

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

TRABAJO DE FIN DE GRADO

---

AGUJEROS NEGROS DE SCHWARZSCHILD  
Y DETECCIÓN DE AGUJEROS NEGROS  
EN SISTEMAS BINARIOS

---

*Realizado por:*

Sara MUÑOZ TORRES

*Supervisado por:*

Diego GÓMEZ GARCÍA



Facultad de Física US

Departamento de Física de la Materia Condensada

Junio 2019



## RESUMEN

En este trabajo se abordará un tema muy popular pero del que hasta hace poco no se tenía mucha información: los agujeros negros. Y es que, aunque la idea surgiera con anterioridad, hasta la Teoría de la Relatividad de Einstein era solo eso, una mera idea sin base matemática ni sentido lógico. Así, se estudiará la solución de Schwarzschild a las ecuaciones de Einstein en el vacío, la cual predice matemáticamente la existencia de una singularidad en el espacio-tiempo, que, como se verá, está fuertemente relacionada con este misterioso concepto. La comprensión de este tema se realizará de una manera más intuitiva mediante representaciones gráficas, con las que se podrá entender la curvatura que generan los cuerpos masivos en el espacio-tiempo, así como el comportamiento de la luz y la materia en las proximidades de los agujeros negros.

Por otra parte, no todo es tan conceptual acerca de los agujeros negros, sino que estos realmente existen y se pueden detectar experimentalmente. De hecho, este tema está cogiendo cada vez más importancia debido a los recientes descubrimientos que se han logrado de agujeros negros en el Universo. En este documento se recopilarán algunas de estas detecciones. Para ello se estudiarán dos formas distintas de detectar agujeros negros: mediante la emisión de rayos X por su disco de acreción, y mediante la emisión de ondas gravitacionales generada en la fusión de estos.



# Índice

<b>I</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.	La formación de los agujeros negros estelares	2
2.	Sistema binario de estrellas y agujero negro	3
2.1.	Rayos X	4
2.2.	Observatorio Chandra	6
3.	Sistema binario de dos agujeros negros	7
3.1.	Ondas gravitacionales	7
3.2.	Interferómetros láser	10
3.3.	Observatorio LIGO	11
<b>II</b>	<b>El agujero negro de Schwarzschild</b>	<b>14</b>
4.	Métrica	14
4.1.	Singularidades	16
5.	Representaciones espacio-temporales	18
5.1.	Curvatura	18
5.2.	Diagrama espacio-temporal de Schwarzschild	20
5.3.	Coordenadas de Eddington-Finkelstein	24
5.4.	Colapso gravitatorio	26
5.5.	Coordenadas de Kruskal-Szekeres	28
5.6.	Diagrama espacio-temporal para las coordenadas de Kruskal-Szekeres	28
6.	La luz en la métrica de Schwarzschild	31
6.1.	Desvío	31
6.2.	Retraso	34
6.3.	Lentes gravitacionales	36
7.	Partícula cayendo radialmente	37

<b>III</b>	<b>Detección en sistemas binarios</b>	<b>41</b>
<b>8.</b>	<b>Por rayos X</b>	<b>41</b>
8.1.	Cynus X-1 . . . . .	41
8.2.	GRS 1915+105 (V1487 Aquilae) . . . . .	43
<b>9.</b>	<b>Por ondas gravitacionales</b>	<b>45</b>
9.1.	GW 150914: la primera onda gravitacional detectada . . . . .	45
9.2.	Catálogo de ondas gravitacionales . . . . .	48
<b>IV</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>51</b>



## Parte I

# Introducción

“Supongamos que las partículas de luz son atraídas de la misma manera que todos los demás cuerpos con los que estamos familiarizados, (...) de lo que no puede haber duda razonable siendo la gravedad, hasta donde sabemos o tenemos razones para creer, una ley universal de la naturaleza. Bajo esta suposición, si hubiese cualquier estrella cuya densidad fuese lo bastante grande, (...) toda luz emitida por ese cuerpo volvería hacia él por causa de su propia gravedad.”

Carta de J. Michell a H. Cavendish, 27 de noviembre de 1783.

*Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. 74, pag. 35.*

Aunque hoy en día se conozca la existencia de los agujeros negros, hace 200 años era una mera idea imposible. Como podemos leer en [1], esta idea surge de imaginar un objeto con una fuerza de gravedad tan gigantesca que nada pueda escapar de él, lo cual conllevaba que la velocidad de escape del agujero negro debía ser infinita, y por tanto este tendría que tener una masa y, por consiguiente, densidad infinitas, cosa que carece de lógica. En ese momento no se tenía aún consciencia del límite que suponía la velocidad de la luz, concepto que fue introducido por la relatividad especial. Fue entonces cuando la idea de agujero negro comenzó a tener más sentido, ya que ahora sí debía de tratarse de un cuerpo con una velocidad de escape finita. Aun así, seguían existiendo restricciones sobre esta teoría debido al descubrimiento de la dualidad onda-partícula de la luz, ya que no se puede aplicar el concepto de velocidad de escape a una onda. Es con la formulación de la **Teoría de la Relatividad General de Einstein** en 1916 cuando por fin se asienta el concepto de agujero negro como cuerpo que ha colapsado hasta un volumen ínfimo, capaz de curvar el espacio-tiempo <sup>1</sup> de manera que nada pueda escapar de él, ni tan siquiera la luz.

---

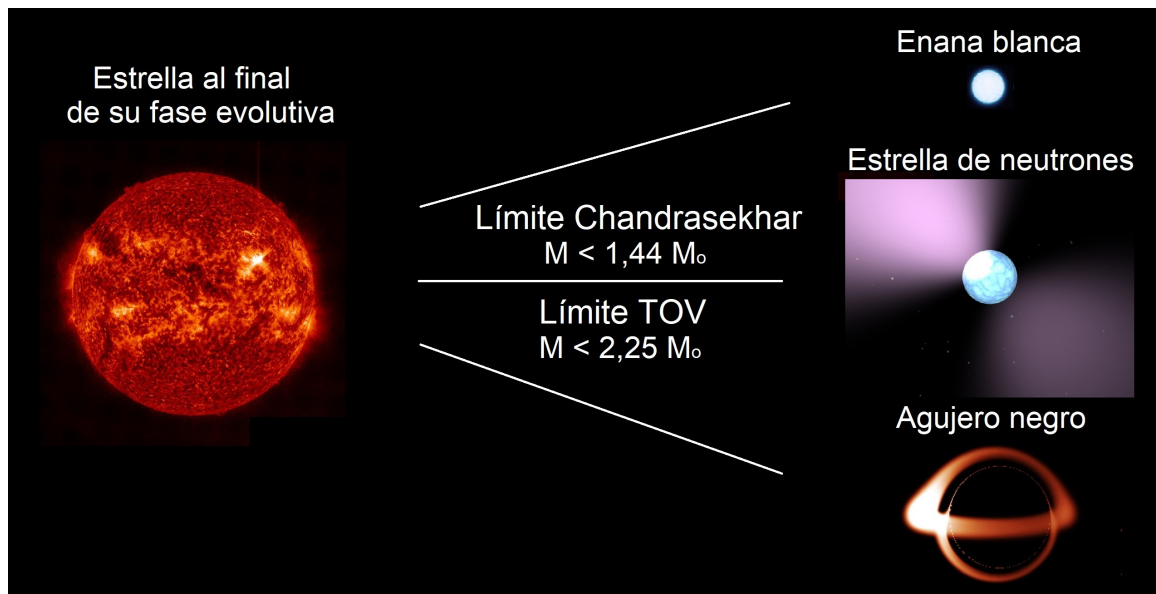
<sup>1</sup>La gravedad que provoca un cuerpo en la relatividad general se interpreta como la deformación del espacio-tiempo. En la sección 5.1 se describe este hecho.



# 1. La formación de los agujeros negros estelares

Según el origen los agujeros negros se pueden clasificar como estelares, los provenientes de una estrella, y primordiales, aquellos cuya formación es tan temprana que es imposible que provengan de una estrella ya que no habría dado tiempo a que esta naciera, creciera y muriera. Así, los primeros agujeros negros estelares se pudieron formar 1.000 millones de años después del Big Bang. A continuación, se va a describir el proceso de formación de un agujero negro de origen estelar.

Cuando una estrella muere, es decir, agota todo su combustible nuclear, comienza a colapsarse gravitatoriamente, de manera que su densidad aumenta en gran medida. Este colapso puede ser frenado por la repulsión entre las capas electrónicas de los átomos que forman el cuerpo, también llamada presión de degeneración de los electrones, y formarse así una enana blanca, o seguir colapsando si el cuerpo tiene masa suficiente, que según el **límite de Chandrasekhar** (1930) se estima que sea de unas 1,44 masas solares. Esto es debido a que la fuerza gravitatoria vencería a la presión que ejercen los electrones, ya que estos no pueden tener una velocidad superior a la de la luz. La estrella seguiría colapsando hasta convertirse en una estrella de neutrones, debido a la fusión de los protones con los electrones formando neutrones, o seguir colapsando si el cuerpo tiene masa suficiente. Durante este proceso, la energía gravitatoria se transforma en calor tan rápidamente que surge una explosión llamada nova o supernova. Para una estrella de neutrones, el colapso sería frenado por la presión de degeneración de los neutrones. Existe un nuevo límite de masa para este caso, que es debido a que la velocidad de vibración de los neutrones no puede ser mayor que la de la luz (análogamente a lo que sucedía con la estrella blanca). Este nuevo límite es llamado **límite TOV** (Tolman-Oppenheimer-Volkof), que se ha calculado que sea entre 2,10 y 2,25 masas solares. Si una estrella tiene una masa superior sigue colapsando gravitatoriamente creándose así un agujero negro debido a que una gran cantidad de masa se concentraría en un volumen cada vez más pequeño. En el esquema de la figura 1.1 se puede visualizar el remanente que queda de la muerte de una estrella según la masa con la que empieza a colapsar.



**Figura 1.1.** Destino final de una estrella según la masa. Imagen compuesta por el autor con ficheros tomados de NASA/GSFC/Solar Dynamics Observatory (estrella), ESA/NASA (enana blanca), NASA/JPL-Caltech (estrella de neutrones) y Wikipedia/Brandon Defrise Carter (agujero negro).<sup>2</sup>

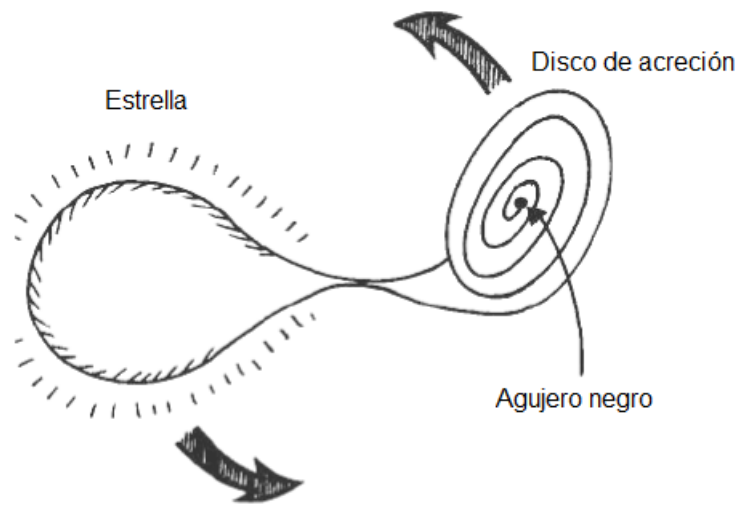
## 2. Sistema binario de estrellas y agujero negro

Un sistema binario es el formado por dos estrellas girando una en torno a la otra debido a la interacción gravitatoria mutua. Este tipo de situaciones son muy comunes en el Universo; de hecho, las excepciones son las estrellas solitarias como nuestro Sol. Si las dos estrellas se encuentran muy cerca la una de la otra las atmósferas se ven influidas de manera que se produce un intercambio de materia, fenómeno llamado acreción de materia.

Se puede dar el caso de que una de las estrellas del sistema evolucione mucho más rápidamente que la otra de manera que llegue al final de su ciclo evolutivo formándose un agujero negro. Entonces, según [2], si se encuentran suficientemente cerca, ocurre lo ilustrado en la figura 2.1, y es que el agujero negro atrae la materia de la atmósfera de la estrella de manera que esta gira espiralmente en torno al agujero negro hasta caer en él. Esta materia no se encuentra en órbita debido a la pérdida de energía por los choques entre partículas que se producen en el trayecto. Al conjunto de materia atraída por el

<sup>2</sup>El término  $M_{\odot}$  se refiere a la masa solar. En astronomía la masa de los cuerpos se mide en función de la solar y se expresa de esta manera.

agujero negro se le denomina **disco de acreción**, nombre que se le da debido a que la materia gira formando un disco y no por toda la superficie del agujero negro.

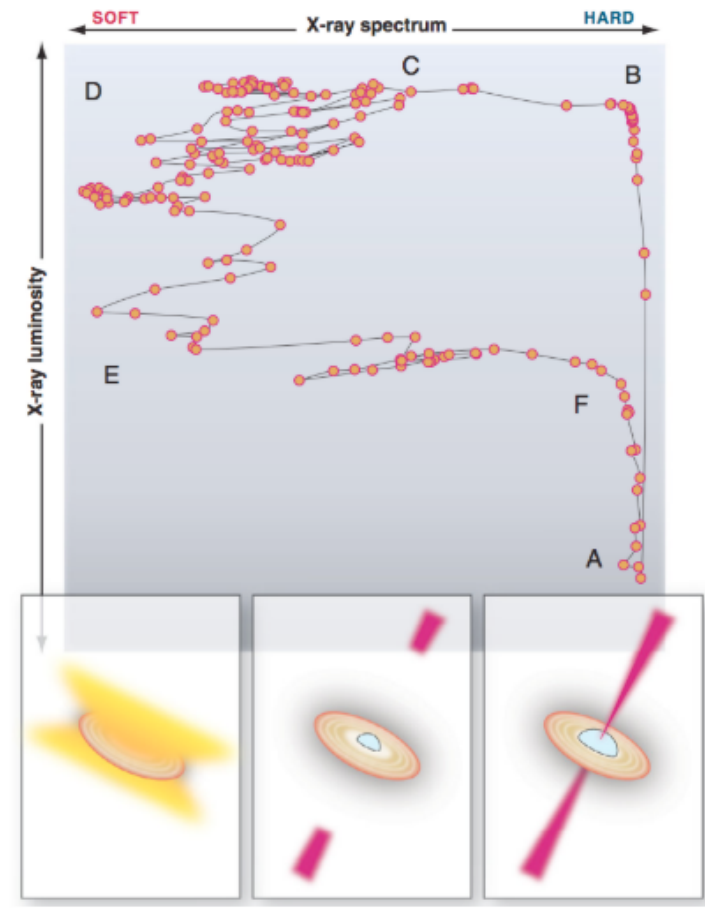


**Figura 2.1.** Sistema binario de una estrella y un agujero negro. Imagen tomada de [2].

## 2.1. Rayos X

Bien, pero, ¿qué diferencia hay entre esta masa acrecentada y la que acrecentaría una estrella normal? Pues una muy evidente; la enorme interacción gravitatoria que tiene un agujero negro. Y es que la velocidad que adquiere la materia cerca del agujero negro es tal que su temperatura se eleva a varios millones de grados, y, como ya se sabe, la materia caliente emite luz. El caso es que esta luz no estará en el rango visible, ya que su temperatura es tal que lo que emitirá tiene una energía que se corresponde con la frecuencia de los rayos X.

Según [3] la emisión de rayos X tiene distintos estados que dependen de la luminosidad y el espectro, clasificándose según este último en rayos “duros”, si tienen alta energía y la tasa de acreción de masa es baja, y rayos “blandos” si la energía es baja pero el disco tiene una tasa alta de acreción. La emisión de rayos duros (*hard*) se produce en forma de jet, como se puede ver en la figura 2.1.2, que es la radiación emitida como un chorro en la dirección transversal del disco. Por otro lado, la emisión de rayos blandos (*soft*) se hace desde el disco de acreción. Estos estados no son fijos para cada agujero negro, sino que se producen en ciclo.



**Figura 2.1.2.** Estados de emisión de rayos X de un agujero negro según la luminosidad y el espectro. Imagen tomada de [3].

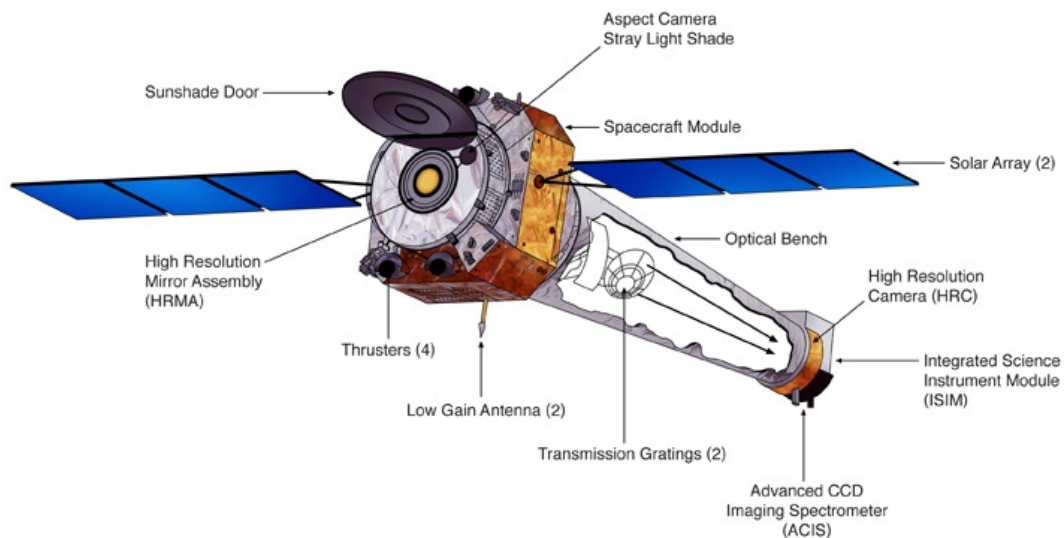
En un primer momento (A) la transferencia de masa desde la estrella al agujero negro es mayor que la tasa de acrecentamiento, por lo que cada vez más masa comienza a acumularse en las proximidades de este aumentando su temperatura, lo cual genera un estallido de luminosidad (B). Debido a que la luminosidad es muy baja en el primer estado no se puede observar el disco de acreción, por tanto la primera evidencia que se tiene de él es este chorro de rayos X que acaba de incrementar muy rápidamente su luminosidad. Tras esto se produce una transición de los rayos X de duros a blandos (D), de manera que la luminosidad de los rayos X duros comienza a decaer conforme los rayos blandos ganan fuerza. Este proceso se realiza con fuertes variaciones en el espectro que se emite, volviéndose más suaves conforme la luminosidad desciende (E). Visualmente ambos tipos de emisiones coexisten variando la luminosidad de uno y otro. Esta es la fase más larga del ciclo. Finalmente ocurre un proceso contrario al que sucedía de B a D, y es que ahora la emisión pasa de ser blanda a dura, ganando más protagonismo el chorro, debido a que

el ritmo en el que la masa se acrecienta disminuye. La diferencia es que lo hace a una luminosidad mucho menor. Este ciclo representa entonces la respuesta de la emisión de rayos X de un agujero negro a la diferencia de acrecentamiento de masa que sufre [3].

