Proyecto Fin de Carrera
Ingeniería en Tecnologías Industriales

Aplicaciones del Equilibrio de Nash a situaciones reales.

Autor: Cristina Muley Escribano
Tutor: Inmaculada Ventura Molina
Manuel Ordóñez Sánchez

Dpto. Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2021

Proyecto Fin de Carrera
Ingeniería de Tecnologías Industriales

Aplicaciones del Equilibrio de Nash a situaciones reales.

Autor:
Cristina Muley Escribano

Tutor:
Inmaculada Ventura Molina
Manuel Ordóñez Sánchez

Dpto. de Matemática Aplicada II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2021.

Proyecto Fin de Carrera: Aplicaciones del Equilibrio de Nash a situaciones reales.

Autor: Cristina Muley Escribano
Tutor: Inmaculada Ventura Molina
Manuel Ordóñez Sánchez

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2021

El Secretario del Tribunal

A mi hermano, que merece mucho más que estas palabras de admiración.
Ad maiorem Dei gloriam.

Resumen

El conocido como “Equilibrio de Nash” se ha aplicado y adaptado ampliamente en la economía y otras ciencias del comportamiento. De hecho, la teoría de los juegos, con el equilibrio de Nash como pieza central, se ha convertido en la teoría unificadora más destacada de las ciencias sociales.

En este proyecto se introduce al lector en el campo de los juegos, explicando los conceptos que ha de conocer para sacar provecho a la lectura. Se explican los orígenes y la utilidad de la teoría de juegos, así como sus aplicaciones a la vida real, centrándonos en la política y las ciencias sociales.

Se ha realizado una simulación de un juego aplicado a la actual crisis de Afganistán.

Abstract

The so-called "Nash equilibrium" has been widely applied and adapted in economics and other behavioral sciences. In fact, game theory, with Nash equilibrium as its centerpiece, has become the most prominent unifying theory in the social sciences.
This thesis introduces the reader to the field of games, explaining the concepts he or she needs to know to benefit from the reading. The origins and usefulness of game theory are explained, as well as its applications to real life, focusing on politics and the social sciences.
A simulation of a game applied to the current crisis in Afghanistan has been carried out.

Índice

1. John Forbes Nash. Una introducción a su estudio.

“Caballeros, debo recordarles que, mis probabilidades de éxito aumentan en cada nuevo intento.” John F. Nash.

John Forbes Nash nació el 13 de junio de 1928 en Bluefield, West Virginia (Estados Unidos). Fue un matemático cuyos trabajos en la teoría de juegos, geometría y ecuaciones diferenciales parciales permitieron comprender las fuerzas que rigen el azar y los acontecimientos dentro de los sistemas complejos de la vida cotidiana. Sus teorías se usan en la economía de mercado, informática, biología evolutiva, inteligencia artificial, contabilidad, política y teoría militar.

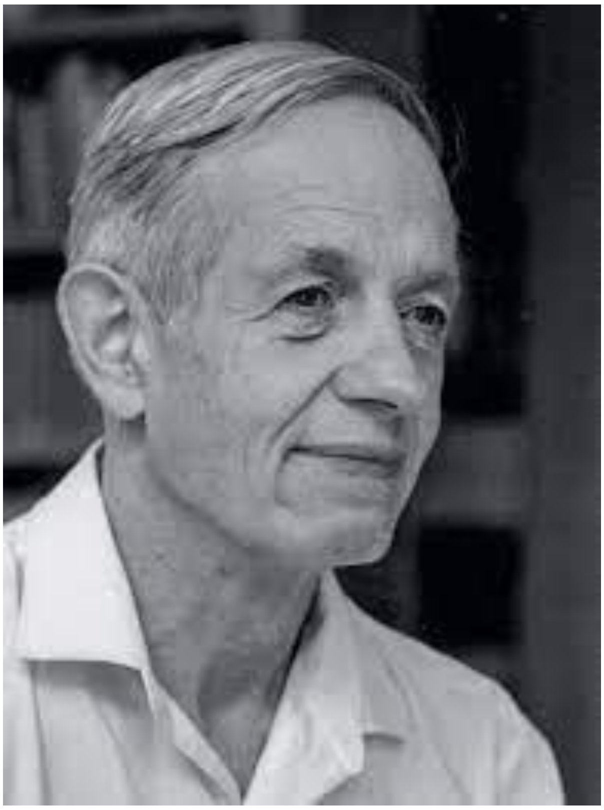
En 1945, después de destacar en matemáticas en el instituto, fue al Instituto Tecnológico Carnegie en Pittsburgh, Pensilvania. En su último año de instituto, con tan solo 19 años, uno de sus profesores escribió una carta de recomendación para la universidad en la que simplemente recalcaba «Es un genio de las matemáticas». En 1948 fue aceptado en Harvard y en Princeton, Nueva Jersey. Eligió la segunda.

Ya como estudiante de Doctorado, en 1950, Nash probó la existencia del equilibrio que hoy lleva su nombre. Su estudio *Puntos de equilibrio en juegos de n personas* [13] contiene unas 300 palabras, 2 referencias y ni una sola ecuación. En el mismo, se cita el famoso libro *Theory of Games and Economic Behavior* de von Neumann y Morgenstern [12], de los cuales hablaremos más adelante en estas páginas.

El *equilibrio de Nash* es una posición en un juego desde la cual ninguno de los jugadores puede cambiar su estrategia para mejorar su pago (concepto del que hablaremos en el siguiente apartado). Imaginemos un juego con dos jugadores (usted y otra persona) y dos estrategias, A y B. Si ambos eligen A, su pago será 2. Si usted elige A y su oponente elige B, su pago es 0. Si usted elige B y el otro jugador elige A, su pago es 3. Si ambos eligen B, ambos reciben 1. Las mismas combinaciones se aplican a su oponente.

En este ejemplo, el equilibrio de Nash reside en que los dos jugadores elijan la estrategia B. Si ambos eligen B, su pago es 1; si alguno de los jugadores cambia de estrategia a A, su recompensa cae a 0. En otras palabras, ningún jugador puede independientemente cambiar su estrategia y mejorar su resultado. Observe que, si ambos jugadores eligen A, no hay equilibrio de Nash porque usted podría mejorar su recompensa cambiando a B.

Probablemente el equilibrio de Nash sea la contribución más difundida y quizá más importante de John F. Nash. En 1994, le fue concedido junto con John Harsanyi y Reinhard Selten el Premio Nobel de Economía, por sus contribuciones a la teoría de juegos. En 2015 recibió junto con Louis Nirenberg el Premio Abel, una de las preseas más prestigiosas en el campo de las matemáticas, por sus *contribuciones a la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales y sus aplicaciones al análisis geométrico*. Al regresar del viaje, en Oslo, Nash y su esposa fallecían en un accidente de tráfico, el 23 de mayo de 2015, en Nueva Jersey.



John Forbes Nash (1928-2015).

2. La teoría de juegos.

2.1. Introducción a los juegos.

La teoría de juegos nació para abordar, por medio de una estructura sistemática, relaciones conflictivas entre entes o personas. Una situación conflictiva es un juego, cuyos actores son los participantes en el conflicto [23].

En 1944, John von Newmann y Oskar Morgenstern en su obra *Theory of Games and Economic Behavior* [12] introducen la teoría de juegos basada en un nuevo método matemático especialmente adaptado a las ciencias económicas y sociales. Así un juego consistirá en un conjunto de jugadores racionales que conocen la estructura de éste, en el cual cada jugador tiene un conjunto de estrategias y una función de pago que depende del vector de estrategias seleccionado por cada uno.

La interdependencia estratégica es la base de la teoría de juegos. Este hecho sucede cuando los distintos agentes del juego interactúan entre ellos y las acciones de uno influyen además de en su propio resultado en los resultados que los demás agentes implicados obtienen.

De esta primera obra cabe destacar la introducción de factores importantes. La teoría de la utilidad, que representa lo que obtiene cada participante en el juego, siendo esto función de las estrategias elegidas por él y sus rivales en el juego. En segundo lugar, una caracterización de las soluciones óptimas de los llamados juegos suma cero (aquellos en los que las ganancias acumuladas de los participantes son iguales a la suma de las pérdidas, como por ejemplo el póker). Además, en esta obra se introdujo una nueva rama de la teoría de juegos: los llamados juegos cooperativos.

Para entender algunos de los conceptos mencionados anteriormente y, por tanto, la teoría de uegos como tal, debemos pasar a analizar ciertos aspectos.Una *estrategia* de un jugador es un plan completo de acciones con las que éste podría proponerse participar en dicho juego.
Cada jugador recibe un *pago* al acabar el juego, que depende de cuál haya sido el resultado del juego. El significado de dicho pago es la *utilidad* que cada jugador atribuye a dicho resultado, es decir, la valoración que para el jugador tienen las consecuencias de alcanzar un determinado resultado en el juego [4].

