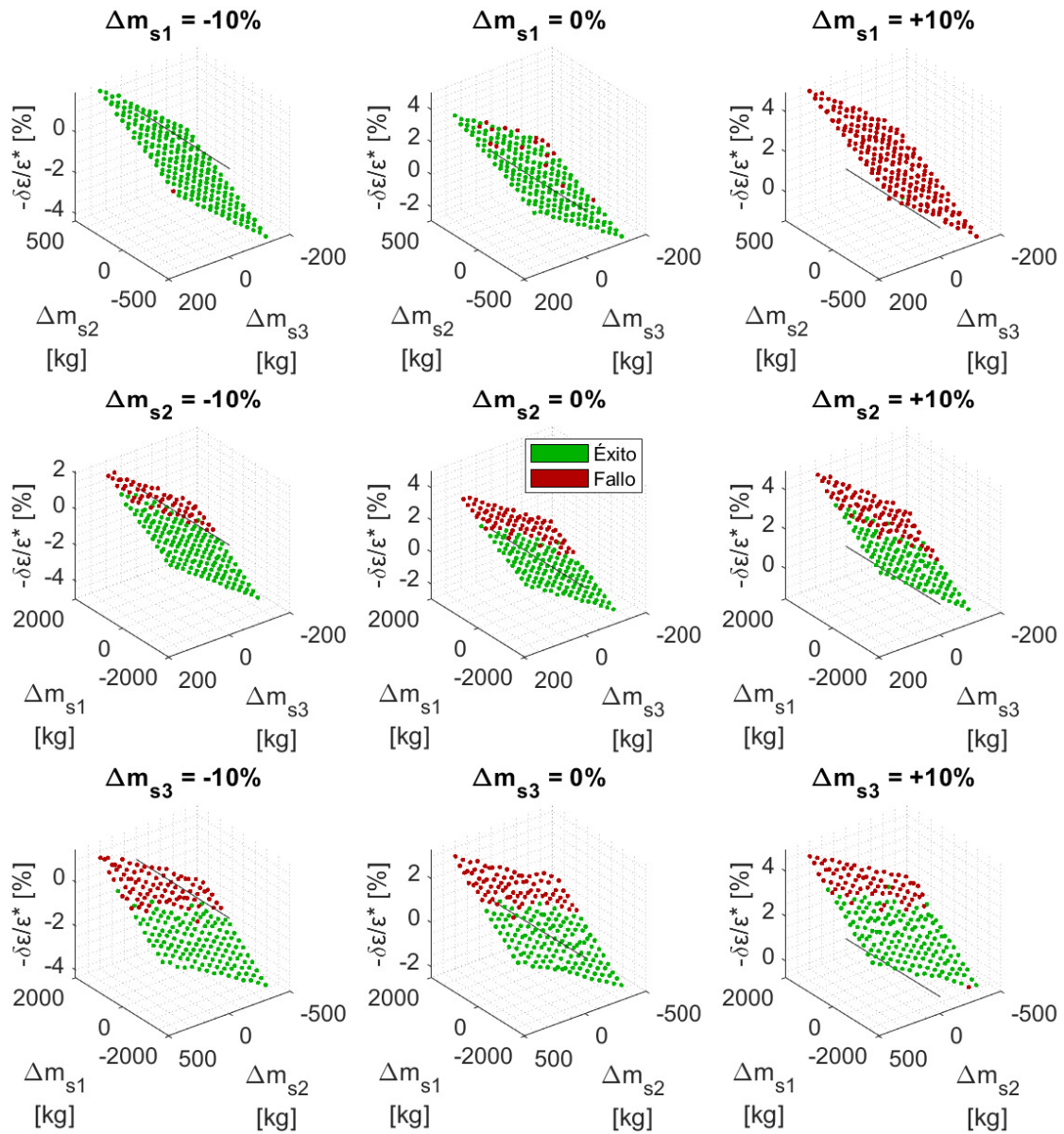
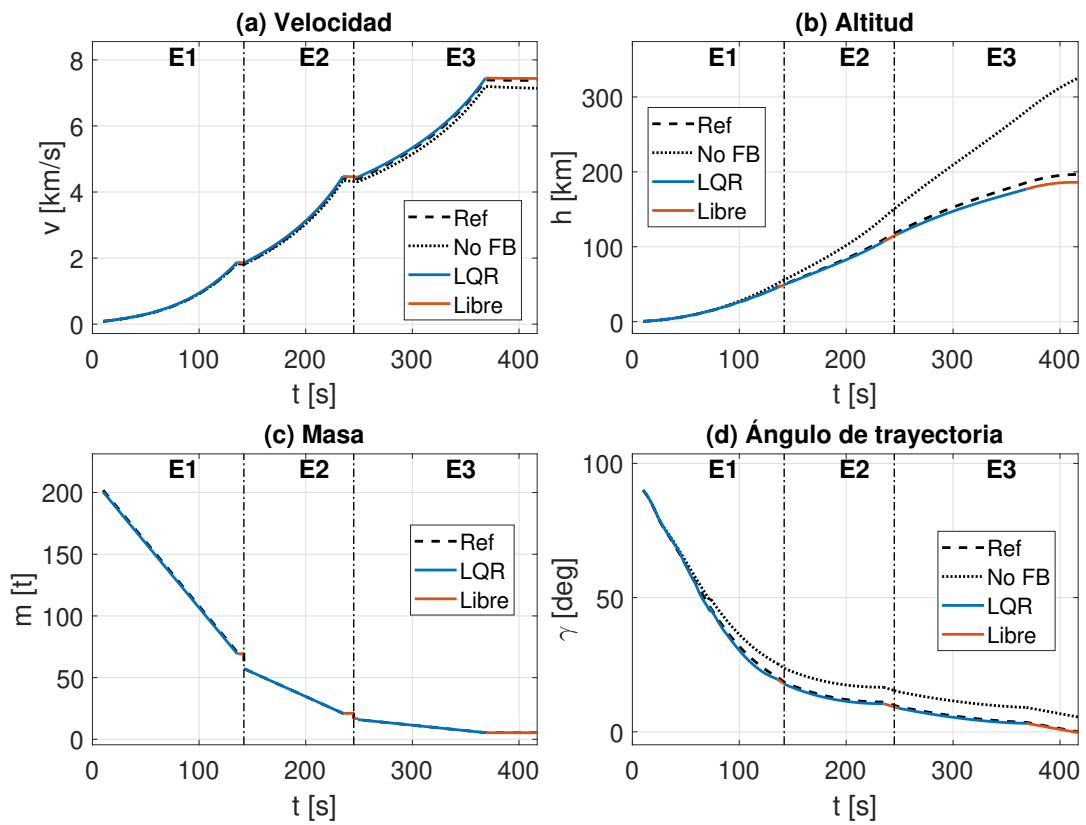


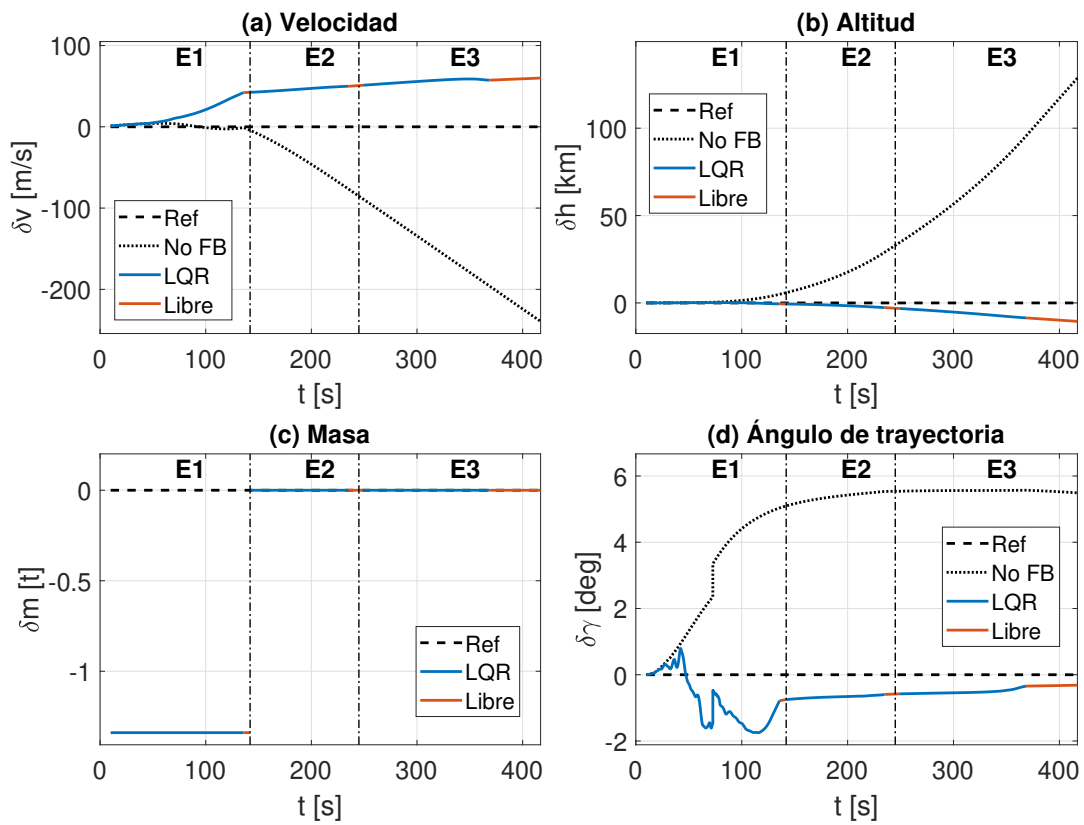
Figura 8.15 Análisis de Monte Carlo para una combinación de fuentes de error donde  $\Delta\gamma = -2$  grados.