En resumen, si se encuentra una fuente de rayos X en la misma posición que un sistema binario en el cual una de las estrellas es invisible, ¿esta última es un agujero negro? Pues no necesariamente, ya que las estrellas de neutrones también producen este fenómeno. Entonces habría que medir la masa de la estrella invisible, y en el caso de que superara el límite de masa TOV que se habló en la sección 1 podría tratarse de un agujero negro [2].

## 2.2. Observatorio Chandra

Tal y como se describe en la página web [4], el Observatorio de Rayos X Chandra fue lanzado por la NASA al espacio el 23 de Julio de 1999 para estudiar la astronomía de los rayos X y, desde entonces, ha hecho múltiples aportaciones a esta rama de la física, no solo en el descubrimiento de agujeros negros. Este está diseñado para captar la emisión de rayos X de zonas muy calientes del Universo. El hecho de que se encuentre en el espacio orbitando es debido a que esta emisión no se puede detectar en la Tierra porque la atmósfera la absorbe. Consta de cuatro espejos colocados uno dentro del otro (*High Resolution Mirror Assembly*) que focalizan la radiación que llega a los detectores electrónicos que están situados al final del banco óptico (*Optical Bench*), el cual mide unos 9,2 m.



**Figura 2.2.1.** Esquema del diseño del observatorio CHANDRA. Imagen tomada de [4].

Utiliza el sol como fuente de energía gracias a las placas solares que tiene a los lados (*Solar Array*), y para poder ajustar su órbita emplea cuatro motores (*Thrusters*) colocados por pares, donde uno sirve para generar propulsión y el otro para girar. Además, consta de un sistema de control de temperatura que mantiene cada parte del observatorio a la temperatura ideal, siendo especialmente importante mantener la temperatura adecuada cerca de los espejos para que estén bien focalizados. Otro elemento importante en este diseño es la puerta (*Sunshade door*) ya que esta hace además de toldo. Finalmente cabe destacar que el sistema de orientación y enfoque que tiene Chandra es muy preciso, constando de giroscopios, cámaras de orientación (*Aspect Camera*) y detectores de posición para conocer en todo momento dónde se encuentran la Tierra y el Sol [4].

### 3. Sistema binario de dos agujeros negros

Si ya era terrorífico pensar en un agujero negro tragándose una estrella, imagina dos agujeros negros tragándose el uno al otro. Pues sí, en ocasiones los agujeros negros se encuentran formando sistemas binarios entre ellos, y cuando estos colapsan se produce uno de los eventos con mayor magnitud del Universo, siendo posible incluso detectarlo gracias a la emisión de ondas gravitacionales.

#### 3.1. Ondas gravitacionales

Al igual que el sonido y la luz se propagan en forma de ondas, la gravedad también lo hace. Estas ondas son llamadas gravitacionales, y se encargan de transmitir la gravedad, o lo que es lo mismo, las perturbaciones de la curvatura del espacio-tiempo [5]. Estas variaciones gravitatorias son provocadas por cualquier cuerpo acelerado, con masa y con simetría no esférica; sin embargo, la amplitud es tan ínfima que el ruido captado por otras fuentes es mucho mayor, por lo que solo se podrán detectar ondas provenientes de sucesos en los que estén involucrados cuerpos muy masivos. Además, si fueran ondas sonoras se encontrarían en el rango audible, por lo que es posible que al captar una onda gravitacional esta se pueda descodificar para ser escuchada [6]. Y, ¿cómo influyen en la materia? Las ondas gravitacionales tienen dos polarizaciones distintas; la plus,  $h_+(t)$ , y la

cruzada,  $h_+(t)$  [7]:

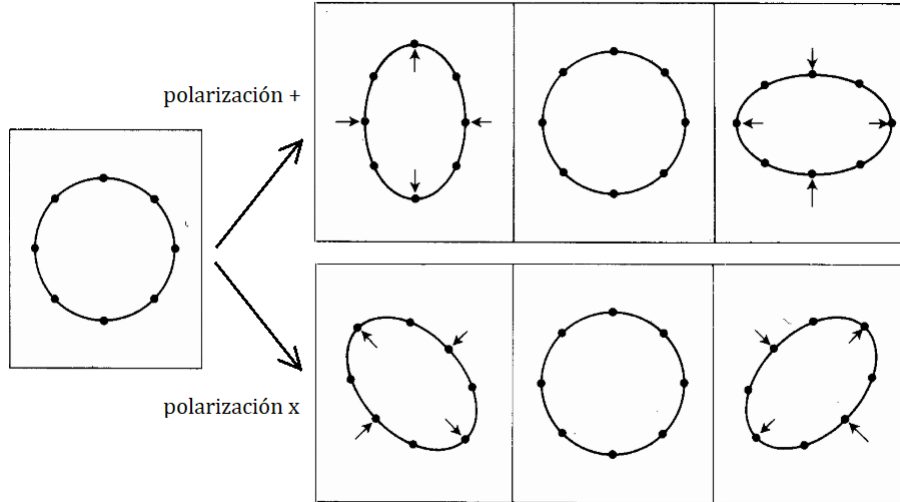
$$h_+(t) = A(t)(1 + \cos^2 i) \cos(\phi(t)) \quad (1)$$

$$h_x(t) = -2A(t) \cos^2 i \sin(\phi(t)) \quad (2)$$

donde  $A$  es la amplitud de la onda,  $\phi$  es la fase y  $i$  es la inclinación de la órbita del sistema binario. Estas difieren en un ángulo de  $45^\circ$  y, en general, las ondas son una combinación de ambas polarizaciones tal que la ecuación de es:

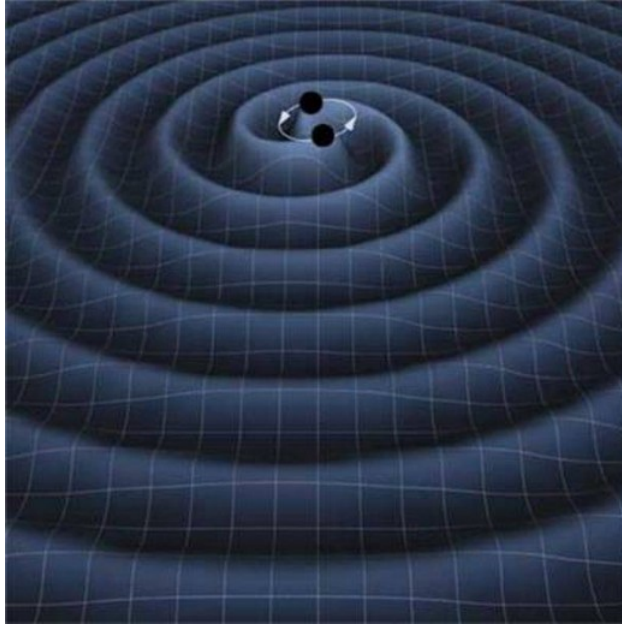
$$h(t) = F_+(\theta, \varphi, \psi)h_+(t) + F_x(\theta, \varphi, \psi)h_x(t) \quad (3)$$

siendo  $F_+$  y  $F_x$  constantes que dependen de la localización y polarización de las ondas. En la figura 3.1.1 se puede observar el efecto de cada una de estas polarizaciones sobre un anillo de partículas.



**Figura 3.1.1.** Efecto de una onda gravitacional sobre un anillo de partículas según su polarización. Imagen tomada de [5].

Como se ha dicho, las únicas ondas que será posible detectar son generadas por fenómenos con mucha repercusión gravitatoria, por lo que se van a estudiar las ondas producidas por la fusión de dos cuerpos compactos, como son los agujeros negros y las estrellas de neutrones. Cuando en un sistema binario formado por dos objetos masivos, están girando en órbitas estables, se genera una onda gravitacional que es continua, es decir, con una frecuencia constante. Esto se ve representado en la figura 3.1.2, por dos agujeros negros en órbita generando variaciones en la curvatura del espacio tiempo que se propagan mediante ondas gravitacionales continuas.



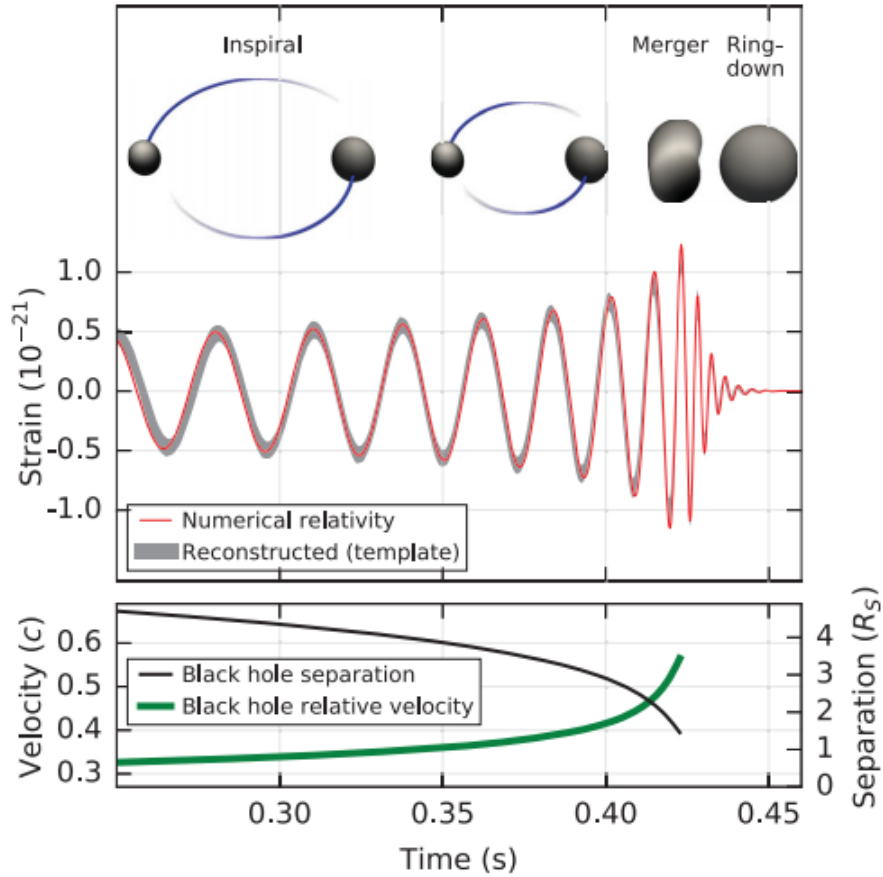
**Figura 3.1.2.** Representación artística de dos agujeros orbitando en un sistema binario con las respectivas ondas gravitacionales. Imagen tomada de K. Thorne (Caltech) y T. Carnahan (NASA GSFC).

Si ahora resulta que las órbitas no son estables, sino que los dos cuerpos caen en forma de espiral uno respecto del otro, perdiendo así energía gravitatoria, las ondas producidas no son continuas sino que aumentan su frecuencia hasta que ambos se han fusionado por completo, momento en el que se emite una última onda gravitacional [6]. En la figura 3.1.3 se puede observar la simulación numérica de la onda gravitacional que se generaría en la fusión de dos agujeros negros, distinguiendo cómo la frecuencia aumenta según se aproximan uno a otro hasta la fusión, momento tras el cual surge un agujero negro estable. En la figura que sigue se representa la separación entre ambos cuerpos en unidades del radio de Schwarzschild<sup>3</sup> ( $R_S$ ) y la velocidad relativa entre los agujeros negros dada por la ecuación  $v/c = (GM\pi f/c^3)^{1/3}$  [8], siendo  $f$  la frecuencia de la onda y  $M$  la masa total, en función del tiempo. Se observa que a medida que la separación disminuye, es decir, se encuentran más cerca el uno del otro, la velocidad relativa es mayor y las ondas gravitacionales producidas tienen una frecuencia más alta.

---

<sup>3</sup>Se corresponde con el horizonte de sucesos, frontera tras la cual es imposible salir de un agujero negro. En la parte II se describe este concepto.



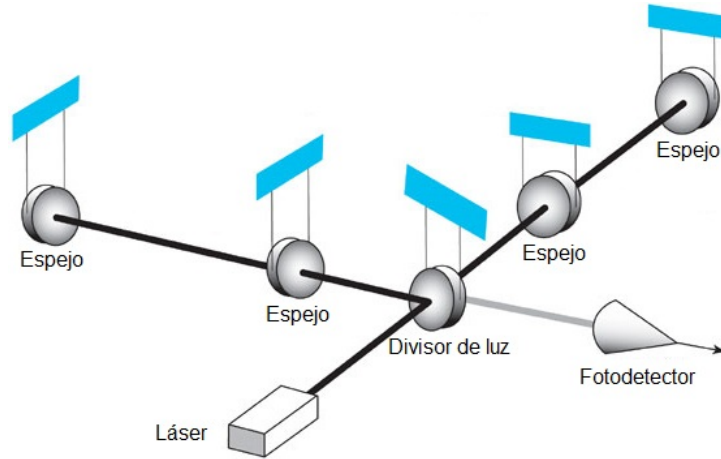


**Figura 3.1.3.** Simulación numérica de la fusión de dos agujeros negros. La fase *Inspiral* se corresponde al acercamiento mutuo, la fase *Merger* a la colisión y la fase final, *Ring-down*, a la fusión que da lugar a un agujero negro estable. Imagen tomada de [8].

### 3.2. Interferómetros láser

La finalidad de los observatorios de interferometría laser es detectar estas pequeñas variaciones, que son del orden de  $\sim 10^{-18}$  m (esto es 1/1000 el diámetro de un protón), por lo que se necesitan medidas muy precisas y evitar las fuentes de ruido, que serán muy significativas en comparación con lo que se pretende captar. Para ello, según se explica en [6], se emplean interferómetros de Michelson con cavidades de Fabry-Pérot, cuyo diseño (figura 3.2.1.) consta dos brazos de igual longitud perpendiculares entre sí por los que se hace pasar un láser previamente dividido en la intersección. En cada brazo tenemos las cavidades ópticas resonantes formadas por dos espejos en suspensión (uno en el extremo y otro cerca del divisor de luz) que multiplican el efecto de la onda gravitacional, ya que el rayo de luz se refleja en ambos espejos repetidamente. Tras su paso por los brazos, ambos rayos vuelven a la intersección e interfieren, de manera que, si los brazos no han cambiado

su longitud la interferencia es destructiva <sup>4</sup>. Si la longitud de los brazos si varía, habrá una diferencia de fase entre la luz de un brazo y del otro que producirá un patrón de interferencia en la luz que llega al detector. Entonces, al paso de una onda gravitacional, debido a la polarización de esta, un brazo del interferómetro se alarga mientras que el otro se acorta, estando esta diferencia de longitud relacionado con la onda de manera que  $\Delta L(t) = \delta L_x - \delta L_y = h(t)L$ , donde  $L$  es la longitud de los brazos sin modificar mientras que  $\delta L_x$  y  $\delta L_y$  son las pequeñas variaciones de cada brazo [8].



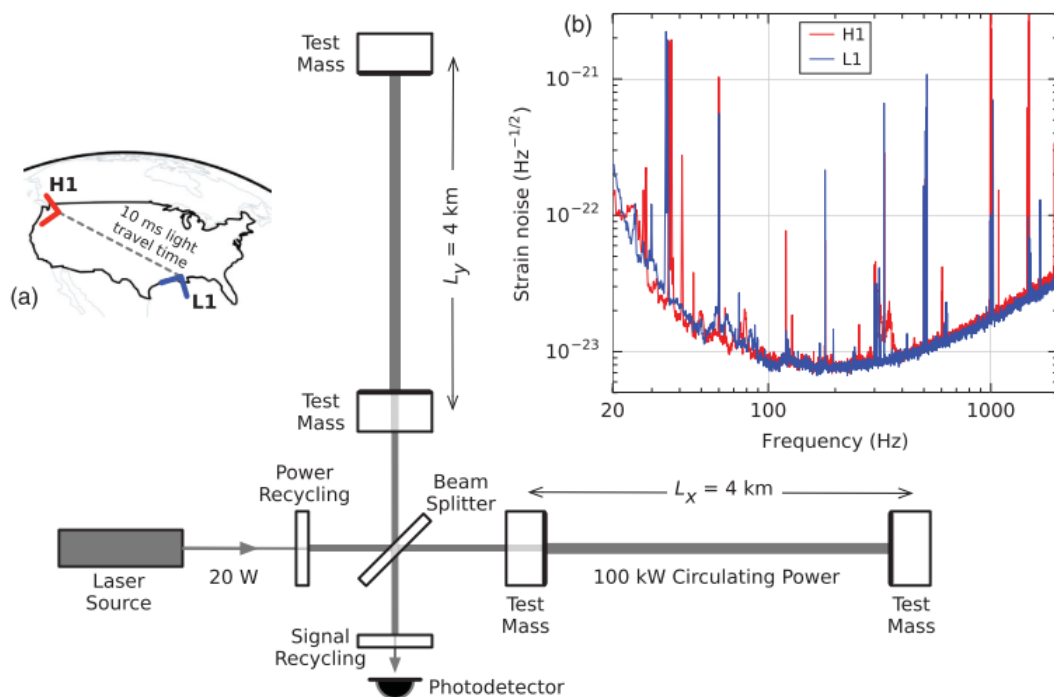
**Figura 3.2.1.** Diseño de un interferómetro láser básico. Imagen tomada de [6].