Existen dos enfoques básicos en el análisis de un juego: *cooperativo* y *no cooperativo*. El enfoque *cooperativo* analiza la posibilidad de que algunos o todos los agentes que intervienen en el juego lleguen a un acuerdo en cuanto a las decisiones que se van a tomar en el mismo. El *no cooperativo* sin embargo habla de las decisiones que tomará cada jugador en ausencia de ese acuerdo previo.

En los juegos no cooperativos se hacen dos distinciones básicas. La primera está entre juegos *estáticos* o *dinámicos*, definiendo los primeros como aquellos juegos en los que cada jugador decide sin saber qué han decidido los otros (simultaneidad de decisión), mientras que en los dinámicos un jugador puede conocer de antemano la decisión de otro.

La segunda distinción se refiere a los *juegos sin o con información completa*. En los juegos con información completa todos los jugadores conocerán las consecuencias de las decisiones tomadas, para sí mismos y para los demás jugadores del juego. En los juegos sin información completa, por el contrario, no se conocerán dichas consecuencias.

Hay varias formas de definir un juego. Las más utilizadas son la *extensiva* y la *estratégica*. Ambas especifican los jugadores, las acciones y los pagos.

Pasaremos a definir las formas de entender los juegos de manera más detallada en apartados posteriores.

2.2. Funciones de utilidad. Utilidad ordinal y utilidad de von Newmann-Morgenstern.

Sea X el conjunto de las alternativas posibles, mutuamente excluyentes (imposibilidad de suceder simultáneamente) entre las que puede elegir un jugador.

En X, se define una *relación de preferencia*, de modo que para las variables $x, y \in X$ se tiene que

- Si $x >$ ó $\sim y$ quiere decir que la alternativa x tiene preferencia sobre la alternativa y o es indiferente ante la misma;
- Si $x > y$ entonces x preferida ante y;
- Si $x \sim y$, la alternativa x es indiferente a y.

Para que las preferencias puedan ser representadas con la función de utilidad, es necesario que la relación de preferencia sea racional. Se dice que la relación de preferencia es *racional* si verifica las propiedades de *completitud* y *transitividad*.

La *transitividad* de la relación de preferencia verifica que si estamos ante tres alternativas $x, y, z \in X, si\ x >$ ó $\sim y, e\ y >$ ó $\sim z, entonces\ x >$ ó $\sim z$.
La *completitud* de la prelación de preferencia verifica que $\forall\, x, y \in X$ se tiene que $x >$ ó $\sim y$ $, o\ bien, y >$ ó$\sim x$ (o ambas).

Normalmente a las preferencias por parte de los jugadores se le asigna un número. Esto permite el cómputo de las mismas y su posible comparación. Una función de utilidad se dice que es compatible con las preferencias si mantiene las relaciones de desigualdad que originariamente tenían.

Para la mayoría de las aplicaciones es insuficiente disponer de una información numérica y de orden de las utilidades de un agente. Imaginemos el caso en el que un agente debe decidir entre una opción u otra, por ejemplo, ir a ver una película de cine u otra. Si el agente no se decide, y opta por tomar la alternativa de lanzar una moneda y elegir la película primera (opción A), si sale cara, o elegir la película segunda (opción B), si sale cruz: ¿Cómo podemos responder a esto teniendo únicamente información ordinal de la utilidad? La respuesta es que no podemos. Es, por tanto, preciso definir una escala de utilidad en la que puedan resolverse ejemplos como el anteriormente expuesto.

Utilizaremos de aquí en adelante la escala de utilidad *von Newmann-Morgenstern*, que es la menos compleja de entre las que nos permiten conocer las preferencias de un agente; válidas para las opciones puras (seguras) y para distribuciones de probabilidad definidas sobre opciones puras. Imaginemos tener que elegir ante varias alternativas, conociendo las probabilidades asociadas a cada alternativa; es lo que se llama en teoría de la decisión estar ante un ambiente con cierto riesgo. La utilidad de von Newmann-Morgenstern nos ayuda a evaluar las actitudes ante el riesgo.

La función de utilidad esperada de Von Neumann Morgenstern se puede definir con los siguientes elementos:

- n números enteros $u_1, u_2, \ldots, u_n$ que representan la utilidad de cada una de las opciones.
- n alternativas ante el riesgo que se corre $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
- L_x el dominio de la función.

Se dice que la función de utilidad $U: L_x \rightarrow R$ es una función von Neumann-Morgenstern, si existen los números definidos anteriormente tal que para cada $L = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in L_x$ se verifica que:

$$U(L) = u_1 p_1 + u_2 p_2 + \ldots + u_n p_n$$

Dicho de otro modo, podemos entender que u es una función que asigna su utilidad a cada una de las alternativas del conjunto en X que se nos plantean.

$\forall L = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in L_x$ la función de utilidad VN-M es $U(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)$

2.3. Juegos en forma normal o estratégica.

Los juegos en forma normal o estratégica se caracterizan principalmente por la simultaneidad de las decisiones de los agentes que participan en el juego. Es decir, ninguno de los participantes del juego conoce las decisiones que van a tomar los demás participantes. En un primer momento se podría pensar que la interdependencia en este tipo de juegos no existe. Pero si pensamos más allá es claro que lo que elija un jugador dependerá, a veces en gran medida, de las elecciones de los otros.

Por ejemplo. Supongamos un juego de cartas donde los ases son las cartas que puntúan más. Si a cierto jugador le han tocado dos ases, éste puede pensar que es difícil que otro jugador tenga dos ases y actuar de un modo concreto. Puede estar en lo cierto o no, pero lo lógico es que sus decisiones se vean condicionadas por las expectativas que tiene el jugador de los demás jugadores.

Un juego expresado en *forma normal* podrá ser definido mediante tres elementos:

- Un conjunto de jugadores $I = \{1,2,\dots,n\}$.
- Un conjunto de estrategias S_i para todo jugador $i \in I$.
- Funciones de utilidad o de pagos von Newmann-Morgenstern $U_i(S)$ para cada combinación $S = (S_1,\dots,S_n)$ de estrategias.

En la Figura 1 se ve un ejemplo sencillo de un juego representado en forma normal. Tenemos dos jugadores (J1, J2), denotamos por E_j^i la estrategia $i \in \{1,2,3\}$ del jugador $j \in \{1,2\}$. Los pares (-, -) representan los pagos expresados en utilidad de von Neumann-Morgenstern. Así, para el par (3,2), 3 es el pago que recibe J1 al elegir él la estrategia E_1^1 y J2 la estrategia E_2^1. Mientras que 2 el pago que recibe J2 al elegir J1 la estrategia E_1^1 y él la estrategia E_2^1. Cada jugador deberá elegir qué estrategia usar en esta jugada, sin saber qué ha elegido el otro.

		J2		
		E_2^1	E_2^2	E_2^3
J1	E_1^1	(3,2)	(4,0)	(5,1)
	E_1^2	(1,0)	(7,3)	(2,5)
	E_1^3	(2,-1)	(8,5)	(2,7)

Figura 1. Representación de un juego en forma normal.

2.4. Juegos en forma extensiva.

Un juego en forma extensiva consiste en:

- Un conjunto de n jugadores.
- Un árbol enraizado que es el árbol asociado al juego.
- Cada hoja del árbol da un pago a los jugadores en el caso de que acabe en esa hoja.
- Una probabilidad de elección del camino entre nodos para cada jugador.

La Figura 2 muestra un ejemplo de lo que sería un modo de representar un juego en forma extensiva con un árbol de decisión para un juego con dos jugadores, jugando el primero de ellos dos veces y terminando la partida, e interviniendo el segundo una vez entre las dos jugadas del primero. El conjunto de posibles acciones es {A, B, C, D, E} y los pagos se han generado de forma aleatoria.

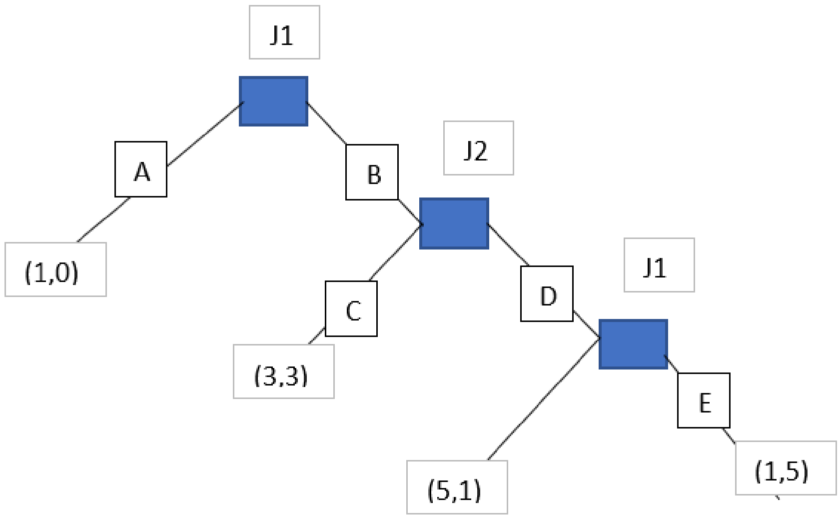


Figura 2. Árbol de decisión para un juego en forma extensiva.