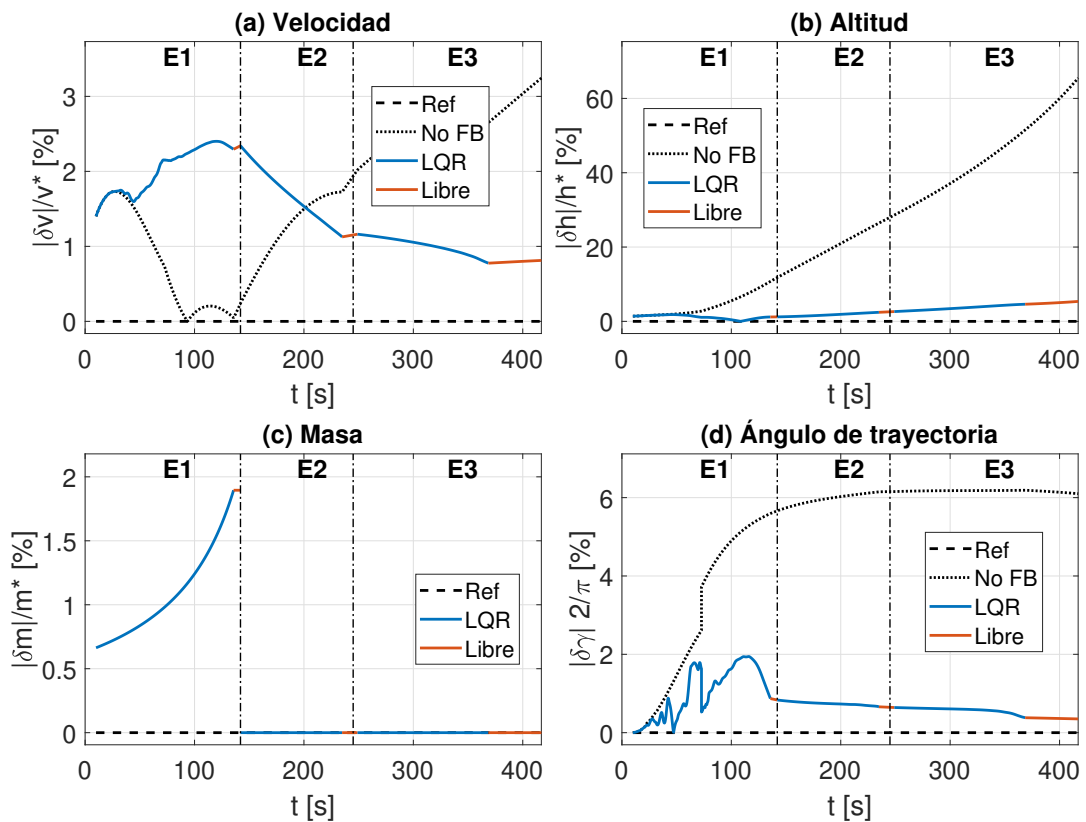
**Figura 8.16** Análisis de Monte Carlo para una combinación de fuentes de error donde  $\Delta\gamma = +2$  grados.



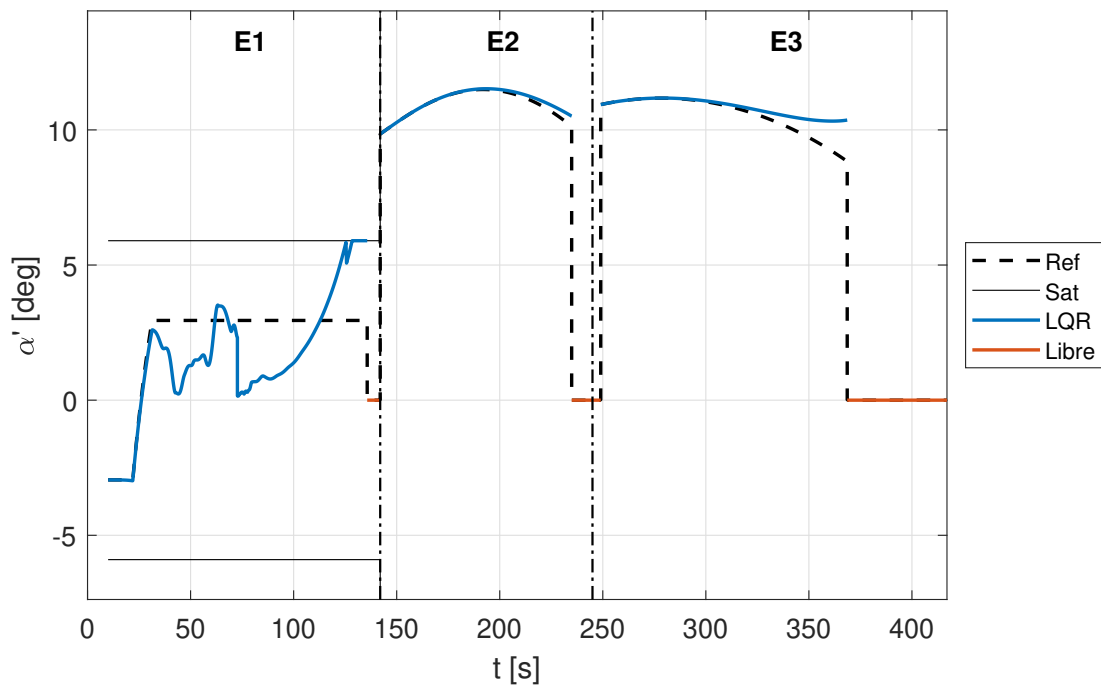
**Figura 8.17** Evolución de los estados del sistema ante un error en la estimación de la masa estructural de la etapa 1 del -10%, una perturbación impulsiva de +1 grado en el ángulo de trayectoria y la presencia de ruido.



**Figura 8.18** Evolución del error absoluto de los estados del sistema ante un error en la estimación de la masa estructural de la etapa 1 del -10%, una perturbación impulsiva de +1 grado en el ángulo de trayectoria y la presencia de ruido.



**Figura 8.19** Evolución del error relativo de los estados del sistema ante un error en la estimación de la masa estructural de la etapa 1 del -10%, una perturbación impulsiva de +1 grado en el ángulo de trayectoria y la presencia de ruido.

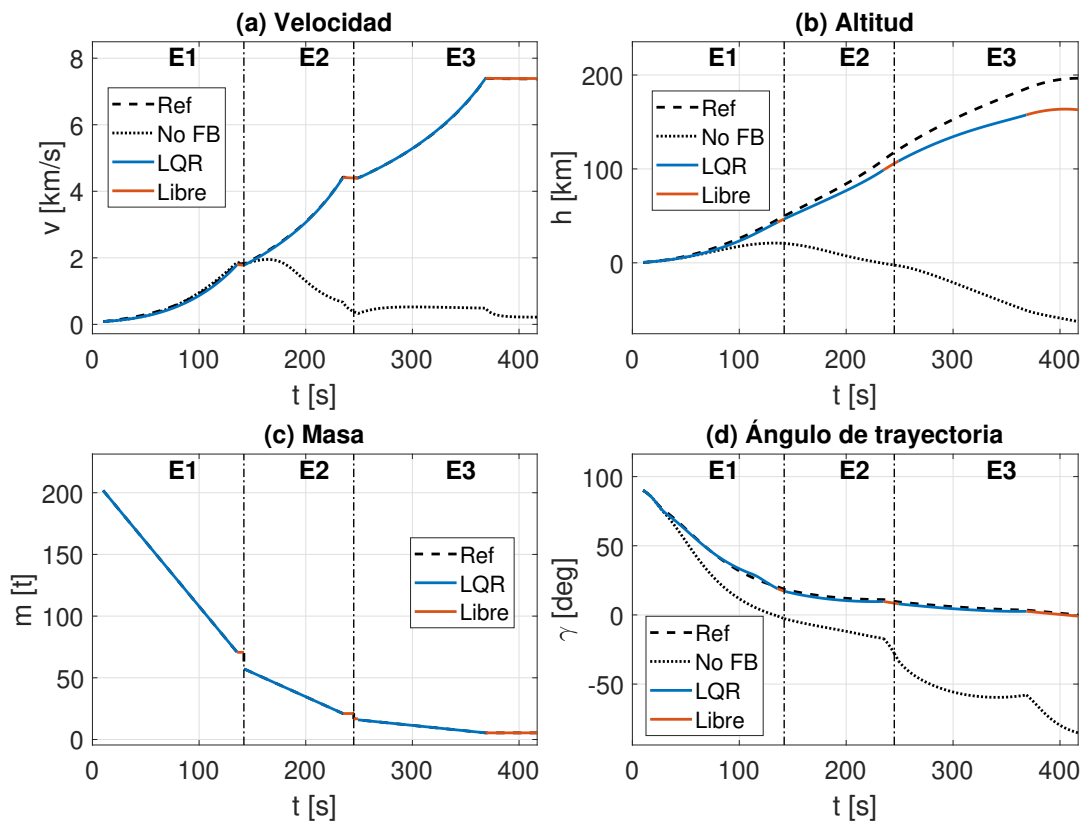


**Figura 8.20** Evolución de la variable de control del sistema ante un error en la estimación de la masa estructural de la etapa 1 del -10%, una perturbación impulsiva de +1 grado en el ángulo de trayectoria y la presencia de ruido.

## 8.5 Respuesta a errores de modelado

A continuación, se estudia detalladamente la situación planteada durante la sintonización (Subapartado 7.1.4), en el que se pone a prueba el sistema de guiado frente a un modelo más realista en el que se emplean unas ecuaciones atmosféricas más complejas y se considera un empuje y un valor de la gravedad variable con la altitud. Por lo tanto, no se incluye ningún análisis estadístico de Monte Carlo, sino que se presenta el caso directamente con la evolución de las variables del sistema.

La Figura 8.21 muestra la variación de los estados con el tiempo. Es evidente que el vehículo, sin un sistema de guiado, está condenado al fracaso de su misión, impactando contra el suelo (b), en este caso, en torno al segundo 374 desde la ignición (coincidiendo con el final de la etapa 2). Esto conduce a dos importantes reflexiones: la primera es la importancia de desarrollar un buen modelo con el fin de minimizar el error asociado a la dinámica no modelada y, la segunda, es la necesidad de diseñar un sistema de control adecuado para poder rechazar la influencia de aquellos términos no contemplados, que siempre existirán en mayor o menor grado.