### 3.3. Observatorio LIGO

El observatorio LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) utiliza interferometría láser para detectar las ondas gravitacionales. Tal y como se describe en [8], consta de dos interferómetros separados, uno en Hanford, Washington, y el otro en Livingston, Louisiana, de manera que la luz tarda 10 ms en viajar de uno a otro. Cada uno de ellos tiene dos brazos de 4 km de longitud y una fuente láser de 20 W (los cuales son amplificados hasta 100 kW en las cavidades ópticas). El hecho de que sean dos interferómetros y no uno solo sirve para distinguir las medidas reales del ruido, tanto instrumental (del propio detector) como ambiental (un simple árbol cayendo puede ser detectado, falseando así la señal). También sirve para poder ubicarlas en el espacio y medir la polarización, ya que cada interferómetro tiene una orientación distinta y por tanto los brazos se modificarán de manera diferente. En la figura 3.3.1 se puede observar el diseño (similar al de un interferómetro básico) y la posición y orientación, así como el ruido experimental, de cada uno.

<sup>4</sup>Idealmente, porque en la práctica siempre se va a tener ruido en las medidas.

Según [6], el desarrollo de LIGO comenzó en 1984, siendo su primer periodo de funcionamiento entre 2002 y 2010, en el cual no fue detectada ninguna onda gravitacional. Tras este año comenzaron una serie de mejoras instrumentales que llevaron al interferómetro actual llamado **Advanced LIGO** en 2015, el cual, como veremos en la sección 9, tuvo éxito a los pocos días de comenzar a funcionar. Una de estas mejoras fue hacer vacío, de manera que no puede haber aire que perturbe a los espejos, que se encuentran en suspensión como péndulos, pudiendo viajar así la luz en línea recta. De hecho, es el mayor vacío que se ha logrado en la Tierra: mantiene  $8500\text{ m}^3$  a una presión  $\sim 10^{-12}$  atm. Otra fuente de problemas es la temperatura, ya que si hubiera una mínima diferencia de temperatura entre un punto del brazo y otro la luz se curvaría por la variación del índice de refracción (que depende de la temperatura). Una mejora del sistema de aislamiento sísmico fue colocar unos pequeños imanes en los espejos. Así, si cualquier movimiento perturba la suspensión de estos se crea un campo magnético en oposición a dicho movimiento, manteniendo los espejos en su posición. Este mecanismo tiene que ser muy exacto, ya que incluso las fuerzas de marea de la Luna y del Sol pueden perturbar los espejos afectando en gran medida a la precisión del detector. Este sería el sistema de aislamiento sísmico interno; el externo consta de un sistema hidráulico que contrarresta los movimientos terrestres, previamente pronosticados.



**Figura 3.3.1.** Diagrama simplificado del detector Advanced LIGO. (a) Localización y orientación de los detectores LIGO en Hanford, WA (H1) y Livingston, LA (L1). (b) Ruido instrumental de cada detector. Imagen tomada de [8].

Otros observatorios de ondas gravitacionales que están operativos o en construcción en el mundo son Virgo, situado en Italia y del cual es miembro España, KAGRA en Japón y GEO600 en Alemania. Por otra parte, el interferómetro LISA, que aún está en proceso, estará situado en el espacio orbitando alrededor del Sol, lo cual lo convertirá en el observatorio de ondas gravitacionales más preciso al no contar con el ruido provocado por el campo gravitatorio terrestre y los errores humanos [9].

## Parte II

# El agujero negro de Schwarzschild

“Como verás, la guerra me ha tratado lo bastante bien como para, pese al intenso fuego, permitir que me aleje de todo ello y pueda emprender este paseo a través del país de tus ideas”

Carta de K. Schwarzschild a A. Einstein, 22 de septiembre de 1915.

*The Collected Papers of Albert Einstein, vol. 8a, doc. 169*

En esta parte del escrito se va a describir en mayor profundidad qué es un agujero negro de Schwarzschild y cuales son sus características y curiosidades utilizando la relatividad general como base matemática. Así, se estudiará la curvatura del espacio-tiempo que genera y los efectos que tiene esta sobre la luz y la materia.

## 4. Métrica

La métrica es la manera en la que se miden distancias entre puntos infinitamente próximos. Este concepto introducido por Riemann (1854) se basa en el llamado elemento de línea:

$$dl^2 = g_{ij}dx^i dx^j = g_{xx}(dx)^2 + g_{yy}(dy)^2 + g_{zz}(dz)^2 + g_{xy}dxdy + g_{xz}dxdz + g_{yz}dydz; \quad (4)$$

siendo  $g_{ij}$  los coeficientes de la métrica. Por ejemplo, en el espacio euclidiano<sup>5</sup> se tiene que  $g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = 1$  y el resto nulos, quedando de la forma  $dl^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ , expresión con la cual se puede determinar la distancia entre dos puntos en la mecánica clásica. Sin embargo, en la relatividad las distancias dependen del observador, por tanto es necesario unificar el espacio y el tiempo a fin de poder medir algo que sea independiente de este. Así, para la relatividad especial, en la cual el espacio-tiempo es plano, Minkowski (1907) introduce una geometría distinta a la euclidiana teniendo en cuenta el tiempo, la llamada **métrica de Minkowski**, la cual se escribe como  $ds^2 = -c^2(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ , donde  $ds^2$  se denomina **intervalo entre sucesos** y es esa magnitud cuyo

---

<sup>5</sup>El espacio euclidiano es el espacio plano, sin curvatura, por lo que la distancia entre un punto y otro es simplemente una línea recta.

valor no depende del observador. Por otro lado, para el estudio de la relatividad general, Einstein (1915) emplea la métrica más general, la métrica de Riemann, como herramienta matemática. Esta se describe como:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (5)$$

eligiendo las coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$  tendremos:

$$\begin{aligned} ds^2 = & g_{00} dt^2 + g_{11} dr^2 + g_{22} d\theta^2 + g_{33} d\varphi^2 + 2g_{01} dt dr + 2g_{02} dt d\theta \\ & + 2g_{03} dt d\varphi + 2g_{12} dr d\theta + 2g_{13} dr d\varphi + 2g_{23} d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (6)$$

A partir de ahora se suprimirán los paréntesis en estas expresiones por simplicidad. Einstein llega entonces a las ecuaciones relativistas del campo gravitatorio en el vacío, o también llamadas **ecuaciones de Einstein en el vacío** (en total 10 ecuaciones algebraicas) que describen cómo la materia curva el espacio-tiempo, es decir, la interacción del campo gravitatorio. La primera solución de estas ecuaciones fue dada por Schwarzschild (1916), siendo esta una particularización para un campo gravitatorio estático y con simetría esférica. El hecho de que sea estático quiere decir que es un campo estacionario, por tanto la métrica es independiente del tiempo, y simétrico en el tiempo, por lo que tenemos que los coeficientes de la métrica  $g_{0\beta}$  se anulan, mientras que  $g_{00}$  y  $g_{11}$  serán dependientes del tiempo. Por otra parte, al tener simetría esférica se tiene que  $g_{22} = r^2$  y  $g_{33} = r^2 \sin^2 \theta$ . Entonces la métrica que se obtiene introduciendo estas dos condiciones es:

$$ds^2 = g_{00}(t) dt^2 + g_{11}(t) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (7)$$

Teniendo en cuenta también que en el infinito la solución debe ser newtoniana [5], es decir, tiene que cumplir la condición de campo débil y estacionario, el primer coeficiente es  $g_{00}(t) = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)$ . El potencial gravitatorio,  $\phi$ , se expresa como  $\phi(r) = -GM/R$ , y  $g_{11} = -(g_{00})^{-1}$ . Entonces, considerando  $G = c = 1^6$ , obtenemos la ecuación de la **métrica de Schwarzschild**:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2); \quad (8)$$

donde  $r$ ,  $\theta$  y  $\varphi$  son las coordenadas esféricas espaciales,  $t$  la coordenada temporal y  $M$  la masa del cuerpo que genera la gravedad. Hay que puntualizar que la masa está expresada en unidades de longitud en dicha ecuación, pudiéndose convertir a gramos multiplicando

---

<sup>6</sup>Unidades de Planck, o unidades naturales. Usadas en los sistemas relativistas.

por la velocidad de la luz al cuadrado,  $c^2$ , y dividiendo entre la constante de gravitación,  $G$  (esto es, pasando a unidades no relativistas). Esta métrica representada por la ecuación (8) es la empleada para describir los agujeros negros esféricos sin rotación ni carga, también llamados Agujeros negros de Schwarzschild.

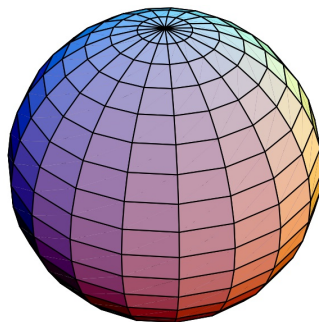
#### 4.1. Singularidades

Se ha considerado que las coordenadas para la métrica de Schwarzschild son  $(t, r, \theta, \varphi)$ , pero existen ciertas singularidades respecto a ellas. Con singularidad nos referimos a que cuando las coordenadas tienden a ciertos valores la expresión falla, es decir, no resulta ningún valor concreto. Una singularidad desde el enfoque matemático es un punto en el cual cierta función no está determinada o simplemente tiende a infinito, pero es evitable. Por otro lado, una singularidad física es aquella que en principio no se puede evitar. Se expondrán cuatro singularidades que presenta esta métrica [5]:

**Singularidad en los polos**,  $\theta = 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Al usar coordenadas esféricas surge una singularidad cuando la coordenada  $\theta \rightarrow 0$ . Así, estableciendo  $r$  y  $t$  constantes para obtener la longitud de una línea a una coordenada  $\theta$  dada, obtenemos el siguiente resultado:

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad \rightarrow \quad l = \int_{\theta=cte.} \sqrt{ds^2} = r \int_0^{2\pi} \sin \theta d\varphi = 2\pi r \sin \theta;$$

donde se puede apreciar que si  $\theta = 0$  no se trata de una línea sino de un punto. Esto implica que sea cual sea el valor de  $\varphi$  para ese valor de la coordenada  $\theta$  estaremos en el mismo punto geométrico. Este hecho se puede visualizar en la figura 4.1.1, donde confluyen todas las líneas con  $\varphi=cte$  en un solo punto, llamado polo. Esta singularidad es matemática y con fácil solución si cambiamos a coordenadas polares.



**Figura 4.1.1.** Superficie esférica con líneas correspondientes a  $\theta=cte$  y  $\varphi=cte$ . Imagen tomada de [www.ugr.es/~jillana/relatividad.php](http://www.ugr.es/~jillana/relatividad.php), 19:35:18, 07/06/2019.

**Singularidades en  $r = 2M$ .** En esta coordenada ocurren varias cosas. Por un lado hay una singularidad similar a la anterior, y es que las coordenadas  $r = 2M$  y  $-\infty \leq t \leq +\infty$ , que deberían corresponder a una línea, corresponden a un suceso en el espacio-tiempo. Se puede comprobar de forma análoga integrando para  $\theta = \varphi = r = cte$ :

$$ds^2 = g_{00}dt^2 \quad \rightarrow \quad l = \int_{t_0}^{t_1} |g_{00}|^{1/2} dt = \left| 1 - \frac{2M}{r} \right|^{1/2} \Delta t;$$

de manera que si la coordenada radial es  $r = 2M$  se tiene que  $l = 0$ , es decir, el suceso ( $r = 2M, -\infty \leq t \leq +\infty$ ) corresponde al mismo punto del espacio-tiempo sea cual sea el valor de la coordenada temporal.

Por otro lado, la ecuación de la métrica de Schwarzschild (8) no está bien definida en  $r = 2M$  [5]. Esta es otra singularidad matemática. La comprobación de que se trata de un problema de las coordenadas y no de la física se puede hacer si se considera una partícula libre en la que las coordenadas angulares son constantes ( $\theta = \varphi = cte$ ) y ocurren dos sucesos que están relacionados causalmente <sup>7</sup>. De esta manera, sabiendo que el tiempo propio está relacionado con el intervalo de sucesos tal que  $ds^2 = -d\tau^2$  <sup>8</sup>, y este es un invariante, ya que  $ds^2$  es independiente del observador, se llega a la siguiente expresión:

$$d\tau^2 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 \quad (9)$$

Si consideramos  $r > 2M$  tenemos que en la parte derecha de la ecuación el primer término es positivo mientras que el segundo es negativo, por lo que, como se tiene que cumplir que  $d\tau^2 = (d\tau)^2 > 0$ ,  $dt$  nunca puede anularse. Este hecho implica que los sucesos no pueden ser simultáneos, como debe ser ya que se ha considerado que están relacionados causalmente. El segundo término puede anularse si se considera la partícula momentáneamente en reposo ( $dr = 0$ ). Por otro lado, al considerar  $r < 2M$  tenemos que ahora el primer término es negativo y el segundo positivo, por tanto es la parte espacial la que no puede anularse mientras que la temporal sí. Esto va en contra de la suposición de causalidad, ya que si  $dt = 0$  significa que los sucesos son simultáneos.

---

<sup>7</sup>Para que uno sea causa del otro no pueden suceder simultáneamente, entonces,  $dt \neq 0$ .

<sup>8</sup>Esta relación surge de considerar el sistema de referencia en el que la partícula está en reposo, ya que en él  $dr = 0$ , por lo tanto  $ds^2 = -dt^2 + dr^2 = -dt^2 \rightarrow ds^2 = -d\tau^2$ , siendo el tiempo que se mide en dicho sistema el llamado tiempo propio,  $\tau$ .



Esto se interpreta estableciendo  $t$  como una coordenada espacial y  $r$  como la coordenada temporal cuando  $r < 2M$ , cumpliéndose así que los sucesos puedan ocurrir en el mismo lugar ( $dt = 0$ ) pero no ser simultáneos ( $dr \neq 0$ ). De esta manera se observan dos regiones espacio-temporales que tienen las coordenadas radial y temporal intercambiadas: la región I caracterizada por  $2M < r < \infty$  y la región II en la que  $0 < r < 2M$ .

**Singularidad en  $r = 0$ .** Para este valor de  $r$  se encuentra que la métrica no es regular; sin embargo en esta ocasión no existe ningún cambio de variables que solucione el problema, entonces nos encontramos ante una singularidad física. Esta se puede interpretar como el instante final de una partícula, pero no un final espacial sino temporal, ya que, como hemos visto antes, cuando  $r < 2M$  la coordenada  $r$  es la temporal, por tanto un cuerpo encontraría su evento final en el instante  $r=0$ . Esta singularidad está en el interior del agujero negro y en las secciones 5.2 y 5.6 se interpretará gráficamente.

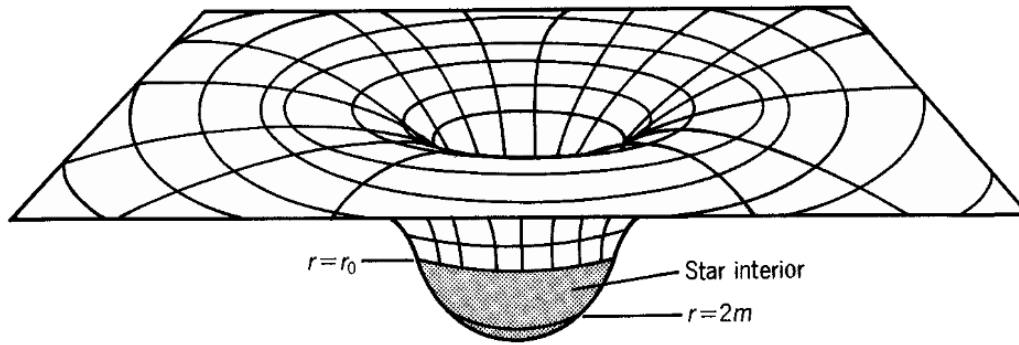
## 5. Representaciones espacio-temporales

### 5.1. Curvatura

Como no es posible ilustrar el espacio-tiempo, ya que consta de cuatro dimensiones, se tienen que tomar coordenadas constantes para poder visualizarlo mejor. Para estudiar la interacción de la materia con el espacio se emplean representaciones en las cuales el tiempo es constante ( $t = cte$ ) y se considera el plano ecuatorial ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ). De esta manera tenemos una superficie, llamada **superficie de simultaneidad** porque todos los sucesos ocurren al mismo tiempo para el observador considerado [2]. Las coordenadas en las que se definen los distintos sucesos son  $(r, \varphi)$ , de manera que el elemento de línea queda:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (10)$$

Si tenemos una estrella con una determinada masa en el espacio, esta deforma la superficie de simultaneidad como se observa en la figura 5.1.1, estando la distancia entre dos puntos  $(r, \varphi)$  y  $(r + dr, \varphi + d\varphi)$  definida por la ecuación (10).



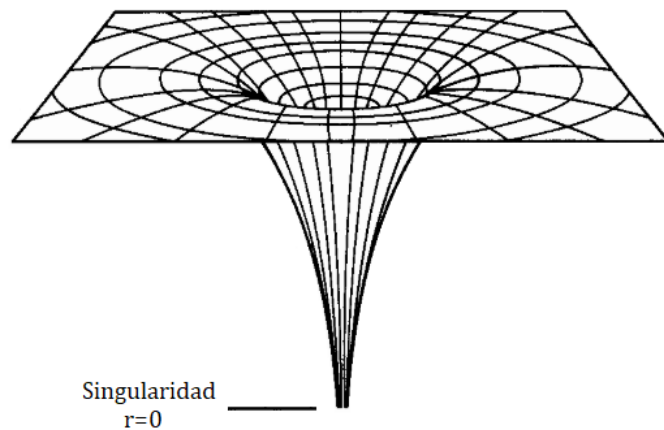
**Figura 5.1.1.** Superficie de simultaneidad deformada por la presencia de una estrella de masa  $m$ . Imagen tomada de [5].

Para poder entender mejor esta representación, veamos una comparación de [5]. Imagine que cubre una caja sin tapa con una tela de manera que esta esté bien estirada, y coloca una pelota en el centro; lo que sucederá es que la tela se deforma de manera similar al dibujo 5.1.1, ¿verdad? Pues bien, esta tela representa el espacio y la bola que ha colocado sería el cuerpo que lo deforma. Si ahora introduce otra bola, con menor masa, lanzándola desde una de las esquinas de la caja hacia las proximidades de la bola grande, observará que esta no sigue una trayectoria recta si no que cuando se acerca a la bola grande su trayectoria se curva, pudiendo incluso chocarse con ella si se dan las condiciones. Este ejemplo bien podría ser el caso de un asteroide (la bola con menor masa) que se acerca a la Tierra (la bola del centro) y en su trayectoria se ve atraída por la gravedad de esta, ya que la Tierra genera una curvatura similar en el espacio a la que crea que la bola en el trozo de tela. Y así es como se interpreta la interacción gravitatoria en la relatividad general, y es que, como dijo J.A. Wheeler (s.f.) en *Geons, Black Holes, and Quantum Foam: A Life in Physics*: “La materia le dice al espacio cómo curvarse, y el espacio le dice a la materia como moverse” (p.235).

