

Comportamiento de Gotas que Botan en una Superficie Líquida Oscilante

RAÚL FERNÁNDEZ MATEO

TUTOR: ALBERTO PÉREZ IZQUIERDO
CURSO 2018/2019



GRADO EN FÍSICA
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Índice

1. Introducción	5
2. Gotas sobre la superficie de un fluido	6
3. Ondas de Faraday	7
3.1. Sistema hidrodinámico	7
3.2. Desarrollo en un problema de autovalores. Ecuación de Mathieu	10
3.3. Análisis de estabilidad de la ecuación de Mathieu	12
3.4. Verificación experimental. Efecto de la viscosidad	15
4. Asociación Onda-Gota	20
4.1. Botes verticales	21
4.2. Movimiento horizontal: gotas errantes	21
4.3. Similitudes con comportamientos microscópicos	22
5. Descripción del movimiento horizontal	25
5.1. Primer modelo	26
5.2. Segundo modelo	29
5.3. Análisis numérico de los modelos	32
5.4. Verificación experimental con la literatura	35
6. Conclusiones y trabajos futuros	37
7. Referencias	39
A. Transformación de un sumatorio en una integral	41
B. Análisis de estabilidad de una ecuación diferencial con retardo	42

1. Introducción

En este trabajo se pretende un tratamiento completo del fenómeno conocido como *Gotas Errantes* (*Walking Droplets*, en inglés), por el cual gotas fluidas son mantenidas sobre una superficie del mismo fluido sin coalescer con él. Esto se consigue mediante sucesivos botes de la gota sobre la superficie forzados por la puesta en oscilación de la masa fluida. Bajo ciertas condiciones detalladas a lo largo del documento, dicho forzado conduce finalmente al inicio del desplazamiento horizontal de la gota sobre la superficie, que se suman al rebote vertical.

Se trata por tanto de un sistema en el cual un ente particular, una gota, crea y lleva consigo un frente de ondas en la superficie del fluido. Esta asociación ha llevado a varios autores (véase por ejemplo Bush, 2018) a intentar reproducir fenómenos cuánticos donde se muestra la dualidad onda-partícula de forma macroscópica, tales como el efecto túnel (Nachbin *et al.*, 2017) o el experimento de la doble rendija (Pucci *et al.*, 2018).

Para abordar este problema, se tratará de comenzar por las cuestiones más básicas y cualitativas que plantean este tipo de sistemas, y a partir de ellas adentrarse en los problemas matemáticos que justifican dicho comportamiento. Así, se estudiará en primer lugar y de forma cualitativa cómo es posible mantener a una gota de forma estable sobre una superficie fluida de forma indefinida (Walker, 1978). Esto llevará a la introducción del problema matemático principal de estudio, las *Ondas de Faraday* [Benjamin & Ursell (1954); Kumar (1996)]. Como paso intermedio antes de continuar con la descripción teórica y a modo de reforzar las ideas introducidas, se realizará una verificación experimental. Para ello, se pondrá en marcha un pequeño montaje experimental que permita reproducir las condiciones bajo las cuales se producen dichas inestabilidades, que finalmente lleva a la obtención de gotas rebotando en la superficie durante tiempos largos, del orden de minutos, antes de coalescer con la masa fluida.

El estudio teórico de las ondas de Faraday dará lugar a la posibilidad de encontrar las condiciones bajo las cuales comienza finalmente el desplazamiento horizontal, el cual se estudiará mediante dos modelos que son capaces de describir este movimiento. El primero de ellos, de forma más simple, permitirá dar una idea cualitativa del proceso por el que comienza y se mantiene en el tiempo este desplazamiento (Protière *et al.*, 2006). A partir de él, se desarrollará un modelo más completo (Oza *et al.*, 2013) que permitirá finalmente explicar los fenómenos más relevantes que se observan en el laboratorio.

Estos dos modelos serán comparados entre sí y con los datos experimentales encontrados en la literatura [Protière *et al.* (2006); Eddi *et al.* (2011); Moláček & Bush (2013b)] mediante simulación numérica, para lo cual se hará uso principalmente del software MATLAB.

2. Gotas sobre la superficie de un fluido

El primer paso en el planteamiento de este problema es entender cómo es posible que gotas de un determinado fluido puedan permanecer sobre la superficie del mismo fluido sin coalescer con él.

Si se imagina que se deja caer a dicha gota desde una cierta altura sobre la superficie del fluido, al chocar ésta sobre la superficie dejará atrapada entre ella y la masa fluida una pequeña lámina de aire de un espesor de entorno a 100 micras (Walker, 1978), cuya presión es lo suficientemente elevada como para hundir la superficie del fluido y deformar la parte inferior de la gota, como puede observarse en la Figura 1.

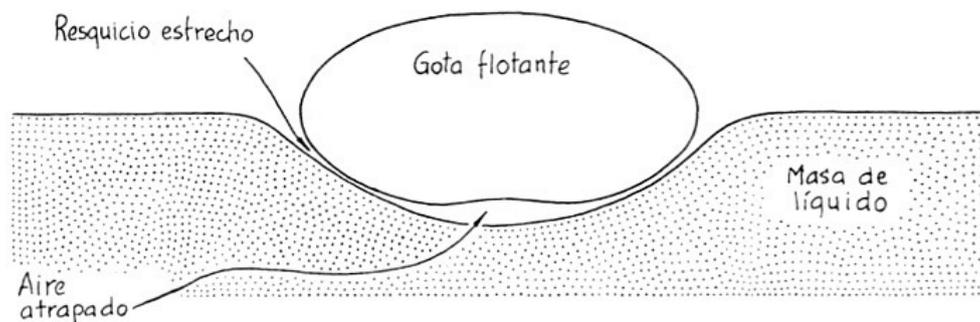


Figura 1: Mecanismo de aire atrapado para hacer flotar a una gota. Fuente: véase Walker (1978), página 126.

A través de los contactos imperfectos que se establecen entre gota y superficie, el aire escapará gradualmente hasta que la disminución de presión de la lámina de aire encerrada sea tal que no pueda soportar el peso de la gota, momento en que ésta coalesce y se hunde en la masa fluida.

Esta simple descripción cualitativa permite explicar las características más importantes de esta configuración. En primer lugar, se tiene que la gota no puede ser simplemente depositada sobre la masa fluida, ya que de esta forma no es posible crear una lámina de aire de presión suficiente como para soportar el peso de la gota.

También permite entender los principales factores que modifican el tiempo que es posible mantener a la gota en esta situación, que son principalmente dos. Por una parte, en el proceso de salida de aire a través de los contactos imperfectos que se establecen entre gota y superficie se arrastran capas superficiales de fluido, de manera que dependiendo de la viscosidad, dicho proceso se lleva a cabo con mayor o menor rapidez, y con él la disminución de la presión que lleva últimamente a la coalescencia. Por otra parte, dependiendo de la tensión superficial del fluido utilizado, éste podrá soportar diferentes presiones en la lámina de aire formada, de modo que el tiempo que tarda en vaciarse hasta la presión crítica de coalescencia varía.

Así, para mantener gotas sobre una superficie fluida durante un tiempo indefinido hay que conseguir que la lámina de aire que se crea pueda ser regenerada antes de que pierda la presión necesaria para sostenerla. La forma más común y sencilla de conseguir esto

es separar y volver a juntar la gota y la superficie periódicamente de modo que haya una regeneración completa en cada repetición. Esto se puede conseguir más sencillamente haciendo que la gota *bote* sobre la superficie. En lugar de manipulando la gota, este efecto se consigue haciendo oscilar la masa fluida con una aceleración mayor a la de la gravedad que fuerce el despegue.

Como se verá a lo largo del documento, el problema de oscilación vertical de una masa fluida puede llegar a ser de gran complejidad, y resulta ser el problema principal de estudio de este trabajo.

3. Ondas de Faraday

Cuando un recipiente que contiene un determinado fluido se hace vibrar verticalmente, existen ciertas condiciones de frecuencia y amplitud de oscilación bajo las cuales la superficie deja de presentar una forma plana para dar lugar a la formación de ondas estacionarias. Este problema fue estudiado en primer lugar por Faraday (1831), quien observó la formación de estas ondas con una frecuencia de la mitad de la impuesta en el fluido.

Sin embargo, hasta años después (Benjamin & Ursell, 1954) no se pudo realizar una descripción completa del fenómeno debido a los desarrollos matemáticos necesarios, que involucran un desarrollo en un conjunto completo de autofunciones que llevan al estudio de estabilidad de la *ecuación de Mathieu*, el cual se detallará en esta sección. Incluso este estudio está restringido al caso de fluidos ideales no viscosos. Una descripción lineal del problema para el caso de fluidos viscosos no surgiría de nuevo hasta años después (Kumar, 1996), el cual se tratará de explicar principalmente de forma cualitativa.

3.1. Sistema hidrodinámico

Así, se considera un recipiente cilíndrico de sección transversal arbitraria, como se muestra en la Figura 2, sometido a una oscilación vertical que provoca en el fluido una aceleración de la forma $a \cos(\omega t)$, de manera que se pueda escribir la *ecuación de Navier-Stokes* como

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \vec{\nabla} p = \rho \vec{f}_m. \quad (1)$$

Entonces, dada la geometría del problema, puede distinguirse una dirección vertical, \hat{z} , de las direcciones horizontales, que serán denotadas con el subíndice H . De este modo, $\vec{f}_m = (g - a \cos(\omega t))\hat{z}$.

Añadido a esto, dada la ecuación de conservación de la masa, la condición de *incompre-*

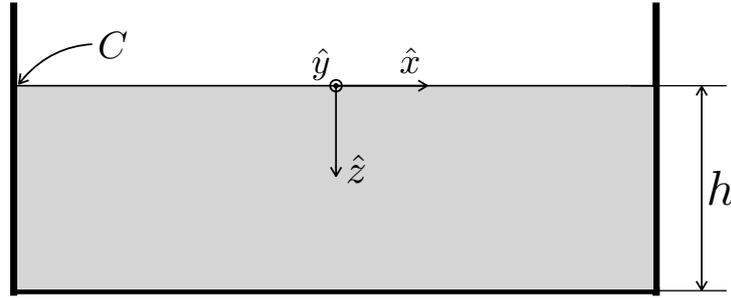


Figura 2: Configuración del sistema descrito en esta sección. Fuente: realización propia.

sibilidad* del fluido lleva a la condición

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (2)$$

lo que sumado al movimiento irrotacional del fluido[†], hace cumplir al *potencial de velocidades* ϕ la *ecuación de Laplace*, $\vec{\nabla}^2 \phi = 0$.

Las ecuaciones (1) y (2) son las que rigen el comportamiento en todo el volumen de fluido considerado (conocidas como *bulk equations* en inglés), pero para estudiar el comportamiento en la superficie habrá que particularizar sus expresiones en ella, de lo que se obtendrán las *condiciones de contorno*. Como se observa a continuación, dado el carácter monodireccional de las fuerzas que entran en juego, este proceso es particularmente sencillo en el caso linealizado.

Dado que la dirección relevante es \hat{z} , y dicha componente en (1) es

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_z + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = g - a \cos(\omega t), \quad (3)$$

expresado en términos del potencial

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = g - a \cos(\omega t).$$

Ahora bien, por las reglas de derivación vectorial[‡], (3) puede ser expresada como

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\vec{\nabla} \phi \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right) = g - a \cos(\omega t),$$

que es directamente integrable en z de manera que resulta en

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\vec{\nabla} \phi \right)^2 + \frac{p}{\rho} - (g - a \cos(\omega t))z = C(t), \quad (4)$$

*Dicha ecuación toma la forma $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$, pero bajo esta condición $\rho = \text{cte.}$ de manera que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \vec{\nabla} \rho = 0$

[†] $\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 0$, lo cual da lugar a la definición de un potencial de velocidades $\vec{v} = \vec{\nabla} \phi$

[‡] $\frac{\partial}{\partial z} \left(\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi \right) = 2 \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$

donde $C(t)$ es una constante de integración que solo puede depender del tiempo y que siempre podrá ser escogida nula.

Por otra parte, se denota por $\zeta(\vec{x}_H, t)$ a la elevación de la superficie con respecto a la situación de equilibrio en que ésta es perfectamente plana. Dado que se trata de una superficie en el espacio tridimensional, debe ser posible expresarla en la forma $F(\vec{x}, t) = 0$, $F(\vec{x}, t) = z - \zeta(\vec{x}_H, t) = 0$. Por ello, dada la descripción euleriana,

$$\frac{DF(\vec{x}, t)}{Dt} = -\frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_z - \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_H \zeta = 0. \quad (5)$$

Reteniendo únicamente términos lineales en la velocidad tanto en (4) como en (5), se obtiene que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\frac{p}{\rho}\right) - (g - a \cos(\omega t))z = 0. \quad (6)$$

Esta expresión deberá ser llevada a la superficie, $z = \zeta(\vec{x}_H, t)$, donde hay que tener en cuenta que en ella ha de considerarse la *tensión superficial*, que contribuye con un exceso de presión dado por

$$p = -\sigma \vec{\nabla} \cdot \hat{n}, \quad (7)$$

siendo \hat{n} es el vector normal a la superficie. Este vector, dado que debe ser en todo punto ortogonal a la superficie, viene descrito por

$$\hat{n} \equiv \frac{\vec{\nabla} F(\vec{x}, t)}{\|\vec{\nabla} F(\vec{x}, t)\|} = \frac{(-\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}, 1)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}},$$

que expresado en su forma linealizada, teniendo en cuenta la definición del operador laplaciano,

$$p = \sigma \vec{\nabla}_H^2 \zeta. \quad (8)$$

Con todo ello, en la superficie se tiene que

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=\zeta} + \frac{\sigma}{\rho} \vec{\nabla}_H^2 \zeta - (g - a \cos(\omega t))\zeta = 0.$$

Sin embargo, como solo se quieren términos lineales en la velocidad, se observa que desarrollando el primer sumando en torno a la situación de superficie plana $z = 0$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=\zeta} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0} + \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} \right|_{z=0} \zeta + \dots = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0} + \left. \frac{\partial v_z}{\partial t} \right|_{z=0} \zeta + \dots,$$

que teniendo en cuenta (5) en su forma lineal, $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_z$ precisamente en $z = 0$,

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=\zeta} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \zeta + \dots,$$

siendo por tanto el término lineal únicamente el primer sumando, obteniéndose finalmente en la superficie que

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0} + \frac{\sigma}{\rho} \vec{\nabla}_H^2 \zeta - (g - a \cos(\omega t))\zeta = 0. \quad (9)$$

Esta última es, por tanto, la condición de contorno que se obtiene de la ecuación (1) en la superficie libre. Para el caso de (2) en los contactos con el recipiente, ésta se transformará en $\hat{n} \cdot \vec{v} = 0$ tanto en el contorno C como en el fondo del recipiente, $z = h$. Expresado en términos del potencial,

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_C = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=h} = 0. \quad (10)$$

Por otra parte, como se ha visto que en la superficie se cumple que $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_z$ [de nuevo (5) en su forma lineal], y además en todo punto $\vec{v} = \vec{\nabla} \phi$, en la superficie se cumple que

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (11)$$

Por último, dado (10), si se divide ambos miembros en la dirección normal a las paredes del contorno (perfectamente verticales), es en todo punto ortogonal a \hat{z} de modo que se puede afirmar que

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial n} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

en los contornos de la superficie.