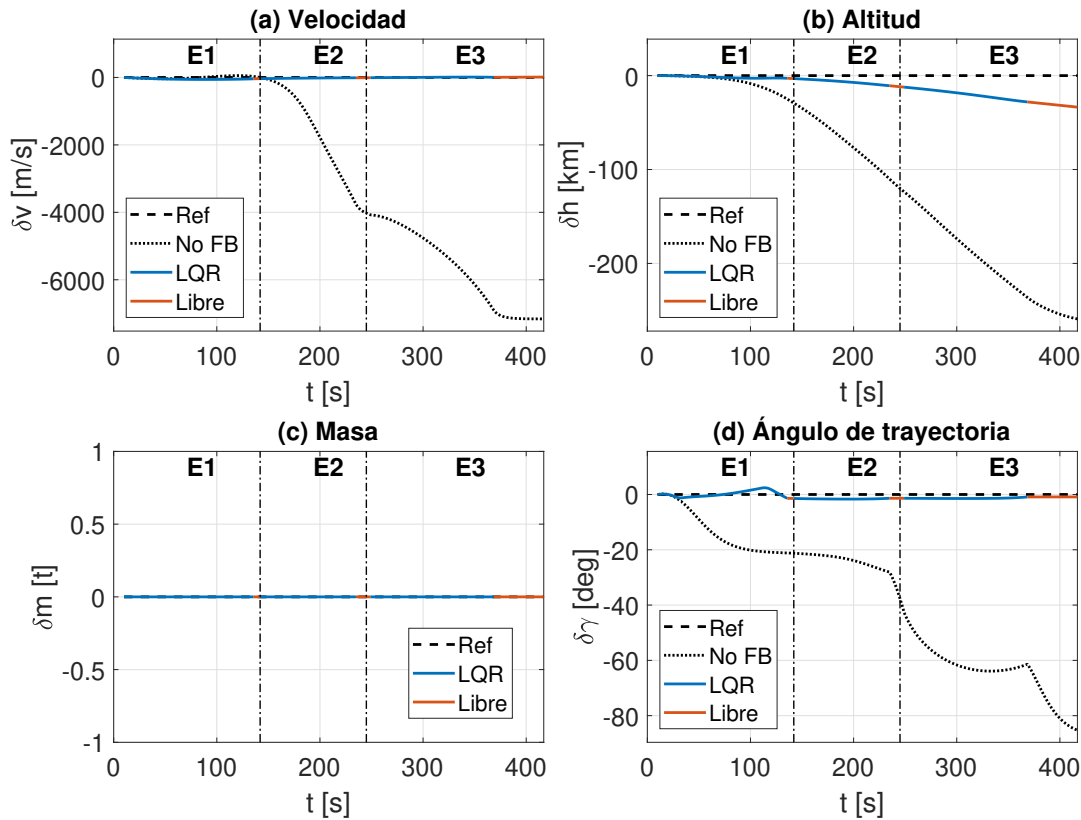
**Figura 8.21** Evolución de los estados del sistema ante errores de modelado.

Por su parte, se puede comprobar cómo el guiado realizado permite estabilizar la trayectoria real cerca de la nominal. Se puede apreciar que, a pesar de que la mayoría de estados se ajustan con gran fidelidad a la referencia, en el caso de la altitud (b) existe un error creciente considerable en comparación con las situaciones planteadas en los apartados anteriores. No obstante, esta discrepancia solo ocasiona un error de la función objetivo del 0.78%, al compensarse con un pequeño incremento de la velocidad (a) final, sin afectar al cumplimiento de la restricción en el ángulo de trayectoria (d), con un error del 0.98%. Es más, como se ha comentado anteriormente, no es de extrema importancia el valor concreto de altitud y velocidad a la que queda el lanzador en el instante final, sino la maximización de la energía mecánica específica, ya que existe una cuarta



etapa cuyo objetivo es realizar la corrección final de estos parámetros para asegurar la adecuada inserción en órbita.

Para distinguir y analizar en mayor detalle la evolución de los errores absolutos y relativos, se incluyen las Figuras 8.22 y 8.23, respectivamente. Nuevamente se comprueba que el mayor desvío tiene lugar con la altitud (b), aunque bien es cierto que su error relativo se mantiene en torno al orden del 20‰.



**Figura 8.22** Evolución del error absoluto de los estados del sistema ante errores de modelado.

En lo referente a la evolución de la variable de control  $\alpha'(t)$ , en la Figura 8.24 se puede observar cómo la saturación limita la acción del controlador la mayor parte del tiempo durante la primera etapa, lo cual suele estar asociado a una peor respuesta, al dejar de existir margen para efectuar las correcciones necesarias.

Por último, se muestra la variación del empuje (Figura 8.25) y de la gravedad (Figura 8.26) con el tiempo, al ser dependiente de la altitud en el modelo mejorado. La línea discontinua refleja los valores de empuje y gravedad constantes para los cuales el sistema de guiado ha sido diseñado. En el caso del empuje, como puede apreciarse, la mayor discrepancia ocurre durante la primera etapa, donde la presencia de la atmósfera es apreciable y tiene un mayor impacto sobre la trayectoria global.

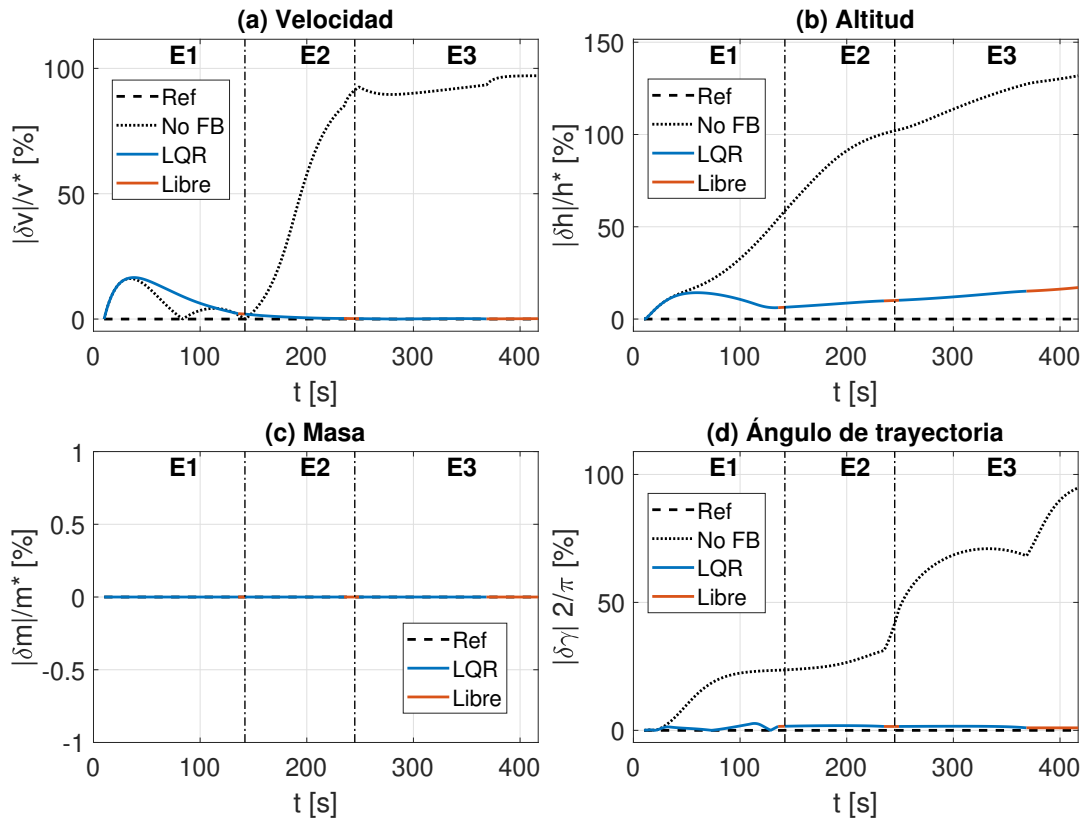


Figura 8.23 Evolución del error relativo de los estados del sistema ante errores de modelado.

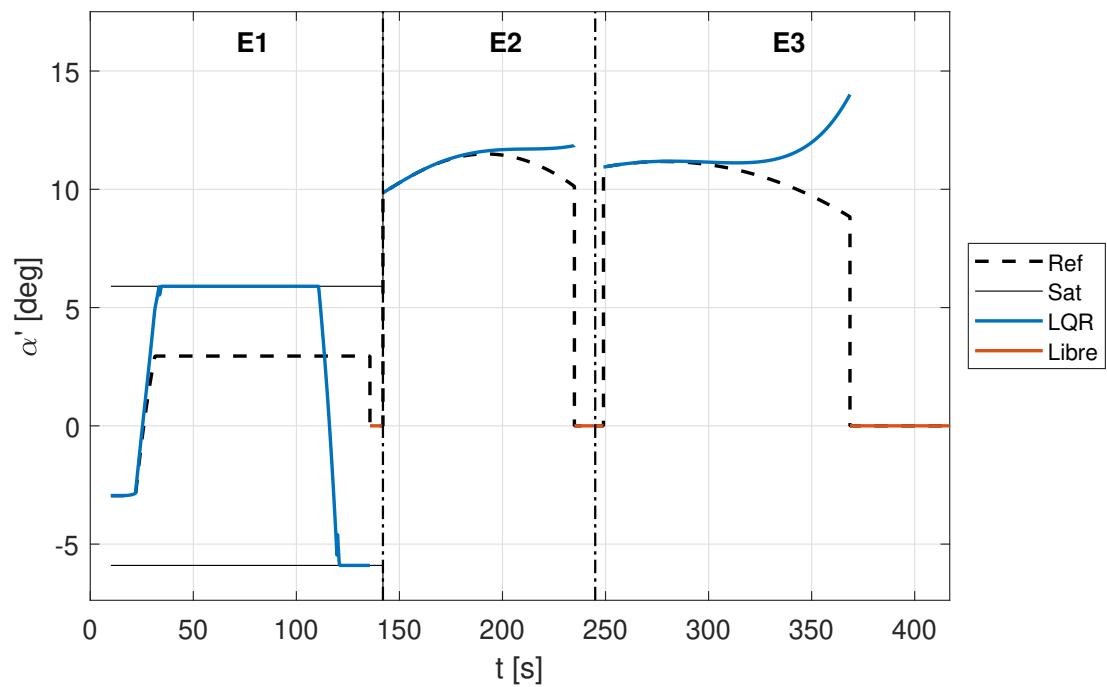


Figura 8.24 Evolución de la variable de control del sistema ante errores de modelado.

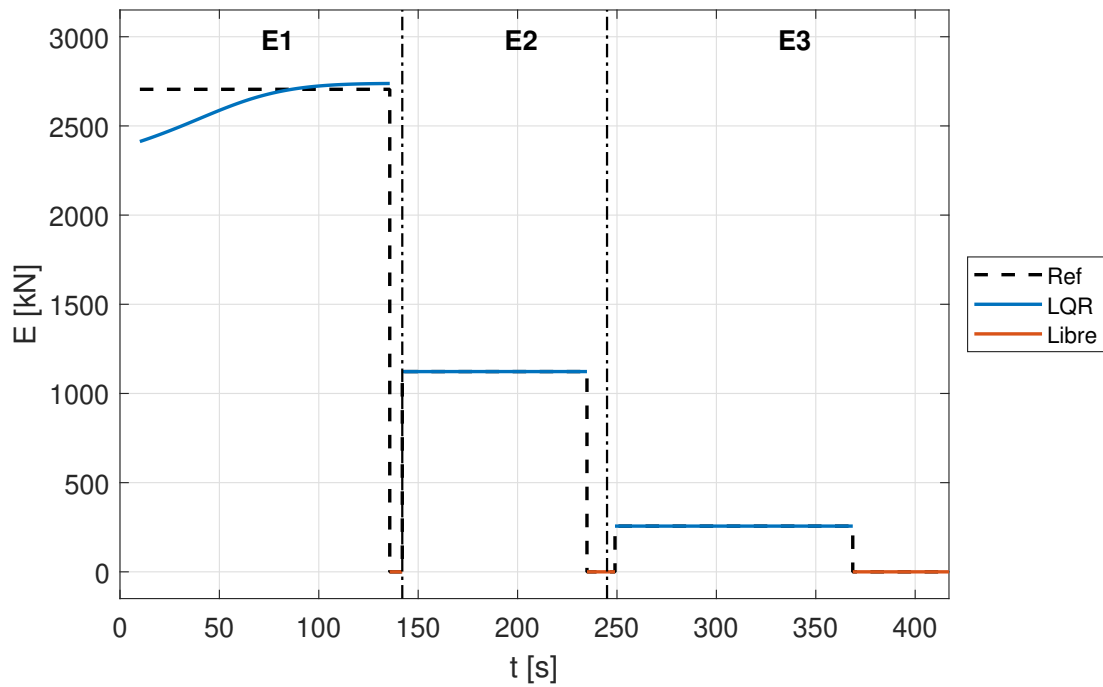


Figura 8.25 Evolución del empuje del vehículo en el modelo complejo.