Observando la figura 5.1.1 también se puede entender el hecho de que la interacción gravitatoria sea menor conforme te alejas del cuerpo que la provoca, ya que cuanto más alejado la curvatura es menor, llegándose a que, suficientemente lejos del cuerpo, la superficie de simultaneidad es plana. Formalmente esto se describe como que el espacio-tiempo de Schwarzschild es asintóticamente plano [5]. Esto significa que la métrica de Schwarzschild tiende a la de Minkowski, que se estudió en la sección 4, para la cual no hay curvatura ya que no depende de la masa. Por otro lado, una consecuencia de este modelo es que

cualquier cambio en la masa que genera la curvatura se comunica a la velocidad de la luz, y no instantáneamente como se considera en la teoría gravitacional de Newton. De este hecho ya se habló en la sección 3.1, donde se describen las ondas gravitacionales.

Ahora bien, la curvatura que genera un agujero negro no es tan simple, ya que como hemos visto en la sección 4.1 existen ciertas singularidades que provocan que la métrica de Schwarzschild no sea válida. La curvatura que genera un agujero negro en el espacio es provocada por un cuerpo masivo concentrado en un punto, por lo que tiene la forma que se ve en la figura 5.1.2, donde se indica la singularidad que hemos visto que hay en  $r = 0$ . Se puede observar que la deformación es mucho mayor que la que se vio para una estrella normal. Esto explica el hecho de que un agujero negro tenga una gravedad tan grande, ya que, cuanto más deforma un cuerpo el espacio más fuertemente atraerá a otros cuerpos, lo que se traduce como mayor gravedad.

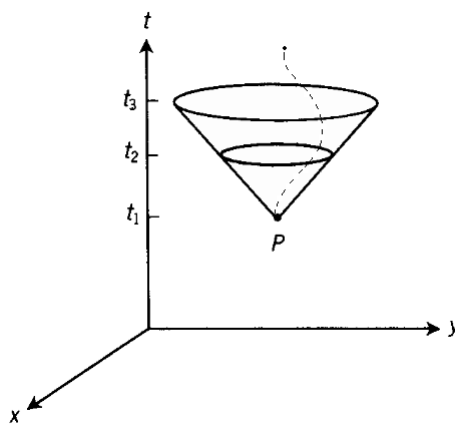


**Figura 5.1.2.** Superficie de simultaneidad deformada por la presencia de un agujero negro. Imagen tomada de [5].

## 5.2. Diagrama espacio-temporal de Schwarzschild

En la sección 5.1 se ha hecho una representación en la cual se estudia la interacción de la materia con el espacio. Ahora se hará otro tipo de representación que sirve para estudiar la evolución de un cuerpo en el espacio-tiempo. La diferencia principal entre esta representación y la anterior es que ahora no se toma el tiempo como constante. De hecho, para esta representación se toman constantes una (3D) o dos (2D) de las coordenadas espaciales y se ilustra situando el eje temporal verticalmente y el espacial o espaciales horizontalmente.

Se comienza explicando el cono de luz mediante la representación del espacio-tiempo de Minkowski, el cual tiene coordenadas  $(t, x, y, z)$ . En esta representación (figura 5.2.1) el punto P corresponde a un observador en las coordenadas  $(t, x, y)$ . La luz que se envía desde dicho punto tiene velocidad  $c = 1$ , por lo tanto, la pendiente de su trayectoria tendrá  $45^\circ$ , ya que  $t = x/c = x$ . Así, estos rayos se encontrarán en una circunferencia en el espacio para tiempos superiores  $t_2, t_3...$  formando un cono, llamado de hecho **cono de luz**. La línea discontinua se denomina **línea del universo**, y es la curva que indica la posición de un cuerpo en cada instante.



**Figura 5.2.1.** Representación de un cono de luz en 3 dimensiones para el espacio-tiempo de Minkowski. Imagen tomada de [5].

Cabe destacar que en esta descripción gráfica, un punto de coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$  corresponde a un suceso, no a un lugar como se acostumbra a ver, y que, como la velocidad de la luz es la máxima que se puede alcanzar, la línea del universo de un cuerpo jamás podrá atravesar los bordes del cono (no puede tener una pendiente menor <sup>9</sup> ya que la velocidad será menor que la de la luz), y por tanto se moverá siempre dentro del cono de luz.

Así, en la anterior figura queda representado un cono de luz en el espacio-tiempo de Minkowski en 3D con la coordenada  $z = cte$ , pero, como ya sabemos, la métrica de Schwarzschild difiere de esta. Para poder identificar la forma que tendrán los conos de luz en la representación espacio-temporal de Schwarzschild se ha de determinar la trayectoria de la luz. A partir de ahora, vamos a ver las representaciones considerando que un agujero

<sup>9</sup>Se considera la pendiente formada por la velocidad y el eje horizontal

negro es la región del espacio-tiempo donde  $r < 2M$ . Entonces, como  $ds^2 = 0$  para los rayos de luz ya que son partículas sin masa, se tiene que:

$$0 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2$$

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \quad (11)$$

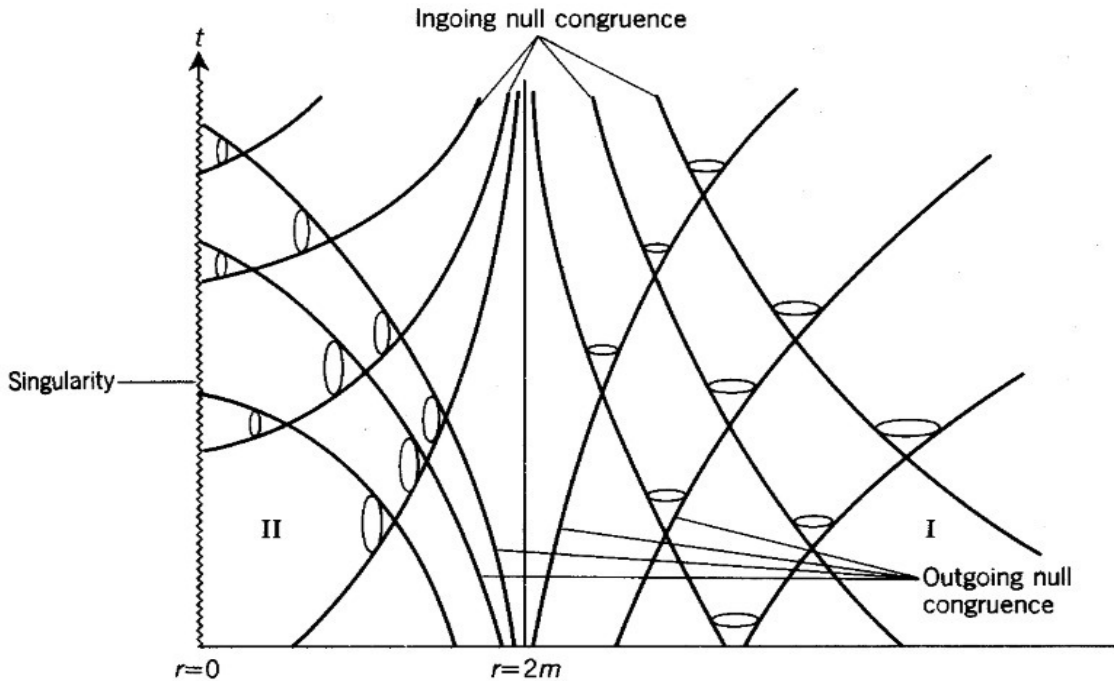
Integrando esta ecuación se obtienen dos expresiones [5], una correspondiente los rayos de luz que van hacia fuera del agujero negro:

$$t = r + 2M \ln |r - 2M| + cte \quad (12)$$

Y otra que corresponde a los rayos de luz que van hacia adentro:

$$t = -(r + 2M \ln |r - 2M|) + cte \quad (13)$$

Se puede ver la diferencia entre las líneas rectas que eran los conos en el espacio-tiempo de Minkowski (figura 5.2.1) y las líneas curvas que se producen en el espacio-tiempo de Schwarzschild (figura 5.2.2). Las líneas etiquetadas en dicha figura como *Outgoing null congruence* corresponden a la ecuación (12) y las etiquetadas como *Ingoing null congruence* a la ecuación (13).



**Figura 5.2.2.** Representación del espacio-tiempo de Schwarzschild. Imagen tomada de [5].

Analizando el diagrama se determina que el espacio-tiempo de Schwarzschild es asintóticamente plano (como ya se pudo visualizar en la sección 5.1) ya que cuando  $r \rightarrow \infty$  la ecuación (11), que determina la pendiente de los conos de luz, vale  $\pm 1$ , es decir, tiene una pendiente de  $45^\circ$  en la representación, al igual que ocurría en el diagrama de Minkowski (que representa un espacio-tiempo plano, sin curvatura que pueda afectar a las trayectorias). Por otro lado se observa que los conos de luz tienen una pendiente mayor conforme se acercan a  $r = 2M$ , lo que provoca que cada vez sean más estrechos hasta cerrarse por completo en el infinito. Esto se interpreta como que si un observador que se aproxima a  $r = 2M$ , al estar limitado a permanecer dentro del cono de luz, tardaría en atravesar esta coordenada un tiempo infinito. Se ha de tener en cuenta también que el suceso dado por  $(r = 2M, -\infty \leq t \leq +\infty)$  se dibuja como una línea vertical y no como un punto como se vio en la sección 4.1 que debería ser [5].

En la región II los conos de luz se vuelcan. Esto es debido al intercambio entre las coordenadas espacial y temporal. La interpretación de este resultado es que para un observador en el interior de esta región no es posible mantener la coordenada temporal  $r$  constante. Gráficamente se puede ver que, como el observador tiene que estar siempre dentro del cono de luz, no se puede mover por una línea recta vertical que represente  $r = cte$ . Además, está destinado a encontrar su evento final en la singularidad  $r = 0$ , ya que la línea del universo debe seguir dentro del cono de luz sin poder detenerse en el tiempo. Es más, toda información enviada desde la región II no podrá llegar a la región I debido a que se dirigirá irremediamente a la coordenada  $r = 0$ , lo que hace que no exista ninguna causalidad entre sucesos de ambas regiones, por lo tanto están separadas por la coordenada  $r = 2M$ , denominada **radio de Schwarzschild** [5]. Para poder entender mejor este confuso concepto, imagine que traspasa el radio de Schwarzschild y se encuentra en el interior de un agujero negro. Debido al intercambio de coordenadas, el punto por donde has entrado ahora pertenece al pasado, y como bien uno sabe, es imposible ir al pasado. Mientras que la singularidad se encuentra en el futuro, y como bien uno sabe, nadie escapa del futuro.

### 5.3. Coordenadas de Eddington-Finkelstein

La singularidad en  $r = 2M$ , al ser matemática, se puede eliminar con un cambio de variables. Uno de estos posibles cambios es a las coordenadas de Eddington-Finkelstein  $(\bar{t}, r, \theta, \varphi)$ , las cuales hacen que las líneas radiales que van hacia el agujero negro sean rectas (las llamadas *Ingoing null congruence* de la figura 5.2). Según se puede estudiar en [5], el cambio de coordenada que hay que realizar es temporal y viene dado por la relación:

$$\bar{t} = t + 2M \ln(r - 2M) \quad (14)$$

De manera que la ecuación de los rayos que van hacia dentro, (13), con las nuevas coordenadas es:

$$\bar{t} = -r + cte \quad (15)$$

Lo cual significa que los rayos van en una línea recta de pendiente  $-45^\circ$ , ya que  $d\bar{t}/dr = -1$ . Se diferencia entonces (14) para obtener la métrica de Schwarzschild con estas nuevas coordenadas:

$$d\bar{t} = dt + \frac{2M}{r - 2M} dr; \quad (16)$$

sustituyendo en (8):

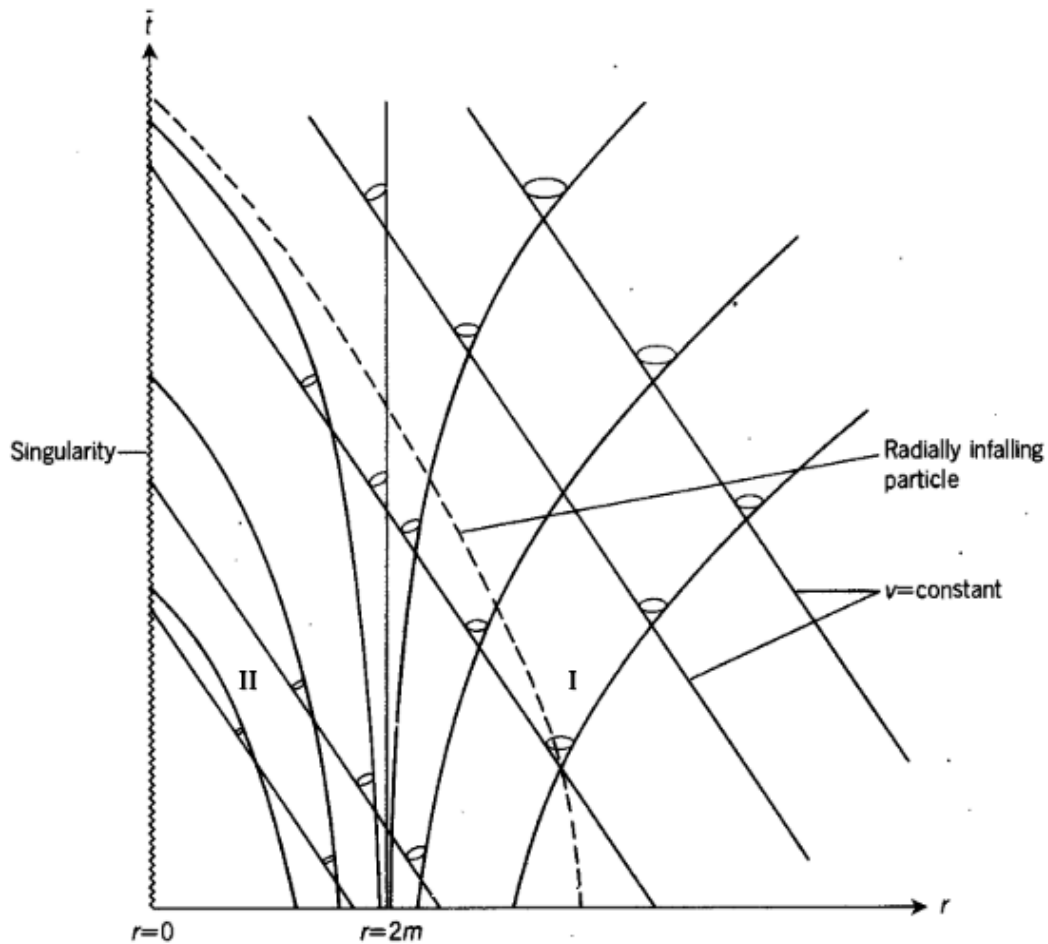
$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[ d\bar{t}^2 + \left(\frac{2M}{r - 2M}\right)^2 dr^2 - \frac{4M}{r - 2M} d\bar{t}dr \right] + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (17)$$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\bar{t}^2 + \frac{4M}{r} d\bar{t}dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (18)$$

Esta solución es ahora regular, no solo en la coordenada  $r = 2M$  si no en todo el rango  $0 < r < \infty$ . Aun con todo, podemos escribir la métrica de Schwarzschild mejor en las llamadas coordenadas de Eddington-Finkelstein avanzadas, las cuales vienen del cambio  $v = \bar{t} + r$  [5], quedando el elemento de línea como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (19)$$

Con esto, se puede hacer una nueva representación espacio-temporal en la cual no hay singularidad en la coordenada  $r = 2M$ , como bien se puede observar en la figura 5.3, ya que es posible atravesarla. Los conos de luz tienen una pendiente de  $-45^\circ$  para los bordes de la izquierda, esto es, los rayos que se dirigen a la singularidad  $r = 0$ . Los bordes de la derecha, rayos salientes, tienen la misma pendiente que en la figura 5.2.



**Figura 5.3.1.** Espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein avanzadas. Imagen tomada de [5].

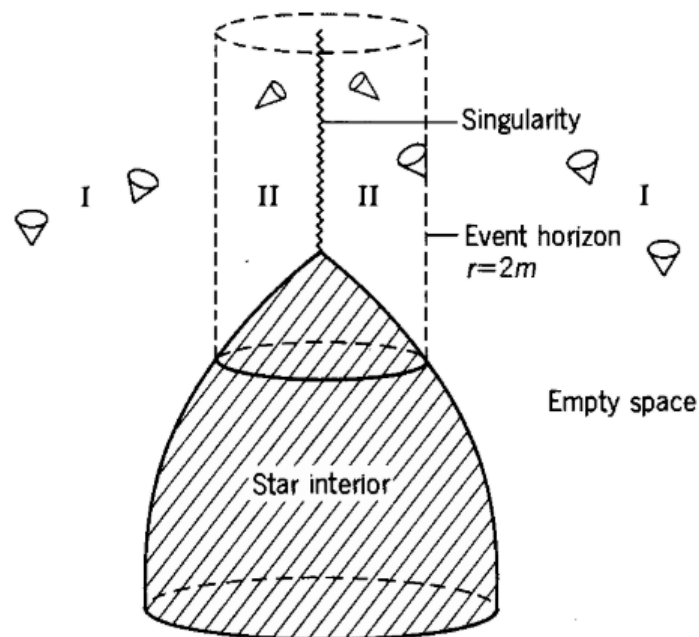
Los conos de luz, al acercarse a la coordenada  $r = 2M$  se van estrechando debido a que el borde derecho tiene una pendiente cada vez mayor, siendo de  $90^\circ$  cuando se encuentra justo en esta coordenada. Esto implica que los rayos de luz que se encuentran en ese borde (el de los rayos que se alejan) permanecen en la misma coordenada  $r = 2M$  para cualquiera  $\bar{t}$ . Cuando  $r < 2M$ , la pendiente de este borde es negativa. En  $r \rightarrow \infty$  volvemos a tener la solución de espacio-tiempo asintóticamente plano ya que los conos de luz tienen pendientes de  $\pm 45^\circ$ . Como se puede observar en la figura 5.3 ahora sí es posible ver la trayectoria de una partícula cayendo (línea discontinua), por lo que no tardará un tiempo infinito en traspasar la coordenada  $r = 2M$ , lo cual de hecho se ha logrado gracias al cambio de coordenadas.