Por tanto, salvo condición inicial que podrá ser tomada en todo caso nula, se cumplirá que

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial n} \right|_C = 0. \quad (12)$$

Finalmente, aplicando $\partial/\partial n$ a (9) (dadas (10) y (12)), adicionalmente a lo anterior se cumple que

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \vec{\nabla}_H^2 \zeta \right|_C = 0. \quad (13)$$

3.2. Desarrollo en un problema de autovalores. Ecuación de Mathieu

Hasta ahora se tiene por tanto una región del espacio delimitada por un contorno C y un fondo plano en $z = h$, donde las funciones $\zeta(\vec{x}_H, t)$ y $\phi(\vec{x}, t)$ cumplen unas condiciones de contorno de *segunda clase* dadas por (12) y (10) respectivamente.

Esto da pie a plantear las soluciones a dichos problemas como un desarrollo en torno a un conjunto completo de autofunciones $S_m(\vec{x}_H)$ soluciones del problema de Helmholtz homogéneo

$$(\vec{\nabla}_H^2 + k_m^2) S_m(\vec{x}_H) = 0.$$

Así, se proponen los desarrollos

$$\zeta(\vec{x}_H, t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t) S_m(\vec{x}_H), \quad (14)$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(t) S_m(\vec{x}_H) h_m(z), \quad (15)$$

de manera que utilizando la condición (11) se podrán encontrar las relaciones entre $a_m(t)$ y $b_m(t)$, que finalmente sustituidas en (9) llevarán a la ecuación que deberán satisfacer dichos coeficientes $a_m(t)$ que describen la superficie.

Para ello, en primer lugar habrá que resolver el problema vertical, lo cual se obtiene aplicando $\vec{\nabla}^2 \phi = 0$ con las condiciones dadas por (10).

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(t) \vec{\nabla}^2 [S_m(\vec{x}_H) h_m(z)] = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(t) \left[\frac{d^2 h_m(z)}{dz^2} - k_m^2 h_m(z) \right] S_m(\vec{x}_H) = 0,$$

con lo que por la ortogonalidad de las autofunciones debe cumplirse que la expresión entre corchetes sea nula $\forall m$, lo cual lleva a la resolución de dicha ecuación diferencial para cada modo de forma desacoplada, que dada la condición de contorno antes señalada, se puede comprobar que resulta en

$$h_m(z) = C_m \cosh(k_m(z - h)).$$

Imponiendo ahora la condición (11),

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{da_m(t)}{dt} S_m(\vec{x}_H) = - \sum_{m=0}^{\infty} C_m b_m(t) k_m \sinh(hk_m) S_m(\vec{x}_H),$$

de lo que se obtiene finalmente un desarrollo para ζ y ϕ en términos de los mismos coeficientes, ya que (15) se podrá escribir ahora, dada la expresión anterior despejando $C_m b_m(t)$, como

$$\phi(\vec{x}, t) = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{da_m(t)}{dt} \frac{\cosh(k_m(h - z))}{k_m \sinh(hk_m)} S_m(\vec{x}_H). \quad (16)$$

Sustituyendo estos desarrollos en (9), teniendo en cuenta que dado el desarrollo (14)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_H \zeta = & - \sum_{m=0}^{\infty} k_m^2 a_m(t) S_m(\vec{x}_H), \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^2 a_m(t)}{dt^2} \frac{1}{k_m \tanh(hk_m)} S_m(\vec{x}_H) + \frac{\sigma}{\rho} \sum_{m=0}^{\infty} k_m^2 a_m(t) S_m(\vec{x}_H) + \\ & + (g - a \cos(\omega t)) \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t) S_m(\vec{x}_H) = 0, \end{aligned}$$

que reagrupando términos

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_m(\vec{x}_H)}{k_m \tanh(hk_m)} \left[\frac{d^2 a_m(t)}{dt^2} + k_m \tanh(hk_m) \left(\frac{k_m^2 \sigma}{\rho} + g - a \cos(\omega t) \right) a_m(t) \right] = 0. \quad (17)$$

Por tanto, de nuevo al ser las autofunciones $S_m(\vec{x}_H)$ ortogonales, debe satisfacerse que la expresión entre corchetes se anule, lo que dará finalmente la ecuación diferencial que deberá satisfacer los coeficientes del desarrollo de la superficie.

Para ello, se introducen los cambios de variable

$$p_m \equiv \frac{4k_m \tanh(hk_m)}{\omega^2} \left(g + \frac{k_m^2 \sigma}{\rho} \right), \quad q_m \equiv \frac{2k_m a \tanh(hk_m)}{\omega^2}, \quad T \equiv \frac{1}{2} \omega t \quad (18)$$

que permiten escribir la ecuación de la forma

$$\frac{d^2 a_m}{dT^2} + (p_m - 2q_m \cos(2T)) a_m = 0, \quad (19)$$

conocida como *ecuación de Mathieu*.

En ausencia de forzado, $a_m''(t) + (\omega^2 p_m/4) a_m(t) = 0$, la frecuencia de movimiento de la superficie es $\omega \sqrt{p_m/4}$,

$$\omega_m = \sqrt{\tanh(hk_m) \left(\frac{k_m^3 \sigma}{\rho} + k_m g \right)}, \quad (20)$$

que no es más que la relación de dispersión de ondas superficiales en fluidos no viscosos de profundidad finita donde la tensión superficial juega un papel relevante.

3.3. Análisis de estabilidad de la ecuación de Mathieu

El cambio de variable hecho en el apartado anterior a través de p_m y q_m hace que la ecuación (19) adopte una forma estándar ampliamente estudiada (McLachlan, 1947). Se resaltarán aquí los resultados principales de su estudio, en el que se obtienen los modos p_m y q_m para los cuales la superficie deja de ser estable en tiempos suficientemente grandes.

Este estudio es conveniente realizarlo mediante el *método de las dos escalas*, ya que se tiene una escala de tiempo distinta para las oscilaciones que para el crecimiento de éstas a lo largo del tiempo, no siendo válido un desarrollo perturbativo regular para valores cualesquiera de los parámetros, como se verá a continuación.

Así, se proponen dos escalas temporales

$$t_1 \equiv T, \quad t_2 \equiv 2q_m T,$$

de manera que

$$\frac{d}{dT} = \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{dt_1}{dT} + \frac{\partial}{\partial t_2} \frac{dt_2}{dT} = \frac{\partial}{\partial t_1} + 2q_m \frac{\partial}{\partial t_2}; \quad \frac{d^2}{dT^2} = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2(2q_m) \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + (2q_m)^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2}.$$

Del mismo modo, se propone el desarrollo en q_m

$$a_m(t_1, t_2) = a_{m,0}(t_1, t_2) + 2q_m a_{m,1}(t_1, t_2) + \dots$$

Con todo ello, sustituyendo el desarrollo en (19), se llega a que en orden $(2q_m)^0$

$$\frac{\partial^2 a_{m,0}}{\partial t_1^2} + p_m a_{m,0} = 0,$$

lo cual resulta en

$$a_{m,0}(t_1, t_2) = A_0(t_2) \cos \sqrt{p_m} t_1 + B_0(t_2) \sin \sqrt{p_m} t_1. \quad (21)$$

Para el primer orden en $2q_m$,

$$2 \frac{\partial^2 a_{m,0}}{\partial t_2 \partial t_1} + \frac{\partial^2 a_{m,1}}{\partial t_1^2} + p_m a_{m,1} - \cos(2t_1) a_{m,0} = 0.$$

Sustituyendo el valor dado por (21), y utilizando las identidades trigonométricas apropiadas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a_{m,1}}{\partial t_1^2} + p_m a_{m,1} &= \frac{A_0}{2} [\cos(\sqrt{p_m} + 2)t_1 + \cos(\sqrt{p_m} - 2)t_1] + \\ &+ \frac{B_0}{2} [\sin(\sqrt{p_m} + 2)t_1 + \sin(\sqrt{p_m} - 2)t_1] - 2\sqrt{p_m} \left[-\frac{dA_0}{dt_2} \sin \sqrt{p_m} t_1 + \frac{dB_0}{dt_2} \cos \sqrt{p_m} t_1 \right]. \end{aligned}$$

Así, para un valor arbitrario de p_m , evitar la resonancia supone simplemente imponer que para el tiempo lento t_2

$$\frac{dA_0(t_2)}{dt_2} = 0; \quad \frac{dB_0(t_2)}{dt_2} = 0, \quad (22)$$

lo que quiere decir que únicamente teniendo en cuenta el parámetro p_m en el desarrollo, el forzado en la ecuación de Mathieu no tiene efectos, son soluciones oscilatorias de amplitud constante en el tiempo.

Sin embargo, se observa que si se cumple que $\sqrt{p_m} \pm 2 = \mp \sqrt{p_m}$, es decir, $p_m = 1$, la ecuación en primer orden en q_m se podrá escribir como

$$\frac{\partial^2 a_{m,1}}{\partial t_1^2} + a_{m,1} = \frac{A_0}{2} [\cos t_1 + \cos 3t_1] + \frac{B_0}{2} [\sin t_1 - \sin 3t_1] + 2 \left[\frac{dA_0}{dt_2} \sin t_1 + \frac{dB_0}{dt_2} \cos t_1 \right],$$

de modo que para evitar la resonancia se tendrá ahora que cumplir que

$$\frac{1}{2} B_0(t_2) + \frac{dA_0(t_2)}{dt_2} = 0, \quad \frac{1}{2} A_0(t_2) + \frac{dB_0(t_2)}{dt_2} = 0,$$

es decir,

$$\frac{d^2}{dt_2^2} \begin{Bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{Bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{Bmatrix}, \quad (23)$$

lo que conlleva un desarrollo exponencial de las envolventes que conduce finalmente a la inestabilidad para valores de tiempo grandes.

Se puede demostrar además que dichas inestabilidades para valores cualesquiera de q_m se producen para $p_m = n^2$, con $n \in \mathbb{N}$.

Para finalmente ver dónde se producen las inestabilidades en el plano (q_m, p_m) habrá que desarrollar p_m del mismo modo que a_m , en potencias de $2q_m$ en el entorno de la inestabilidad,

$$p_m = 1 + p_{m,1}(2q_m) + \dots ,$$

de manera que en primer orden (19) quede ahora de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a_{m,1}}{\partial t_1^2} + a_{m,1} = 2 \left[-\frac{dA_0}{dt_2} \sin t_1 + \frac{dB_0}{dt_2} \cos t_1 \right] - p_{m,1}(A_0 \cos t_1 + B_0 \sin t_1) + \\ + \frac{A_0}{2}(\cos 3t_1 + \cos t_1) + \frac{B_0}{2}(\sin 3t_1 - \sin t_1), \end{aligned}$$

y la condición para evitar la resonancia por ello

$$\begin{aligned} \frac{dA_0}{dt_2} + \frac{B_0}{2} \left(\frac{1}{2} + p_{m,1} \right) = 0, \quad \frac{dB_0}{dt_2} + \frac{A_0}{2} \left(\frac{1}{2} - p_{m,1} \right) = 0, \\ \frac{d^2}{dt_2^2} \begin{Bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - p_{m,1}^2 \right) \begin{Bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (24)$$

Es decir, se tiene que para evitar el crecimiento exponencial se deberá cumplir que el paréntesis de la expresión anterior sea positivo, lo cual lleva a que $p_{m,1} < 1/2$ ó $p_{m,1} > -1/2$. Las curvas de estabilidad en el plano (q_m, p_m) para valores pequeños pero positivos de los parámetros son por ello

$$p_m = 1 \pm q_m + O[(2q_m)^2], \quad (25)$$

condición que se presenta de forma gráfica en la Figura 3.