3. La teoría de Nash.

3.1. Introducción.

Consideremos el juego de la Figura 3 y supongamos que existe una población de individuos que se enfrentan de forma repetida, pero anónima a este tipo de situación de interdependencia estratégica. Cada jugador se enfrenta, por tanto, muchas veces a ese tipo de situación, pero cada una de ellas con *rivales* distintos. Bajo esta perspectiva, resulta lógico preguntarnos si cabe esperar que surja una manera *estable* de desarrollarse el juego, esto es, que siempre que los jugadores se enfrenten a una situación de este tipo *jueguen* de la misma manera. Si así fuese, la combinación de estrategias propuesta como forma estable de desarrollarse el juego debería servir de base para la formación de expectativas de los jugadores y, además, debería ser *racional*, en el sentido de que cada jugador esté eligiendo una estrategia óptima dadas esas expectativas. En otras palabras, si un juego tiene una forma estable de jugarse, entonces: las expectativas de cada jugador cada vez que se enfrente a una situación de ese tipo deberían ser que el otro se comportará *como lo hacen siempre jugadores de ese tipo en estas situaciones*. Cada jugador debería estar adoptando una estrategia que fuese la mejor respuesta a esas expectativas.

Consideremos la combinación de estrategias $(b_2,\ a_3)$ y veamos si cumple estas condiciones. Si el jugador *b* creyese, en base a su experiencia previa, que los de tipo *a* siempre eligen la estrategia a_3 ciertamente su elección sería b_2. Sin embargo, si el jugador *a* creyese que los jugadores de tipo *b* siempre eligen b_2, su mejor respuesta no sería a_3, sino a_2. En definitiva, los jugadores de tipo *a* jugarían de otra manera, las expectativas de los de tipo *b* también serían otras, lo que les llevaría a su vez a jugar de otra manera.

Si analizásemos, una por una, todas las combinaciones de estrategias del juego, veríamos que sólo en una de ellas, la (b_1, a_1), se dan esas condiciones de consistencia. En efecto, si cada jugador se comportase de acuerdo con ella siempre que se enfrentase a una situación de este tipo, vería a posteriori que su elección ha sido la mejor posible dado lo que ha hecho el otro. Cada vez que se enfrentase a una situación como ésta no tendría razones para cambiar sus expectativas y, por tanto, tampoco su comportamiento. Lo que distingue en última instancia a la combinación (b_1, a_1), del resto es que ambas estrategias son simultáneamente mejor respuesta la una a la otra.

Un **equilibrio de Nash es precisamente una combinación de estrategias que cumple esa condición: que cada jugador esta eligiendo la mejor estrategia posible dadas las estrategias elegidas por los otros.**

	a_1	a_2	a_3
b_1	2,4	5,0	0,2
b_2	0,0	1,8	4,6

Figura 3.

3.2. Determinación del equilibrio de Nash.

El procedimiento habitual a la hora de determinar los equilibrios de Nash de un juego consta de dos pasos:

1. Búsqueda, para cada jugador, de las estrategias que constituyen mejores repuestas a cada posible combinación de estrategias del resto de jugadores.
2. Determinación de todas las combinaciones de estrategias que son simultáneamente mejores respuestas para todos los jugadores.

Mostramos a continuación un ejemplo:

En el juego representado en la Figura 4 las mejores respuestas de un jugador a cada posible estrategia del otro se señalan subrayando el pago correspondiente. El hecho de que solo la combinación de estrategias (a_1, b_1) presente los dos pagos subrayados, nos indica que constituye el único equilibrio de Nash del juego.

	b_1	b_2
a_1	$\underline{16},\underline{7}$	3,5
a_2	$4,\underline{8}$	$\underline{22},6$
a_3	7,5	$19,\underline{9}$

Figura 4. Mejores respuestas y equilibrio de Nash.

3.3. Estrategias mixtas.

Consideremos el juego representado en su forma estratégica en la Figura 5. Hemos denominado al mismo «pares o nones» porque la situación de interdependencia estratégica que representa se corresponde con la del juego popular que se conoce con ese nombre.

Podemos comprobar que ninguna de las cuatro combinaciones de estrategias posibles constituye un equilibrio de Nash.

Vamos a considerar que los jugadores en lugar de elegir una única estrategia, lo que hacen es asignar una probabilidad a cada una de ellas.

Denominaremos a cada una de esas posibles reglas **estrategia mixta** y a cada una de las estrategias *originales* **estrategia pura**.
Una estrategia mixta es, por tanto, una distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras $\{P, N\}$. Podemos considerar a una estrategia pura como una estrategia mixta *degenerada* que asigna toda la probabilidad a una de las alternativas. Vamos a representar de manera genérica una estrategia mixta cualquiera para el jugador a por σ_a = (p, 1 − p) y una para el jugador b por $\sigma_b = (q, 1-q)$.

Consideremos por separado el problema de decisión de cada uno de los jugadores. Si comenzamos poniéndonos en lugar del jugador a, su ganancia esperada si elige una estrategia mixta cualquiera σ_a = (p, 1 − p), cuando b elija a su vez una mixta cualquiera $\sigma_b = (q, 1-q)$ vendrá dada por:

$$\begin{aligned} G_a(\sigma_a, \sigma_b) &= pq(1) + p(1-q)(-1) + (1-p)q(-1) + (1-p)(1-q)](1) \\ &= 4pq - 2p - 2q + 10. \end{aligned}$$

	P	N
P	1,-1	-1,1
N	-1,1	1,-1

Figura 5. Juego de pares y nones.

La elección de una estrategia mixta por parte del jugador a queda totalmente determinada por el valor que asigne a p, por lo que podemos plantear su problema de elección en términos de dicho valor. Partiendo de él y derivando parcialmente respecto a p podemos ver su influencia sobre la ganancia esperada del jugador a.

$$G_a(\sigma_a, \sigma_b)_p = 4q - 2$$

cantidad que es positiva si $q > 0{,}5$.

Estamos ya en condiciones de determinar la mejor respuesta del jugador a (en términos de qué estrategia mixta elegir) para cada posible estrategia mixta del jugador b. Así definimos $p(q^*)$ como la normalización de las ganancias o pérdidas del jugador.

$$p(q^*) = \begin{cases} 1 \; si \; q > 0{,}5 \\ indiferente \; si \; q = 0.5 \\ 0 \; si \; q < 0.5 \end{cases}$$

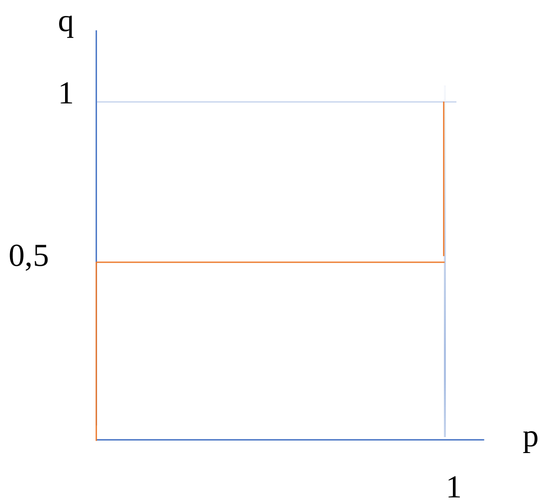


Figura 6. Correspondencia de mejor respuesta del jugador a.

Si el jugador *a* asigna una probabilidad mayor de 0.5 a que el jugador *b* elija una determinada estrategia, su mejor respuesta es jugar con probabilidad 1 esa misma estrategia (*a* gana si los dos eligen *P* o los dos eligen *N*). Únicamente en el caso de que crea igual de probable que el otro elija cualquiera de las dos estrategias tendría más de una respuesta óptima, de hecho, tendría infinitas: su ganancia esperada es la misma elija la mixta que elija.