## 5.4. Colapso gravitatorio

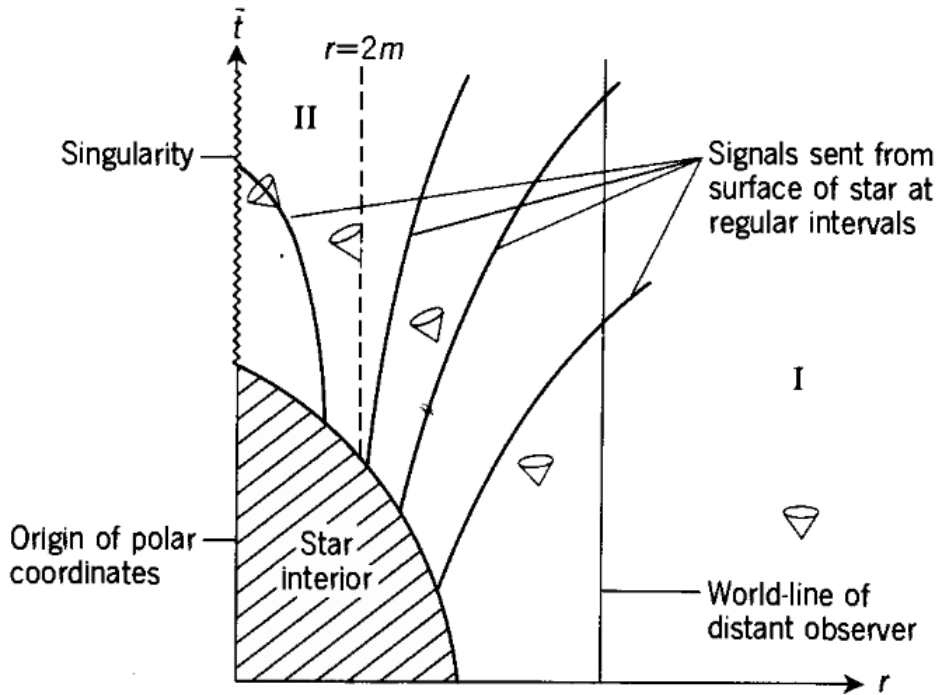
En situaciones normales, el colapso de una estrella se ve frenado por la presión que esta misma genera en oposición a la fuerza de la gravedad, llegando a una situación de equilibrio mecánico como se ha comentado en la sección 1, pero si la masa de la estrella es demasiado grande la pérdida de presión es tal que no puede llegarse a ningún equilibrio mecánico y esta sigue colapsando hasta un punto, formándose así un agujero negro.

Gráficamente se puede visualizar el colapso de una estrella simétrica, esférica y sin rotación mediante el diagrama espacio-temporal de Schwarzschild en las coordenadas de Eddington-Finkelstein avanzadas [5] (figura 5.4.1). En esta representación se observa la estrella (zona a rayas de la figura) comprimiendo su radio conforme la coordenada temporal avanza, hasta un punto, que se corresponde con la singularidad.



**Figura 5.4.1.** Colapso gravitacional de una estrella en tres dimensiones. Imagen tomada de [5].

Para estudiar el caso lo veremos en dos dimensiones en lugar de tres con la siguiente figura, que supone un corte transversal de la anterior:



**Figura 5.4.2.** Colapso gravitacional de una estrella en dos dimensiones. Imagen tomada de [5].

En este proceso suceden cosas distintas si se considera un observador en la superficie de la estrella que colapsa o un observador lejano. Para un observador en la superficie de la estrella no sucede nada especial, y este ve la estrella colapsar en un tiempo finito. Sin embargo un observador lejano no medirá el mismo tiempo; de hecho, si se consideran señales enviadas desde la superficie de la estrella periódicamente, las señales recibidas por el observador lejano estarán separadas por intervalos de tiempo cada vez mayores (esto se puede ver gráficamente en la figura 5.4.2), y las señales que se manden cuando la estrella ha pasado el radio de Schwarzschild ( $r = 2M$ ) no llegarán nunca, por lo que el observador lejano nunca ve que la estrella colapse. Realmente, este observador ve que la estrella tarda un tiempo infinito en colapsar más allá del radio de Schwarzschild, como si se ralentizara cada vez más hasta incluso ver el colapso congelado. Es por ello que originalmente a los agujeros negros se los denominó estrellas congeladas [1]. En la sección 7 se estudiará matemáticamente una partícula cayendo a un agujero negro desde el punto de vista de la partícula y de un observador lejano, lo cual es análogo a esta situación. Así, se va a ver que realmente la estrella no se ve congelada debido al corrimiento gravitatorio al rojo que hace que esta “se apague”.

## 5.5. Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Otro cambio de variables que elimina la singularidad en  $r = 2M$  es a las coordenadas de Kruskal-Szekeres. Ahora no solo es un cambio en la coordenada temporal, sino que también se cambia la radial. Estas nuevas coordenadas se relacionan con  $t$  y  $r$  tal que:

$$r > 2M \begin{cases} x' = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh \frac{t}{4M} \\ t' = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh \frac{t}{4M} \end{cases} \quad (20)$$

$$r < 2M \begin{cases} x' = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh \frac{t}{4M} \\ t' = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh \frac{t}{4M} \end{cases} \quad (21)$$

y, al introducirlas, se obtiene el elemento de línea:

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{(-\frac{r}{2M})} dt'^2 - \frac{32M^3}{r} e^{(-\frac{r}{2M})} dx'^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (22)$$

Las coordenadas angulares siguen siendo las mismas. Esta nueva métrica es regular en  $r = 2M$ , ya que tiene el valor finito  $ds^2 = 16M^2 e^{-1}(dt'^2 - dx'^2) - 4M^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ . Las coordenadas temporal ( $t'$ ) y espacial ( $x'$ ) no se intercambian al pasar de una región a otra. Además, es posible atravesar el radio de Schwarzschild en un tiempo finito, al contrario que sucedía con las coordenadas de Schwarzschild, y también se tiene que ahora el suceso ( $r = 2M, -\infty \leq t \leq +\infty$ ) es un punto geométrico en el diagrama espacio-temporal, como corresponde matemáticamente. En la siguiente sección se comprenderá en mayor profundidad.

## 5.6. Diagrama espacio-temporal para las coordenadas de Kruskal-Szekeres

En la figura 5.6 se han representado tanto las coordenadas de Kruskal-Szekeres ( $t', x'$ ) en el eje vertical y horizontal, como las de Schwarzschild ( $t, r$ ) para distintos valores,



sucedan en la sección 4.1. Por otro lado, se observa que es posible para una partícula (*Radially infalling particle* en la figura 5.6.1) cruzar  $r = 2M$  en un tiempo propio finito, ya que la línea del universo permanecerá dentro del cono de luz en todo momento. Pero, hay que tener en cuenta que, al igual que en la representación de Schwarzschild, es imposible mantener la coordenada  $r = cte$  en la región II ya que la pendiente del cono de luz es mayor que la de las hipérbolas  $r = cte$ , y que, inevitablemente, cualquier partícula que se encuentre en esta zona del espacio-tiempo acabará cayendo en la singularidad  $r = 0$ , representada por una línea ondulada en la figura 5.6.1.

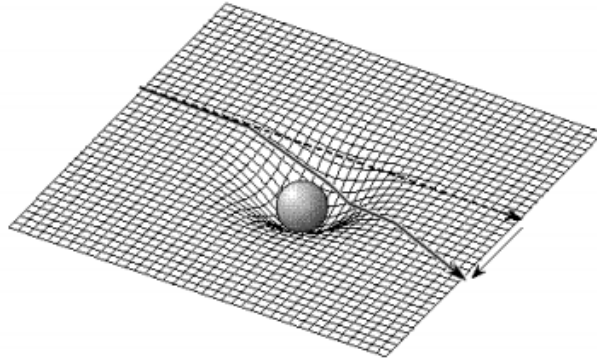
Además, si consideramos una partícula cayendo radialmente que emite pulsos de luz hacia fuera (*Escaping signals*) de manera que un observador externo en reposo ( $r = cte$  en la región I) los recibe, se observa que cuando esta partícula cruce la superficie ( $r = 2M, t = +\infty$ ) será imposible que el observador externo siga recibiendo señales ya que los rayos de luz tienen la misma pendiente que dicha superficie. Además, debido a la dilatación del tiempo y a que la partícula se aleja cada vez más del observador, el intervalo de tiempo en el que se reciba la señal irá aumentando aunque la partícula siga enviándolos periódicamente. Nuevamente se observa que esta superficie, dada por  $r = 2M$ , separa el espacio-tiempo. Se trata del denominado **horizonte de sucesos**, nombre que recibe debido a que para un observador inercial en el espacio-tiempo de la región I este es el borde de todos los sucesos que es capaz de observar [5].

Como se puede ver entonces, el espacio-tiempo queda limitado por las singularidades  $r = 0$ , denominadas singularidad pasada y singularidad futura, y se divide en cuatro regiones con las superficies  $r = 2M$ . La región I es el espacio-tiempo correspondiente a las soluciones de Schwarzschild para  $r > 2M$ . La región II corresponde a lo que denominamos agujero negro, dentro de la cual todo termina en la singularidad. La región I' es similar a la I en el sentido de que es un espacio-tiempo asintóticamente plano con  $r > 2M$ , pero la coordenada  $t$  se mueve en sentido opuesto al tiempo propio. Y la región II' es análoga a la II, con una singularidad en su interior, pero contraria, ya que ahora existe una imposibilidad de permanecer dentro de dicha región, es decir, todo sale. Esta última región se denomina análogamente **agujero blanco**.

## 6. La luz en la métrica de Schwarzschild

### 6.1. Desvío

La curvatura del espacio que se vio en la sección 5.1 provoca que una trayectoria rectilínea (línea discontinua) se curve (línea continua) tal y como se puede observar en la figura 6.1.1.



**Figura 6.1.1.** Trayectoria curvada por la curvatura que genera una masa en el espacio. Imagen tomada de [www.ugr.es/~jillana/relatividad.php](http://www.ugr.es/~jillana/relatividad.php), 19:35:18, 07/06/2019.

Para estudiar la forma en la que la luz se curva por la presencia de campos gravitatorios se va a seguir el razonamiento expuesto en [5], partiendo de la ecuación geodésica de un rayo de luz en la métrica de Schwarzschild. Una ecuación geodésica es la línea de mínima longitud que une dos puntos en una superficie, lo cual en el espacio cotidiano se sabe que es una línea recta, pero teniendo en cuenta la curvatura del espacio-tiempo de Schwarzschild se puede ver que no será necesariamente así. La ecuación de partida, suponiendo una trayectoria en el plano ecuatorial ( $\theta = \pi/2$ ), es:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3Mu^2; \quad (24)$$

donde  $u = 1/r$ . Cogiendo en primera aproximación únicamente los términos lineales se tiene que la solución es:

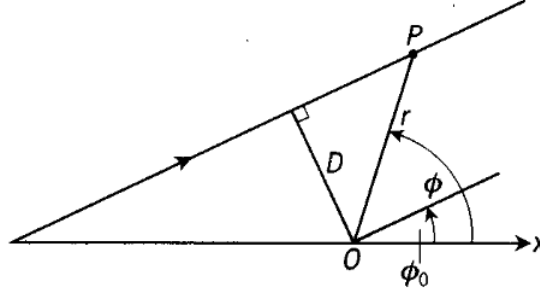
$$u = \frac{\sin(\varphi + \varphi_0)}{D} \quad (25)$$

$\varphi_0$  y  $D$  son constantes de integración. Por la simetría del problema que se puede ver en la figura 6.1.2 la coordenada  $\varphi$  va a tomar valores entre  $\varphi_0$  y  $\varphi_0 + \pi$ . Esta constante angular se puede establecer como  $\varphi_0 = 0$  para facilitar los cálculos de manera que la ecuación

resulta:

$$u = \frac{\sin \varphi}{D} \quad (26)$$

Solución que se corresponde con una línea recta, como se ve en la figura 6.1.2. La distancia de máximo acercamiento es  $D$ , ya que  $u = 1/r$ , y en ese punto tenemos que  $u = 1/D$ .



**Figura 6.1.2.** Máximo acercamiento a un punto  $O$  de un rayo de luz en línea recta. Imagen tomada de [5].

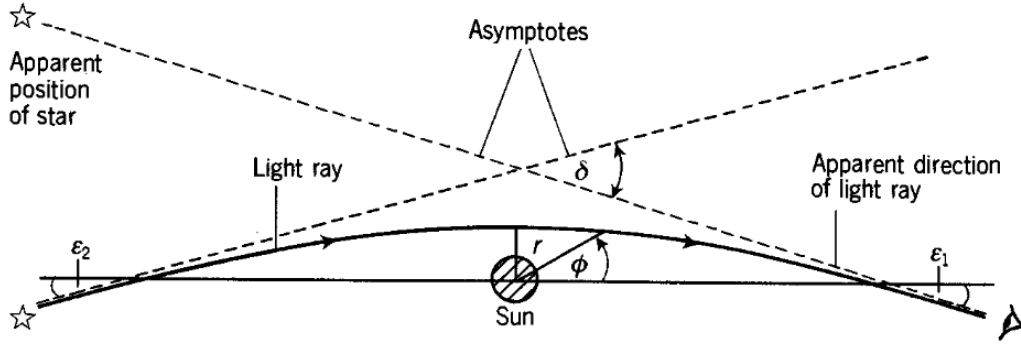
Si ahora consideramos términos de orden superior estaremos introduciendo perturbaciones en la solución, de manera que en el termino superior en  $u$  de la ecuación (24) se sustituye la solución de primer orden (26):

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \simeq 3M \frac{\sin \varphi^2}{D}; \quad (27)$$

cuya solución es:

$$u = \frac{\sin \varphi}{D} + \frac{M(2 - \sin^2 \varphi)}{D^2} = \frac{\sin \varphi}{D} + \frac{M(1 + \cos^2 \varphi)}{D^2} \quad (28)$$

El primer sumando de la parte derecha de la ecuación (28) se corresponde con la línea recta que era solución de la primera aproximación, mientras que el segundo sumando es el que introduce las perturbaciones en la trayectoria de la luz. Se puede observar que la desviación en la trayectoria es directamente proporcional a la masa  $M$  que está creando el campo, lo cual significa que mayores masas provocan mayores perturbaciones en la trayectoria de la luz. Por ejemplo, en el caso de una estrella situada detrás del Sol tal y como se muestra en la figura 6.1.3, un rayo de luz que pase cerca del Sol se curvará de manera que el rayo que llega a un observador en la Tierra lleva una dirección aparente que se corresponde con una posición distinta a la real (posición aparente).



**Figura 6.1.3.** Desviación de un rayo de luz proveniente de una estrella debido al campo gravitatorio del Sol. Imagen tomada de [5].

El **ángulo de depleción**  $\delta$  es el ángulo entre la posición real de la estrella y la aparente, ya que los rayos de luz se desvían por la presencia del campo gravitatorio. Es posible determinar la expresión de este ángulo posicionandonos lejos de la fuente [5]. Esto es  $r \rightarrow \infty$  y conlleva que  $u \rightarrow 0$ . Las asíntotas, tal y como se observan en la figura 6.1.3, se corresponden con  $\varphi = -\epsilon_1$  y  $\varphi = \pi + \epsilon_2$ . Por la simetría del problema se observa que  $\delta = \epsilon_1 + \epsilon_2$ , con lo que, empleando la expresión (28), teniendo en cuenta que el término de la izquierda se anula y que los ángulos son pequeños <sup>10</sup>, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{-\epsilon_1}{D} + \frac{2M}{D^2} \rightarrow \epsilon_1 = \frac{2M}{D} \\ 0 &= \frac{-\epsilon_2}{D} + \frac{2M}{D^2} \rightarrow \epsilon_2 = \frac{2M}{D} \end{aligned} \right\} \delta = \frac{4M}{D} \quad (29)$$

La expresión (29) indica que el ángulo de depleción depende de la distancia de máximo acercamiento que tendría el rayo si no se desviara (a menor distancia mayor desvío) y de la masa que crea el campo (a mayor masa mayor desvío, lo cual concuerda con que un cuerpo con más masa genera una curvatura mayor). Para el caso de los rayos desviados por el Sol cuando pasan por el limbo (que corresponde a la mayor desviación que se puede producir y es  $D \simeq R_{\odot}$ ) se obtiene un valor de  $\delta_{max} = 4M/R_{\odot} = 1,750''$ . La primera persona que midió este valor experimentalmente fue Eddington (1919), durante un eclipse solar (ya que es la única manera de observar las estrellas que tienen una posición angular cercana a la del sol) comparando la posición de algunas estrellas durante ese momento y por la noche. Así, el valor que obtuvo para el ángulo de depleción fue  $\delta = 1,98 \pm 0,16$  [10]. Este valor es muy cercano al teórico pero con cierto error debido tanto a la atmósfera,

<sup>10</sup>Se aplican las aproximaciones  $\sin \varphi \simeq \varphi$  y  $\cos \varphi \simeq 0$ .



que hace fluctuar la posición de las estrellas, como a la corona solar, que tiene un índice de refracción que depende de la distancia al sol. Con el tiempo se tomaron medidas más exactas.

## 6.2. Retraso

Otro efecto que sufre la luz en la métrica de Schwarzschild es que se retrasa. Como se ha visto, el espacio se curva por la presencia de un campo gravitatorio, lo que hace que la luz también se curve, por tanto, esta necesita más tiempo para llegar de un punto a otro en el espacio curvo que en el espacio plano. Esta idea fue propuesta por Shapiro (1964) y constituye uno de los experimentos que confirman la teoría de la relatividad como veremos al final de la sección. Nuevamente se seguirá el razonamiento de [5].