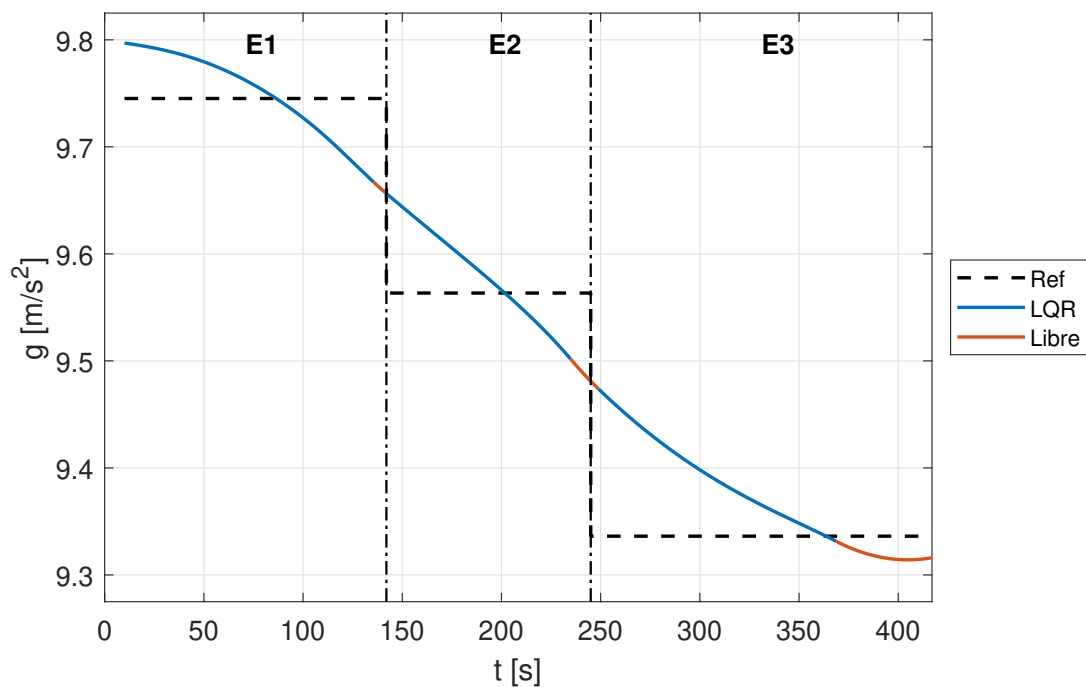


Figura 8.26 Evolución de la gravedad durante la trayectoria del vehículo en el modelo complejo.

## 8.5.1 Posible mejora

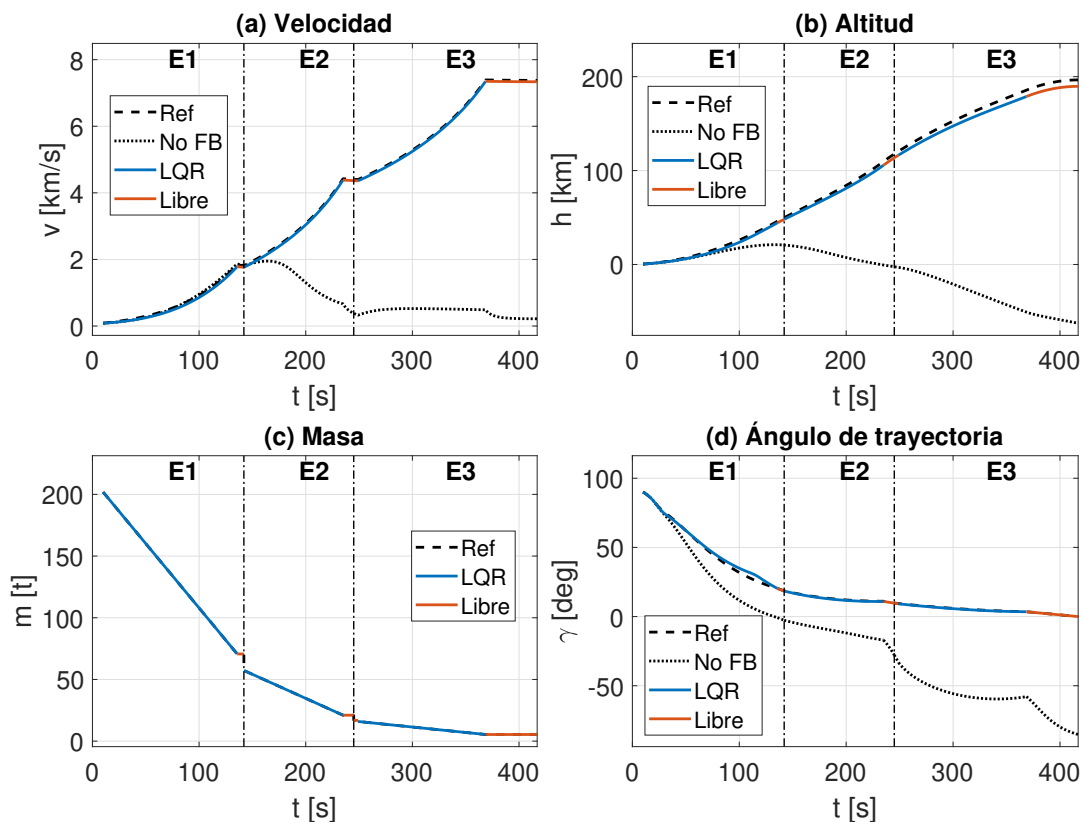
Llegados a este punto se recuerda que, durante la formulación del problema de guiado, los estados han sido normalizados para asegurar que todos tengan una importancia relativa equivalente dentro de la función de control. Una posible mejora a considerar consistiría en ponderar más el estado correspondiente a la altitud, a fin de que se priorizara la minimización de su error. Para comprobar el efecto, se alteran las expresiones (6.23) y (6.24) como:

$$\mathbf{Q}(t) = \text{diag} \left( \left[ \frac{1}{\sqrt{v^*(t)}} \quad \frac{1}{\sqrt{0.5h^*(t)}} \quad 1 \quad \frac{1}{\sqrt{\beta v^*(t)}} \quad \frac{1}{\sqrt{0.5\beta h^*(t)}} \quad \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right] \right) \quad (8.4)$$

$$\mathbf{Q}_{\text{fin}} = \text{diag} \left( \left[ \frac{1}{\sqrt{v^*(t_f)}} \quad \frac{1}{\sqrt{0.5h^*(t_f)}} \quad 1 \quad \frac{1}{\sqrt{\beta v^*(t_f)}} \quad \frac{1}{\sqrt{0.5\beta h^*(t_f)}} \quad \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right] \right) \quad (8.5)$$

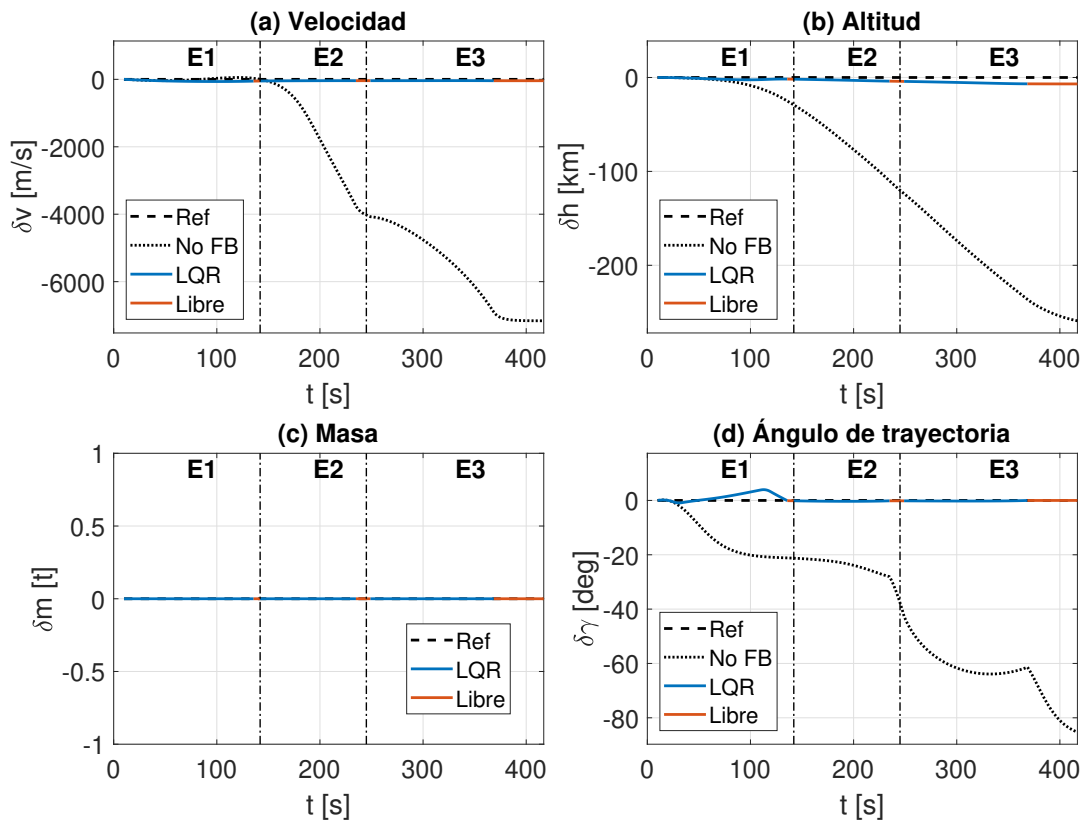
Es decir, se duplica el peso de los términos asociados al estado de la altitud. Esta variación puede resultar excesiva, pero permite ver con facilidad la influencia del ajuste. De hecho, con este cambio los resultados varían notablemente.