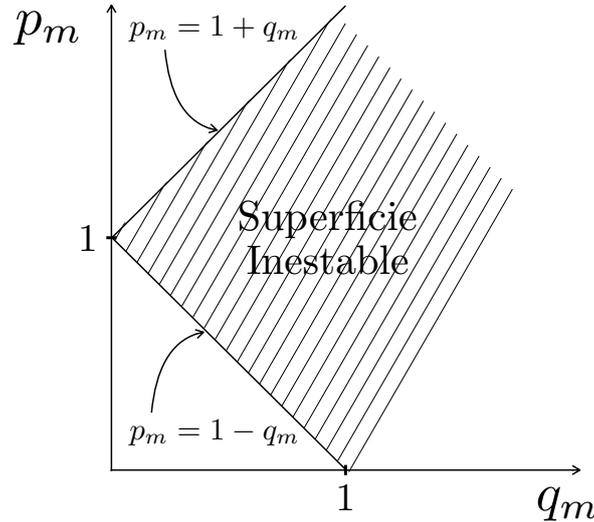


Figura 3: Regiones de estabilidad para valores de p_m y q_m pequeños. Fuente: realización propia.

Finalmente, un estudio más detallado [como el que puede encontrarse, por ejemplo, en Rand (2016)] lleva a encontrar la carta completa de inestabilidad en el plano (q_m, p_m) . En la Figura 4 se muestra dicho plano en una región más extensa.

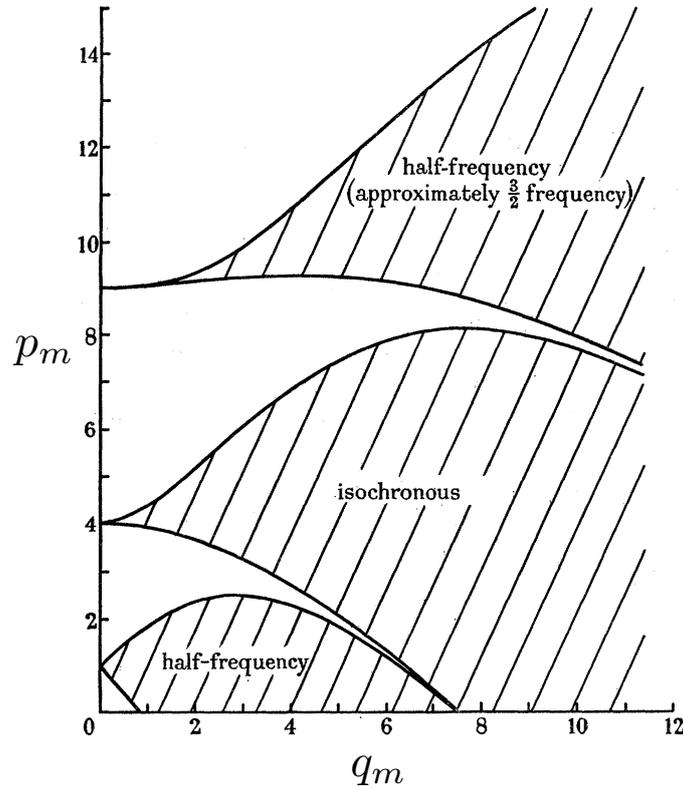


Figura 4: Regiones de estabilidad para valores de p_m y q_m . Fuente: véase Benjamin & Ursell (1954), página 509.

3.4. Verificación experimental. Efecto de la viscosidad

Con el objetivo de verificar de primera mano la creación de inestabilidades bajo las condiciones detalladas en los apartados anteriores, se dispuso de un pequeño montaje experimental en el que se disponía de agua contenida en un cilindro de sección circular.

Por ello, el desarrollo en autofunciones propuesto en la sección 3.2 se traduce en

$$S_{m,n}(\rho, \theta) = J_n(k_{m,n}\rho) \cos(m\theta), \quad (26)$$

con $k_{m,n}$ el m -ésimo cero de $J'_n(k_{m,n}R)$, siendo R el radio de la sección.

La vibración se introdujo a través de un dispositivo como el que se muestra en la Figura 5, y las medidas de amplitud y frecuencia de oscilación a través de un acelerómetro cuya señal de salida en tensión se observaba a través de un osciloscopio.

Con (26) se obtuvieron los distintos modos de excitación de las ondas de Faraday. Cabe destacar que este conjunto, aunque discreto, es infinito de modo que pueden existir modos tan próximos entre sí que sean irresolubles con la precisión del montaje. Sin embargo, son siempre los modos más bajos los que producen las inestabilidades más claramente detectables, de modo que fueron éstas las buscadas.

De esta forma se pudieron detectar algunas curvas de excitación, estando la más clara mostrada en la Figura 6. En ellas se observa que los mínimos no son coincidentes con



Figura 5: Fotografía del vibrador utilizado para imponer las oscilaciones en el recipiente. A él se encuentra anclado el propio recipiente y el acelerómetro utilizado.

$p_m = 1$ ni éstos se dan para $q_m = 0$. La primera de estas inexactitudes se debe a la falta de precisión en la medida de la frecuencia, pero la segunda, aunque también magnificada en los experimentos realizados, tiene su origen en una falta de descripción de los fenómenos de viscosidad.

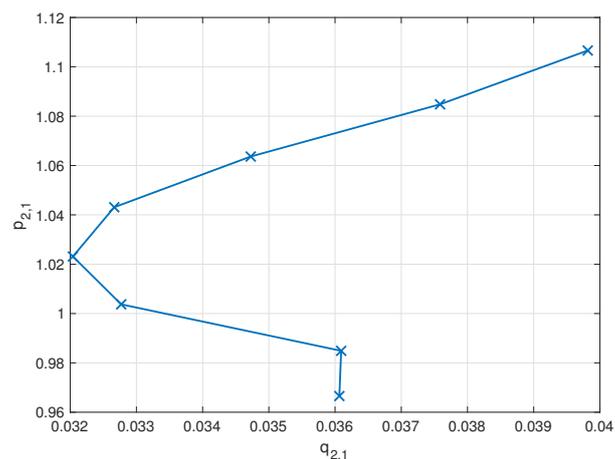


Figura 6: Excitación del modo $k_{2,1}$, para lo que se ha utilizado el recipiente de sección cilíndrica de radio $R = 2,50$ cm y profundidad $h = 2,50$ mm, lo que da $k_{2,1} = 48,87$ m⁻¹. Para el agua se ha utilizado $\rho = 998,2$ Kg/m³, $\sigma = 72,75 \times 10^{-3}$ N/m. Se observa un alejamiento del comportamiento de recta al separarse del mínimo debido a la influencia de otros modos de excitación.

Teniendo la viscosidad del fluido en cuenta, la ecuación de Navier-Stokes (1) pasa a tener la forma

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \vec{\nabla} p = \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \rho \vec{f}_m, \quad (27)$$

donde μ es la denominada *viscosidad dinámica*.

Aunque el procedimiento para encontrar las condiciones de frecuencia y amplitud de oscilaciones a las cuales se producen las ondas de Faraday involucran las mismas ideas que las llevadas a cabo en las secciones 3.1 y 3.2[§], se requieren desarrollos matemáticos demasiado extensos para los objetivos finales de este trabajo.

Se presentará en su lugar los resultados principales de este estudio, que se encuentra detallado por Kumar (1996).

En él, se obtiene que el efecto principal de la viscosidad es el de *levantar* los mínimos valores de amplitud de oscilación (y por ello q_m) para los cuales comienza a producirse la inestabilidad, de manera que ya no es posible producirlos desde amplitud nula de oscilación, sino para un valor dado por

$$a = 2^{4/3} \left(\frac{\rho}{\sigma} \right)^{1/3} \mu \omega^{5/3}. \quad (28)$$

También se estudian en él otras propiedades como por ejemplo condiciones de la viscosidad bajo las cuales la respuesta con la misma frecuencia impuesta se produce antes que la denominada subarmónica.

A pesar de todo ello, se puede demostrar (Landau & Lifshitz, 1987) que bajo condiciones de baja viscosidad y profundidad tomada infinita de manera que $\tanh(hk_m) \rightarrow 1$, la inclusión de la viscosidad se puede realizar a través de un desarrollo perturbativo de la ecuación (19) de Mathieu de manera que se pueda expresar como

$$\frac{d^2 a_m}{dT^2} + \tau_m \frac{da_m}{dT} + (p_m - 2q_m \cos(2T)) a_m = 0, \quad (29)$$

donde $\tau_m = 4\nu k_m^2$ es el denominado *coeficiente de amortiguamiento*, siendo $\nu = \mu/\rho$ la *viscosidad cinemática* del fluido.

Para obtener el desplazamiento de las curvas de estabilidad mostradas en la Figura 3, se realizará de nuevo un análisis perturbativo en (29), esta vez buscando directamente en torno al término secular $p_m = 1 + p_{m,1}(2q_m) + O[(2q_m)^2]$. Proponiendo entonces los desarrollos usuales, para orden $(2q_m)^0$ se tiene

$$\frac{\partial^2 a_{m,0}}{\partial t_1^2} + \tau_m \frac{\partial a_{m,0}}{\partial t_1} + a_{m,0} = 0,$$

lo que resulta en

$$a_{m,0}(t_1, t_2) = e^{-\frac{\tau_m t_1}{2}} \left[A_0(t_2) \cos \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_m}{2} \right)^2 t_1} + B_0(t_2) \sin \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_m}{2} \right)^2 t_1} \right]. \quad (30)$$

[§]Es decir, el desarrollo de las variables principales en términos de un conjunto completo de autofunciones y encontrando a partir de (27) y las condiciones de contorno las relaciones que deben verificar los coeficientes de dicho desarrollo, evaluando los puntos de crecimiento para tiempos lo suficientemente grandes.

Para el primer orden,

$$2\frac{\partial^2 a_{m,0}}{\partial t_2 \partial t_1} + \frac{\partial^2 a_{m,1}}{\partial t_1^2} + \tau_m \frac{\partial a_{m,0}}{\partial t_2} + \tau_m \frac{\partial a_{m,1}}{\partial t_1} + a_{m,1} + p_{m,1} a_{m,0} - \cos(2t_1) a_{m,0} = 0.$$

Sustituyendo (30) y haciendo uso de las identidades trigonométricas apropiadas, se llega a unas expresiones similares a las halladas en la sección anterior cuando se realizó el análisis no viscoso. Sin embargo, al igual que allí se obtenía que las resonancias relevantes se daban para $\sqrt{p_m} \pm 2 = \mp \sqrt{p_m}$, en este caso

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\tau_m}{2}\right)^2} \pm 2 = \mp \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_m}{2}\right)^2},$$

de lo que se obtiene que $\tau_m = 0$.

Por ello, para obtener un desarrollo significativo habrá que desarrollar τ_m como mínimo hasta el primer orden. Se toma a partir de ahora entonces que $\tau_m = (2q_m)\tau_{m,1} + O[(2q_m)^2]$. De esta forma

$$a_{m,0}(t_1, t_2) = A_0(t_2) \cos t_1 + B_0(t_2) \cos t_1,$$

de manera que la ecuación para el primer orden quede como

$$\frac{\partial^2 a_{m,1}}{\partial t_1^2} + a_{m,1} = -2\frac{\partial^2 a_{m,0}}{\partial t_2 \partial t_1} - \tau_{m,1} \frac{\partial a_{m,0}}{\partial t_1} - p_{m,1} a_{m,0} + a_{m,0} \cos 2t_1.$$

Por tanto, sustituyendo el valor de $a_{m,0}$ y utilizando identidades trigonométricas, se llega por un procedimiento análogo al utilizado en la sección anterior a que las condiciones para evitar la resonancia son

$$\begin{aligned} \frac{dA_0(t_2)}{dt_2} &= -\frac{\tau_{m,1}}{2} A_0 + \frac{1}{2} B_0 \left(p_{m,1} + \frac{1}{2} \right), \\ \frac{dB_0(t_2)}{dt_2} &= -\frac{\tau_{m,1}}{2} B_0 - \frac{1}{2} A_0 \left(p_{m,1} - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \tag{31}$$

Se tiene por tanto un sistema autónomo para cuya solución se propondrán formas funcionales $A_0(t_2) = a \exp(\eta t_2)$, $B_0(t_2) = b \exp(\eta t_2)$, cuya sustitución en (31) dan lugar al sistema algebraico

$$\begin{aligned} -a \left(\frac{\tau_{m,1}}{2} + \eta \right) + \frac{1}{2} b \left(p_{m,1} + \frac{1}{2} \right) &= 0, \\ -\frac{1}{2} a \left(p_{m,1} - \frac{1}{2} \right) - b \left(\frac{\tau_{m,1}}{2} + \eta \right) &= 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Para que existan soluciones distintas de la trivial, como es usual el determinante de la matriz de coeficientes debe ser nulo, de lo que se obtiene que

$$\eta = -\frac{\tau_{m,1}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} - p_{m,1}^2}. \tag{33}$$

Así, como la condición de estabilidad será ahora $\eta < 0$, las curvas de estabilidad se sitúan en la igualdad estricta, de donde se obtiene

$$p_{m,1} = \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \tau_{m,1}},$$

y expresando $\tau_{m,1}$ en términos de su desarrollo, $\tau_m \simeq (2q_m)\tau_{m,1}$, se tiene finalmente que la curva de estabilidad se sitúa sobre

$$p_m = 1 \pm \sqrt{q_m^2 - \tau_m^2} + O[(2q_m)^2]. \quad (34)$$

Se obtiene de ella por tanto que efectivamente el mínimo de la curva de estabilidad se levanta de amplitud nula hacia un valor dado $q_m = \tau_m$, como puede observarse en la Figura 7, de modo que se reduzca consistentemente al caso anterior para $\tau_m = 0$.