Haciendo lo mismo para el jugador b tenemos que:

$$q(p^*) = \begin{cases} 0 \; si \; p > 0{,}5 \\ indiferente \; si \; p = 0.5 \\ 1 \; si \; p < 0.5 \end{cases}$$

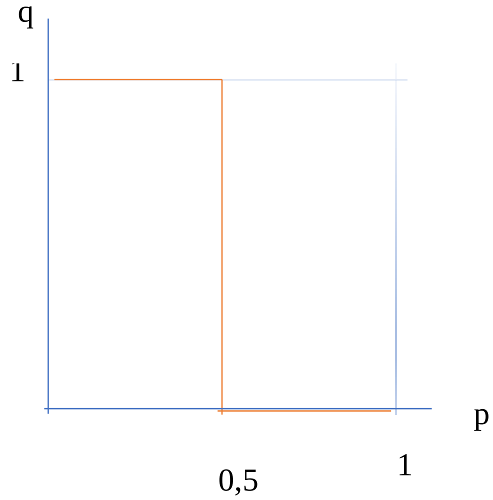


Figura 7. Correspondencia de mejor respuesta del jugador b.

Una vez tenemos las correspondencias de mejor respuesta para ambos jugadores, estamos ya en condiciones de determinar si existen o no equilibrios de Nash en estrategias mixtas para este juego.

La Figura 8 nos permite apreciar que este equilibrio se produce cuando cada jugador elige la estrategia mixta $(0.5{,}0.5)$, esto es, adopta la regla de jugar cada una de sus dos estrategias con la misma probabilidad. Podríamos decir que, en el único equilibrio de Nash del juego ambos jugadores se comportan de manera totalmente *impredecible*, en el sentido de que eligen una regla de comportamiento que asigna la misma probabilidad a cada una de sus estrategias puras. Podemos interpretar también este equilibrio en términos de la incertidumbre que a los jugadores les interesa crear en su rival. Que el equilibrio de Nash sea $(0.5, 0.5)$ nos recuerda que no es suficiente con crear incertidumbre en el rival sobre la estrategia pura que elegiremos, sino que la incertidumbre creada deber ser tal que el rival crea que es igual de probable que juguemos cualquiera de nuestras dos estrategias puras. En muchos juegos de envite o incluso en las competiciones deportivas, el comportamiento óptimo de los jugadores es «mezclar» adecuadamente entre las distintas acciones que pueden llevar a cabo (echar un farol en un juego de envite, elegir el tipo de golpe por parte de un jugador de tenis, …).

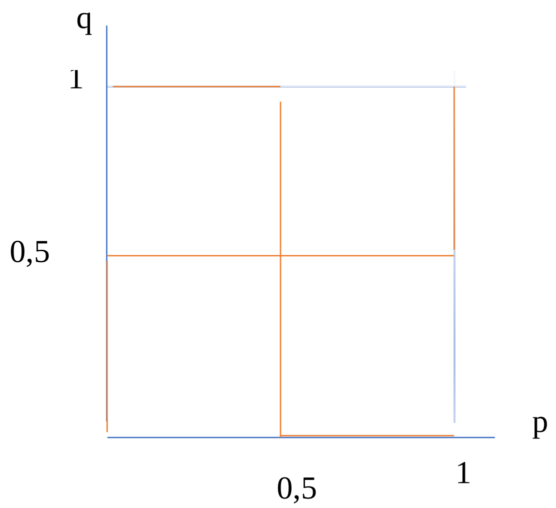


Figura 8. Equilibrio de Nash en estrategias mixtas para el juego "pares o nones".

3.4. Estrategias mixtas y dominancia.

Una estrategia pura dominaba a otra si daba mayor ganancia que ella fuese cual fuese la combinación de estrategias elegida por los otros jugadores. Este concepto se extiende al concepto de dominancia al caso en el que los jugadores pueden elegir estrategias mixtas:

La condición ahora para que una estrategia mixta domine a una pura es, por tanto, que la ganancia esperada jugando la mixta sea mayor que la ganancia esperada jugando la pura, sean cuales sea cual sea las estrategias puras elegidas por los otros jugadores.

3.4.1. Relación entre estrategias dominadas y estrategias mejor respuesta.

Puede ocurrir que existan estrategias puras que sin estar dominadas por otras no sean la mejor respuesta bajo ninguna de las posibles expectativas que se pudiera formar el jugador correspondiente. La pregunta que nos falta por responder es qué ocurrirá ahora si eliminamos, no sólo las estrategias que estén dominadas por otras puras, sino también todas aquellas otras que estén dominadas por una mixta. La respuesta, que no entramos a demostrar, es que para juegos con solo dos jugadores, si ampliamos el espacio de elección incluyendo las estrategias mixtas, el conjunto de estrategias no dominadas para un jugador coincide con el conjunto de estrategias que son mejor respuesta bajo alguna de sus posibles expectativas. En otras palabras, **en un juego con dos jugadores, si una estrategia pura no está dominada (ni por una pura ni por una mixta) existirán unas expectativas bajo las cuales dicha estrategia es mejor respuesta**.

En consecuencia: para juegos con dos jugadores, el conjunto de estrategias racionalizables para cada uno de ellos puede determinarse aplicando la eliminación iterativa de estrategias dominadas (por otras estrategias puras o mixtas).

3.5. Interpretación del equilibrio de Nash como concepto de solución.

Utilizar el equilibrio de Nash como concepto de solución supone exigir que **las expectativas de cada jugador sobre el comportamiento del resto sean correctas**. ¿Cómo puede justificarse esa consistencia en las expectativas de todos los jugadores? En la medida que estamos estudiando juegos estáticos, dichas expectativas no pueden tener su origen en el conocimiento previo que tengan unos jugadores de otros. Entre las posibles justificaciones de esa consistencia entre expectativas y estrategias cabe destacar las siguientes:

1. La experiencia acumulada de enfrentarse a situaciones similares de manera repetida en el tiempo con otros jugadores o la información recibida de otros jugadores que se han enfrentado a esa situación;
2. La comunicación previa al juego.

En relación con la comunicación previa al juego, podemos pensar en una situación en la cual los jugadores pueden enviarse mensajes antes de elegir una estrategia o incluso pueden negociar entre ellos. En este caso, si se pusiesen de acuerdo sobre una forma conjunta de comportarse, esta misma debería ser un equilibrio de Nash: tiene la propiedad de que existen incentivos para que cada jugador elija la estrategia acordada.

Sin embargo, en la mayoría de las ocasiones tomaremos como supuesto básico que **las expectativas de los jugadores tienen su origen en su experiencia previa derivada de enfrentarse a situaciones de interdependencia estratégica similares**. Cada jugador tiene experiencia suficiente como para anticipar de manera correcta cómo jugarán los otros jugadores. Resulta útil pensar en unas condiciones ideales en las cuales para cada jugador existe una población de individuos que puede adoptar ese papel. Cada vez que se produce la situación de interdependencia estratégica, un jugador de cada tipo es elegido al azar de la correspondiente población, de tal manera que cada jugador se enfrenta a una misma situación, pero con rivales distintos cada vez. Esto hace que cada jugador se forme unas expectativas sobre lo que hace el rival en una situación de ese tipo, no sobre lo que hacen rivales concretos. Interpretado así, el equilibrio de Nash se corresponde con un **estado estacionario** y por tanto vendría a ser una norma social estable: si todo el mundo la sigue nadie tiene incentivos para desviarse. La forma de justificar la estabilidad del comportamiento puede variar de una situación a otra.

Si se propone una combinación de estrategias como solución *estable* de un juego, el que sea equilibrio de Nash es una **condición necesaria** que debemos imponerle. En caso de que la solución propuesta no fuese equilibrio de Nash, deberíamos justificar el hecho de que al menos un jugador no esté adoptando la mejor respuesta al comportamiento del resto. Sin embargo, puede haber situaciones de interdependencia estratégica en las que un posible desarrollo del juego no sea un buen candidato a solución a pesar de ser un equilibrio de Nash (que sea equilibrio de Nash no es condición suficiente para ser solución).

3.6. Existencia del equilibrio de Nash.

Nash (1950) demostró que todo juego finito (ha de serlo *S*, esto es, el número de jugadores y el espacio de estrategias de cada uno de ellos) tiene al menos un equilibrio de Nash, que puede serlo en estrategias mixtas. Este resultado se conoce como **Teorema de Nash**.

Es habitual encontrarnos con juegos que presentan más de un equilibrio de Nash. En relación con ello debemos recordar que resulta útil considerar el equilibrio de Nash como una condición necesaria, pero no suficiente, para proponer una combinación de estrategias como solución de un juego. Ante la presencia de varios equilibrios de Nash existen dos grandes grupos de aproximaciones para seleccionar alguno de ellos como solución:

1. Incorporando información adicional. Un juego supone una abstracción de la situación real de interdependencia estratégica y el proceso de abstracción puede suponer la eliminación de información útil para ayudarnos a seleccionar un equilibrio de Nash. A modo de ejemplo, la posibilidad de que los jugadores puedan comunicarse o negociar entre ellos con anterioridad al desarrollo del juego, la presencia de convenciones sociales o de puntos focales, el aprendizaje de experiencias pasadas, la evolución… pueden fundamentar la elección de uno de los equibrios de Nash como solución.