En la Figura 8.27 se incluye la evolución de los estados. Se puede observar cómo el seguimiento de la altitud (b) es casi perfecta.



**Figura 8.27** Evolución de los estados del sistema ante errores de modelado (posible mejora).

Representando los errores absolutos y relativos de los estados, se obtienen las gráficas de las Figuras 8.28 y 8.29, respectivamente. En este caso, se puede apreciar la destacable reducción del error en altitud (b) en detrimento del comportamiento en velocidad (a), la cual se ve ligeramente penalizada.



**Figura 8.28** Evolución del error absoluto de los estados del sistema ante errores de modelado (posible mejora).

La saturación del controlador, mostrada en la Figura 8.30, sigue siendo elevada, aunque en las etapas 2 y 3, se ha reducido de forma considerable el esfuerzo de control.

No obstante, a pesar de las mejoras apreciables en este caso, este cambio penaliza el valor de la función objetivo (1.26% de error, frente al 0.78% del caso anterior), por lo que es necesario evaluar correctamente qué es lo que interesa en cada momento: si intentar ceñirnos a la trayectoria óptima calculada inicialmente, lo cual otorga una mayor predictibilidad, o apostar por aquella que, tras la perturbación, nos conduce a un nuevo valor óptimo de energía mecánica específica. Para lograr esto último, plantear un control predictivo sería más adecuado para abandonar la planificación original y buscar el óptimo a cada paso de iteración, el cual irá variando influenciado por el entorno. Esta discusión se plantea para posibles ampliaciones de este trabajo.

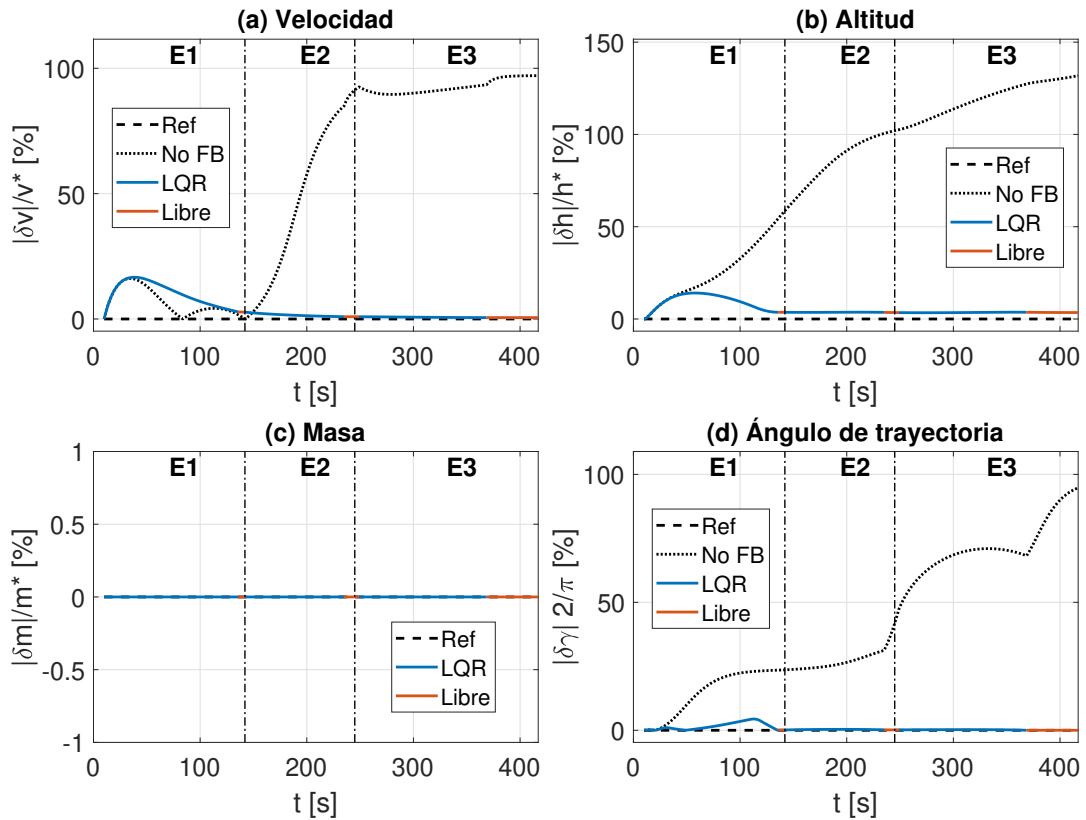


Figura 8.29 Evolución del error relativo de los estados del sistema ante errores de modelado (posible mejora).

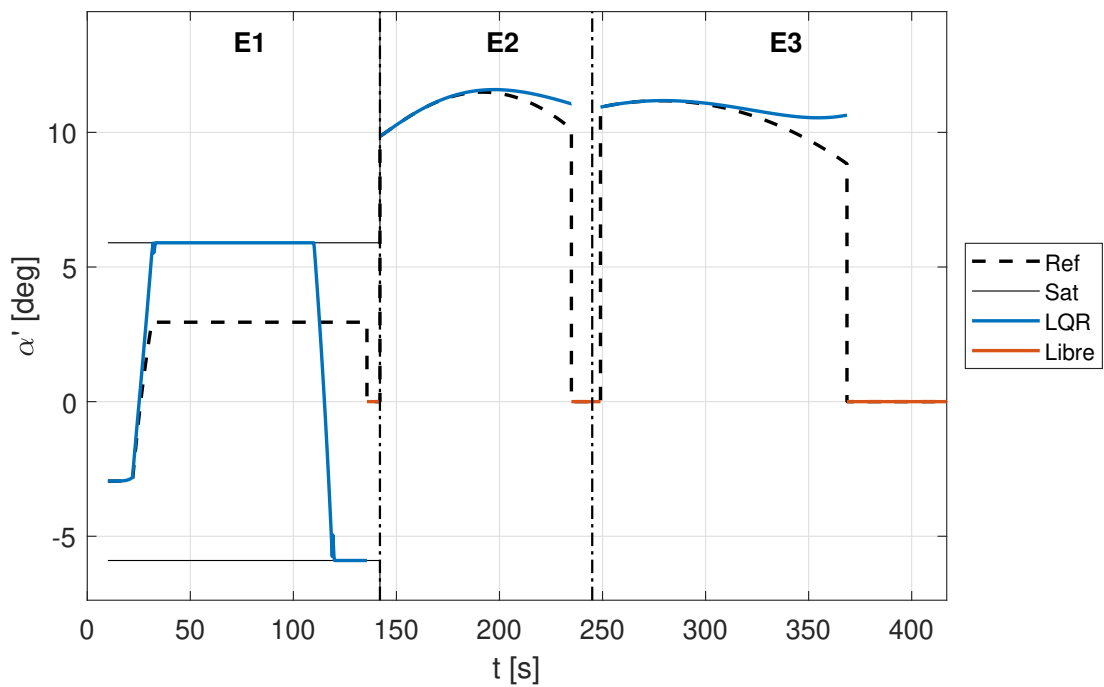


Figura 8.30 Evolución de la variable de control del sistema ante errores de modelado (posible mejora).

## 9 Conclusiones

---

A lo largo de este trabajo se ha pretendido dar una visión global sobre lo que consistiría una planificación y guiados óptimos sujetos a restricciones de una trayectoria de un vehículo lanzador multietapa a órbita, planteando una serie de hipótesis simplificadoras que permiten abarcar el problema planteado dentro del alcance de este proyecto.

Mediante un método indirecto de colocación se resuelve un problema de control óptimo, generando una trayectoria de referencia para las tres primeras etapas del cohete Vega C, maximizando la energía mecánica específica del vehículo en el instante final y obligando al ángulo de trayectoria a ser nulo en dicho instante. Para asegurar la convergencia, se ha empleado un método de continuación, mediante el cual se resuelven problemas cada vez más complejos utilizando la solución anterior como iterante inicial del siguiente problema. Con esto, se obtiene un resultado de la función objetivo en valor absoluto de 29.15 MJ/kg, lo que difiere en un 4.4% de lo estimado por el manual de usuario del cohete. Esta pequeña discrepancia se achaca principalmente a las simplificaciones del modelo y al estado de saturación del prolongado del controlador de la primera etapa que resulta de esta optimización.

Por este motivo, a fin de mejorar las prestaciones de control y el rechazo a perturbaciones, se decide limitar artificialmente el rango de control de la primera etapa en un 50% durante la planificación, a fin de disponer de un margen adicional durante el proceso de guiado. Esto supone una penalización adicional del 0.34% de la energía mecánica específica, reduciendo su valor hasta los 29.05 MJ/kg.

Al mismo tiempo, se desarrolla un sistema de guiado para el vehículo constituido por tres controladores LQR independientes de horizonte finito, uno para cada etapa propulsada, donde el peso de cada estado a controlar se encuentra normalizado en cada instante. Para combatir el posible error generado por una referencia imperfecta, se ven provistos de un término integral y un sistema *anti-windup* para minimizar los problemas derivados de la saturación.

Para ajustar los distintos pesos de cada controlador se lleva a cabo un proceso de sintonización y un análisis de sensibilidad, donde se busca minimizar el error de la función objetivo y el incumplimiento de las restricciones para una serie de casos arquetípicos prefijados a los que se enfrentaría el sistema real: errores en la estimación inicial de los estados, perturbaciones impulsivas, ruido en los sensores y errores de modelado.

Por último, se evalúa el desempeño del sistema completo analizando mediante métodos de Monte Carlo la respuesta del mismo ante un abanico ampliado de casos y parámetros, incluyendo los utilizados durante la sintonización y combinaciones de estos. La inmensa mayoría de los casos contemplados cumplen con los requisitos impuestos, si bien es cierto que existen situaciones en las que se incumplen las restricciones de ángulo de trayectoria nulo. No obstante, para estos casos, se ha comprobado que el grado de incumplimiento no es muy alarmante (desviaciones inferiores a 2.3 grados).

Es relevante hacer mención al caso donde se evalúan los errores de modelado. Aunque se cumple ampliamente con los criterios de optimalidad impuestos, es posible corregir el error en altitud drásticamente, simplemente ponderando más ese estado en el controlador. No obstante, esto debe realizarse con precaución, ya que se puede incurrir en penalizaciones de la energía específica, al ser la velocidad el término que más contribuye a la misma.

## 9.1 Limitaciones y trabajo futuro

Es importante, sin embargo, tomar estos resultados con cautela a la hora de trasladarlos a una situación real debido a las numerosas hipótesis impuestas, por lo que deberían ser consideradas como una valiosa fuente de información cualitativa (más que cuantitativa) para evaluar relaciones y dependencias entre parámetros y las influencias de los distintos términos para orientar los esfuerzos de diseño en uno u otro sentido.