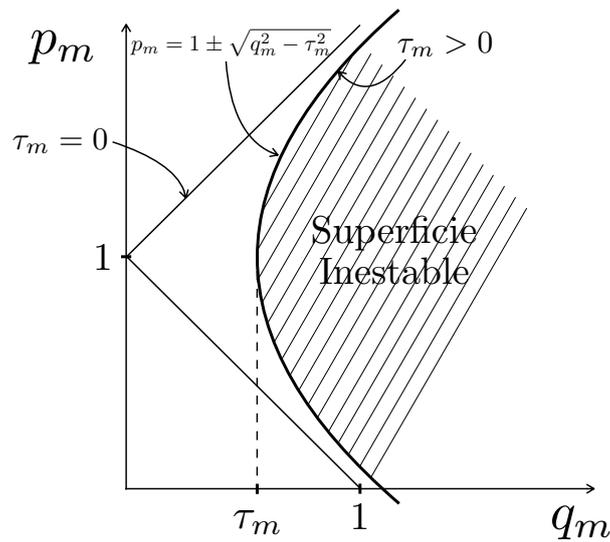


Figura 7: Regiones de estabilidad para valores de p_m y q_m pequeños bajo el efecto de la viscosidad. Fuente: realización propia.

Por tanto, según esta aproximación, la formación de ondas de Faraday no se produce para amplitud cero, sino para una amplitud de oscilación de valor

$$a = 2\nu k_m \omega^2, \quad (35)$$

una condición que, a pesar de ser considerablemente distinta a (28) y que además depende del modo que se esté excitando, mantiene la misma dependencia lineal en la viscosidad. Esto se debe, como se señaló al principio del desarrollo, a que esta descripción únicamente es válida para bajo las suposiciones de Landau & Lifshitz (1987), las cuales no se mantienen de forma estricta en los casos experimentales de estudio, a pesar de ser una excelente forma de entender el “levantamiento” de los modos.

4. Asociación Onda-Gota

Una vez se dispone de las herramientas matemáticas necesarias para la descripción de la masa fluida, se podrá realizar esta asociación. Para ello, se utilizarán gotas que al impactar en la superficie sufran una deformación lo menor posible de manera que las colisiones puedan considerarse prácticamente *elásticas*. Dicha deformación en una colisión viene caracterizada por el *número de Weber*,

$$\text{We} = \frac{\rho v^2 l}{\sigma}, \quad (36)$$

donde l es una longitud característica, en este caso el diámetro de la gota, y v la velocidad del fluido.

Entonces, este número compara las contribuciones de tensión superficial con las de inercia, de modo que si $\text{We} < 1$, las contribuciones de tensión superficial serán más relevantes que las de inercia, de manera que la deformación no jugará un papel relevante. Por ello, para una configuración determinada, se podrá regular la proporción en que se produce la deformación de la gota modificando el diámetro de la misma, de modo que para un diámetro lo suficientemente pequeño podrá considerarse la descripción deseada de colisiones elásticas.

Con dicha configuración, la condición buscada de separación entre gota y superficie (de forma que se dé la regeneración de aire descrita en la sección 2) será la misma que si ambos elementos fueran sólidos, es decir, que la amplitud de las oscilaciones sea mayor a la aceleración de la gravedad, $a > g$. Esta condición ha sido verificada por diferentes autores [véase, por ejemplo, Protière *et al.* (2006)].

Tomando esta amplitud como mínimo para que la gota comience a botar sobre la superficie, el estudio se comprenderá en una región en que se cumpla que $g < a < a_F$, siendo a_F la amplitud a partir de la cual se dan las Ondas de Faraday y por ello la superficie comienza a ser inestable. Por este motivo, para valores mayores de amplitud no será posible el estudio de estos botes. Se recalca además que el análisis se realizará para una frecuencia fija para poder comparar mejor los distintos casos.

Es por ello que, a pesar de ser pequeño, el efecto de la viscosidad es tan relevante en este estudio, ya que para cualquier configuración hace existir un valor mínimo no nulo de amplitud de oscilación al cual se produce la inestabilidad.

A lo largo de esta sección se explicará de forma cualitativa el comportamiento de las gotas en la región de amplitudes de aceleración antes mencionada, y cómo es posible que den lugar finalmente al movimiento horizontal de la gota con respecto a la superficie del fluido. Será en la siguiente sección donde se analice de forma cuantitativa el desplazamiento horizontal que adquieren.

Finalmente, se hará un repaso a la relación que varios autores han hecho de este fenómeno macroscópico con los que ocurren a escala microscópica y son solo descritos a través de modelos cuánticos.

4.1. Botes verticales

Como se ha mencionado al inicio de esta sección, para valores de amplitud de oscilación mayores pero próximos a la aceleración de la gravedad, es decir, alejados todavía de a_C , ni la gota ni la superficie sufren deformaciones relevantes en sus colisiones. Así, su comportamiento será completamente análogo al de una pelota rebotando elásticamente sobre una superficie verticalmente oscilante. Este movimiento ha sido ampliamente estudiado por diversos autores [véase, por ejemplo, Holmes (1982) o Tuffiaro & Albano (1986)].

En ellos se estudia este movimiento para distintos valores de amplitud de oscilaciones (también de frecuencias, aunque no se considere aquí), donde finalmente se observan bifurcaciones que finalmente llevan al caos. En la Figura 8 se observa el movimiento observado para las gotas de pequeño diámetro y pelotas sólidas, donde se puede observar la similitud entre estos movimientos para amplitudes de oscilación próximas a g .

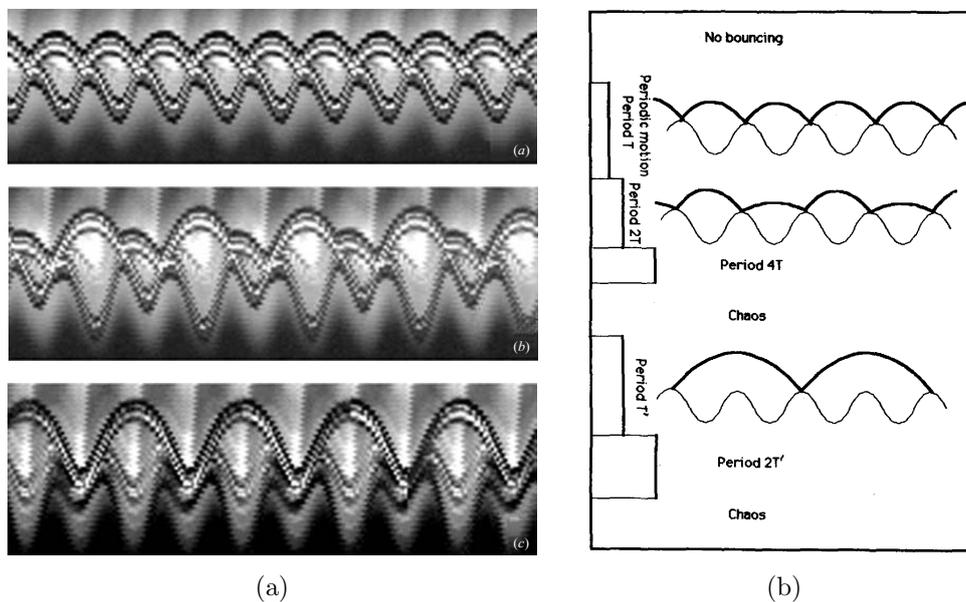


Figura 8: Comparación de botes de pequeña amplitud para el bote líquido (aa) y sólido (b). Se observa que aunque los tres casos producen resultados similares, los dos últimos son debidos a distintos motivos: en el fluido se debe a la aparición de ondas de Faraday y en el sólido a una variación de la frecuencia. (a) Gota fluida. Fuente: Protière *et al.* (2006), página 90. (b) Bola sólida. Fuente: Tuffiaro & Albano (1986), página 943.

Sin embargo, a medida que se aumenta la amplitud de oscilación, el comportamiento comienza a diferenciarse por la relevancia que comienza a tener las inestabilidades de Faraday.

4.2. Movimiento horizontal: gotas errantes

En su colisión con la superficie, se produce una deformación tanto en la gota como en la propia superficie, aunque ésta se haya tomado pequeña. Sin embargo, al estar por

debajo del límite de las inestabilidades de Faraday, dicha deformación en la superficie es rápidamente amortiguada regresando a su estado plano parcialmente antes del siguiente impacto.

A medida que aumenta la amplitud de estas oscilaciones y con ello se aproximan al valor crítico de las ondas de Faraday a_F , la deformación que produce la gota en la superficie aporta una amplitud adicional a la superficie que hace aproximarse aún más a este valor crítico que desencadena la aparición de las propias ondas de Faraday.

Así, la amortiguación que se produce en la superficie entre botes es menor cuanto más próximo se encuentre la amplitud de oscilación a a_F . Llegará por tanto un punto en que la relevancia de la deformación producida por la gota en la superficie será comparable a la amplitud de las oscilaciones impuestas [Figura 8, caso (ac)], de manera que en total se produce un contacto cada dos oscilaciones.

Se demostrará en la siguiente sección que es en este momento de doble de periodo cuando la gota adquiere su movimiento horizontal, donde se caracterizará además la velocidad de este proceso.

4.3. Similitudes con comportamientos microscópicos

En el razonamiento hecho hasta ahora de la obtención del movimiento horizontal cabe observar que es la gota quien finalmente aporta la amplitud necesaria para la producción de la inestabilidad, de manera que las ondas de Faraday que se crean están producidas finalmente por ella y no solo por la superficie oscilante. Es decir, que si únicamente se tuviera la superficie oscilando sin gota, se tendría en todo momento a dicha superficie plana, sin deformación.

Por tanto, de este modo se tiene un ente particular que crea y lleva asociado una serie de ondas. Esto, como se ha anticipado en varias ocasiones, ha dado lugar al diseño por parte de una serie de autores de experimentos que intentan reproducir efectos microscópicos en los que estén involucrados fenómenos de dualidad onda-partícula y por tanto sean puramente cuánticos de forma macroscópica. Se describirán aquí brevemente los casos más destacados.

Movimientos orbitales Si en lugar de una gota se depositan sobre la superficie dos o más, cada una de ellas aportará a la superficie la amplitud adicional necesaria de forma que cada una de ellas creará y llevará asociada ondas de Faraday.

Si están lo suficientemente alejadas, estas ondas no interactuarán entre sí de forma que tendrán movimientos independientes como si estuvieran aisladas. Sin embargo, cuando los frentes de onda asociados a cada gota interactúan, se pueden producir distintos fenómenos. Todos ellos tienen en común que las gotas interactúan unas con otras a través de sus ondas asociadas y no por contacto directo.

Dadas dos gotas errantes que se aproximan en línea recta, dependiendo del *parámetro de impacto* con que lo hagan podrán interactuar de forma repulsiva, una dispersión, o

atractiva, pudiendo llegar incluso a quedar atrapadas en un movimiento orbital. Estos escenarios se muestran en la Figura 9.

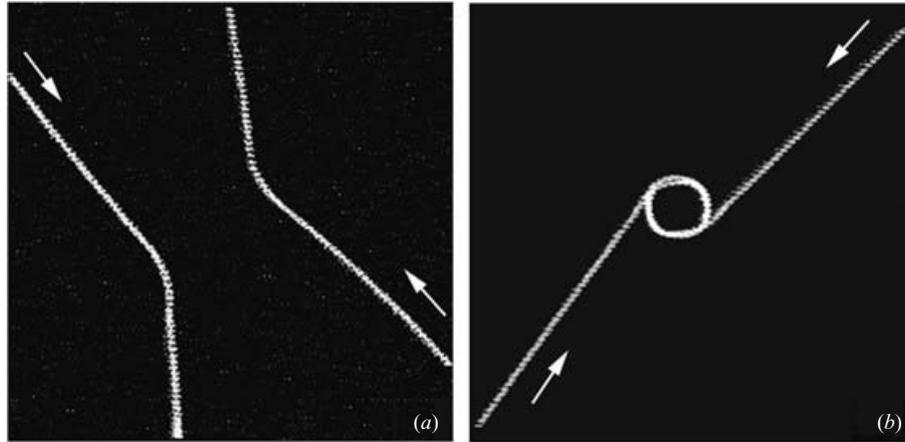


Figura 9: Trayectoria experimental horizontal de gotas errantes idénticas en los dos tipos de colisiones descritas. Fuente: véase Protière *et al.* (2006), página 100, donde se muestra también la simulación de las trayectorias a partir del modelo propuesto en dicho trabajo, estudiadas en la sección 5.

Además de en el artículo de Protière *et al.* (2006), el movimiento orbital de gotas errantes ha sido estudiado en detalle posteriormente por Oza *et al.* (2017). En ambos casos se llega a la conclusión de la necesidad de órbitas cuantizadas para este fenómeno, es decir, que no todas las distancias entre gotas cuando están en órbita son posibles, sino solo aquellas dadas por

$$d_n^{\text{orb}} = (n - \epsilon_0)\lambda_F, \quad (37)$$

donde λ_F es la longitud de onda de las ondas de Faraday que producen las gotas, y ϵ_0 un desplazamiento común a toda órbita de orden n , siendo éste un número entero para órbitas en fase y semientero para órbitas que se encuentran fuera de fase[¶]. En la Figura 10 se muestran las primeras órbitas posibles para un par de gotas idénticas.

Efecto túnel Si la topología del fondo del recipiente varía, lo hará también la frecuencia a la cual se producen las ondas de Faraday. Por ello, para una misma frecuencia podrá ser decisivo para la posibilidad de existencia de gotas errantes, ya que dependiendo de la profundidad podrán existir zonas donde el punto de operación en la carta de inestabilidades sea bote vertical, errante o incluso inestable.

Esto ha llevado a diversos autores como Nachbin *et al.* (2017) a crear recipientes en cuyos fondos existan barreras de una altura tal que si todo el recipiente tuviera dicha profundidad no sería posible la existencia de gotas. Esto ha resultado, como se puede observar en la Figura 11, en que sí es posible la presencia de gotas en estas regiones por periodos cortos de tiempo, y además a través de las ecuaciones que describen el movimiento de las gotas se puede describir completamente la presencia de éstas en cualquier región.