2. Imponiendo restricciones teóricas adicionales (*refinamientos* del equilibrio de Nash). Es lo que viene a llamarse *perfección en subjuegos* o el equilibrio secuencial.

3.7. Aplicaciones de la Teoría de Nash.

3.7.1. Modelo de Cournot.

En el modelo de Cournot las empresas elegían la cantidad que deseaban sacar al mercado, determinándose en éste el precio de venta. En 1883 Bertrand propuso un modelo alternativo en el que cada empresa eligía el precio, produciendo a continuación la cantidad que le demandaran al mismo.

Consideremos una situación en la cual el mercado de determinado bien es abastecido por dos únicas empresas, A y B. Los costes para la empresa i de poner en el mercado una determinada cantidad del bien x_i vienen dados por una función $C_i(x_i)$ que vamos a suponer lineal e idéntica para ambas empresas:

$$C_i(x_i) = cx_i \text{ para } i = A, B.$$

El producto se vende en el mercado a un precio único que quedará determinado conjuntamente por la cantidad total puesta en el mercado por ambas empresas y por la demanda de este, la cual vamos a suponer también lineal:

$$p = a - bX.$$

Esta función inversa de demanda recoge simplemente una dependencia negativa del precio que alcanzará el producto en el mercado con la cantidad total que pongan en el mismo entre las dos empresas

$$X = x_A + x_B.$$

Para este problema existe un único equilibrio de Nash es cual es

$$x_A = x_B = \frac{(a-c)}{3b}$$

Si valoramos este resultado tenemos que la cantidad total sacada al mercado en el equilibrio de Nash es

$$X = \frac{2(a-c)}{3b}$$

y el precio de venta es

$$p = c + \frac{a-c}{3}$$

Reflejamos estos hechos en la siguiente figura.

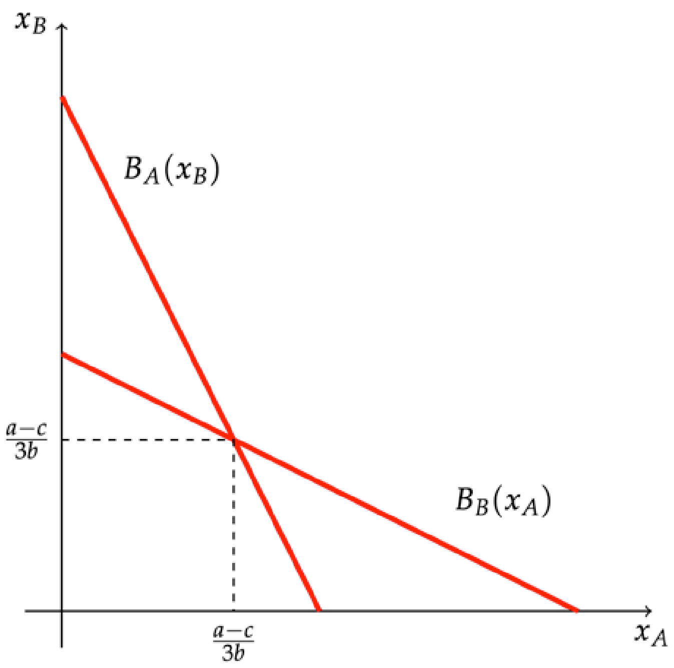


Figura 9. Equilibrio de Cournot-Nash.

Únicamente cuando cada empresa esta sacando al mercado una cantidad $\frac{(a-c)}{3b}$ se cumple que cada una de ellas esta respondiendo de la mejor forma posible a la cantidad que saca la otra.

La siguiente tabla permite recoger de manera esquemática la comparación entre los resultados de equilibrio de las tres estructuras de mercado.

	Cournot	**Competencia perfecta**	**Monopolio**
$\hat{\mathbf{X}}$	$\frac{2}{3}\frac{(a-c)}{b}$	$\frac{a-c}{b}$	$\frac{1}{2}\frac{a-c}{b}$
$\hat{\mathbf{p}}$	$c+\frac{a-c}{3}$	c	$c+\frac{a-c}{2}$
$\hat{\Pi}_i$	$\frac{(a-c)^2}{9b}$	0	$\frac{(a-c)^2}{8b}$

Figura 10. El equilibrio de Cournot-Nash en duopolio: comparación de los resultados del equilibrio competitivo y del monopolio.

La cantidad sacada al mercado en el equilibrio de Cournot-Nash es menor que la del equilibrio competitivo y mayor que la que maximiza el beneficio del monopolista, ocurriendo obviamente lo contrario con el precio.

Existen muchas otras aplicaciones tales como la generalización a n empresas del modelo de Cournot, el modelo de oligopolio de Bertrand o la sobreutilización de los recursos públicos.

3.8 Aplicación de la teoría de Nash a los conflictos militares.

Ya desde la antigüedad, la estrategia militar siempre ha estado ligada a la aparición de nuevos juegos de entretenimiento. Citar como ejemplo el origen del ajedrez a partir de la colección de los cuentos populares *Mabinogion,* de origen galés, o el Kriegspiel, un juego originado en la Prusia del siglo XVIII y que servía como medio de enseñanza a los futuros oficiales del ejército para asimilar los conceptos de la táctica militar (Poundstone, 2006). Ambos ejemplos no distan mucho de ser situaciones de elección estratégicas, en donde los jugadores escogen la acción para obtener un fin determinado, que en el caso de ambos juegos no es más que ganar la partida. La Teoría de Juegos estudia estos conflictos entre seres racionales y establece modelos matemáticos que permiten predecir cómo estos conflictos pueden ser resueltos.

La estrategia militar siempre ha sido un ámbito de estudio dentro de los trabajos publicados sobre la Teoría de Juegos. Ya en el año 1951, el coronel de las Fuerzas Aéreas de los Estados Unidos (USAF) Oliver G. Haywood Jr. realizó un memorando donde estudiaba cómo aplicar los juegos presentados por Von Neumann a la doctrina de decisión militar de las Fuerzas Armadas de los Estados Unidos.

Sus conclusiones fueron de aplicación inmediata para la mejora de los procesos de toma de decisión y mostraron el gran potencial de esta disciplina para modelar o analizar una determinada batalla. Durante la Guerra Fría y hasta la actualidad, la Teoría de Juegos ha sido empleada en multitud de situaciones, entre las que destacan el modelado de la carrera armamentística nuclear entre la URSS y los Estados Unidos, la crisis de los misiles de Cuba o la doctrina de defensa nuclear *La Destrucción Mutua Asegurada.*

Uno de los conjuntos de juegos que más aplicación ha tenido en el ámbito de la estrategia militar es el de los juegos de suma cero. En ellos se modelan situaciones de conflicto puro entre dos jugadores, donde todo lo que gana un agente son las pérdidas de sus rivales. La consecuencia de esto es que el jugador victorioso no tiene razón de intentar negociar o cooperar con el vencido.

Un ejemplo de aplicación militar de estos juegos la expuso el coronel de la USAF, Haywood. En él se hace un análisis de los acontecimientos acaecidos durante la batalla del mar de Bismarck en el año 1943 entre las fuerzas norteamericanas y japonesas en la batalla del Pacífico. Los estadounidenses estaban luchando para conquistar la isla de

Nueva Guinea. Los japoneses necesitaban enviar refuerzos al frente de batalla, para lo que organizaron un convoy de reabastecimiento desde Rabaul hasta Lae, que era el punto esperado de descarga. Un factor a tener en cuenta eran las condiciones meteorológicas, ya que al norte de la isla de Nueva Bretaña, donde se encontraba la ciudad de Rabaul, punto de origen del convoy, había lluvias torrenciales y malas condiciones de visibilidad.

Figura 11. Opciones de las rutas en el mar de Bismarck.

Aplicando los cinco pasos que marca la doctrina de *Estimar la situación*, el general Kenney llegó a la conclusión de que los japoneses tenían dos rutas: una por el norte de Nueva Bretaña y otra por el sur de la isla. Ambas requerían tres días para llegar a Nueva Guinea.

Los norteamericanos buscarán una estrategia que maximice sus opciones de victoria, mientras que los japoneses escogerán una que minimice las pérdidas. Si ambas opciones coinciden, se dice que nos encontramos en un punto de silla. Este no deja de ser un equilibrio en el cual cada agente no desea cambiar su estrategia debido a que esta es la mejor respuesta ante la elección de su rival.