A partir de este momento, estas simplificaciones se pueden ir relajando conforme el modelo se desarrolla, se hace más complejo y proporciona resultados coherentes desde un punto de vista físico e ingenieril, introduciendo nuevos factores, elementos no considerados, técnicas de control más avanzadas o una sintonización más fina de los parámetros de control. El simple hecho de iterar en el problema con los nuevos resultados nos conduce inevitablemente a soluciones más precisas y realistas, debiéndose evaluar en todo momento la relación entre el tiempo de computación y la exactitud requerida para nuestra aplicación.

En particular, resulta evidente que el sistema de referencia de Tierra plana escogido es muy rudimentario y limitante y, por lo tanto, mejorable. Un modelo de Tierra esférica introduce una amplia batería de efectos a considerar como la rotación de la Tierra, los fenómenos de inercia (fuerzas centrífugas y de Coriolis) o nuevas restricciones derivadas de trabajar con un problema tridimensional en lugar de en un plano. También tendría especial relevancia la elección del centro de lanzamiento y sus implicaciones para alcanzar la órbita objetivo. Otro aspecto interesante sería modelar la última etapa de propulsante líquido con posibilidad de reencendido y optimizar adicionalmente los tiempos de quemado, eyección y *coasting* del resto de etapas. En definitiva, incrementar el nivel de detalle de los distintos fenómenos que participan del proceso como el modelo propulsivo, el aerodinámico o la inclusión de la dinámica de la actitud del cohete para no solo depender de un modelo puntual son importantes mejoras a considerar en un futuro desarrollo de este trabajo.

No obstante, el modelo constituye una primera aproximación para poder aplicar un método indirecto para resolver un problema de control óptimo para la planificación de la trayectoria sin que la formulación del Principio del Mínimo resulte excesivamente engorrosa. Esto plantea, además, una nueva vertiente de estudio, consistente la comparación de las virtudes e inconvenientes de aplicar una formulación directa o indirecta a este problema de optimización de trayectorias concreto, así como la comparación de sus resultados y tiempos de computación. En general, el método indirecto nos conducirá a una solución más precisa, pues el resultado final siempre vendrá dado por la integración de las ecuaciones exactas derivadas de las condiciones necesarias de optimalidad, con la contrapartida de que su formulación se complica enormemente al mejorar el modelo. Por otro lado, el enfoque con un método directo no se ve afectado tanto por este inconveniente, al transformar el problema en uno de optimización paramétrica mediante una discretización. Es necesario, precisamente, jugar con el paso de discretización para encontrar un equilibrio entre precisión, estabilidad computacional y tiempo de cálculo.

Desde el punto de vista del control y guiado de la trayectoria, explorar y comparar técnicas de control predictivo o control adaptativo, añadir una nueva capa de control de bajo nivel modelando la dinámica del actuador o considerar una mayor tipología de fuentes de error suponen los próximos pasos lógicos en la evolución del proyecto. Entre los posibles errores clásicos a contemplar se encontraría el conocimiento inexacto de los tiempo de quemado o de la tasa de quemado de las



distintas etapas, así como el efecto del viento tridimensional, ya sea con modelos uniformes, variables en altitud o estocásticos, o una mayor variedad de perturbaciones impulsivas en distintos tramos de la trayectoria. Por último, para un nivel detallado de análisis de las prestaciones del controlador diseñado, se debería estudiar la respuesta del sistema a nivel local, como el tiempo de reacción, la sobreoscilación o el error en régimen permanente.



Apéndice A

**Diagramas de flujo de programas  
desarrollados en MATLAB®**

---

## A.1 Optimización de la trayectoria

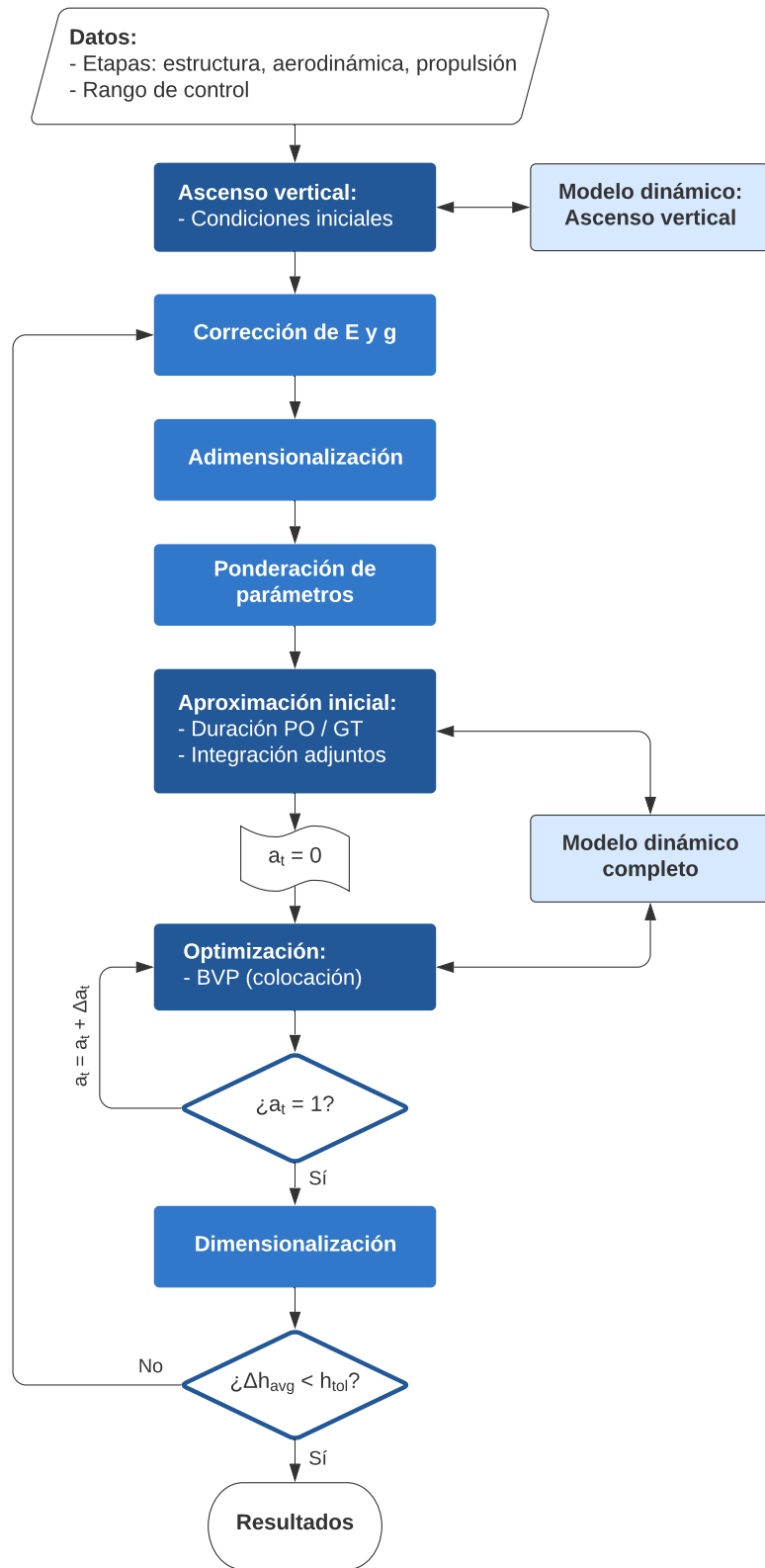
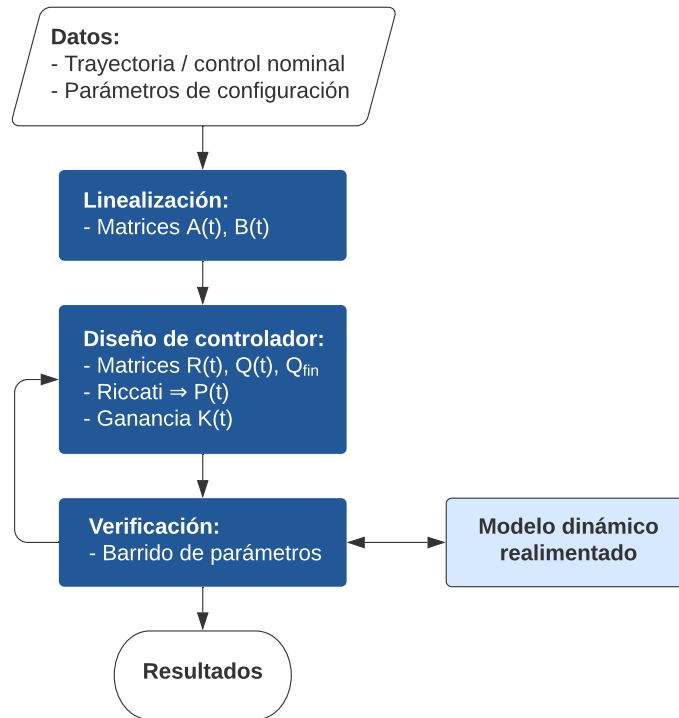


Figura A.1 Diagrama de flujo para la optimización de la trayectoria.