Para explicar este hecho se considera un rayo de luz ( $ds^2 = 0$ ) en la trayectoria ecuatorial  $\theta = \pi/2$ , con lo que tenemos que la métrica de Schwarzschild, ec. (8), queda:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\varphi^2 = 0 \quad (30)$$

Una relación entre el ángulo  $\varphi$  y la coordenada  $r$ , haciendo una aproximación de primer orden, se saca diferenciando la ecuación (26):

$$r \cos \varphi d\varphi + dr \sin \varphi = 0 \quad \rightarrow \quad r d\varphi = -\tan \varphi dr;$$

elevando al cuadrado y teniendo en cuenta la simetría del problema se obtiene la relación:

$$r^2 d\varphi^2 = \frac{D^2}{r^2 - D^2} dr^2;$$

que sustituyendo en (30) y despejando  $dt^2$ :

$$dt^2 = \left( (1 - 2M/r)^{-2} + (1 - 2M/r)^{-1} \frac{D^2}{r^2 - D^2} \right) dr^2;$$

esta expresión se expande hasta el primer orden en  $M/r$  quedando:

$$dt^2 \simeq \frac{r^2}{r^2 - D^2} (1 + 4M/r - 2MD^2/r^3) dr^2;$$

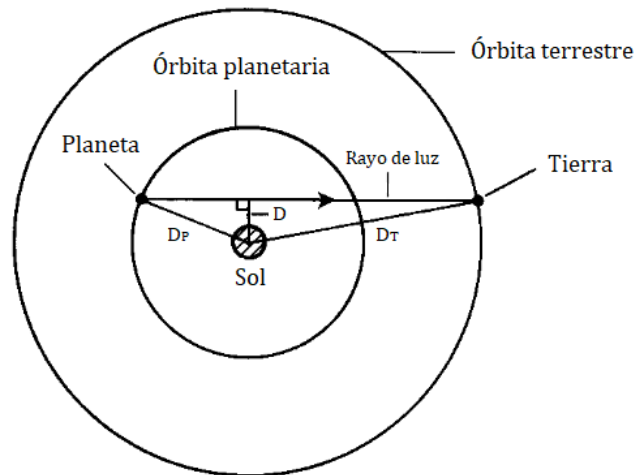
y finalmente, hacemos la raíz de la expresión y volvemos a expandir al primer orden:

$$dt \simeq \frac{\pm r}{(r^2 - D^2)^{1/2}} (1 + 2M/r - MD^2/r^3) dr \quad (31)$$

La ecuación depende de la masa del cuerpo que crea el campo gravitatorio,  $M$ , la distancia a la que se encuentra de dicho cuerpo,  $r$ , y la distancia de máximo acercamiento,  $D$ . Si se integra (31) para un rayo de luz que va desde la Tierra a otro planeta, tal y como se muestra en la figura 6.2.1 se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 T = & [(D_P^2 - D^2)^{1/2} + (D_T^2 - D^2)^{1/2}] \\
 & + 2M \ln [(D_P^2 - D^2)^{1/2} + D_P][ (D_T^2 - D^2)^{1/2} + D_T ] / D^2 \\
 & - m [(D_P^2 - D^2)^{1/2} / D_P + (D_T^2 - D^2)^{1/2} / D_T];
 \end{aligned} \tag{32}$$

donde  $D_P$  es la distancia del planeta al Sol y  $D_T$  es a distancia de la Tierra al Sol. En esta ecuación se puede observar que el primer término que está entre corchetes es la solución para el caso en el que el rayo va en una trayectoria recta, mientras que el resto de la expresión introduce la perturbación que hace que el tiempo sea menor, ya que la trayectoria que sigue la luz, como hemos visto en la sección anterior, no es recta sino que se curva por la presencia del campo gravitatorio solar.



**Figura 6.2.1.** Trayectoria rectilínea de un rayo de luz desde un planeta a la Tierra. Imagen tomada de [5].

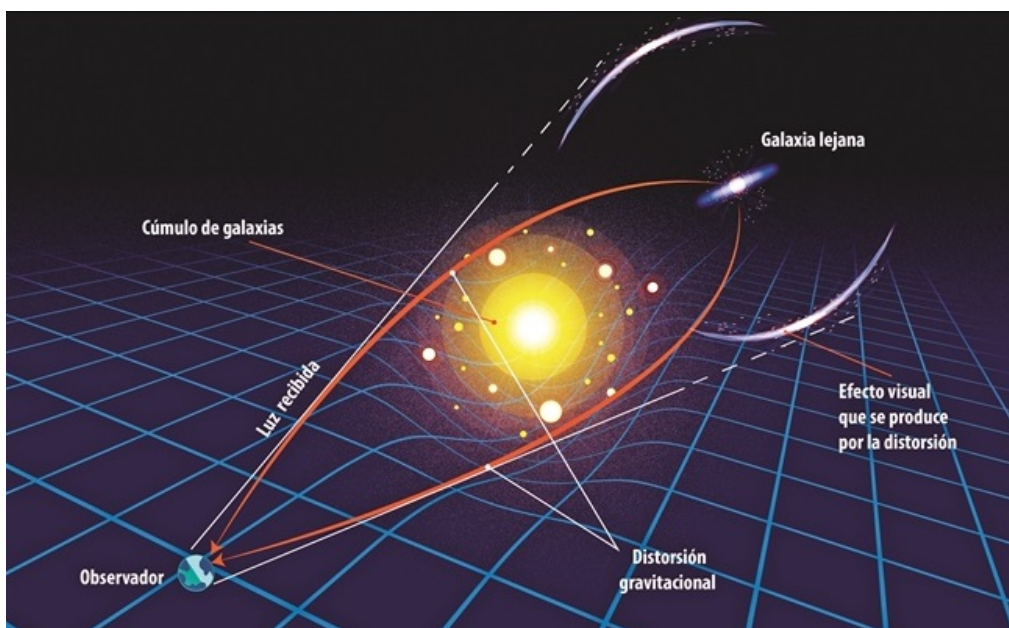
En 1971, Shapiro et al. midieron el tiempo de retraso que sufría la luz en su camino entre la Tierra y Venus cuando estos estaban en conjunción superior <sup>11</sup>, y efectivamente la luz se retrasaba. En [10] se pueden consultar las mediciones, siendo en este caso el tiempo de retraso de aproximadamente 200  $\mu s$ . Este resultado concuerda con la predicción teórica

<sup>11</sup>Cuando dos planetas se encuentran alineados con el Sol entre ellos.

muy bien ya que  $\Delta\tau_{exp}/\Delta\tau_{teo} = 1,02 \pm 0,05$ . Más adelante se midieron otros retrasos con sondas espaciales en conjunción superior obteniendo aún mejores resultados: con la Viking (sonda espacial enviada a Marte) se midió  $\Delta\tau_{exp}/\Delta\tau_{teo} = 1,00 \pm 0,02$  (Reasenberg y Shapiro, 1979), y con la Cassini-Huygens (cuando pasó cerca de Jupiter) se midió  $\Delta\tau_{exp}/\Delta\tau_{teo} = 1,00000 \pm 10^{-5}$  (Bertotti et al., 2003). Al ser sondas localizadas en todo momento las medidas son muy exactas.

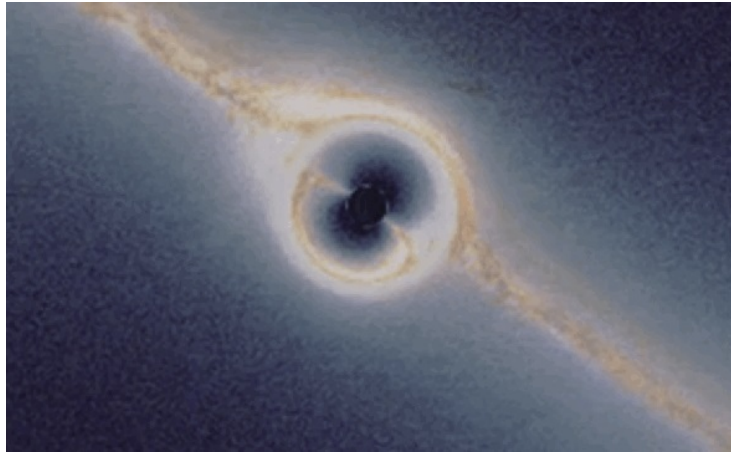
### 6.3. Lentes gravitacionales

Una consecuencia del efecto de desviación de la luz por la curvatura del espacio-tiempo son las llamadas lentes gravitacionales. Estas se denominan así porque actúan como una lente haciendo converger distintos rayos de luz en un mismo punto. En la figura 6.3.1 se observa una galaxia lejana, que actúa como fuente de radiación, y un cúmulo de galaxias, que sería la lente en cuestión. Dos rayos de luz que salen de esta fuente (líneas naranja) son desviados por la lente gravitatoria haciéndolos converger en un punto donde se situaría el observador, que lo que ve es la misma galaxia en dos posiciones distintas (posiciones aparentes dadas por las líneas blancas). Además, la galaxia se observa en forma de arco en torno a la lente gravitacional [1]. A esta deformación se la denomina **anillo de Einstein**. Para que se de esto no hace falta que haya una alineación perfecta entre la fuente, la lente y el observador, ya que distintos rayos convergerán en distintos puntos, pero sí se tiene que la lente debe situarse aproximadamente en el medio debido a la forma en la que el campo gravitatorio curva los rayos.



**Figura 6.3.1.** Efecto de una lente gravitatoria formada por un cúmulo de galaxias. Imagen tomada de la Revista de Divulgación del Cinvestav, *ayp.cinvestav.mx*, 12:00:06, 16/06/2019.

La curvatura que provocan los objetos masivos en los rayos de luz tiene una gran importancia en la detección de agujeros negros ya que se podría descubrir la existencia de estos gracias al campo gravitatorio que crean sin tener que ser observados directamente. En la figura 6.3.2 se visualiza una interpretación artística de lo que se observaría si un agujero negro actúa como lente gravitacional con una galaxia que pasase por detrás.



**Figura 6.3.2.** Simulación de una galaxia pasando detrás de un agujero negro que actúa como lente gravitacional. Imagen tomada de *www.relatividad.org*, 16:47:22, 10/06/2019.

## 7. Partícula cayendo radialmente

Un supuesto especialmente relevante es el considerar una partícula que cae hacia un agujero negro, ya que los resultados que se obtienen para el tiempo propio y coordenado son, cuanto menos, curiosos. Si se considera una partícula con una trayectoria radial en el plano ecuatorial  $\theta = 0$ , la ecuación de la métrica es:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2; \quad (33)$$

dividiendo entre  $d\tau^2$ , siendo  $\tau$  el tiempo propio:

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \quad (34)$$

Si se considera que la partícula cae desde el reposo en un punto muy lejano se tiene que  $ds^2 = -d\tau^2$ , por lo que el término de la izquierda en la ecuación (34) es menos -1. Por otro lado, la relación entre el tiempo coordenado,  $t$ , y el tiempo propio,  $\tau$  se deduce desde la ecuación (33) sacando factor común  $dt^2$  y sustituyendo  $ds^2$  por  $-d\tau^2$ :

$$d\tau^2 = dt^2 \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \right]; \quad (35)$$

entonces, como se ha dicho que la partícula está inicialmente en reposo se tiene que  $(dr/dt) = 0$ , con lo cual queda la relación:

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right); \quad (36)$$

y teniendo en cuenta también que inicialmente se encuentra muy alejada la solución es que  $(dt/d\tau) \simeq 1$ , lo cual implica que en la posición inicial  $\tau \simeq t$ . Sustituyendo estos resultados en la ecuación (34) tenemos una relación entre  $d\tau$  y  $dr$  [5]:

$$\left(\frac{d\tau}{dr}\right)^2 = \frac{r}{2M} \quad \rightarrow \quad d\tau = -\sqrt{\frac{r}{2M}} dr \quad (37)$$

Se escoge la raíz negativa porque se está considerando que la partícula cae hacia el agujero negro. Integrando esta expresión se obtiene el tiempo propio en función de la coordenada radial [5]:

$$\tau - \tau_0 = \frac{2}{3\sqrt{2M}} \left(r_0^{3/2} - r^{3/2}\right) \quad (38)$$

donde se tiene que  $r_0$  es la posición de la partícula en un tiempo propio  $\tau_0$ . Esta ecuación indica que la partícula atraviesa el horizonte de sucesos sin que nada raro ocurra, hasta llegar a la singularidad  $r = 0$  en un tiempo finito, como se estudió gráficamente en secciones anteriores.

A continuación, se determina la expresión del tiempo coordenado en función de la coordenada  $r$  partiendo de (33) y dividiendo ahora entre  $dr$ :

$$\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{dr}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{dr}\right)^2; \quad (39)$$

el término de la izquierda se sustituye por la ecuación (37) y se obtiene:

$$\frac{r}{2M} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{dr}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1};$$

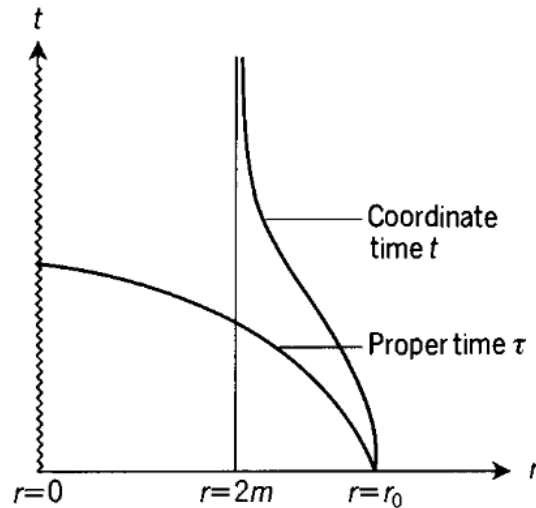
de donde, despejando se tiene la expresión entre  $dt$  y  $dr$ :

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = -\frac{r^3}{2M(r-2M)^2} \quad \rightarrow \quad dt = \left(\frac{r^3}{2M}\right)^{1/2} \frac{1}{2M-r} dr; \quad (40)$$

integrando esta expresión el tiempo coordenado en función de  $r$  es [5]:

$$t-t_0 = -\frac{2}{3\sqrt{2M}}(r^{3/2}-r_0^{3/2}+6Mr^{1/2}-6Mr_0^{1/2})+2M \ln \frac{[\sqrt{r}+\sqrt{2M}][\sqrt{r_0}-\sqrt{2M}]}{[\sqrt{r_0}+\sqrt{2M}][\sqrt{r}-\sqrt{2M}]} \quad (41)$$

Evaluando esta expresión para  $r$  y  $r_0$  mucho mayores al horizonte de sucesos, esto es, cuando la partícula está muy alejada del agujero negro, se observa que coincide con la expresión para el tiempo propio dada por la ecuación (38). Este resultado concuerda con el hecho de que inicialmente  $t \simeq \tau$  como ya se ha dicho. Por otro lado, cuando la partícula se acerca al horizonte de sucesos ( $r \rightarrow 2M$ ) el tiempo se vuelve infinito. En la figura 7.1 se observan gráficamente estas ecuaciones.



**Figura 7.1.** Tiempo propio y coordenado de una partícula cayendo hacia un agujero negro. Imagen tomada de [5].

Todo esto significa que una partícula puede entrar en un agujero negro sin notar nada en especial, pero un observador externo ve que la partícula tarda en entrar un tiempo infinito, tal y como se estudió gráficamente en la sección 5.6. Esto está también relacionado con el hecho visto en la sección anterior de que la luz se retrasa conforme se acerca a un objeto masivo, ya que los resultados estudiados para la luz se pueden extrapolar a cualquier partícula. De esta forma, en principio un observador externo vería la partícula como congelada en las proximidades del horizonte de sucesos. Se podría pensar entonces que se pueden observar objetos cayendo en agujeros negros eternamente, pero

existe otro fenómeno a tener en cuenta en la relatividad general y es el **corrimiento gravitatorio al rojo**, que provoca que el objeto “se apague”. Este corrimiento surge de la dilatación que genera un campo gravitatorio en el tiempo, y viene dado por la expresión [5]:

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \sqrt{\frac{g_{00}(recepcion)}{g_{00}(emision)}}; \quad (42)$$

siendo el punto B desde donde se emite una señal y A el punto de recepción. Recordando que se considera un campo gravitatorio débil con un potencial  $\phi(r) = -GM/R$ :

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \sqrt{\frac{1 - 2M/r_{recepcion}}{1 - 2M/r_{emision}}}; \quad (43)$$

y suponiendo como emisor la partícula que cae,  $r_{emision} = r$ , y un observador que recibe la señal en  $r_{recepcion} \rightarrow \infty$ , ambos en reposo, se obtiene la relación:

$$\nu = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \nu_0; \quad (44)$$

donde  $\nu_0$  es la frecuencia natural, la que se emite y recibe en el mismo lugar, y  $\nu$  la frecuencia que se emite y se observa en un punto lejano del agujero negro. Así, se puede ver que cuando  $r \rightarrow 2M$  la frecuencia observada es  $\nu \rightarrow 0$ , lo cual implica que se deja de recibir señal alguna de la partícula que cae.

Aunque se ha dicho que una partícula no sentiría nada al caer en un agujero negro realmente no es así debido a las **fuerzas de marea**. Entonces, ¿qué sucedería si cayeras a agujero negro? Pues considerado una persona que se dirige de cabeza a un agujero negro tenemos que la fuerza gravitacional que esta sufre en la cabeza es mucho mayor que la que sufrirá en los pies, lo cual implica que los extremos de su cuerpo se mueven con distintas aceleraciones. Esto produce un estiramiento en la dirección de caída y una compresión en la dirección transversal al movimiento. La diferencia entre estas fuerzas se hace más y más grande conforme la persona se aproxima a la singularidad  $r = 0$ , donde resulta infinita. Es más, este mismo efecto lo sufrirán cada una de las partículas que conforman a la persona así que, bueno, no sobreviviría mucho tiempo a esta caída.

## Parte III

# Detección en sistemas binarios

“Con este descubrimiento (el de las ondas gravitacionales), los humanos se están embarcando en una maravillosa nueva misión: la misión de explorar la parte deformada del Universo.”

K. Thorne.

## 8. Por rayos X

En este escrito se describirán dos de los sistemas binarios compuestos por una estrella y un agujero negro descubiertos mediante rayos X, ya que son muchos los agujeros negros detectados de esa manera. Actualmente, cualquier observación de este tipo en la cual se determine que la masa del objeto invisible es mayor que  $3M_{\odot}$  se considera que es un agujero negro, mientras que antes eran solo candidatos a agujeros negros.