[¶]Es decir, cuando una de ellas se encuentra en contacto con la superficie, la otra se encuentra en el

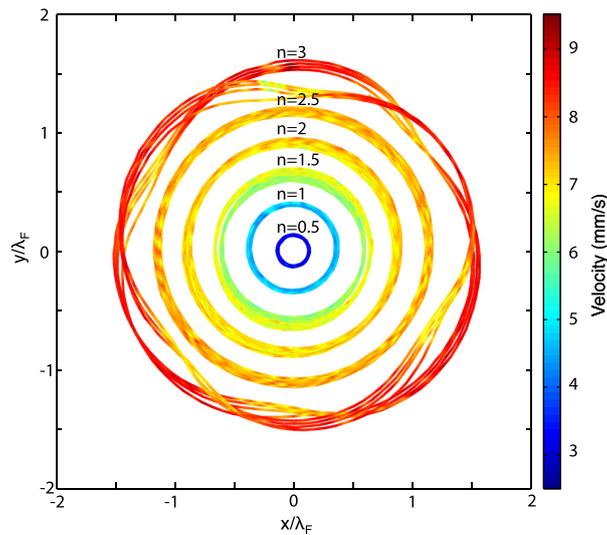


Figura 10: Primeros órdenes de órbita observados, para valores $a/a_F = (0,86 \pm 0,01)$, radio de las gotas $R = (0,37 \pm 0,01)$ mm, y longitud de onda de Faray $\lambda_F = 4,75$ mm. Fuente: véase Oza *et al.* (2017), página 5.

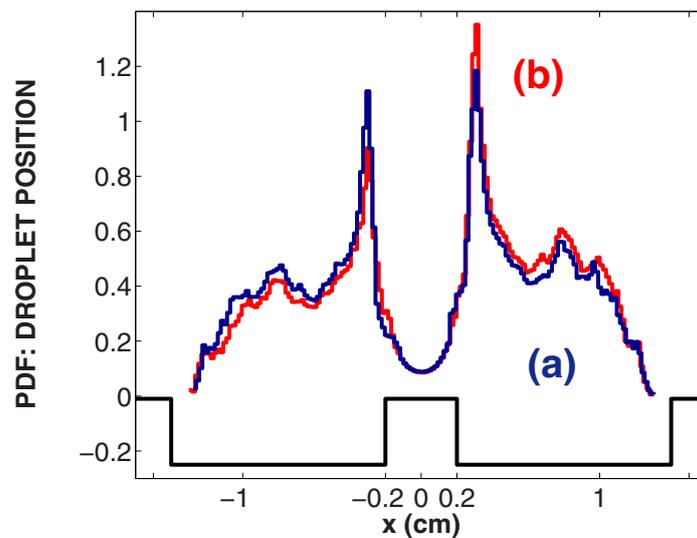


Figura 11: Histograma de posición de la gota en un recipiente con una barrera central. En (a) se muestra para una sola gota, y en (b) para 6 gotas diferentes situadas inicialmente en puntos distintos del recipiente (3 en cada cavidad). Se observa por tanto una independencia de los resultados con la situación inicial de la gota. Fuente: véase Nachbin *et al.* (2017), página 14.

Doble rendija Siguiendo con la misma idea de imposición de barreras al paso de las gotas, dada su asociación con las ondas deberá ser posible la reproducción de fenómenos de difracción. De nuevo, ésto ha sido estudiado con gran éxito [véase por ejemplo Pucci punto más alejada de ella.

et al. (2018)], consiguiéndose experimentalmente los efectos descritos por el experimento de la doble rendija, en los cuales efectivamente las ondas pasan por ambas aperturas donde se crean nuevos frentes de ondas que interfieren entre sí, y por el contrario las gotas pasan únicamente por una de las rendijas. Como se muestra en la Figura 12, esto ocurre, además, en buena semejanza con el caso microscópico.

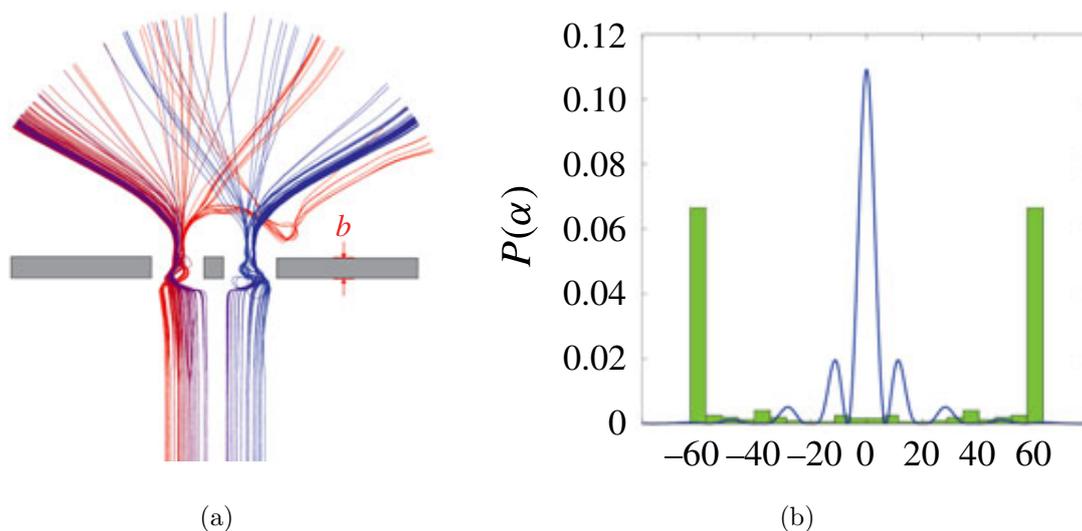


Figura 12: Resultados experimentales del experimento con doble rendija. En (a) se muestra esquemáticamente la configuración del experimento y las trayectorias de las gotas en su paso por las aperturas. En (b) se muestra la probabilidad de impacto final en función del ángulo, donde se puede observar un patrón de interferencia. Fuente: véase Pucci *et al.* (2018), página 1147.

5. Descripción del movimiento horizontal

La descripción del problema realizada hasta el momento se ha basado en justificar tanto cualitativamente como cuantitativamente cómo es posible la producción de gotas y bajo qué condiciones puede dar comienzo a un desplazamiento horizontal.

En esta última parte del documento se describe este movimiento horizontal una vez supuestas las condiciones necesarias para que se dé, las cuales han sido descritas en secciones anteriores (4.2).

Para ello, como se ha anticipado en varias ocasiones, se utilizan dos distintos modelos. En el primero de ellos se realizan una serie de fuertes simplificaciones que permiten una fácil descripción del movimiento, a pesar de lo cual será capaz de reproducir algunas de las características esenciales del movimiento.

El segundo de ellos parte de hipótesis más realistas, lo que lleva a un complejo tratamiento del movimiento que será únicamente resoluble a partir de procedimientos numéricos,

llegando sin embargo a una fiel reproducción de los comportamientos experimentales observados.

Finalmente, ambos modelos serán comparados mediante simulación, que respaldarán las comprobaciones experimentales llevadas a cabo por autores como Oza *et al.* (2013).

5.1. Primer modelo

Como se observó en la sección 4.2, el desplazamiento horizontal se debe a que la amplitud adicional que producen las gotas en su impacto crea, para un forzado de amplitud próxima al límite de Faraday, deformaciones en la superficie de modo que si son lo suficientemente fuertes, los sucesivos choques en la superficie serán en un punto de ella en que la onda generada por la anterior colisión no es ni un máximo ni un mínimo. Es decir, impacta sobre una zona de pendiente no nula que, además de hacer que la gota vuelva a ascender, le concede un impulso horizontal. Además, se crea un nuevo frente de ondas como resultado del impacto, que se superpone al anterior.

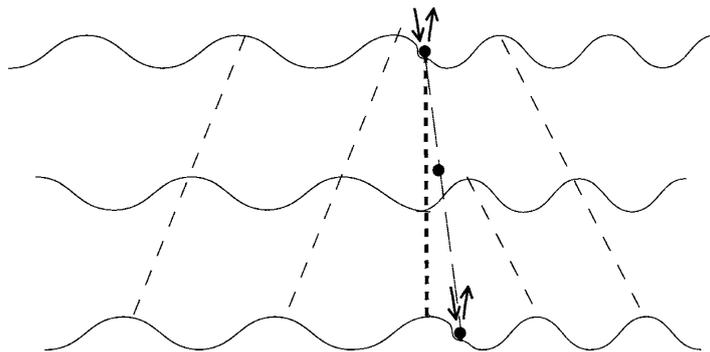


Figura 13: Esquema del impacto de la gota donde se observa los desfases entre la velocidad de la gota y la velocidad de grupo de las ondas. Se representa en ella la aproximación de no atenuación y efecto inmediato del impacto. Fuente: véase Protière *et al.* (2006), página 93.

Si suponemos que la onda que se crea lo hace instantáneamente en todos los puntos del recipiente y que además sustituye completamente a la anterior de modo que se evita la superposición de las ondas como se muestra en la Figura 13, se simplifica en gran medida el estudio del movimiento.

Con este modelo, la inclinación de la superficie en el evento de impacto será el cociente entre la velocidad que lleva la gota y la velocidad de las ondas de Faraday que se generan.

Una vez identificado el motivo de la componente horizontal del impulso, hay que tener en cuenta las fuerzas que entran en juego durante la colisión entre gota y superficie que permitan finalmente la aplicación de las ecuaciones dinámicas. Para ello se consideran principalmente dos contribuciones (Protière *et al.* , 2006):

1. Fuerza efectiva debida al cambio de momento durante la colisión F^b , que deberá ser proporcional a la amplitud del forzado vertical a . Para poder ser incluida en las ecuaciones de movimiento de manera simple, se promediará en un periodo completo de oscilación. Como se verá a continuación, esto se hará también para el resto de las fuerzas que entran en juego.

Entonces, la componente horizontal de esta fuerza dependerá de la inclinación de la superficie en el punto de contacto como se acaba de mencionar, de manera que si la velocidad de la gota es $V_g = dx/dt$, y la velocidad de fase de las ondas de Faraday es V_F^φ dada por la relación de dispersión correspondiente, la proyección horizontal de la fuerza vendrá dada por su producto con el factor

$$\sin\left(2\pi\frac{V_g}{V_F^\varphi}\right).$$

2. Fuerza viscosa f^v debida al promedio en un periodo de la actuación de la fricción del aire durante el vuelo de la gota y posteriormente, durante la colisión, de la cizalladura de la gota con la lámina de aire que la sostiene sobre la superficie. Moláček & Bush (2013b) obtuvieron una expresión para este coeficiente a través del análisis dimensional,

$$f^v = Cmg\sqrt{\frac{\rho R}{\sigma}} + 6\pi\mu_a R\left(1 + \frac{\pi\rho_a g R}{6\mu_a \omega}\right). \quad (38)$$

En ella, el primer sumando hace referencia al contacto con la superficie, donde C es un parámetro fenomenológico ajustable. En el segundo sumando se tiene en cuenta la parte del trayecto de la gota en el aire, donde se puede observar claramente la *ley de Stokes* para la fuerza viscosa sobre una esfera en el primer factor sumado a un término de corrección debido a un movimiento no estacionario^{||}.

Considerando que estas son todas las fuerzas que entran en juego, la ecuación de movimiento para un promedio temporal viene dada por (Protière *et al.*, 2006)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F^b \sin\left(2\pi\frac{dx/dt}{V_F^\varphi}\right) - f^v\frac{dx}{dt}. \quad (39)$$

Esta expresión, a pesar de las aproximaciones realizadas, permite predecir en buena forma (véase sección 5.4) la propiedad fundamental del movimiento ajustando convenientemente a los resultados experimentales los parámetros F^b y f^v . Dicha propiedad es la aparición de una bifurcación en el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial ante variaciones de sus parámetros.

Si se analiza el caso estacionario en el límite de bajas velocidades, desarrollando la función trigonométrica hasta cuarto orden de modo que no se obtengan soluciones triviales, se obtiene que

$$F^b \left[\frac{2\pi}{V_F^\varphi} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{3!} \left(\frac{2\pi}{V_F^\varphi} \frac{dx}{dt} \right)^3 \right] = f^v \frac{dx}{dt}, \quad (40)$$

^{||}Obtenido a través de los números adimensionales de Reynolds Re y Strouhal St , con gran importancia en la mecánica de fluidos. De hecho, el término de corrección no es más que $ReSt/6$.

que definiendo el *límite de la bifurcación* F_c^b como aquella fuerza a la cual comienza el movimiento ($dx/dt = 0$),

$$F_c^b = f^v \frac{V_F^\varphi}{2\pi}, \quad (41)$$

se tienen dos soluciones de velocidad no nulas dadas por

$$V_g = \pm V_F^\varphi \frac{\sqrt{6}}{2\pi} \sqrt{\frac{F^b - F_c^b}{F^b}}. \quad (42)$$

En resumen, dado que se ha razonado que la fuerza F^b debe ser proporcional a la amplitud de oscilación, este modelo permite explicar que efectivamente existe un cierto valor de amplitud a partir del cual comienza el movimiento horizontal.

Ahora bien, como posteriormente se va a comparar las soluciones proporcionadas por este modelo con las obtenidas en el siguiente, será conveniente la adimensionalización de la ecuación. Para ello, se expresará la variable espacial en términos de la longitud de onda de las ondas de Faraday generadas, y la variable temporal en términos de el periodo de dichas ondas,

$$x' \equiv k_F x, \quad t' \equiv t/T_F,$$

donde k_F es el número de ondas de Faraday y T_F su periodo.

