

Trabajo Fin De Grado: Teoría De Kaluza-Klein

Jesús Pedro Márquez Hernández

24 de junio de 2019



Facultad de Física. Universidad de Sevilla.
Departamento de Física de la Materia Condensada.

Trabajo Fin De Grado: Teoría De Kaluza-Klein



Facultad de Física. Universidad de Sevilla.
Departamento de Física de la Materia Condensada.

Fdo: Jesús Pedro Márquez Hernández (Alumno)

Fdo: Diego Gómez García (Tutor)

Resumen

En este documento se pretende explicar la teoría de Kaluza-Klein desde la perspectiva de un graduado en Física sin conocimientos avanzados de relatividad general o teoría cuántica de campos. Para ello, inicialmente se ofrecerá una base general de geometría diferencial y los fundamentos de la teoría de la relatividad general. Una vez proporcionada dicha base se explicará y trabajará con la teoría de Kaluza-Klein para comprobar de forma natural cómo esta unifica gravedad y electromagnetismo bajo un mismo marco teórico; aunque también se observará cómo esta teoría fracasa al incorporar elementos cuánticos. Finalmente, se hará un breve repaso bibliográfico sobre el impacto de esta teoría en las teorías de gran unificación actuales que han hecho uso de muchas de sus herramientas y, entre otras, sostienen la misma pregunta: ¿vivimos en un universo con dimensiones extras?

Índice

1	Introducción	1
2	Notación y documentación bibliográfica	3
3	Fundamentos de geometría diferencial	5
3.1	Espacios vectoriales. Espacio Dual. Norma. Tensor Métrico. Distancia. . . .	5
3.2	Derivada covariante. Variedades. Haz de planos tangentes. Transporte pa- ralelo. Conexión de Levi-Civita.	9
3.3	Acción en una variedad	11
3.4	Símbolos de Christoffel. Medida de la curvatura: Tensor de Riemann, Ten- sor de Ricci y Escalar de Ricci.	11
3.5	Formalismo de Vielbein.	12
4	Fundamentos de la Teoría de la Relatividad General	14
4.1	Principio de equivalencia. Origen de la teoría.	14
4.2	Ecuaciones de Einstein	16
4.3	Acción de Einstein-Hilbert	19
5	La conexión de espín	20
6	Teoría de Kaluza-Klein	22
6.1	Origen de la Teoría	22
6.2	Ansätze de Kaluza-Klein	23
6.3	El espacio pentadimensional de Kaluza-Klein	26
6.4	La acción de Kaluza-Klein	30
6.5	Ecuaciones de Einstein y de Euler-Lagrange en el espacio de Kaluza-Klein	32
6.6	Campo fermiónico en el espacio K-K	33
7	Problemas y generalizaciones de la Teoría de Kaluza-Klein	36
8	Conclusiones	40

1 Introducción

Cuando Maxwell unificó electricidad y magnetismo se produjo la primera teoría de unificación en Física. Durante los años en los que se desarrollaban las teorías de la gravedad sólo eran conocidas estas 2 fuerzas: gravedad y electromagnetismo. En 1914 Gunnar Nordström[1] fue el primero en unificar ambas fuerzas a partir de una dimensión espacial extra. Sin embargo, Nordström planteó dicha unificación bajo su propia teoría de la gravedad, una versión incompleta de lo que años más tarde fue la Relatividad General de Einstein.

Cuando Einstein consiguió dar con las ecuaciones de la teoría de la Relatividad General la fuerza gravitatoria pasó a tener una teoría completa y firme sobre la que ser estudiada, desde el punto de vista clásico. La teoría de la relatividad general y el electromagnetismo de Maxwell eran teorías compatibles si se *juntaban* las ecuaciones como es el caso de la *acción de Einstein-Maxwell*; sin embargo, desde la comunidad científica se intentaba encontrar un marco teórico que realmente unificara estas teorías como una misma entidad, como ya hizo en su momento Maxwell con el electromagnetismo.