Kenney se asegura como mínimo tener dos días de bombardeos si escoge la ruta del norte, mientras que los japoneses tendrán la mínima exposición si escogen ir por esta misma ruta. Se recuerda que ambos estrategas desconocen la elección del rival. Sin embargo, en caso de que la hubiesen sabido, no habrían cambiado de opinión y habrían mantenido las mismas elecciones. El resultado real de la batalla coincidió con lo predicho por la Teoría de Juegos.

Esta también puede emplearse en procesos de decisión de diseño de nuevo armamento. Un ejemplo sería la decisión de equipar a los cazas de nueva generación con distintos sistemas de armas, como pueden ser cañones, cohetes, misiles o ametralladoras, cada uno con sus ventajas o desventajas en función del tipo de enemigos de los cazas. Supóngase que los cazas deben ser empleados contra tres tipos de bombardeos, caracterizados de la siguiente forma:

- Bombarderos lentos pero de gran potencia de fuego.
- Bombarderos de velocidad media y con potencia de fuego media.
- Bombarderos rápidos pero con apenas armas.

En función de los datos estadísticos recogidos de los diferentes ejércitos y combates de las últimas décadas, se puede establecer la eficacia de cada sistema de armas de los cazas contra los bombarderos. En la siguiente matriz de pagos aparecen resumidas las cuatro estrategias de elección de los sistemas de armas de los cazas, los distintos tipos de bombarderos supuestos y, para cada par de estrategias, el factor de eficacia de los cazas sobre los bombarderos en función de la probabilidad de destrucción de estos últimos contra la opción conservadora del enemigo, es decir, aquella que le produzca menos bajas, que en este caso es el empleo de bombarderos muy rápidos. De esta manera, ambos bandos se aseguran al menos destruir un 17 por 100 de los bombarderos, porcentaje que es satisfactorio para todos, no pudiendo ninguno de ellos hacer una elección mejor.

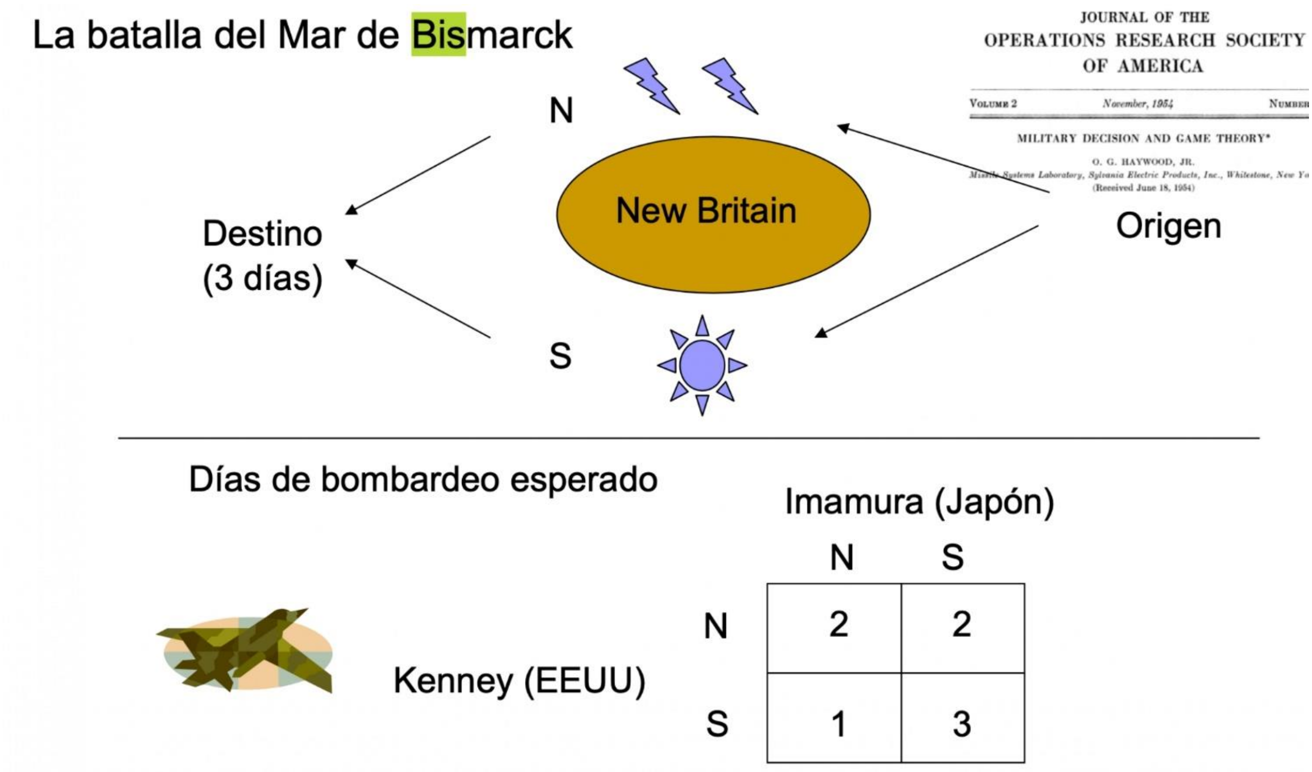


Figura 12. Matriz de pagos para la batalla del mar de Bismarck.

La crisis de los misiles en Cuba.

A continuación, se exponen los diversos problemas que presenta la cooperación en los juegos en forma normal cuando para conseguir ciertas ganancias los agentes necesitan cooperar entre sí.

Se pueden distinguir dos planos: lo que es bueno para el conjunto de los agentes y lo que es bueno para cada uno de ellos. Si no hay conflicto entre esos dos planos y lo bueno para el grupo es lo bueno para cada agente individualmente, existirán incentivos para la cooperación. Pero si eso no ocurre así, los agentes se encuentran ante un dilema entre hacer el bien común o el bien propio.

Lo curioso de estos dilemas es que se presentan en la sociedad a menudo y pueden llegar incluso a modelizar conflictos históricos, como la carrera armamentística durante la Guerra Fría.

La solución de los dilemas anteriormente introducidos se obtiene mediante la búsqueda de la estrategia de equilibrio. Para ello, se emplea la generalización que propuso John Nash del concepto del punto de silla llamado *Equilibrio,* que se define como la combinación de estrategias, en las cuales cada una es una respuesta óptima a la otra. Por tanto, si ambos jugadores son racionales, no querrán desviarse de sus estrategias óptimas, ya que se arriesgarían a emplear una respuesta no óptima.

La crisis de los misiles de Cuba en el año 1962 fue uno de los picos de tensión más álgidos de la Guerra Fría. Tras años de hostilidad entre los cubanos y los norteamericanos, el país caribeño decide acercarse al bloque comunista. Como resultado, los soviéticos obtienen la posibilidad de instalar misiles balísticos de alcance medio en Cuba. Esto suponía que si se producía un lanzamiento, este tendría un alcance de casi la totalidad del territorio estadounidense, con una alerta de tan solo cinco minutos.

		Jugador 2	
		Cooperar	Desertar
Jugador 1	Cooperar	2,2	1,3
	Desertar	3,1	0,0

Figura 13. Matriz de pagos para la crisis de los misiles.

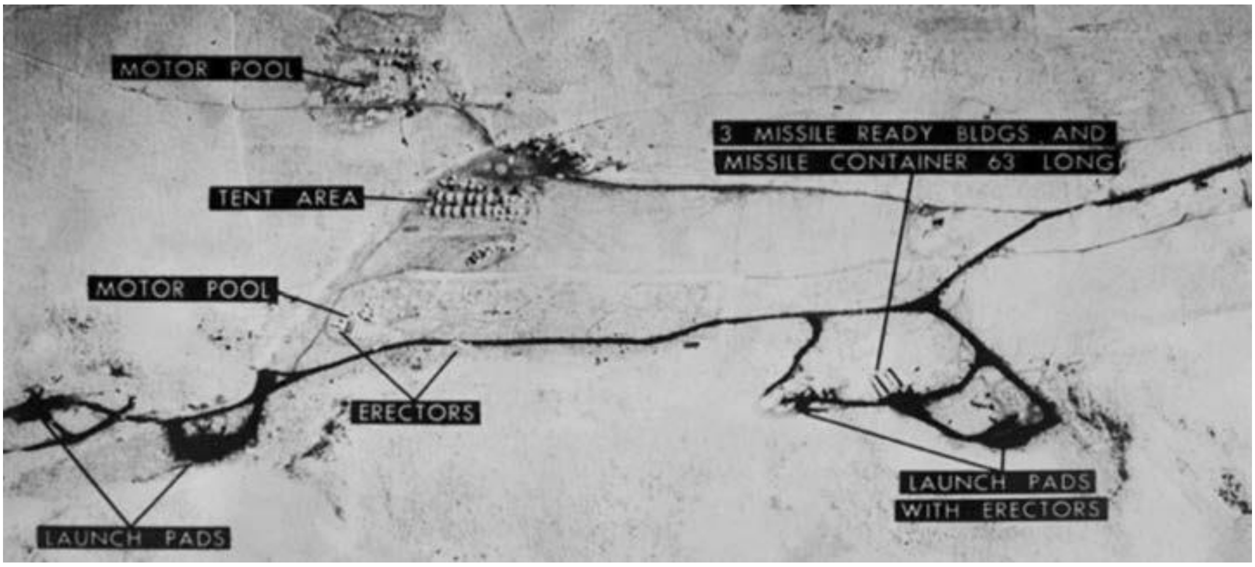


Figura 14. Vista aérea de los silos de misiles. (USAF, 1962).