Con este cambio de variable, la ecuación (39) podrá expresarse como

$$\kappa \ddot{x} + \dot{x} = \beta \sin \dot{x}, \quad (43)$$

donde se ha utilizado que la velocidad de fase de las ondas de Faraday es $V_F^\varphi = 2\pi k_F T_F$, y se han introducido los parámetros adimensionales

$$\kappa \equiv \frac{m}{f^v T_F}, \quad \beta \equiv \frac{F^b k_F T_F}{f^v}. \quad (44)$$

Así, la condición de velocidad estacionaria (40) tomará ahora la forma

$$\beta \dot{x} - \beta \frac{\dot{x}^3}{3!} = \dot{x},$$

de modo que (42) se traduce en

$$\dot{x} = \sqrt{6 \frac{\beta - 1}{\beta}}. \quad (45)$$

Así, el valor de β a partir del cual se da el movimiento horizontal es $\beta = 1$.

De este análisis se deduce que, dada la definición de los parámetros adimensionales (44), los valores estacionarios finales no dependen del valor de las fuerzas por separado sino de la razón entre ellas.

Se verá sin embargo en el análisis numérico de las soluciones de esta ecuación (sección 5.3) que, aunque desarrollando el seno hasta cuarto orden predice exactamente el valor

β a partir del cual se tienen soluciones**, esta aproximación deja de ser válida para valores poco superiores a la propia condición de inestabilidad. Para valores a partir de aproximadamente $\beta \approx 1,1$, se observa en la Figura 14 que hay que resolver la condición mediante el análisis numérico de la ecuación trascendente.

5.2. Segundo modelo

En este modelo ideado y llevado a cabo en primer lugar por Oza *et al.* (2013), se parte de una forma similar para la ecuación de movimiento, solo que esta vez se tendrán en cuenta todos los frentes generados por colisiones anteriores, denominado *efecto memoria*. Se considerará también una forma más realista para las ondas que genera cada colisión, teniendo en cuenta que no se crean instantáneamente en toda la superficie del fluido, además de ser amortiguadas en el tiempo (lo cual no se consideró en el caso anterior).

Sin embargo, se reitera que la ecuación dinámica del sistema será fundamentalmente la misma que en el modelo anterior, generalizada a las dos direcciones horizontales,

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = F^b \vec{\nabla} \mathcal{H}(\vec{x}, t) - f^v \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad (46)$$

donde al igual que en el caso anterior, las magnitudes están promediadas en un periodo de bote.

Aquí, $\mathcal{H}(\vec{x}, t)$ es la altura de la deformación de la superficie con respecto a la situación de equilibrio horizontal, que será la superposición de los distintos frentes $h_n(\vec{x}, t)$ producidos por todas las colisiones realizadas por la gota en su tiempo de existencia, de modo que $\mathcal{H}(\vec{x}, t) = \sum_n h_n(\vec{x}, t)$.

En cuanto a la descripción del frente producido por cada colisión, a pesar de que pudiera parecer más simple y certera una senoide amortiguada en el espacio y en el tiempo, Eddi *et al.* (2011) demostraron que ésta da lugar a ciertas singularidades en el punto de contacto que no se corresponden con la experiencia, y en su lugar propusieron una descripción en términos de funciones de Bessel de orden cero con una atenuación temporal, que en conjunto resulta ser de la forma

$$h_n(\vec{x}, t) = A J_0(k_F |\vec{x} - \vec{x}(t_n)|) e^{-\frac{t-t_n}{T_F M_e}} \cos \frac{\omega t}{2} H(t - t_n). \quad (47)$$

Aquí, A es un parámetro con dimensiones de longitud ajustable experimentalmente, t_n el valor de tiempo en el que se produce el contacto n entre gota y superficie, y $H(t - t_n)$ la función de *Heaviside* que impone que el frente n comienza en el tiempo t_n .

En esta expresión cabe destacar la introducción del parámetro fenomenológico adimensional M_e , que es el denominado *factor de memoria*, un factor que modula la exponencial de modo que dependiendo de su valor son solo apreciable una cierta cantidad pasada de colisiones, y viene dada por (Eddi *et al.*, 2011)

$$M_e \equiv \frac{T_d}{T_F (1 - a/a_C)}.$$

**Lo cual se puede ver de inmediato haciendo $\ddot{\vec{x}} = 0$ y $\beta = 1$ en (43).

Esta expresión hace referencia a que cuanto más cerca se esté operando de la amplitud crítica de la inestabilidad, mayor será la perturbación producida por la gota de modo que tarde más tiempo dicho frente en atenuarse. Se ha definido también T_d , que es el tiempo que tardaría en atenuarse el frente en ausencia de forzado.

Con esta descripción, la deformación total producida en la superficie es, si se considera que el periodo de los botes es el mismo que el de las ondas de Faraday de manera que $t_n = nT_F$,

$$\mathcal{H}(\vec{x}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor t/T_F \rfloor} AJ_0(k_F |\vec{x} - \vec{x}(nT_F)|) e^{-\frac{t-nT_F}{T_F M_e}} \cos \frac{\omega t}{2},$$

donde se ha eliminado la función de Heaviside ya que ahora se está introduciendo el corte en el límite superior de la integral.

Ahora bien, al estar promediando sobre T_F , solo es relevante la descripción de la superficie en los tiempos de contacto, y como se ha asumido que tanto el periodo de la gota como el periodo de las ondas que genera en la superficie son iguales, se podrá tomar en nuestra descripción al último factor como uno en la expresión anterior. Así, se está eliminando la descripción vertical del movimiento de la gota, describiéndose a partir de ahora solo la parte horizontal. Esto se conoce razonablemente como la *aproximación estroboscópica*,

$$\mathcal{H}(\vec{x}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor t/T_F \rfloor} AJ_0(k_F |\vec{x} - \vec{x}(nT_F)|) e^{-\frac{t-nT_F}{T_F M_e}}. \quad (48)$$

Introduciendo esta expresión en (46), se llega a una ecuación diferencial *con retardo*,

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + f^v \frac{d\vec{x}}{dt} = F^b A k_F \sum_{n=-\infty}^{\lfloor t/T_F \rfloor} J_1(k_F |\vec{x} - \vec{x}(nT_F)|) \frac{\vec{x} - \vec{x}(nT_F)}{|\vec{x} - \vec{x}(nT_F)|} e^{-\frac{t-nT_F}{T_F M_e}}, \quad (49)$$

donde se ha utilizado que $J'_0(x) = -J_1(x)$.

Sin embargo, como se quiere obtener a partir de ella características relevantes tales como el valor de amplitud a partir del cual se da el movimiento horizontal, o la velocidad en un supuesto estado estacionario, será más cómodo transformar dicha ecuación con retardo en una ecuación *integro-diferencial* que sea más fácilmente tratable de forma analítica^{††}. Para ello, habrá que transformar (48) en una integral, lo cual se hace en el Apéndice A, resultando en

$$\mathcal{H}(\vec{x}, t) = \frac{1}{T_F} \int_{-\infty}^t ds J_0(k_F |\vec{x} - \vec{x}(s)|) e^{-\frac{t-s}{T_F M_e}}. \quad (50)$$

Finalmente, introduciendo (50) en (46) se llega a que

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + f^v \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{F^b}{T_F} \int_{-\infty}^t ds J_1(k_F |\vec{x}(t) - \vec{x}(s)|) \frac{\vec{x}(t) - \vec{x}(s)}{|\vec{x}(t) - \vec{x}(s)|} e^{-\frac{t-s}{T_F M_e}}, \quad (51)$$

^{††}A pesar de ello, es posible realizar un estudio de la estabilidad de la ecuación en la forma (49), llegando a los mismos resultados. Este análisis se hace en detalle en el Apéndice B.

Ahora, al igual que se hizo en el modelo 1, para poder comparar los resultados proporcionados por ambos modelos, deberá adimensionalizarse esta expresión^{‡‡}.

Para ello, se escoge como escala de tiempo $T_F M_e$, y de espacio el número de ondas de Faraday,

$$t' \equiv \frac{t}{T_F M_e}, \quad x' \equiv k_F x,$$

que introduciendo de nuevo los parámetros adimensionales κ y β definidos en (44), lleva a

$$\frac{\kappa}{M_e} \ddot{x} + \dot{x} = \beta M_e^2 \int_{-\infty}^t ds J_1(|\vec{x}(t) - \vec{x}(s)|) \frac{\vec{x}(t) - \vec{x}(s)}{|\vec{x}(t) - \vec{x}(s)|} e^{-(t-s)}. \quad (52)$$

Se procede ahora por tanto a estudiar las condiciones de estabilidad de esta ecuación. Para hacer esto, se linealizará (52) de modo que se pueda expresar como un sistema autónomo en que la estabilidad venga dada por la magnitud de los coeficientes.

En primer lugar, se introduce el cambio de variable $\xi \equiv t - s$ de manera que (52) se exprese como

$$\frac{\kappa}{M_e} \ddot{x} + \dot{x} = \beta M_e^2 \int_0^{+\infty} d\xi J_1(|\vec{x}(t) - \vec{x}(t - \xi)|) \frac{\vec{x}(t) - \vec{x}(t - \xi)}{|\vec{x}(t) - \vec{x}(t - \xi)|} e^{-\xi}.$$

Así, si la variación de $\vec{x}(t)$ es pequeña en todo el rango de tiempos, es decir, si se toma la velocidad aproximadamente constante $\vec{x}(t - \xi) \approx \vec{x}(t) - \xi \dot{\vec{x}}(t)$, $|\vec{x}(t) - \vec{x}(t - \xi)| \approx \xi \dot{\vec{x}}(t)$, y del mismo modo $J_1(|\vec{x}(t) - \vec{x}(t - \xi)|) \approx J_1(0) + J_1'(0) d|\vec{x}(t) - \vec{x}(t - \xi)|$, la ecuación anterior resulta

$$\frac{\kappa}{M_e} \ddot{x} + \dot{x} = \beta M_e^2 \int_0^{+\infty} d\xi J_1'(0) \dot{\vec{x}}(t) \xi e^{-\xi},$$

donde se ha utilizado que $J_1(0) = 0$.

Entonces, como $\int_0^{\infty} d\xi \xi e^{-\xi} = 1$ y $J_1'(0) = 1/2$, esta ecuación puede ser finalmente expresada como

$$\frac{\kappa}{M_e} \ddot{x} + \dot{x} = \frac{\beta M_e^2}{2} \dot{\vec{x}}, \quad (53)$$

de modo que si se define la velocidad $\vec{u}(t) \equiv \dot{\vec{x}}(t)$, puede escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= \vec{u}(t), \\ \dot{\vec{u}}(t) &= \frac{M_e}{\kappa} \left(\frac{\beta M_e^2}{2} - 1 \right) \vec{u}(t). \end{aligned} \quad (54)$$

Así, el movimiento horizontal será estable si el coeficiente que acompaña a $\vec{u}(t)$ en la segunda ecuación es negativo o nulo, e inestable si es positivo.

^{‡‡}Esto, al contrario que en el caso anterior, se llevará a cabo antes que el análisis de los casos estacionarios debido a la complejidad de la expresión, ya que escribiéndola en forma adimensional se podrá hacer dicho análisis de forma más cómoda.

Por tanto, la condición para que el movimiento horizontal descrito por la gota sea estable es

$$\beta M_e^2 \leq 2. \quad (55)$$

Finalmente, a partir de (52) se puede encontrar una expresión para la velocidad estacionaria que adquiere el sistema sin más que sustituir soluciones del tipo $\vec{x}(t) = (ut, 0)$, con u constante. Esto es debido a que el problema tal y como se está tratando aquí tiene simetría de revolución, de modo que no presenta ningún problema eliminar una de las variables para hacerlo unidimensional. Sustituyendo la condición en (52),

$$u = \beta M_e^2 \int_{-\infty}^t ds J_1(u(t-s)) e^{-(t-s)}. \quad (56)$$

La integral que aparece en la ecuación, expresada a través del cambio de variable $\xi \equiv t - s$,

$$u = \beta M_e^2 \int_0^{+\infty} ds J_1(u\xi) e^{-\xi},$$

es directamente integrable,

$$u = \beta M_e^2 \frac{1}{u} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \right),$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[2\beta M_e^2 - 1 - \sqrt{1 + 4\beta M_e^2} \right]^{1/2}, \quad (57)$$

de manera que se obtiene finalmente una forma analítica para escribir la velocidad en el estado estacionario del sistema, donde además se puede observar que se llega a la misma condición (55) de comienzo de movimiento imponiendo $u = 0$.

Como comparación con los resultados propuestos por el modelo anterior, se observa que se llegan a condiciones distintas dada la introducción del factor de memoria, que no está definido en el marco del modelo anterior. Sin embargo, ambos modelos tienen en sus parámetros adimensionales factores tales como la fuerza promedio en un periodo de Faraday de modo que en cada uno de los modelos dicha contribuciones como ésta deberán ser distintas para poder reproducir al experimento.

5.3. Análisis numérico de los modelos

Como verificación final del estudio analítico llevado a cabo a partir de las ecuaciones planteadas en los modelos de las secciones 5.1 y 5.2, se tratarán de resolver numéricamente las principales expresiones dadas por ellos. A partir de esto se comprobarán tanto las condiciones de estabilidad deducidas en secciones anteriores, como las velocidades estacionarias a las que se llega.

Posteriormente, en la sección final 5.4 se unificará todo el estudio comparando estos resultados con los obtenidos experimentalmente por diferentes autores.

En primer lugar, la verificación de los resultados dados por el modelo 1 se realizan sin más que imponiendo algoritmos de resolución de ecuaciones diferenciales tales como Runge-Kutta mediante el uso de funciones propias de Matlab como pueden ser *ode45*^{§§}. Esto se hace sin mayor dificultad para una ecuación diferencial ordinaria del tipo que presenta (43).