Fue en 1921 cuando Theodor Kaluza [2] probó que si se suponía un espacio de 5 dimensiones (1 temporal, las 3 espaciales habituales y una *dimensión espacial extra*) las leyes de Maxwell podían surgir como un elemento geométrico del espacio-tiempo. La teoría originalmente no explicaba la presencia de cargas libres ni cómo podía existir dicha dimensión extra, cuya presencia es empíricamente contraintuitiva. Cinco años más tarde, en 1926, Oskar Klein [3] aportó un nuevo formalismo matemático a la teoría y propuso una explicación que daba sentido a la existencia de dicha dimensión extra y por qué sería inobservable. Esto supuso una revolución pues abría las puertas a realmente una teoría del todo, dentro del contexto histórico donde estas fuerzas eran todas las fuerzas conocidas.

Sin embargo, con la revolución cuántica y el descubrimiento de las fuerzas nucleares la teoría de Kaluza-Klein, que originalmente era una teoría clásica, quedó relegada a un segundo plano. Principalmente, quedó descartada al comprobar las malas predicciones que surgían al combinar esta teoría original con la mecánica cuántica.

No obstante, dentro de la comunidad científica siguieron haciéndose algunas pruebas generalizando la teoría a mayores dimensiones ahora que se sabía que existían más fuerzas fundamentales y que, quizás, los problemas de la teoría de Kaluza-Klein original desaparecieran una vez incluidas todas las fuerzas bajo el mismo marco. Esta forma de pensar dio origen a la supergravedad y la supersimetría. Paralelamente, en la década de los 80 se desarrollaron las teorías de cuerdas que acabaron estando estrechamente ligadas a la

teoría de Kaluza-Klein.

En el siguiente documento se recorrerá de forma pedagógica y directa los fundamentos de esta teoría de forma ordenada. En primer lugar, se explicarán los fundamentos de la relatividad general y las herramientas matemáticas de la misma: geometría diferencial. Después, se planteará la teoría de Kaluza-Klein que, como se verá, es una generalización directa de la relatividad general a partir de unos planteamientos relativamente sencillos que hacen uso de todas las herramientas originales de la geometría diferencial. Se repasarán tanto los aciertos de la teoría como sus errores. Finalmente, se hará un repaso bibliográfico sobre el impacto de esta teoría en la física actual, donde tiene un impacto muy directo en las teorías de gran unificación como las *supercuerdas*.

2 Notación y documentación bibliográfica

Es importante señalar aspectos relevantes sobre la notación empleada y la bibliografía consultada a lo largo de la elaboración de este documento. La bibliografía relacionada suele presentar notación muy variada y hay más de un convenio de signos para realizar cálculos en espacios curvos; por eso es necesario aclarar aquí, antes de comenzar la lectura, la notación y convenios que se van a usar para que la lectura no se torne confusa.

La mayor parte de la información referente a Relatividad General ha sido extraída del libro de texto del profesor Bert Janssen, de la Universidad de Granada[4]. La mayoría de fuentes consultadas en la elaboración de este trabajo no usaban los mismos criterios para la métrica ni la misma notación pero fueron adaptados para coincidir con los que se emplean ahí, para así mantener consistencia en todos los cálculos y la narrativa del trabajo. Además de estos apuntes, se ha usado como material de apoyo un par de libros de texto de la materia: uno de Ray D’Inverno[5] y otro de Derek F. Lawden[6].

Para la parte relacionada con teoría cuántica de campos la mayoría de la información necesaria ha sido consultada en los apuntes[7] del profesor José Ignacio Illana, de la Universidad de Granada. No obstante, en el trabajo se hace referencia a las fuentes de las que se han extraído resultados directamente.

Aparte de estos libros y apuntes se han consultado muchas más fuentes en busca de información (mayoritariamente artículos); a estas se harán referencias directamente a lo largo del texto y aparecerán citadas al final del documento.

Todas las imágenes han sido usadas citando las fuentes originales y conformes al *uso justo* del copyright[©] al que están sujetas. En otras ocasiones son imágenes de uso libre.

En cuanto a la notación:

- Los tensores en 5 dimensiones van denotados con el símbolo ($\hat{\cdot}$). Por ejemplo, la métrica en 5D: $\hat{g}_{\mu\nu}$.
- Los tensores en 4 dimensiones no llevan elementos distintivos. Por ejemplo, la métrica en 4D: $g_{\mu\nu}$.
- Se usan letras latinas para la parte vectorial. Al tratarse espacios de N dimensiones estos índices no están limitados en sus valores.
- Se emplean letras griegas para valores de 0 a 3 (espacio 4D) y el índice 4 (dimensión extra) se muestra explícitamente. Salvo cuando se indica lo contrario.