De este modo, los norteamericanos se plantearon el escenario de destruir los misiles e invadir la isla de Cuba para que los soviéticos no los volviesen a instalar. Ello provocaría una respuesta soviética (que probablemente ocurriría en Berlín occidental), lo que daría comienzo a la Tercera Guerra Mundial. Pero no era una opción razonable para ambas potencias.

Otro aspecto a tener en cuenta es que no existía una línea de comunicación directa entre el presidente de los Estados Unidos y el de la Unión Soviética. Por tanto, esta situación se asemeja al dilema del Gallina. Ambos jugadores van a amenazar con la guerra para que el contrario ceda en sus pretensiones: uno de retirar los misiles de Cuba y el otro de que se retiren los misiles en Europa Occidental. Si no se llegaba a un acuerdo, ambos bloques *chocarían* y estallaría un conflicto nuclear.

Los equilibrios de Nash son *D, C* y *C, D*. La solución aparente es que ambas potencias cooperen y lleguen a un acuerdo para evitar el holocausto nuclear. Pero esa estrategia no es óptima, ya que no es un equilibro de Nash.

Por tanto, las dos líneas de acción más probables son que los norteamericanos fuercen a los soviéticos a retirar los misiles y que estos lo hagan, o que los norteamericanos intenten llegar a un acuerdo y claudiquen ante las acciones de la URSS para mantener en Cuba los misiles.

Para poder analizar en profundidad este juego se deben tener en cuenta los factores externos a esa matriz de pagos. En este caso, el compromiso por desertar por parte de un jugador, el presidente J. F. Kennedy.

Éste amenazó a los soviéticos con responder a un ataque nuclear lanzado desde territorio. Los Estados Unidos mantuvieron esa línea dura con la esperanza de ganar la batalla de los nervios a los soviéticos. No obstante, también dejaban abierta la puerta a una futura negociación con la decisión del bloqueo naval de Cuba para impedir que llegasen nuevos misiles. Esto permitió ver el compromiso de Kruschev de instalar esos misiles cuando los buques soviéticos se acercaron a la línea naval norteamericana.

Cuando dieron media vuelta, Kennedy sabía que había ganado la batalla y la resolución del conflicto estuvo más cerca. Finalmente, una vez que éste supo de su fortaleza, se buscó una solución negociada para la retirada de los misiles, alcanzándose un compromiso bajo supervisión de Naciones Unidas.

A cambio, la URSS obtuvo la promesa de que Estados Unidos nunca invadiría la isla de Cuba. Cabe aclarar que el resultado del juego anterior no fue *C, C*. Dicho estado se alcanzó una vez finalizado el mismo, ya que previamente Kennedy le había ganado la batalla a Kruschev.

4. Una aproximación a la crisis de Afganistán.

El análisis del problema que el sur de Afganistán supone es un reto notable dentro de la teoría de estrategias clásicas en el ámbito militar. Identificar y enmarcar el problema, aislar los centros críticos de crisis e intentar crear un estado democrático factible debido a la violencia de las numerosas tribus, narcotráfico y fanatismo religioso puede ser un problema de muy difícil solución.

Los científicos sociales, los teóricos políticos y los economistas se encuentran con estos problemas mal estructurados de continuo. Una teoría que puede aplicarse particularmente al sur de Afganistán es la de los juegos. Intentamos, a continuación, dar unas directrices, desde la teoría de juegos, que permitan aislar el problema y desarrollar una estrategia de contrainsurgencia en Afganistán.

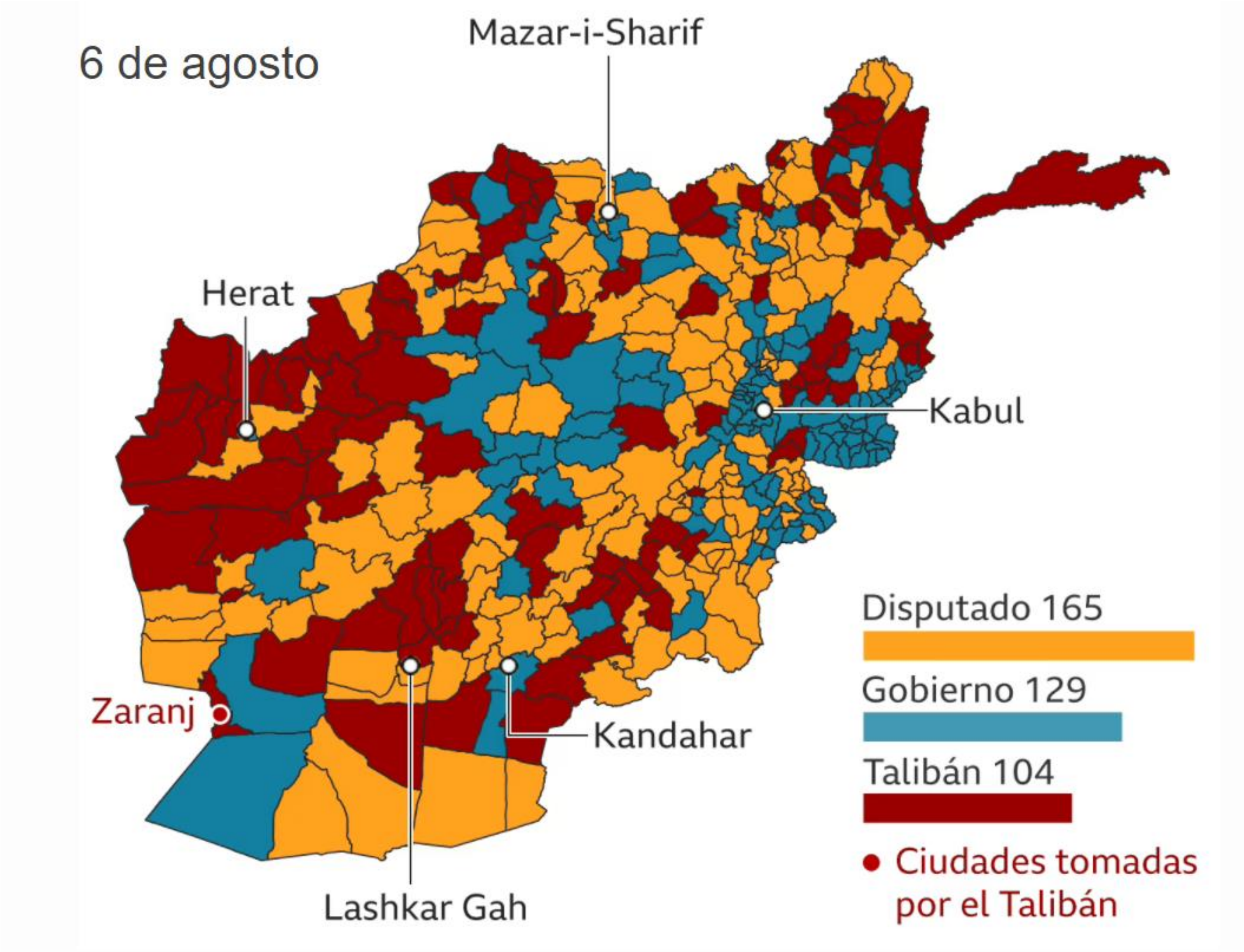


Figura 15. Situación en Afganistán a 6 de agosto de 2021.

Supongamos que los estrategas militares en una región aislada de Afganistán se encuentran con el problema de crear una coalición para estabilizar la región en contra de los talibanes. Se identifican tres puntos críticos:

1. El apoyo o no que tengan las pequeñas comunidades de la región a los talibanes.
2. Las infraestructuras de comunicación entre estas aldeas.
3. Independientemente de la relación física, el hecho de que sus opiniones sean o no parecidas.