## A.2 Guiado de la trayectoria



**Figura A.2** Diagrama de flujo para el sistema de guiado.



**Apéndice B**

# **Resultados de las simulaciones para la sintonización del controlador**

---

**Tabla B.1** Combinaciones de parámetros óptimos para rechazar variaciones en las condiciones iniciales.

$L_1$ [%]	$\beta$	$\mathbf{R}_1$ ( $\cdot 10^6$ ) [-]	$\mathbf{R}_2$ ( $\cdot 10^9$ ) [-]	$\mathbf{R}_3$ ( $\cdot 10^9$ ) [-]	$e_\varepsilon$ [%]	$e_{\gamma_f}$ [%]
50	10	75.25	25.75	25.75	0.218	0.902
50	10	100	25.75	25.75	0.223	0.87
60	10	25.75	25.75	25.75	0.235	0.886
60	10	50.5	50.5	25.75	0.236	0.986
50	257.5	75.25	1	100	0.239	0.7

**Tabla B.2** Combinaciones de parámetros óptimos para rechazar ráfagas.

$L_1$ [%]	$\beta$	$\mathbf{R}_1$ ( $\cdot 10^6$ ) [-]	$\mathbf{R}_2$ ( $\cdot 10^9$ ) [-]	$\mathbf{R}_3$ ( $\cdot 10^9$ ) [-]	$e_\varepsilon$ [%]	$e_{\gamma_f}$ [%]
90	1000	75.25	100	75.25	-0.374	0.995
90	1000	100	100	100	-0.372	0.963
90	752.5	100	100	100	-0.371	0.973
90	1000	75.25	75.25	75.25	-0.37	0.987
90	1000	100	75.25	100	-0.368	0.955

**Tabla B.3** Combinaciones de parámetros óptimos para mejor tolerancia a ruido.

$L_1$ [%]	$\beta$	$\mathbf{R}_1$ ( $\cdot 10^6$ ) [-]	$\mathbf{R}_2$ ( $\cdot 10^9$ ) [-]	$\mathbf{R}_3$ ( $\cdot 10^9$ ) [-]	$e_\varepsilon$ [%]	$e_{\gamma_f}$ [%]
90	1000	25.75	25.75	75.25	-0.365	0.915
70	505	1	1	75.25	-0.362	0.998
90	752.5	25.75	75.25	100	-0.355	0.925
90	1000	25.75	75.25	100	-0.333	0.844
90	505	25.75	50.5	100	-0.323	0.852

**Tabla B.4** Combinaciones de parámetros óptimos para hacer frente a la dinámica no modelada.

$L_1$ [%]	$\beta$	$\mathbf{R}_1$ ( $\cdot 10^6$ ) [-]	$\mathbf{R}_2$ ( $\cdot 10^9$ ) [-]	$\mathbf{R}_3$ ( $\cdot 10^9$ ) [-]	$e_\varepsilon$ [%]	$e_{\gamma_f}$ [%]
50	257.5	25.75	25.75	75.25	0.81	0.903
50	257.5	25.75	100	50.5	0.916	0.845
50	257.5	25.75	75.25	50.5	0.924	0.818
50	257.5	25.75	50.5	50.5	0.941	0.765
50	257.5	25.75	25.75	50.5	0.993	0.616



# Índice de Figuras

---

1.1	Lanzamientos espaciales anuales. Fuentes (editada): [2, 3]	1
1.2	Causas de lanzamientos fallidos entre los años 2 000 y 2 014. Datos: [21]	2
2.1	Vega C. Fuente (editada): [27]	5
2.2	Evolución temporal típica del empuje de un motor cohete de propulsante sólido en vacío. Fuente: [28]	8
2.3	Esquema de cálculo de la altitud media	10
3.1	Esquema de fuerzas del modelo propuesto	13
3.2	Comparativa del modelo atmosférico propuesto por la NASA y el modelo exponencial	16
5.1	Evolución de los estados del sistema durante el ascenso vertical (tramo 0)	30
5.2	Evolución de variables adicionales del sistema durante el ascenso vertical (tramo 0)	30
5.3	Evolución de los estados de la aproximación inicial	32
5.4	Evolución de variables adicionales de la aproximación inicial	33
5.5	Evolución del control de la aproximación inicial	33
5.6	Evolución de los adjuntos de la aproximación inicial	34
5.7	Evolución de los estados del problema monoetapa	35
5.8	Evolución de variables adicionales del problema monoetapa	36
5.9	Evolución del control del problema monoetapa	36
5.10	Evolución del Hamiltoniano del problema monoetapa	37
5.11	Evolución de los adjuntos del problema monoetapa	37
5.12	Evolución de los estados del problema multietapa	38
5.13	Evolución de variables adicionales del problema multietapa	39
5.14	Evolución del control del problema multietapa	40
5.15	Evolución del Hamiltoniano del problema multietapa	41
5.16	Evolución de los adjuntos del problema multietapa	41
5.17	Análisis de sensibilidad de la función objetivo ante la limitación del rango de control	42
6.1	Esquema de control del sistema realimentado	44
7.1	Ejemplo de ruido inyectado a la medida de cada estado	51

7.2	Desempeño del controlador óptimo sintonizado para rechazar las perturbaciones de las situaciones (a), (b), (c) y (d) y su respuesta aplicada al resto de casos	52
7.3	Análisis de sensibilidad respecto a $R_1$	54
7.4	Análisis de sensibilidad respecto a $R_2$	55
7.5	Análisis de sensibilidad respecto a $R_3$	55
7.6	Análisis de sensibilidad respecto a $\beta$	56
8.1	Análisis de Monte Carlo para errores en la estimación inicial de la masa estructural de cada etapa	59
8.2	Evolución de los estados del sistema con error de +5% en la estimación inicial de la masa estructural de la etapa 1	60
8.3	Evolución del error absoluto de los estados del sistema con error de +5% en la estimación inicial de la masa estructural de la etapa 1	61
8.4	Evolución del error relativo de los estados del sistema con error de +5% en la estimación inicial de la masa estructural de la etapa 1	62
8.5	Evolución de la variable de control del sistema con error de +5% en la estimación inicial de la masa estructural de la etapa 1	62
8.6	Análisis de Monte Carlo para errores debidos a perturbaciones impulsivas	63
8.7	Evolución de los estados del sistema ante una perturbación impulsiva de -1 grado en el ángulo de trayectoria	64
8.8	Evolución del error absoluto de los estados del sistema ante una perturbación impulsiva de -1 grado en el ángulo de trayectoria	65
8.9	Evolución del error relativo de los estados del sistema ante una perturbación impulsiva de -1 grado en el ángulo de trayectoria	66
8.10	Evolución de la variable de control del sistema ante una perturbación impulsiva de -1 grado en el ángulo de trayectoria	66
8.11	Evolución de los estados del sistema ante la presencia de ruido en los sensores	68
8.12	Evolución del error absoluto de los estados del sistema ante la presencia de ruido en los sensores	69
8.13	Evolución del error relativo de los estados del sistema ante la presencia de ruido en los sensores	70
8.14	Evolución de la variable de control del sistema ante la presencia de ruido en los sensores	70
8.15	Análisis de Monte Carlo para una combinación de fuentes de error donde $\Delta\gamma = -2$ grados	72
8.16	Análisis de Monte Carlo para una combinación de fuentes de error donde $\Delta\gamma = +2$ grados	73
8.17	Evolución de los estados del sistema ante un error en la estimación de la masa estructural de la etapa 1 del -10%, una perturbación impulsiva de +1 grado en el ángulo de trayectoria y la presencia de ruido	74
8.18	Evolución del error absoluto de los estados del sistema ante un error en la estimación de la masa estructural de la etapa 1 del -10%, una perturbación impulsiva de +1 grado en el ángulo de trayectoria y la presencia de ruido	75
8.19	Evolución del error relativo de los estados del sistema ante un error en la estimación de la masa estructural de la etapa 1 del -10%, una perturbación impulsiva de +1 grado en el ángulo de trayectoria y la presencia de ruido	76
8.20	Evolución de la variable de control del sistema ante un error en la estimación de la masa estructural de la etapa 1 del -10%, una perturbación impulsiva de +1 grado en el ángulo de trayectoria y la presencia de ruido	77

---

8.21	Evolución de los estados del sistema ante errores de modelado	78
8.22	Evolución del error absoluto de los estados del sistema ante errores de modelado	79
8.23	Evolución del error relativo de los estados del sistema ante errores de modelado	80
8.24	Evolución de la variable de control del sistema ante errores de modelado	80
8.25	Evolución del empuje del vehículo en el modelo complejo	81
8.26	Evolución de la gravedad durante la trayectoria del vehículo en el modelo complejo	81
8.27	Evolución de los estados del sistema ante errores de modelado (posible mejora)	82
8.28	Evolución del error absoluto de los estados del sistema ante errores de modelado (posible mejora)	83
8.29	Evolución del error relativo de los estados del sistema ante errores de modelado (posible mejora)	84
8.30	Evolución de la variable de control del sistema ante errores de modelado (posible mejora)	84
A.1	Diagrama de flujo para la optimización de la trayectoria	90
A.2	Diagrama de flujo para el sistema de guiado	91



# Índice de Tablas

---

2.1	Características de la primera etapa del Vega C	6
2.2	Características de la segunda etapa del Vega C	6
2.3	Características de la tercera etapa del Vega C	7
2.4	Características de la cuarta etapa del Vega C	7
2.5	Características del fairing del Vega C	7
2.6	Características de la carga de pago del Vega C	7
2.7	Empujes medios en vacío por etapa	9
2.8	Empujes medios a nivel del mar por etapa	9
2.9	Aproximación de altitudes y empujes medios operacionales por etapa	10
2.10	Parámetros del cohete dependientes de cada tramo	11
3.1	Aproximación de altitudes y valores de gravedad medios por etapa	14
3.2	Valores de referencia para la adimensionalización	18
3.3	Parámetros adimensionales dependientes de cada tramo	19
5.1	Condiciones iniciales del tramo de ascenso vertical	29
5.2	Condiciones iniciales del problema de optimización	31
5.3	Condiciones iniciales adimensionales del problema de optimización	31
5.4	Altitudes, empujes medios operacionales y valores de gravedad por etapa	40
7.1	Desviaciones típicas del ruido presente en las medidas de los estados	51
7.2	Parámetros óptimos tras la sintonización preliminar	53
7.3	Parámetros óptimos tras el análisis de sensibilidad	55
8.1	Resultados del análisis de Monte Carlo para errores en la estimación inicial de la masa estructural de cada etapa	58
8.2	Resultados del análisis de Monte Carlo para errores debidos a perturbaciones impulsivas	63
8.3	Resultados del análisis de Monte Carlo para tolerancia al ruido	67
8.4	Parámetros alternativos no tolerantes al ruido	67
8.5	Resultados del análisis de Monte Carlo para combinaciones de fuentes de error	71
B.1	Combinaciones de parámetros óptimos para rechazar variaciones en las condiciones iniciales	94
B.2	Combinaciones de parámetros óptimos para rechazar ráfagas	94
B.3	Combinaciones de parámetros óptimos para mejor tolerancia a ruido	94

B.4	Combinaciones de parámetros óptimos para hacer frente a la dinámica no modelada	94
-----	---	----