En la Figura 14 se representa la comparación de la velocidad estacionaria obtenida a través de diversas simulaciones numéricas variando el parámetro β y las obtenidas analíticamente a partir de (45).

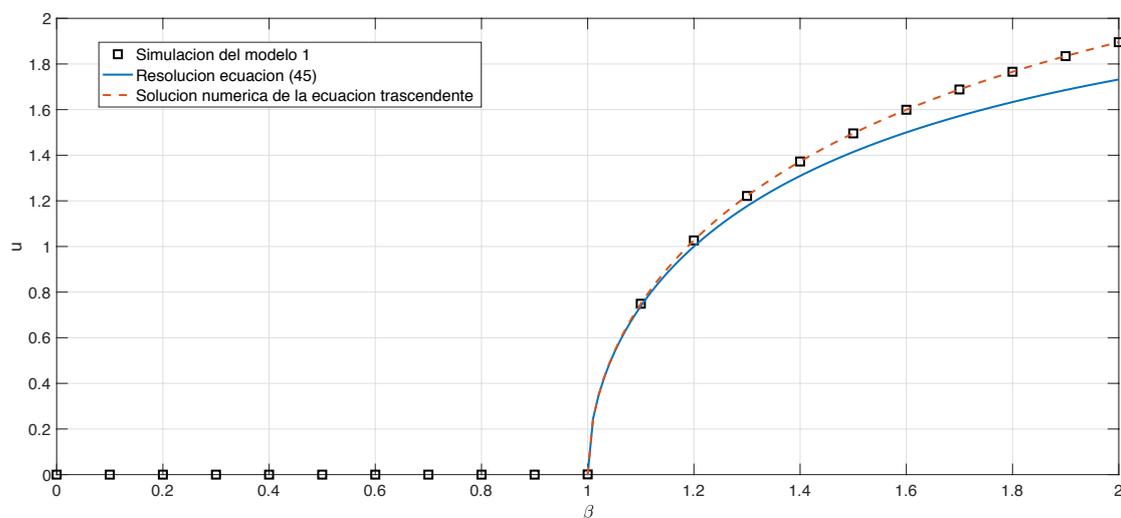


Figura 14: Comparación de las distintas formas de resolución de (43), en la que se pueden ver los distintos límites de validez. La representación de puntos corresponde a los valores finales de velocidad procedentes de la simulación numérica de (43) para tiempos suficientemente grandes; la curva continua es la resolución aproximada de las soluciones dada por (45); y la curva discontinua es el valor estacionario dado por la propia ecuación resolviendo numéricamente la ecuación trascendente que presenta.

Sin embargo, el principal interés de esta sección está en la resolución del segundo modelo, ya que no se trata de ecuaciones diferenciales ordinarias como en el caso anterior, sino de una ecuación diferencial con retardo (49), y una ecuación integro-diferencial (51).

Se elaboraron códigos que permitieron resolver numéricamente ambos tipos de ecuaciones, las cuales se muestran comparadas en la Figura 15.

En ella, se recogen dos métodos distintos para la resolución de la ecuación diferencial con retardo. Esto se debe a que el coste computacional de retener todos los términos de la suma desde que comienza el bote de la gota son en algunas configuraciones muy

^{§§}En ellos, dado que la ecuación (43) dada por el modelo 1 es homogénea, necesitará para que su solución no sea la trivial una condición inicial no nula. Entonces, dado que las soluciones estacionarias no dependen de esta condición inicial para tiempos suficientemente grandes, se tomarán de forma arbitraria escogiendo de manera coherente a esto el límite superior de tiempo.

elevados, de manera que solo se retiene un cierto número pasado de botes consistente con lo establecido por el factor de memoria.

Para el caso de la resolución de la ecuación integro-diferencial, dado que la integral en (51) está evaluada desde $-\infty$, y exactamente no se puede comenzar desde un valor anterior por la forma en que se ha llegado a ella, se necesita una condición inicial no nula para su resolución, tal y como se hizo para el modelo 1.

Sin embargo, en este caso no es trivial imponer una condición inicial, con lo que el procedimiento fue imponerla como el resultado del valor estacionario dado por el modelo 1.

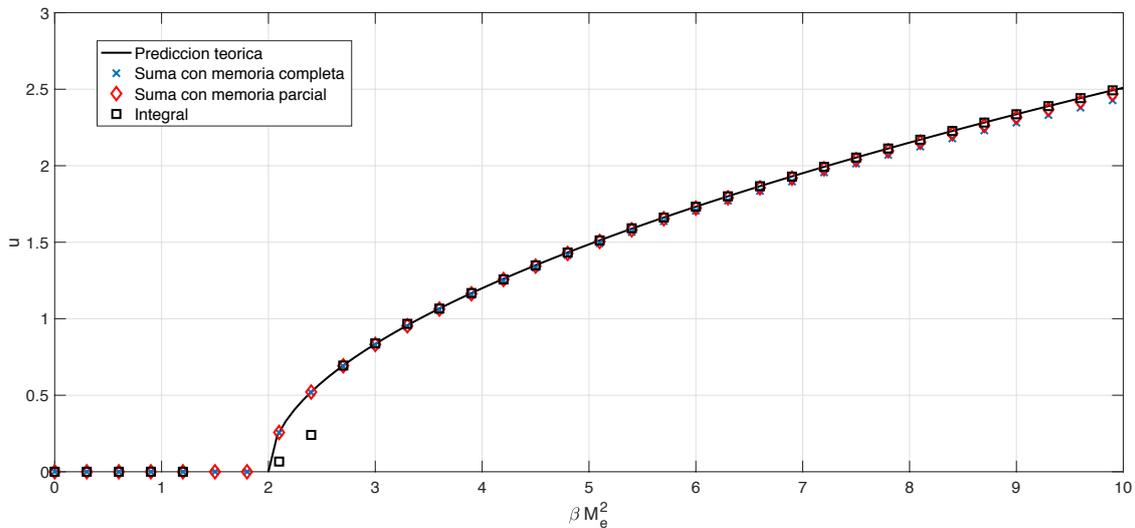


Figura 15: Comparación de las distintas formas de resolución del modelo 2. La representación continua representa las soluciones analíticas dadas por (57); la representación en cruces es la solución de la ecuación diferencial con retardo considerando todos los sumandos; la representación en rombos es la solución considerando un cierto número de sumandos anteriores; y finalmente la representación en cuadrados es la solución de la ecuación integro-diferencial. Se observa que hace falta un número elevado de βM_e^2 para que las cuatro formas de resolución comiencen a diferir, salvo los primeros valores no nulos dados por la integral. Esto se debe a que el coste computacional de imponer tiempos lo suficientemente elevados para llegar al estado estacionario en el código en las proximidades de la bifurcación es inasumible para el ordenador que se ha utilizado para realizar las simulaciones, si bien la tendencia hacia los valores marcados por el resto de modelos era clara. Todos los códigos han sido elaborados por el autor, salvo el aquí etiquetado con rombos, que fue elaborado por Alberto Pérez Izquierdo.

En la Figura 15 se observa que tanto la ecuación integro-diferencial como la ecuación diferencial con retardo dan lugar a soluciones prácticamente idénticas en un muy amplio rango de valores de βM_e^2 , lo cual refuerza todo el análisis realizado en las secciones anteriores, que era el objetivo buscado en esta sección.

A modo de comprobar visualmente la bondad de las simulaciones realizadas, se representan en la Figura 16 de forma monodimensional la deformación de la superficie junto con la posición de la gota. Éstas han podido ser obtenidas como resultado de haber podido resolver las ecuaciones diferenciales.

En ellas se puede observar cómo la mayor velocidad estacionaria final está relacionada con la posición de la colisión de la gota en partes más inclinadas de la superficie.

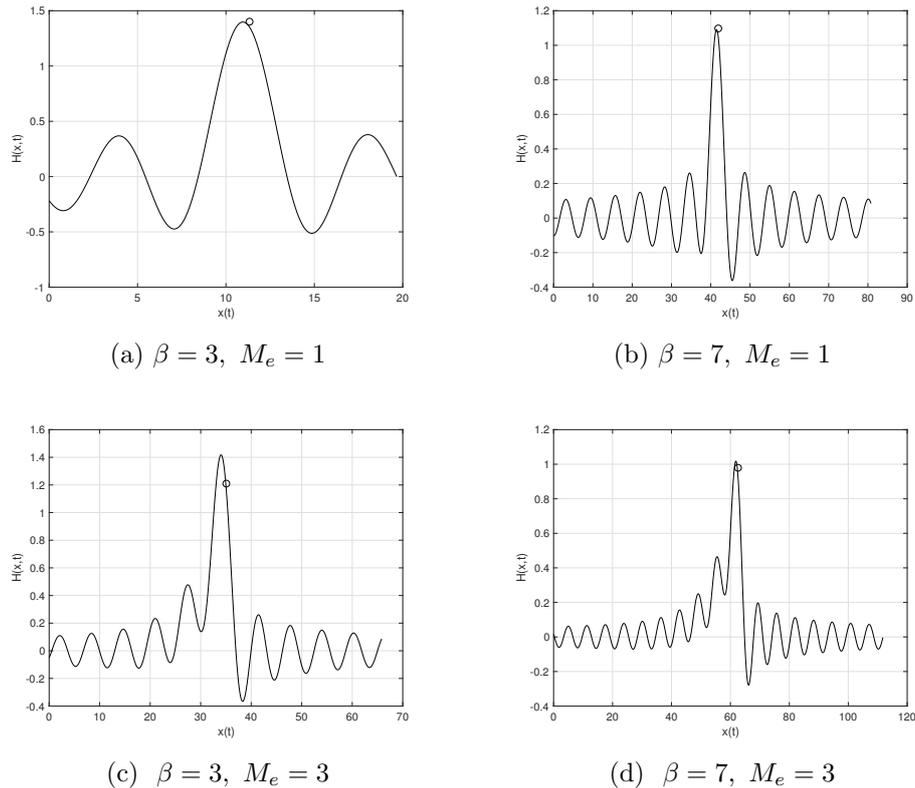


Figura 16: Representación de la superficie con la posición de la gota (tamaño no realista) en un punto intermedio de las trayectorias con características señaladas. Se observa la incidencia en puntos más inclinados a mayor velocidad, tal y como suponen los modelos estudiados.

5.4. Verificación experimental con la literatura

Una vez realizado tanto el estudio analítico de los modelos propuestos (secciones 5.1 y 5.2) como su verificación a través de simulación numérica (5.3), se comprobarán finalmente con la experiencia a través de la conversión de los resultados obtenidos en primer lugar por Protière *et al.* (2006), y posteriormente por Oza *et al.* (2013).

En el primero de ellos se puede comprobar que el comportamiento del movimiento horizontal como función de la amplitud de oscilación atiende a una forma funcional del tipo

de soluciones que da el propio modelo. Así, un ajuste fenomenológico de los parámetros introducidos permitirá la descripción del sistema. Esto se observa en la Figura 17.

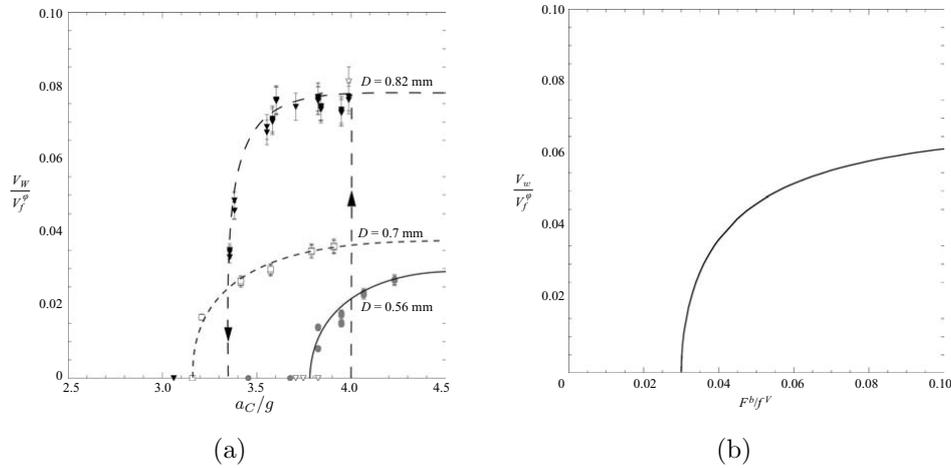


Figura 17: Resultados experimentales y representación de las soluciones en función del parámetro de control F^b/f^v . En (a) se representa el comportamiento para distintos diámetros de las gotas indicados en la figura. Fuente: véase Protière *et al.* (2006), página 95.

En cuanto al segundo modelo, se puede observar del mismo modo en la Figura 18 una verificación de la forma funcional realizada por Oza *et al.* (2013).

Por tanto, en ambos modelos se puede observar que un ajuste adecuado de los parámetros que entran en juego permitirán no solo una completa descripción del fenómeno, sino también la obtención de la magnitud de las fuerzas que entran en juego en este movimiento.

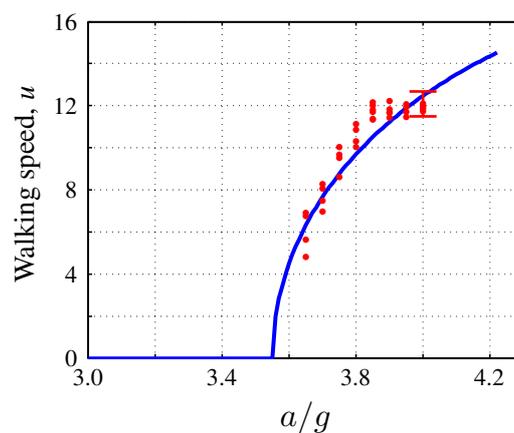


Figura 18: Resultados experimentales y representación de las soluciones en función del forzado adimensional a/g . Los puntos proceden de los resultados experimentales realizados por Moláček & Bush (2013b). Fuente: véase Oza *et al.* (2013), página 562.