### 8.1. Cynus X-1

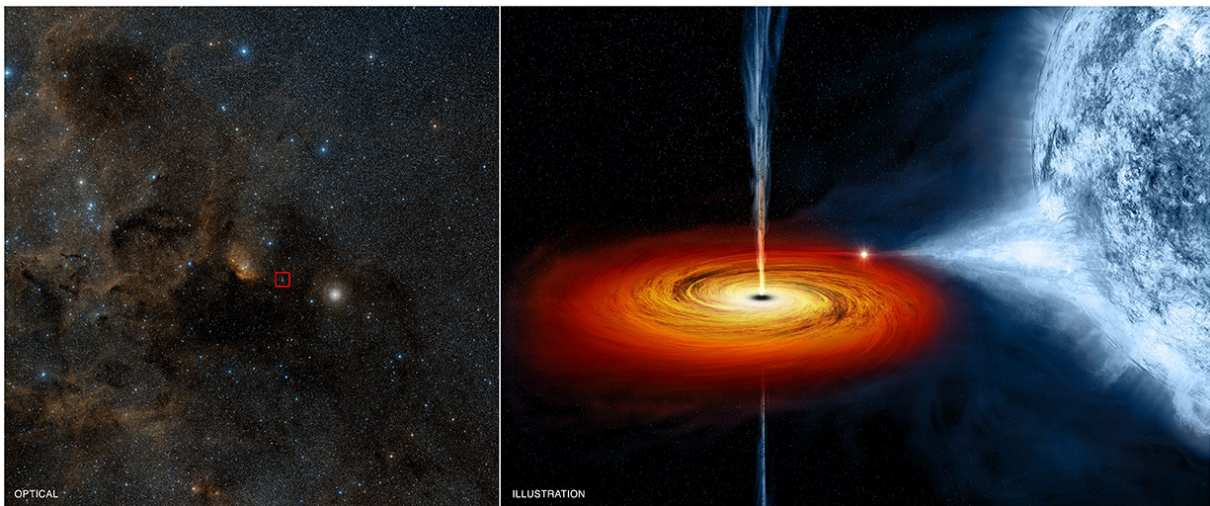
La fuente de rayos X Cynus X-1 fue descubierta en 1964 por Bowyer et al. [11], la cual tenía la misma posición que la estrella clasificada como supergigante azul HDE 226868 [12]. Como ya se ha comentado, si esto ocurre cabe la posibilidad de que la fuente de rayos X sea un sistema binario formado por dicha estrella y un agujero negro. De hecho, es bien conocida la histórica apuesta entre Stephen Hawking y Kip Thorne acerca de si este sistema albergaba o no un agujero negro. Fue Hawking quien en 1990 perdió la apuesta ya que por fin se declaró, tras las numerosas evidencias y estudios dinámicos del movimiento entre los dos cuerpos que formaban el sistema binario, que efectivamente había un agujero negro. Y es que, aunque en aquella época era difícil determinar las masas por la falta de precisión en la distancia, todo apuntaba a que superaba el límite de TOV [13].

Uno de estos estudios es el publicado en la revista Nature en el año 1972 por Webster et al. [14]. En él se midió la velocidad radial de la estrella durante dos meses utilizando el Telescopio Isaac Newton. Se observó que esta variaba, y lo que es más, estos cambios



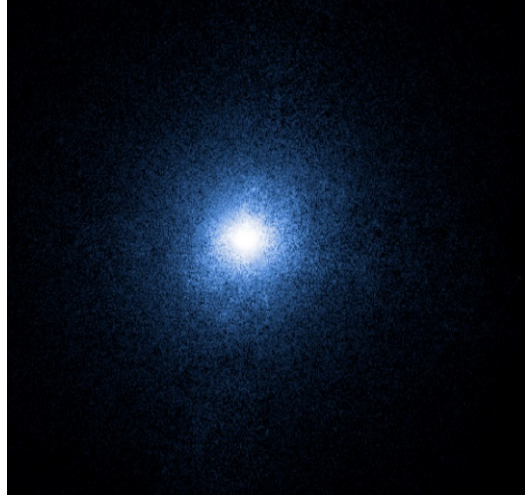
estaban correlacionados con el cambio en el flujo de emisión de la fuente. Aunque no calcularon la masa correctamente, estimaron que esta debía ser mayor de  $2 M_{\odot}$ , concluyendo en que probablemente se tratara de un agujero negro. Además, pudieron determinar que la estrella estaba en una órbita de 5,60 días.

El estudio más reciente data del año 2011 [13]. En él se determinan tanto las masas de las componentes del sistema, siendo la del cuerpo compacto  $m = 14,81 \pm 0,98 M_{\odot}$  y la de la estrella donadora  $M = 19,16 \pm 1,90 M_{\odot}$ , como el ángulo de inclinación entre el plano de la órbita y nuestra línea de visión,  $i = 27^{\circ},1 \pm 0^{\circ},8$ . Efectivamente se trata de un agujero negro ya que su masa excede el límite de TOV.



**Figura 8.1.2.** A la izquierda, la región del espacio donde se encuentra el sistema Cygnus X-1 visto en el rango óptico. A la derecha, la visualización artística del sistema binario Cygnus X-1 hecho por Melissa Weiss. Crédito: NASA/CXC/M.Weiss

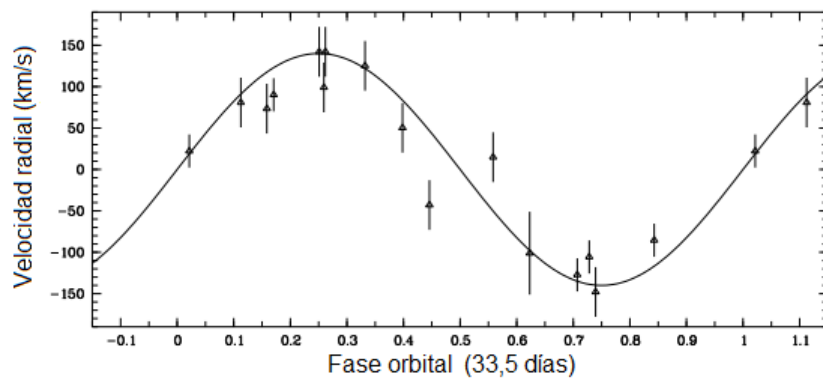
En la figura 8.1.2 se puede ver una interpretación artística creada por la diseñadora gráfica Melissa Weiss, que trabaja para la NASA ilustrando con datos obtenidos del Observatorio de rayos X Chandra. Pero, lo que realmente se observa cuando se apunta a este sistema, que está a 1,86 kpc [15], es la imagen de la figura 8.1.3, una mancha luminosa azulada.



**Figura 8.1.3.** Observación en rayos X del sistema binario Cygnus X-1. Crédito: NASA/CXC/SAO

## 8.2. GRS 1915+105 (V1487 Aquilae)

Esta fuente de rayos X fue descubierta en 1992 por Castro Tirado et al. [16] en nuestra propia galaxia, y es un caso muy curioso porque su flujo de rayos X varía de forma única [17]. Al principio había contradicciones acerca de la masa de la estrella compañera del sistema binario, ya que por una parte se decía que este sistema era LMXB <sup>12</sup> [18], y por otro lado, que la estrella donadora debía ser de masa alta [19, 20]. Tras una serie de observaciones espectroscópicas [21] se determinó que la estrella donadora es de tipo espectral K-M y tiene una luminosidad de clase III, lo cual implica que efectivamente es una binaria de baja masa, siendo la masa de la estrella donadora  $M = 1,2 \pm 0,2 M_{\odot}$ .



**Figura 8.2.1.** Resultados de los análisis sobre la velocidad radial. Imagen tomada de [22]

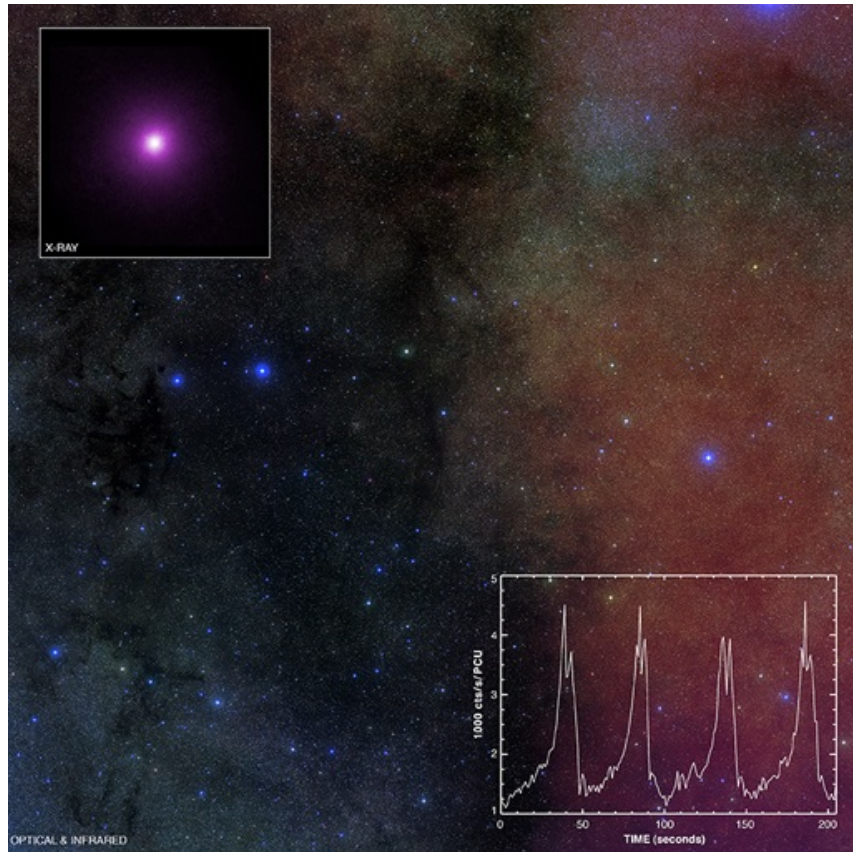
<sup>12</sup>Siglas en inglés que significan “binaria de rayos X de baja masa”

Un estudio realizado sobre la velocidad radial [22] demostró que el periodo orbital de la estrella es  $P_{orb} = 33,5 \pm 1,5$  días y que la amplitud de la curva de la velocidad radial en función de la fase orbital (figura 8.2.1) es  $K = 140 \pm 15$  km/s. Además, el ángulo de inclinación que hay entre el jet y nuestra línea de visión se ha medido como  $i = 70^\circ \pm 2^\circ$  [23]. Con estos datos se puede estimar la masa del objeto compacto mediante su función de masa,  $f_c$ , la cual establece una relación entre distintos parámetros de un sistema binario [24]. Esta resulta ser [22]:

$$f_c = \frac{m^3 \sin^3 i}{(m + M)^2} = \frac{P_{orb} K^3}{2\pi G} = 9,5 \pm 3,0 M_\odot \quad (45)$$

De esta manera se pudo determinar la masa del objeto compacto como  $m = 14 \pm 4 M_\odot$  [22], convirtiéndose así en el agujero negro de un sistema binario con más masa de nuestra galaxia. Pero no es solo eso lo que hace especial a este sistema binario, sino, como se comentó al principio, su forma de emitir rayos X.

Las emisiones observadas provenientes de esta binaria varían fuertemente, pasando de detectarse rayos “duros”, los cuales se emiten en forma de jet y se corresponden a periodos en los que la acreción de masa es baja y la luminosidad alta, a acretar mucha masa con una luminosidad variable, lo cual hace que se emitan a la vez rayos “duros” y “blandos” (radiados por todo el disco). En la figura 8.2.2 se muestra una de las observaciones realizadas por Neilsen et al. utilizando el Observatorio de Rayos X Chandra, correspondiente al día 23 de mayo de 2001, la cual tuvo una duración total de 8 horas y 20 minutos. Se observó que los rayos X emiten de forma parecida a un corazón humano detectándose un pulso luminoso cada 50 segundos aproximadamente. Este hecho cambió la concepción sobre la emisión de rayos X en sistemas binarios de este tipo, ya que debido a las observaciones realizadas hasta el momento, estas fuentes de rayos X se habían observado en un único estado de emisión, sin variaciones entre jets y rayos blandos. Esto implica que los demás también deben de cambiar de estado, pero lo hacen mucho más lentamente y por ese motivo parece que siempre se encuentran en el mismo [25].



**Figura 8.2.2.** Vista del cielo en el visible+infrarrojo junto con la imagen en rayos X del sistema binario GRS 1915+105. Abajo a la derecha en una gráfica están los pulsos de rayos X detectados. Crédito: X-ray (NASA/CXC/Harvard/J.Neilsen et al); Optical (Palomar DSS2)

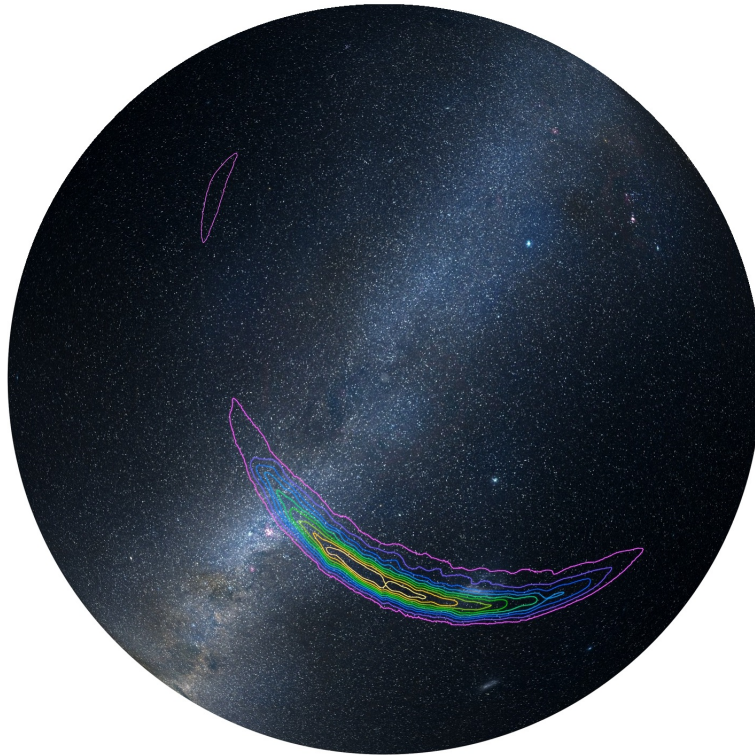
## 9. Por ondas gravitacionales

Al principio de este documento, en la sección 3.3, se comentó lo eficaces que fueron las mejoras realizadas al observatorio LIGO, y es que fue este el primero en detectar la existencia de ondas gravitacionales, después de muchos años en busca de ellas. Además, este descubrimiento no ha venido solo, sino que a raíz de él se han detectado hasta 10 ondas gravitacionales más, 9 de ellas formadas por la colisión de agujeros negros y una por la fusión de estrellas de neutrones, algunas en común con el detector de Virgo.

### 9.1. GW 150914: la primera onda gravitacional detectada

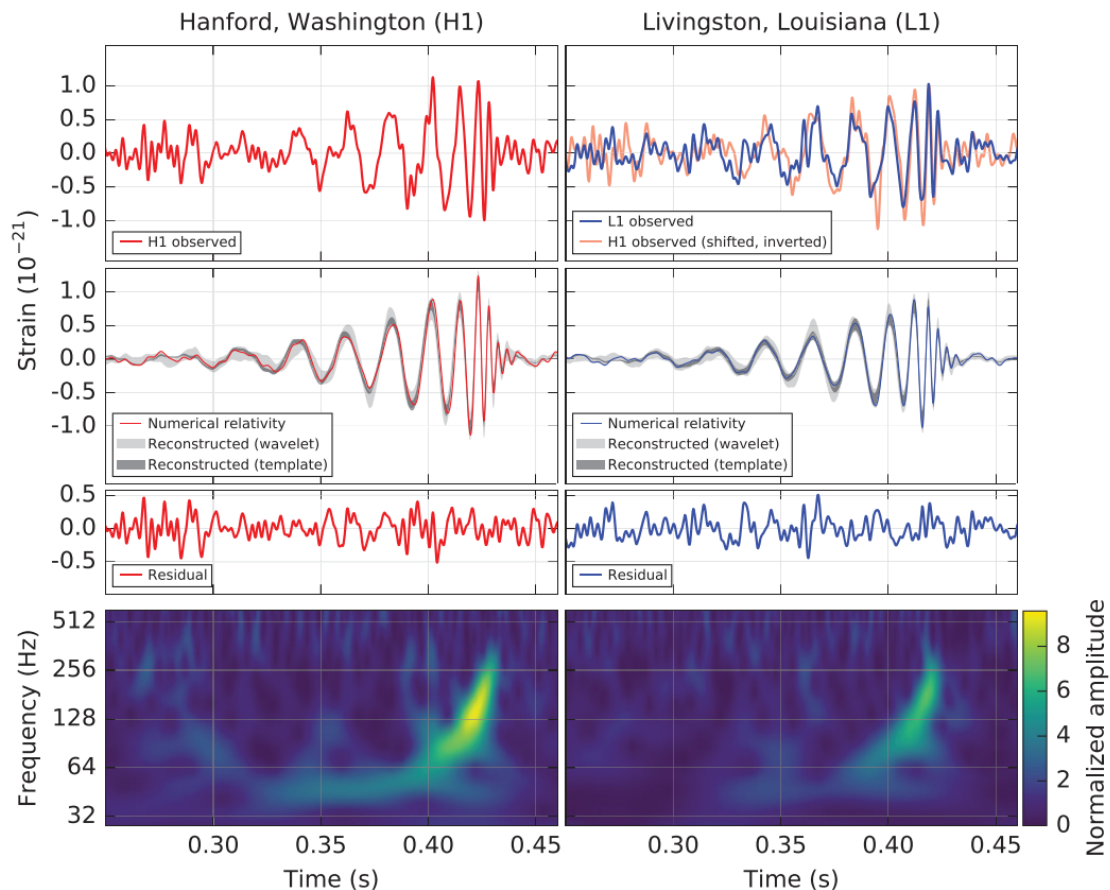
Fue el día 14 de septiembre del año 2015, a las 09:50:45 UTC cuando se captó por primera vez una onda gravitacional en los detectores de LIGO, a los pocos días de co-

menzar el funcionamiento del mejorado observatorio Advanced LIGO [8]. La señal fue detectada primero por el observatorio situado en Livingston LA, y  $6,9_{-0,4}^{+0,5}$  ms después en el observatorio de Hanford, WA, con una frecuencia creciente desde 35 hasta 250 Hz en 8 ciclos de rotación [8]. Gracias a esta diferencia de tiempo de llegada se pudo localizar el origen de la señal (en el hemisferio sur, ya que llegó antes al observatorio de Livingston), pero no de manera exacta sino haciendo uso de la probabilidad [26, 27]. Así, en la figura 9.1.1 se puede observar la función de densidad de probabilidad de encontrar la fuente de la onda gravitacional proyectada sobre el cielo del hemisferio sur con distintas regiones de confianza: desde un 90 % de probabilidad (línea morada) hasta un 10 % (línea amarilla), siendo el área limitada por la corona circular máxima de  $610 \text{ deg}^2$  [28].



**Figura 9.1.1.** Localización aproximada del origen de GW150914 en el hemisferio sur. Crédito: LIGO/Axel Mellinger

La forma de las ondas detectadas (figura 9.1.2) presenta un pico de amplitud de  $1 \cdot 10^{-21}$  al final del aumento de frecuencia, lo cual indica que el origen más probable de esta onda gravitacional es la fusión de dos cuerpos que se encontraban orbitando uno en torno al otro [8], ya que, como se comentó en la sección 3.1, al irse aproximando la frecuencia es cada vez mayor hasta un máximo que se corresponde con la fusión final.