Si una aldea decide apoyar a la coalición proporcionará un beneficio que se extenderá a las aldeas más próximas. Este beneficio es la suma de factores como una mayor confianza y empuje para que el esfuerzo de la coalición tenga sus frutos y del hecho de que los talibanes no podrán establecerse en dicha aldea excluyéndola de sus propias estrategias. Supongamos que el beneficio digamos público es “B” si deciden ayudar a la coalición. Por otro lado, la contrapartida está en que a modo privado esto tiene un coste, el hecho de que los talibanes tomen represalias. Supongamos que este coste privado es “c”.

Por otro lado, si la aldea decide adherirse a la causa talibán esto le lleva a incurrir en un costo público de “C” y la protección local dada por estos le proporcionaría un beneficio privado de “b”.

	Variable y valores del juego	
Beneficio Público	Apoyo a la coalición	B
Costo Privado	Apoyo a la coalición	c
Beneficio Privado	Apoyo a los Talibanes	b
Costo Público	Apoyo a los Talibanes	C

Tabla 1. Costo y beneficio.

La Tabla 1 contiene un resumen de estos costos y beneficios con valores iniciales asignados a cada uno.

Para ver mejor la estructura del juego, en la siguiente tabla se incluyen los costos y beneficios de dos aldeas cercanas en función de que apoyen a la coalición o no.

		Ciudad A	
Ciudad B		Apoya a la coalición	Apoya a los talibanes
	Apoya a la coalición	2B-c, 2B-c	B-C-c,B+b-C
	Apoya a los talibanes	B+b-C,B-c-C	b-2C, b-2C

Tabla 2. Costo y beneficio de dos aldeas.

Para explicar esta tabla, por ejemplo, si ambas aldeas eligen apoyar a la Coalición, ambas reciben el beneficio público, 2 veces B, pero ambas también incurren en su propio costo privado, c. Por tanto, el resultado cuantificado de la decisión de cada aldea es 2B-c. Al aplicar los valores de la Tabla 1 se obtienen los resultados del juego, que se pueden encontrar en la tabla anterior. Si diéramos valores a estos parámetros, por ejemplo: B= 4, c=6, b=6, C=4; la simulación quedaría:

		Ciudad A	
Ciudad B		Apoya a la coalición	Apoya a los talibanes
	Apoya a la coalición	2,2	-6,6
	Apoya a los talibanes	6,-6	-2,-2

Tabla 3. Costo y beneficio para los valores B= 4, c=6, b=6, C=4.

Aunque a primera vista parece que lo mejor es apoyar a la coalición, el verdadero equilibrio de Nash estaría en que ambas aldeas apoyen a los talibanes. Esto es debido al aislamiento de las aldeas y la poca comunicación entre ellas ya que los caminos de paso pueden estar custodiados por talibanes o incluso por la coalición que no se fía de los aldeanos. A la vista de esto, lo mejor para cada aldea por separado es apoyar a los talibanes como indica la tabla.
Sin embargo, hay dos estrategias que la coalición puede usar para paliar esta falta de información mutua. Si la coalición estableciera puestos de combate avanzados que intimidaran a los talibanes entonces se podría reducir el coste de ser apoyada (c=6 en nuestro ejemplo). Si, por ejemplo, el costo bajase a 2 el equilibrio de Nash pasaría a ser el apoyo a la coalición por ambas aldeas.

		Ciudad A	
Ciudad B		Apoya a la coalición	Apoya a los talibanes
	Apoya a la coalición	6,6	-2,6
	Apoya a los talibanes	6,-2	-2,-2

Tabla 4. Costo y beneficio para los valores B= 4, c=2, b=6, C=4.

La segunda opción es disuadir de que las propias aldeas se coaliguen para obtener el máximo beneficio público al apoyar a la coalición. Esto exige por otro lado un alto grado de confianza mutua.

Aunque sólo hemos trabajado con dos aldeas este trabajo podría continuarse implicando a más jugadores (coalición, talibanes, GIRoA, líderes tribales, señores de la guerra, Pakistán, Irán, etc.), el juego adecuado (el dilema del prisionero es solo uno de muchos) y asignar valores a los parámetros del juego (quizás la tarea más difícil).

También sería importante tener en cuenta que la capacidad de cómputo actual facilita la tarea en multijugadores y la elección del juego pasa por un conocimiento profundo de las costumbres, religión y relación entre este tipo de aldeas. Encontrar un modelo que refleje con precisión el entorno operativo contemporáneo sería de gran ayuda para identificar plenamente el problema y acertar con los puntos críticos del juego. Por último, estaría el cálculo de los parámetros los cuales ayudarían y mucho a tener una información más completa del problema.

5. Referencias.

1. CERDÁ, E., PÉREZ, J., JIMENO, J.L. *Teoría de juegos*. Madrid: Pearson, 2004. 84-205-3726-8.
2. DESWANN, A. Coalition Theory and Cabinet Formations. San Francisco : Jossey- Bass, 1973, no 347, p. 23.
3. HOLDEN, H., PIENE, R. *The Abel Prize 2013-2017*. Oslo: Springer, 2019. 978-3-319-99027-9.
4. ORDESHOOK, PITER C. *Game Theory and Political Theory*. Cambridge University Press.
5. LAING, J., OLMSTEAD, S. Policy Making by Committees: An Experimental and Game Theoretic Study.'. *Game Theory and Political Science,*1978, vol. 215281.
6. F. LUCAS, WILLIAM. A Game with No Solution. En: *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1968, vol. 74, no. 2, pp. 237-239.
7. MASCHLER, M., AUMANN, R. The bargaining Set for Cooperative Games. En : Dresher et al., eds., *Advances in Game Theory*, Princeton: Princeton Univ. Press, 1964.
8. MCKELVEY, R.D., ORDESHOOK, P., WINNER, M. The Competitive Solution for n-Person Games without Transferable Utility with an Application to Committee Games. En : *American Political Science Review.* 1978, vol.72, no.2, pp. 599-615.
9. MCKELVEY, R., ORDESHOOK, P. Vote Trading : An Experimental Study. En : Public Choice, 1978, vol.35, no. 2, pp. 151-184.
10. MCKELVEY, R., ORDESHOOK, P. Some Experimental Results That Fail to Support the Competitive Solution. En : Public Choice, 1983, vol. 40, no. 3, pp. 281-291.
11. MCKELVEY, R., SMITH, R. Internal Stability and the Size Principle. Working paper, Carnegie Mellon University, 1976.
12. MILLER, G., OPPENHEIMER, J. Universalism in Experimental Committees. En : *American Political Science Review*. 1982, vol. 76, no. 3, pp. 561-574.
13. MORGENSTERN, O., VON NEUMANN, J. *Theory of games and economic behavior (*2nd rev. ed.*).* Princeton university press, 1947.

14. NASH, J. Equilibrium points in N-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences* USA, 1950, vol 36, pp. 48–49.

15. NASH, J. Non-cooperative games. En : *Annals of Mathematics*, 1951, vol. 54, no 2, pp. 286-295.

16. NASH, J., SHAPLEY L.S., BOHNENBLUST, H.F. *A simple three-person poker game*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1950.

17. ORDERSHOOK, P. C. Game theory and political theory. An Introduction. Cambridge: University of Cambridge: 1986.

18. ORDESHOOK, P. The spatial analysis of elections and committees: Four decades of research. 1993.

19. ORDESHOOK, P., WINER, M. Coalitions and Spacial Policy Outcomes in Parliamentary Systems : Some Experimental Results. En : *American Journal of Political Science.* 1980, vol. 24, no. 4, pp. 730-752.

20. PELEG, B. Existence Theorem for the Bargaining Set $M_1(i)$. En : Martin Shubik, ed., *Essays in Mathematical Economics*, Princeton : Princeton Univ. Press, 1967.

21. RABIE, M. Games with no Solutions and empty Cores. En : Abstracts Amer. Math. Soc.1980, pp.231.

22. ROSENTHAL, H. Size of Coalitions and Electoral Outcomes in the French Fourth Republic. En : Sven Groennings, et al. ,eds., *The Study of Political Coalitions,* Nueva York : Holt, Rinehart, and Winston, 1970, pp- 43-59.

23. SCHOFIELD, N. The Bargaining Set in Voting Games. En: *Behavioral Science*. Colchester, Inglaterra. 1980, vol. 25, no. 2, pp. 120-129.

24. SCHOFIELD, N. Bargaining Set Theory and Stability in Coalition Governments. En : *Mathematical Social Sciences.* Inglaterra: Elsevier, 1982, vol. 3, no. 1, pp. 9-32.

25. VANEGAS DE MEDINA, M., PASCAL PINILLO J. Equilibrio de Nash y resolución de conflictos. En: *Revista de Ciencias Sociales.* 2014, vol. 20, no. 4.

26. WILSON, R. Stable Coalition Proposals in Majority-Rule Voting. En : *Journal of Political Economy.* California : Elsevier, 1971, vol. 3, no. 3, pp. 254-271.