6. Conclusiones y trabajos futuros

A lo largo de este trabajo se ha tratado de realizar una comprensión completa del fenómeno de las gotas errantes, basándose principalmente en los aspectos fundamentales del origen de este movimiento.

Para ello, se ha planteado un sistema fluido verticalmente oscilante que ha permitido obtener las condiciones bajo las cuales se producen las ondas de Faraday, claves posteriores para entender los distintos regímenes en que pueden encontrarse las gotas. Esto ha resultado ser un problema de mecánica de fluidos de cierta complejidad teniendo en cuenta la ausencia de conocimiento previo sobre el tema. La preparación necesaria para afrontar este problema se llevó a cabo en el curso anterior 2017/2018 como alumno interno del departamento de electrónica y electromagnetismo.

Como verificación de los conocimientos obtenidos sobre la producción de estas inestabilidades, se dispuso un montaje experimental en el cual se pudieron verificar las predicciones teóricas mencionadas anteriormente a través de la puesta en oscilación de un recipiente cilíndrico mediante los dispositivos descritos en la sección 3.4. Dado el éxito del experimento, permitió incluso producir de forma prematura al estudio las gotas botando sobre la superficie.

Finalmente, la descripción del movimiento horizontal a través de los dos modelos propuestos y la búsqueda de soluciones a las ecuaciones resultantes dieron lugar a la simulación numérica de éstas, lo cual planteó la creación de códigos en Matlab para la resolución de ecuaciones diferenciales con retardo y ecuaciones integro-diferenciales.

Con todo ello, se concluye satisfactoriamente la elaboración de este trabajo como una completa base teórica de la descripción de las gotas errantes. Esto sienta las bases para el mejor entendimiento de comportamientos más complejos que puedan plantear este tipo de sistemas.

Como continuación de este trabajo, en la actualidad se está estudiando el acoplamiento de este fenómeno con la imposición de campos eléctricos y magnéticos, que modifican la relación de dispersión y por ello abren una nueva puerta al control de estas gotas no solo con oscilaciones, sino también con campos. Esto está siendo posible gracias a la obtención de una beca de colaboración del Ministerio de Educación y Formación Profesional para el presente curso académico 2018/2019.

7. Referencias

- Benjamin, T.B., & Ursell, F. 1954. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. *Proc. R. Soc.*, **225**, 505–515.
- Bush, J. 2018. Quantum mechanics writ large. *PNAS*, **107**(41), 17455–17446.
- Eddi, A., Sultan, E., Moukhtar, J., Fort, E., Rossi, M., & Couder, Y. 2011. Information stored in Faraday Waves: the origin of path memory. *J. Fluid Mech.*, **674**, 433–463.
- Faraday, M. 1831. On a peculiar class of Acoustical Figures; and on certain Forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic Surfaces. *Phil. Trans. R. Soc.*, **52**, 319–340.
- Holmes, P. J. 1982. The dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table. *J. of Sound and Vibration*, **84**(2), 173–189.
- Kumar, K. 1996. Linear theory of Faraday instability in viscous liquids. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **452**, 1113–1126.
- Landau, L., & Lifshitz, E. M. 1987. *Fluid mechanics*. Pergamon Press.
- McLachlan, N. W. 1947. *Theory and application of Mathieu functions*. Oxford University Press.
- Moláček, J., & Bush, J. 2013b. Drops walking on a vibrating bath: towards a hydrodynamic pilot-wave theory. *J. Fluid Mech.*, **727**, 612–647.
- Nachbin, André, Milewski, Paul A., & Bush, John W. M. 2017. Tunneling with a hydrodynamic pilot-wave model. *Phys. Rev. Fluids*, **2**(Mar), 034801.
- Oza, A. U., Rosales, R. R., & Bush, J. 2013. A trajectory equation for walking droplets: hydrodynamic pilot-wave theory. *J. Fluid Mech.*, **737**, 552–570.
- Oza, A. U., Siéfert, E., Harris, D. M., Moláček, J., & Bush, J. W. M. 2017. Orbiting pairs of walking droplets: Dynamics and stability. *Phys. Rev. Fluids*, **2**(May), 053601.
- Protière, S., Boudaoud, A., & Couder, Y. 2006. Particle-wave association on a fluid interface. *J. Fluid Mech.*, **554**, 85–108.
- Pucci, G., Harris, D. M., Faria, L. M., & Bush, J. W. M. 2018. Walking droplets interacting with single and double slits. *J. Fluid Mech.*, **835**.
- Rand, R. H. 2016. Mathieu’s Equation. *In: Time-Periodic Systems*. Cornell University, CISM.
- Tuffillaro, N. B., & Albano, A. M. 1986. Chaotic dynamics of a bouncing ball. *Am. J. Phys.*, **54**, 939–944.
- Walker, J. 1978. Drops of liquids can be made to float on the liquid. What enables them to do so? *Sci. Am.*, **238-6**, 123–129.

A. Transformación de un sumatorio en una integral

Se tratará aquí brevemente de dar las claves para la transformación del sumatorio dado por (48) en la integral (50), siguiendo un método que puede ser utilizado en general.

Para ello, expresando en primer lugar (48) de forma más cómoda,

$$\sum_{n=-\infty}^{t/T_F} Af(nT_F)e^{-\frac{t-nT_F}{T_F M_e}}.$$

El objetivo será expresar este sumatorio de manera que se pueda aplicar la igualdad

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right). \quad (58)$$

Para ello, se aplica el cambio de variable $n \rightarrow -n$, que sumado a un cambio de orden de los sumandos da lugar a

$$\sum_{n=-\infty}^{t/T_F} Af(nT_F)e^{-\frac{t-nT_F}{T_F M_e}} = \sum_{n=\infty}^{-t/T_F} Af(-nT_F)e^{-\frac{t+nT_F}{T_F M_e}} = \sum_{n=-t/T_F}^{+\infty} Af(-nT_F)e^{-\frac{t+nT_F}{T_F M_e}}.$$

Entonces, realizando el cambio de variable $k \equiv n + t/T_F$, el sumatorio queda

$$\sum_{k=0}^{+\infty} Af(t - kT_F)e^{-k/M_e}.$$

Así, identificando términos con (58), se tiene que $b \rightarrow \infty$ y $a = 0$ de manera que el sumatorio anterior equivale a

$$A \int_0^{+\infty} dk f(t - kT_F)e^{-k/M_e}.$$

Finalmente, aplicando en primer lugar el cambio de variable $s' \equiv kT_F$,

$$\frac{A}{T_F} \int_0^{+\infty} ds' f(t - s')e^{-s'/(T_F M_e)},$$

y últimamente $s \equiv t - s'$, se obtiene

$$\frac{A}{T_F} \int_{-\infty}^t ds f(s)e^{-\frac{t-s}{T_F M_e}}, \quad (59)$$

que es finalmente la expresión mostrada en la página 30.

B. Análisis de estabilidad de una ecuación diferencial con retardo

Se tratará aquí realizar el análisis de estabilidad de las soluciones en la forma (49), que linealizada a través del cambio de variable $\vec{x}' \equiv k_F \vec{x}$, $t' = t/T_F$ y definiendo κ y β como se hizo en (44), toma la forma

$$\kappa \ddot{\vec{x}} + \dot{\vec{x}} = \beta \sum_{n=-\infty}^{\lfloor t \rfloor} J_1(|\vec{x} - \vec{x}(n)|) \frac{\vec{x} - \vec{x}(n)}{|\vec{x} - \vec{x}(n)|} e^{-(t-n)/M_e}. \quad (60)$$

Mediante procedimientos similares a los realizados en la sección 5.2, se impone en primer lugar el cambio de variable $m \equiv \lfloor t \rfloor - n$, de modo que el sumatorio queda

$$\sum_{m=+\infty}^0 J_1(|\vec{x}(t) - \vec{x}(\lfloor t \rfloor - m)|) \frac{\vec{x}(t) - \vec{x}(\lfloor t \rfloor - m)}{|\vec{x}(t) - \vec{x}(\lfloor t \rfloor - m)|} e^{-(t+m-\lfloor t \rfloor)/M_e}.$$

Así, si de nuevo se toma que las variaciones de $\vec{x}(t)$ son pequeñas en todo el rango de tiempos, utilizando $\xi \equiv t - \lfloor t \rfloor$ definida en los intervalos entre saltos $\xi \in [0, 1]$, se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{x}(\lfloor t \rfloor - m) &= \vec{x}(t - \xi - m) \approx \vec{x}(t) - (\xi + m)\dot{\vec{x}}(t), \\ J_1(|\vec{x}(t) - \vec{x}(t - \xi - m)|) &\approx \frac{1}{2} d|\vec{x}(t) - \vec{x}(t - \xi - m)|, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado que $J_1(0) = 0$ y $J_1'(0) = 1/2$.

El sumatorio se podrá escribir entonces como

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2} (\xi + m) \dot{\vec{x}}(t) e^{-(\xi+m)/M_e}. \quad (61)$$

Analizando los términos por separado, se puede separar en un primer sumando

$$\frac{1}{2} \dot{\vec{x}}(t) \xi \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-(\xi+m)/M_e} = \frac{1}{2} \dot{\vec{x}}(t) \xi e^{-\xi/M_e} \sum_{m=0}^{+\infty} (e^{-1/M_e})^m = \frac{1}{2} \dot{\vec{x}}(t) \frac{\xi e^{-\xi/M_e}}{1 - e^{-1/M_e}},$$

ya que al ser $M_e > 1$, y con ello $e^{-1/M_e} < 1$, se trata de una progresión geométrica.

En cuanto al segundo sumando, se puede escribir como

$$\frac{1}{2} \dot{\vec{x}}(t) e^{-\xi/M_e} \sum_{m=0}^{+\infty} m e^{-m/M_e},$$

con lo que se trata de nuevo de una progresión geométrica de razón $r = \exp(-1/M_e)$, en este caso su derivada dado el factor m , de manera que la expresión anterior equivale a

$$\frac{1}{2} \dot{\vec{x}}(t) e^{-\xi/M_e} \frac{e^{-1/M_e}}{(1 - e^{-1/M_e})^2}.$$

Con todo ello, (61) queda

$$\frac{1}{2}\dot{\vec{x}}(t)(\xi C + D)e^{-\xi/M_e}, \quad (62)$$

donde se ha definido

$$C \equiv \frac{1}{1 - e^{-1/M_e}}, \quad D \equiv \frac{e^{-1/M_e}}{(1 - e^{-1/M_e})^2}.$$

Con esta linealización del sumatorio, (60) queda finalmente expresada como

$$\kappa\ddot{\vec{x}} + \dot{\vec{x}} = \frac{\beta}{2}\dot{\vec{x}}(\xi C + D)e^{-\xi/M_e}. \quad (63)$$

Ahora bien, aunque esta ecuación sea válida en general, se observa que se mezclan variables independientes distintas, t y ξ , donde además en $\xi \equiv t - [t]$ se tiene una variable discreta, lo cual es producto de haber realizado la suma. Esto lleva a tener que separar la ecuación en todos los tramos que defina la variable discreta.

En resumen, haber realizado la suma en la ecuación con retardo hace que aparezca una *ecuación en diferencias*, de manera que la estabilidad vendrá dada por la diferencia que toman las variables dependientes en los extremos de cada tramo que define $[t]$.

Definiendo $\vec{v}(t) \equiv \dot{\vec{x}}(t)$, se podrá expresar (63) como un sistema de dos ecuaciones de primer orden,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= \vec{v}(t), \\ \dot{\vec{v}}(t) &= \left[\frac{\beta}{2\kappa}(\xi C + D) - \frac{1}{\kappa} \right] \vec{v}(t), \end{aligned} \quad (64)$$

donde para encontrar los valores de las variables en los extremos de cada tramo, es decir, entre $t = [t]$ y $t = [t] + 1$, habrá que integrar (64) entre estos tiempos.

Para ello, como entre dos saltos se cumple que $dt \equiv d\xi$, integrando se obtiene que

$$\ln \frac{\vec{v}_{n+1}}{\vec{v}_n} = \frac{\beta C}{2\kappa} \int_0^1 d\xi \xi e^{-\xi/M_e} + \frac{\beta D}{2\kappa} \int_0^1 d\xi e^{-\xi/M_e} - \frac{1}{\kappa},$$

donde se ha definido $\vec{v}_n \equiv \vec{v}([t])$ y $\vec{v}_{n+1} \equiv \vec{v}([t] + 1)$.

Resolviendo estas integrales por partes, y teniendo en cuenta que se ha tomado que la velocidad no varía más que en un término lineal entre saltos de modo que $\ln(\vec{v}_{n+1}/\vec{v}_n) \approx \vec{v}_{n+1}/\vec{v}_n - 1$, la ecuación anterior queda

$$\begin{aligned} \frac{\vec{v}_{n+1}}{\vec{v}_n} - 1 &= \frac{\beta}{2\kappa} M_e^2 - \frac{1}{\kappa}, \\ \vec{v}_{n+1} &= \left[1 - \frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{\beta}{2} M_e^2 \right) \right] \vec{v}_n, \end{aligned}$$

de modo que finalmente se tiene una ecuación en diferencias para cada salto, donde la estabilidad vendrá dada por el signo del coeficiente: si éste es negativo o nulo, se tendrán soluciones estables, y si es positivo, inestables.

Imponiendo esto en la ecuación anterior se obtiene sin mayor dificultad que la condición de estabilidad pasa a ser

$$\beta M_e^2 \leq 2, \quad (65)$$

es decir, la misma encontrada en (55).