**Figura 9.1.2.** En la columna de la izquierda se presentan los resultados de la observación en el observatorio de Hanford, y en la columna de la derecha la observación en Livingston. Imagen tomada de [8]

Cuando se analiza la onda en la fase de aproximación, en la cual las frecuencias son menores, se emplea la chirp mass <sup>13</sup>. Esta determina la evolución de la frecuencia de la onda y viene dada por la ecuación [8]:

$$\mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} = \frac{c^3}{G} \left[ \frac{5}{96} \pi^{-8/3} f^{-11/3} \dot{f} \right] \quad (46)$$

donde  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de los objetos que se fusionan y  $f$  es la frecuencia observada (siendo  $\dot{f}$  la evolución temporal de esta). La chirp mass de este evento resulta ser  $\mathcal{M} \simeq 30_{-2}^{+2} M_\odot$ , lo cual implica que la masa total es  $M = m_1 + m_2 \gtrsim 71_{-4}^{+5} M_\odot$  <sup>14</sup> [31]. Esto significa que la suma de los radios de Schwarzschild de los cuerpos que forman el sistema binario esta condicionada a ser  $2GM/c^2 \gtrsim 210 \text{ km}$  <sup>15</sup> [8]. Así, para poder alcanzar

<sup>13</sup>No se ha encontrado una traducción a este término.

<sup>14</sup>Medida en el detector. Para obtener la masa real de la fuente hay que tener en cuenta el corrimiento al rojo,  $z$ , dividiendo entre  $(1+z)$ .

<sup>15</sup>Utilizando la expresión del radio de Schwarzschild en unidades no relativistas.

una frecuencia orbital de 75 Hz (la mitad de la frecuencia máxima captada en este evento) la separación entre estas dos masas debe ser  $\simeq 350$  km [8]. El único resultado posible es que ambos cuerpos sean agujeros negros, ya que ninguna otra combinación puede permanecer orbitando estando tan cerca sin fusionar, ni siquiera estrellas de neutrones, que son también cuerpos de masa compacta [8]. Además, también se determinó la distancia luminosa, obteniéndose que la colisión se produjo a  $D_L = 410_{-180}^{+160}$  Mpc [28], siendo entonces el corrimiento al rojo  $z = 0,09_{-0,04}^{0,03}$  [32].

Estas ondas que se detectan contienen información acerca de las propiedades tanto de los cuerpos que se fusionan como del objeto final [29]. La información se obtiene mediante análisis con métodos numéricos de modelos teóricos de las señales de ondas gravitacionales que se generan al fusionarse dos agujeros negros [8]. Así, las masas (teniendo en cuenta el corrimiento al rojo) de los agujeros negros que colisionan es de  $36_{-4}^{+5} M_\odot$  y  $29_{-4}^{+4} M_\odot$  y la del agujero negro final  $62_{-4}^{+4} M_\odot$  [28], existiendo una diferencia de masa entre los agujeros negros que se fusionan y el agujero negro resultante. Esta diferencia es la energía que se radia en forma de ondas gravitacionales, y es de  $3,0_{-0,5}^{+0,5} M_\odot$  [28].

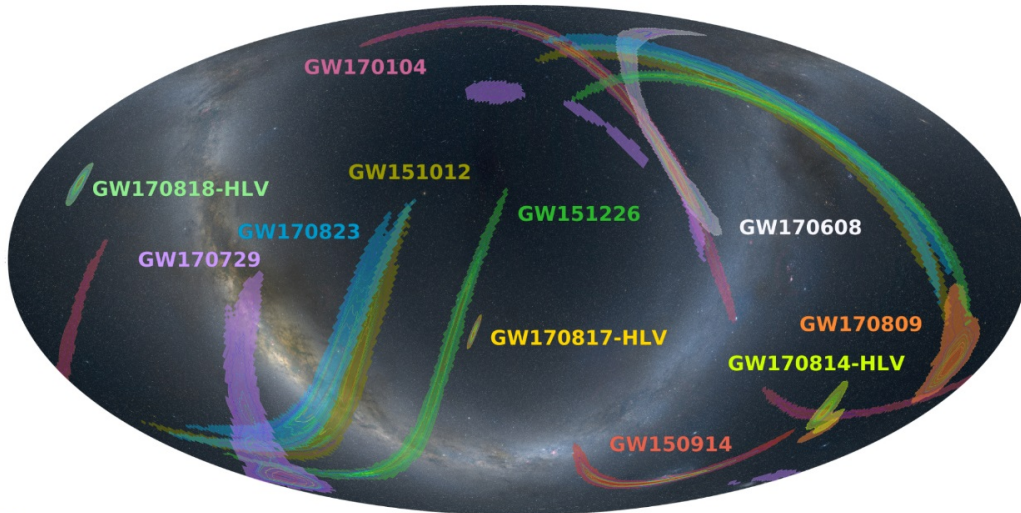
## 9.2. Catálogo de ondas gravitacionales

Tras el primer periodo de observación del detector LIGO ( $O_1$ ), con duración desde el 12 de septiembre de 2015 hasta el 19 de enero de 2016, se detectaron hasta tres señales: GW150914, GW151226 y GW151012 [33]. Esta última en su momento se clasificó como una posible señal, llamada LTV151012, pero actualmente se considera que es una onda gravitacional [29]. Después hubo otro periodo de observación ( $O_2$ ), el cual tuvo lugar desde el 30 de noviembre de 2016 hasta el 25 de agosto de 2017, incorporándose también el detector del observatorio Advanced Virgo el 1 de agosto de 2017 [6]. En este segundo periodo se detectaron 8 señales más: GW170104, GW170608, GW170729, GW170819, GW170814, GW170818 y GW 170823 provenientes de la fusión de dos agujeros negros [29] y GW170817 de la fusión de dos estrellas de neutrones [34], con unas masas y distancia luminosa claramente menores al resto de eventos, como se puede ver en la tabla 1. Toda la información recogida durante estos años ha sido puesta en común en el primer catálogo de ondas gravitacionales de la historia [29] que se puede encontrar de manera pública en la página web del LSC [6].

Event	$m_1/M_\odot$	$m_2/M_\odot$	$M_f/M_\odot$	$E_{rad}/(M_\odot c^2)$	$d_L/\text{Mpc}$
GW150914	$35.6^{+4.8}_{-3.0}$	$30.6^{+3.0}_{-4.4}$	$63.1^{+3.3}_{-3.0}$	$3.1^{+0.4}_{-0.4}$	$430^{+150}_{-170}$
GW151012	$23.3^{+14.0}_{-5.5}$	$13.6^{+4.1}_{-4.8}$	$35.7^{+9.9}_{-3.8}$	$1.5^{+0.5}_{-0.5}$	$1060^{+540}_{-480}$
GW151226	$13.7^{+8.8}_{-3.2}$	$7.7^{+2.2}_{-2.6}$	$20.5^{+6.4}_{-1.5}$	$1.0^{+0.1}_{-0.2}$	$440^{+180}_{-190}$
GW170104	$31.0^{+7.2}_{-5.6}$	$20.1^{+4.9}_{-4.5}$	$49.1^{+5.2}_{-3.9}$	$2.2^{+0.5}_{-0.5}$	$960^{+430}_{-410}$
GW170608	$10.9^{+5.3}_{-1.7}$	$7.6^{+1.3}_{-2.1}$	$17.8^{+3.2}_{-0.7}$	$0.9^{+0.05}_{-0.1}$	$320^{+120}_{-110}$
GW170729	$50.6^{+16.6}_{-10.2}$	$34.3^{+9.1}_{-10.1}$	$80.3^{+14.6}_{-10.2}$	$4.8^{+1.7}_{-1.7}$	$2750^{+1350}_{-1320}$
GW170809	$35.2^{+8.3}_{-6.0}$	$23.8^{+5.2}_{-5.1}$	$56.4^{+5.2}_{-3.7}$	$2.7^{+0.6}_{-0.6}$	$990^{+320}_{-380}$
GW170814	$30.7^{+5.7}_{-3.0}$	$25.3^{+2.9}_{-4.1}$	$53.4^{+3.2}_{-2.4}$	$2.7^{+0.4}_{-0.3}$	$580^{+160}_{-210}$
GW170817	$1.46^{+0.12}_{-0.10}$	$1.27^{+0.09}_{-0.09}$	$\leq 2.8$	$\geq 0.04$	$40^{+10}_{-10}$
GW170818	$35.5^{+7.5}_{-4.7}$	$26.8^{+4.3}_{-5.2}$	$59.8^{+4.8}_{-3.8}$	$2.7^{+0.5}_{-0.5}$	$1020^{+430}_{-360}$
GW170823	$39.6^{+10.0}_{-6.6}$	$29.4^{+6.3}_{-7.1}$	$65.6^{+9.4}_{-6.6}$	$3.3^{+0.9}_{-0.8}$	$1850^{+840}_{-840}$

**Tabla 1.** Propiedades determinadas de cada señal de ondas gravitacionales detectada, siendo  $m_1$  y  $m_2$  las masas que se fusionan,  $M_f$  la resultante,  $E_{rad}$  la energía radiada tras la colisión,  $d_L$  la distancia luminosa y  $z$  el corrimiento al rojo. Datos tomados de [29]

Cabe destacar que con la incorporación del detector de Virgo en la investigación se logró mejorar la localización de los eventos. Esto se puede observar en la figura 9.2, en la cual las regiones de confianza de GW170818-HLV<sup>16</sup>, GW170817-HLV y GW170814-HLV son menores [29]. En un futuro se podrá determinar mejor aún la localización de estos eventos con la incorporación de otros detectores.



**Figura 9.2.1.** Localización en el cielo de las regiones de confianza de cada detección .  
Créditos /UIB

<sup>16</sup>El sufijo HLV indica que la onda se detectó en los tres observatorios de Hanford, Livingston y Virgo



## Parte IV

# Conclusiones

Con este trabajo se han podido aclarar conceptos sobre los agujeros negro que podían parecer muy confusos. Y es que, al estudiar la métrica de esta manera más simplificada y mediante representaciones gráficas, ya puede uno comprender la esencia de un agujero negro de Schwarzschild al imaginar un viaje al interior. Si eres tú mismo el que se adentra en esta aventura, viajarás por el espacio hasta cruzar una frontera (el horizonte de sucesos) tras la cual todo cambia; lo que antes estaba delante, ahora está en el futuro; lo que antes estaba detrás, ahora está en el pasado. Mientras que si te quedas a observar como una persona se introduce en un agujero negro morirás esperando, ya que nunca la verás traspasar el horizonte de sucesos.

La segunda parte del trabajo da un punto de vista más real, mostrando distintas observaciones de agujero negros. Así, se ha estudiado cómo se detectan estos en sistemas binarios. Por una parte, gracias a la emisión de rayos X cuando un agujero negro atrapa materia de una estrella cercana, se ha visto el caso del sistema Cynus X-1, el primer agujero negro detectado de esta forma, y GRS 1915+105, un agujero negro que proporcionó mucha información nueva sobre cómo se emite la radiación del disco de acreción. Por otra parte, en la fusión de los agujeros negros se produce una pérdida de energía gravitatoria que se radia en forma de ondas gravitacionales, las cuales han sido detectadas gracias a los Observatorios de Interferometría Láser. Así, se ha estudiado con mayor profundidad el primer evento detectado, el cual supuso un hito en la historia de la ciencia, GW150914.

Comparando una y otra forma de detección se puede observar cómo los científicos se mostraban mucho más escépticos en el siglo pasado, realizando numerosos estudios durante años antes de aceptar la idea de que el origen de las mediciones fuera un agujero negro. Esto es algo lógico, ya que antes no existía tanta precisión como ahora en estas observaciones. De hecho, es con el descubrimiento de las ondas gravitacionales cuando se vuelve totalmente innegable que estos objetos realmente existen ahí fuera, abriéndose así un nuevo e inescrutado camino para la ciencia.

# Referencias

- [1] A. Torregrosa Lillo. “Relatividad y universo: relatividad y cosmología básicas”. Alicante: Editorial Club Universitario, 2011. ISBN: 8499480837
- [2] S. Hacyan. “Los hoyos negros y la curvatura del espacio tiempo”(3rd. ed.). México: FCE -Fondo de Cultura Económica, 2010. ISBN: 607-16-0356-0
- [3] R. Fender et al. “Stellar Mass Black Holes and Ultraluminous X-Ray Sources”. En *Science*, vol. 337, Issue 6097, pp. 540-544, agosto 2012. DOI: 10.1126/science.1221790
- [4] Chandra X-Ray Observatory - NASA’s flagship X-ray telescope. Recuperado de <http://chandra.harvard.edu/about/>, 2019.
- [5] R. D’Inverno. “Introducing Einstein’s relativity”. Oxford: Clarendon Press, 2006. ISBN: 0-19-859653-7
- [6] Colaboración científica LIGO - La ciencia del LSC. Recuperado de <http://www.ligo.org/sp/science.php>, 2019
- [7] K. S. Thorne. Capítulo 9 en S. Hawking, “Three Hundred Years of Gravitation”(pp. 330-458). Cambridge: Cambridge University Press, 1989. ISBN: 0521379768
- [8] B.P. Abbott et al. “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”. En *Physical Review Letters*, vol. 116, Issue 6, article id. 061102, febrero 2016. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102
- [9] LISA. Recuperado de [http://www.esa.int/Our\\_Activities/Space\\_Science/LISA](http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/LISA), 2019
- [10] M. Santander. “Relatividad: cien años de perspectiva”. Charla en *XII Jornadas de Enseñanza de la Física* de Burgos, 2018.
- [11] S. Bowyer et al. “Cosmic X-ray Sources”. En *Science*, vol. 147, Issue 3656, pp. 394-398, enero 1965. DOI: 10.1126/science.147.3656.394
- [12] Walborn N. R. “The Spectrum of HDE 226868 (Cygnus X-1)”. En *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 179, p.L123, febrero 1973. DOI: 10.1086/181131
- [13] Orosz et al. “The mass of the black hole in CygnusX-1”. En *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 742, Issue 2, article id. 84, 10pp, diciembre 2011. DOI: 10.1088/0004-637X/742/2/84

- [14] Webster et al. “Cygnus X-1 - a Spectroscopic Binary with a Heavy Companion?”. En *Nature* 235, 37-38, enero 1972. DOI: 10.1038/235037a0
- [15] J. Xiang et al. “Using the X-Ray dust scattering halo of Cygnus X-1 to determine distance and dust distributions”. En *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 738, Issue 1, article id. 78, 10pp., septiembre 2011. DOI: 10.1088/0004-637X/738/1/78
- [16] Castro Tirado et al. “Discovery and observations by watch of the X-ray transient GRS 1915+105”. En *Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 92, n° 2, p.469-472, junio 1994. DOI: 10.1086/191998
- [17] Greiner et al. “Rossi X-Ray Timing Explorer Observations of GRS 1915+105”. En *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 473, p.L107, diciembre 1996. DOI: 10.1086/310402
- [18] Castro Tirado et al. “Infrared Spectroscopy of the Superluminal Galactic Source GRS 1915+105 During the September 1994 Outburst”. En *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 461, p.L99, abril 1996. DOI: 10.1086/310009
- [19] I. F. Mirabel et al. “The Superluminal Source GRS 1915+105: A High Mass X-Ray Binary?”. En *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 477, n° 1, p.L45-L48, marzo 1997. DOI: 10.1086/310509
- [20] J. Martí et al. “VLT observations of GRA 1915+105”. En *Astronomy and Astrhophysics*, vol. 356, p.943-948, abril 2000. arXiv:astro-ph/0004020
- [21] Greiner et al. “Identification of the donor in the X-ray binary GRS 1915+105”. En *Astronomy and Astrhophysics*, vol. 373, p.L37-L40, julio 2001. DOI: 10.1051/0004-6361:20010771
- [22] Greiner et al. “The binary components of GRS 1915+105”. En *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, vol. 308, p.111, noviembre 2003.
- [23] Mirabel et al. “A superluminal source in the Galaxy”. En *Nature*, vol. 371, Issue 6492, p.46-48, septiembre 1994. DOI: 10.4324/9781351251044-25
- [24] J. J. Rodes Roca. (2007). “Análisis espectral en rayos X del sistema binario de alta masa 4U 1538-52/QV Nor” (Doctorado). Universidad de Alicante, Dept. de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal.

- [25] D. Proga. “Quiet is the new loud”. En *Nature*, vol. 458, Issue 7237, p.414-415, marzo 2009. DOI: 10.4324/9781351251044-25
- [26] B.P. Abbott et al. “Localization and broadband follow-up of the gravitational-wave transient GW150914”. En *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 826, Issue 1, article id. L13, 8pp, julio 2016. DOI: 10.3847/2041-8205/826/1/L13
- [27] B.P. Abbott et al. “Prospects for Observing and Localizing Gravitational-Wave Transients with Advanced LIGO and Advanced Virgo”. En *Living Reviews in Relativity*, vol. 21, Issue 1, article id. 3, 57pp, abril 2018. DOI: 10.1007/s41114-018-0012-9
- [28] B.P. Abbott et al. “Properties of the Binary Black Hole Merger GR150914”. En *Physical Review Letters*, vol. 116, Issue 24, article id. 241102, junio 2016. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.241102
- [29] B.P. Abbott et al. “GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs”. Eprint arXiv:1811.12907, noviembre 2018. arXiv:1811.12907
- [30] Luc Blanchet et al. “Gravitational Waveforms from Inspiralling Compact Binaries to Second Post-Newtonian Order”. En *Classical and Quantum Gravity*, vol. 13, Issue 4, pp. 575-584, abril 2016. DOI: 10.1088/0264-9381/13/4/002
- [31] B.P. Abbott et al. “Astrophysical Implications of the Binary Black-Hole Merger GW150914”. En *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 818, Issue 2, article id. L22, 15pp, febrero 2016. DOI: 10.3847/2041-8205/818/2/L22
- [32] P.A.R. Ade et al. “Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters”. En *Astronomy and Astrophysics*, vol. 594, article id. A13, 63pp, septiembre 2016. DOI: 10.1051/0004-6361/201525830
- [33] B.P. Abbott et al. “Binary Black Hole Mergers in the first Advanced LIGO Observing Run”. En *Physical Review X*, vol. 6, Issue 4, article id. 041015, octubre 2016. DOI: 10.1103/PhysRevX.6.041015
- [34] B.P. Abbott et al. “GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral”. En *Physical Review Letters*, vol. 119, Issue 16, article id. 161101, octubre 2017. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.161101