# Bibliografía

---

- [1] “Global Space Launch Services Market to Reach \$30.01 Billion by 2026 at 17.2% CAGR: AMR: Surge in investment in space exploration activities by governments, rise in demand for commercial non-geostationary satellite orbit space launches, and increase in space tourism are expected to propel the growth of the global space launch service market,” Feb 07 2020, nombre - Virgin Galactic; Maxar Technologies Inc; Copyright - GlobeNewswire, Inc; Última actualización - 2020-12-26. [Online]. Available: <https://www.proquest.com/wire-feeds/global-space-launch-services-market-reach-30-01/docview/2351948594/se-2?accountid=14744>
- [2] C. A. Security, “Space Environment: Total Launches by Country,” 2020. [Online]. Available: <https://aerospace.csis.org/data/space-environment-total-launches-by-country/>
- [3] S. L. Report, “Space Launch Report: Orbital Launch Summary by Year,” 2020. [Online]. Available: <https://www.spacelaunchreport.com/logyear.html>
- [4] Smithsonian National Air and Space Museum, “End of an Era.” [Online]. Available: <https://airandspace.si.edu/exhibitions/apollo-to-the-moon/online/later-missions/end-of-era.cfm>
- [5] BBC News, “1989: Malta summit ends Cold War,” 1989. [Online]. Available: [http://news.bbc.co.uk/onthisday/hi/dates/stories/december/3/newsid\\_4119000/4119950.stm](http://news.bbc.co.uk/onthisday/hi/dates/stories/december/3/newsid_4119000/4119950.stm)
- [6] T. Harrison, Z. Cooper, K. Johnson, and T. G. Roberts, “Escalation & Deterrence in the Second Space Age,” CSIS: Center for Strategic & International Studies, Tech. Rep. October, 2017.
- [7] U.S. Government, “GPS: The Global Positioning System.” [Online]. Available: <https://www.gps.gov/>
- [8] IAC and Roscosmos, “About GLONASS.” [Online]. Available: [https://www.glonass-iac.ru/en/about\\_glonass/](https://www.glonass-iac.ru/en/about_glonass/)
- [9] EUSPA and ESA, “What is Galileo?” 2021. [Online]. Available: <https://www.gsc-europa.eu/galileo/what-is-galileo>
- [10] BeiDou, “BeiDou Navigation Satellite System.” [Online]. Available: <http://en.beidou.gov.cn/>
- [11] SpaceX, “Starlink.” [Online]. Available: <https://www.starlink.com/>
- [12] OneWeb, “OneWeb.” [Online]. Available: <https://oneweb.net/>
- [13] ESA, “Observing the Earth.” [Online]. Available: [https://www.esa.int/Applications/Observing\\_the\\_Earth](https://www.esa.int/Applications/Observing_the_Earth)

- [14] NASA, “NASA’s Lunar Exploration Program Overview,” *Nasa*, no. September, p. 74, 2020. [Online]. Available: [https://www.nasa.gov/sites/default/files/atoms/files/artemis\\_plan-20200921.pdf](https://www.nasa.gov/sites/default/files/atoms/files/artemis_plan-20200921.pdf)
- [15] SpaceX, “SpaceX.” [Online]. Available: <https://www.spacex.com/>
- [16] Rocket Lab, “Rocket Lab.” [Online]. Available: <https://www.rocketlabusa.com/>
- [17] Virgin Orbit, “Virgin Orbit - Premier Satellite Launch Service.” [Online]. Available: <https://virginorbit.com/>
- [18] PLD Space, “PLD Space.” [Online]. Available: <https://www.pldspace.com/es/>
- [19] Virgin Galactic, “Virgin Galactic.” [Online]. Available: <https://www.virgingalactic.com/>
- [20] Blue Origin, “Blue Origin.” [Online]. Available: <https://www.blueorigin.com/>
- [21] A. G. Karacalioglu and A. Bukley, “Examining the Underlying Causes of Space Launch Failures,” in *Space Safety is No Accident*. Cham: Springer International Publishing, 2015, no. 1, pp. 179–188. [Online]. Available: [http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-15982-9\\_21](http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-15982-9_21)
- [22] I. González, “El cohete con el satélite español Ingenio se desvía y fracasa a los 8 minutos: qué falló y qué supone,” oct 2020. [Online]. Available: [https://www.elespanol.com/omicron/tecnologia/20201117/satelite-espanol-ingenio-fallado-lanzamiento/536696573\\_0.html](https://www.elespanol.com/omicron/tecnologia/20201117/satelite-espanol-ingenio-fallado-lanzamiento/536696573_0.html)
- [23] ESA, “Vega-C.” [Online]. Available: [https://www.esa.int/Enabling\\_Support/Space\\_Transportation/Launch\\_vehicles/Vega-C](https://www.esa.int/Enabling_Support/Space_Transportation/Launch_vehicles/Vega-C)
- [24] AVIO, “Vega C Launcher.” [Online]. Available: <https://www.avio.com/vega-c>
- [25] ESA, “Space Rider overview.” [Online]. Available: [https://www.esa.int/Enabling\\_Support/Space\\_Transportation/Space\\_Rider\\_overview](https://www.esa.int/Enabling_Support/Space_Transportation/Space_Rider_overview)
- [26] —, “ESA purchases world-first debris removal mission from start-up,” 2020. [Online]. Available: [https://www.esa.int/Safety\\_Security/ESA\\_purchases\\_world-first\\_debris\\_removal\\_mission\\_from\\_start-up](https://www.esa.int/Safety_Security/ESA_purchases_world-first_debris_removal_mission_from_start-up)
- [27] Arianespace, “Vega C - User’s Manual,” no. 0, 2018. [Online]. Available: <http://www.avio.com/en/vega/vega-c/>
- [28] E. Dumont, “Variations of Solid Rocket Motor Preliminary Design for Small TSTO launcher,” no. May, pp. 7–10, 2012.
- [29] C. O. Butler and A. Leitner, “The effect of atmospheric pressure on rocket thrust-Part I,” *The Physics Teacher*, vol. 20, no. 6, pp. 410–412, 1982.
- [30] NASA, “Rocket Thrust Equation,” 2021. [Online]. Available: <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/rocket/rktthsum.html>
- [31] —, “Specific Impulse,” 2021. [Online]. Available: <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/rocket/specimp.html>
- [32] C. G. Georgantopoulou and G. A. Georgantopoulos, “International Standard Atmosphere, in BS,” *Fluid Mechanics in Channel, Pipe and Aerodynamic Design Geometries 2*, pp. 251–258, 2018.



- [33] NASA, “Earth Atmosphere Model - Metric Units,” 2021. [Online]. Available: <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/atmosmet.html>
- [34] J. C. McDowell, “The edge of space: Revisiting the Karman Line,” *Acta Astronautica*, vol. 151, pp. 668–677, 2018.
- [35] M. A. Patterson and A. V. Rao, “GPOPS-II,” *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 41, no. 1, pp. 1–37, oct 2014. [Online]. Available: <https://dl.acm.org/doi/10.1145/2558904>
- [36] J. T. Betts, “Survey of numerical methods for trajectory optimization,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 21, no. 2, pp. 193–207, 1998.
- [37] L. Beiner and S. W. Paris, “Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 10, no. 4, pp. 338–342, 1987.
- [38] G. Colasurdo, D. Pastrone, and L. Casalino, “Optimization of rocket ascent trajectories using an indirect procedure,” *1995 Guidance, Navigation, and Control Conference*, pp. 1375–1383, 1995.
- [39] J. T. Betts, “The Optimal Control Problem - Direct versus Indirect Methods,” in *Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming*, 2nd ed. SIAM, 2010, pp. 127–129.
- [40] F. Biral, E. Bertolazzi, and P. Bosetti, “Notes on Numerical Methods for Solving Optimal Control Problems,” *IEEJ Journal of Industry Applications*, vol. 5, no. 2, pp. 154–166, 2016. [Online]. Available: [https://www.jstage.jst.go.jp/article/ieejia/5/2/5\\_154/\\_article](https://www.jstage.jst.go.jp/article/ieejia/5/2/5_154/_article)
- [41] B. Benedikter, A. Zavoli, and G. Colasurdo, “A Convex Approach to Rocket Ascent Trajectory Optimization,” no. March 2020, p. 184, 2019.
- [42] Y. Li, Y. Guan, C. Wei, and R. Hu, “Optimal control of ascent trajectory for launch vehicles: A convex approach,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 186 491–186 498, 2019.
- [43] MathWorks, “Solve boundary value problem - fifth-order method - MATLAB bvp5c,” 2021. [Online]. Available: <https://es.mathworks.com/help/matlab/ref/bvp5c.html>
- [44] J. Kierzenka and L. F. Shampine, “A BVP solver that controls residual and error,” *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics*, vol. 3, no. 1-2, pp. 27–41, 2008.
- [45] V. V. Dikoussar, “Continuation Methods in Boundary Value Problems,” in *Computational Optimal Control*. Basel: Birkhäuser Basel, 1994, pp. 65–70. [Online]. Available: [http://link.springer.com/10.1007/978-3-0348-8497-6\\_5](http://link.springer.com/10.1007/978-3-0348-8497-6_5)
- [46] P. E. Caines, F. H. Clarke, X. Liu, and R. B. Vinter, “A maximum principle for hybrid optimal control problems with pathwise state constraints,” *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4821–4825, 2006.
- [47] F. Topputo and C. Zhang, “Survey of direct transcription for low-thrust space trajectory optimization with applications,” *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2014, 2014.
- [48] W. T. Thomson, “Performance and Optimization,” in *Introduction to Space Dynamics*. Dover Books, 1986, ch. 8, pp. 248–260.
- [49] Y. Langevin, “Mission Analysis Issues for Planetary Exploration Missions,” in *Treatise on Geophysics: Second Edition*. Elsevier B.V., 2015, vol. 10, pp. 695–717. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-444-53802-4.00180-9>

- [50] M. Morari, C. E. Garcia, and D. M. Prett, “Model predictive control: Theory and practice,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 21, no. 4, pp. 1–12, 1988.
- [51] A. Grancharova and T. A. Johansen, “Survey of explicit approaches to constrained optimal control,” *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 3355, pp. 47–97, 2005.
- [52] F. Gavilán, “Sistemas de Control y Guiado para Vehículos Aéreos No Tripulados: Diseño de Algoritmos y Sistemas Embarcados,” Ph.D. dissertation, Universidad de Sevilla, 2012.
- [53] E. Frazzoli, “Topic 23: Anti-windup,” pp. 1–13, 2010, Feedback Control Systems, Massachusetts Institute of Technology. [Online]. Available: [https://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-30-feedback-control-systems-fall-2010/lecture-notes/MIT16\\_30F10\\_lec23.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-30-feedback-control-systems-fall-2010/lecture-notes/MIT16_30F10_lec23.pdf)
- [54] U.S.A. Department Of Defense, “Global Positioning System Standard Positioning Service,” *www.gps.gov*, no. September, p. 68, 2008. [Online]. Available: <http://www.gps.gov/technical/ps/2008-SPS-performance-standard.pdf>
- [55] Z. Dai, “On GPS Based Attitude Determination,” Ph.D. dissertation, University of Siegen, 2013. [Online]. Available: <https://d-nb.info/1034425951/34>
- [56] J. C. López Agüí, “Guía básica para la simulación de Monte Carlo,” *Guía básica para la simulación de Monte Carlo*, pp. 1 – 28, 2008.
- [57] C. Bayer, H. Hoel, E. von Schwerin, and R. Tempone, “On NonAsymptotic Optimal Stopping Criteria in Monte Carlo Simulations,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 36, no. 2, pp. A869–A885, jan 2014. [Online]. Available: <http://epubs.siam.org/doi/10.1137/130911433>