- Se toma como criterio para las métricas lorentzianas el signo (+,-,-,-).
- Se hace uso del *criterio de sumación de Einstein*, donde dos índices repetidos *arriba y abajo* implican una suma. Ejemplo: $\partial^\mu \partial_\mu = \partial^0 \partial_0 - \partial^1 \partial_1 - \partial^2 \partial_2 - \partial^3 \partial_3 = \square$
- Se hace uso de unidades naturales, donde $c=\hbar=1$.
- Se empleará una notación compacta con matrices 2x2 representando matrices 5x5. En estas matrices los índices toman valores de 0 a 3.

En la parte de combinatoria:

- $C_{m,n}$ =Combinación sin repetición de m elementos tomando n.
- $CR_{m,n}$ =Combinación con repetición de m elementos tomando n.
- $V_{m,n}$ =Variación sin repetición de m elementos tomando n.
- $VR_{m,n}$ =Variación con repetición de m elementos tomando n.

También se emplean algún germanismo típico del estudio de la Relatividad General y sus generalizaciones:

- Ansatz: Significa *solución estimada* y es un planteamiento inicial a la hora de abordar un problema. Por lo general, dentro de Relatividad General, el ansatz consiste en suponer una forma aproximada para la métrica $g_{\mu\nu}$.
- Ansätze: Plural de ansatz. Se empleará cuando se suponen dos ansätze: uno para la métrica y otro para los vierbein.
- Vierbein: Significa *tetrápodo*, se emplea este término en el caso de trabajar con el *formalismo de Cartan* o *formalismo de vielbein* en referencia a los 4 vectores ortogonales de la base del espacio tangente en 4 dimensiones. La generalización da lugar a emplear otros términos como *funfbein*, que significa *5 patas*. El término *vielbein* es válido para cualquier número de dimensiones ya que su significado es *múltiples patas*.

3 Fundamentos de geometría diferencial

3.1 Espacios vectoriales. Espacio Dual. Norma. Tensor Métrico. Distancia.

Para definir el vector de posición de un punto arbitrario $|x\rangle$ dentro de un espacio vectorial \mathbb{R}^N sólo es necesario definir arbitrariamente un origen O , una base $\{|e_i\rangle\}$ y conocer las componentes x^i de la descomposición de x en esa base. Las componentes x^i de la descomposición de $|x\rangle$ en la base $\{|e_i\rangle\}$ son únicas y lo definen completamente de la forma

$$|x\rangle = x^1 |e_1\rangle + x^2 |e_2\rangle + \dots + x^N |e_N\rangle = x^i |e_i\rangle \quad (3.1)$$

donde se está empleando el criterio de sumación de Einstein. Análogamente, se puede escribir en forma de vector columna

$$|x\rangle = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^N \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

La base $\{|e_i\rangle\}$ ha sido elegida de forma arbitraria, por lo que se podría elegir una base diferente $\{|e'_i\rangle\}$. Los elementos de la nueva base se pueden escribir en función de los elementos de la base anterior, y viceversa (véase Fig. 1). Si ambas bases tienen un origen en común $O'=O$ entonces la descomposición queda

$$|e_j\rangle = M_i^j |e'_i\rangle \quad (3.3)$$

$$|e'_j\rangle = (M^{-1})_j^i |e_i\rangle \quad (3.4)$$

donde M_j^i es la componente i del vector $|e_j\rangle$ en la base $\{|e'_i\rangle\}$ y, de manera equivalente, $(M^{-1})_j^i$ es la componente i del vector $|e_j\rangle$ en la base $\{|e_i\rangle\}$ (véase Fig. 1).

Las matrices de la descomposición (M y M') componen, cada una, una descomposición del cambio de base y el cambio de base inverso. Se tratan de matrices cuadradas $N \times N$ y una es la inversa de la otra, es decir, cumplen

$$(M^{-1})_j^i M_k^j = M_j^i (M^{-1})_k^j = \delta_k^i \quad (3.5)$$

donde δ_j^i es la delta de Kronecker, cuya definición es conveniente recordar ya que aparecerá con frecuencia en el texto:

$$\delta_j^i = (\mathbb{I})_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.6)$$

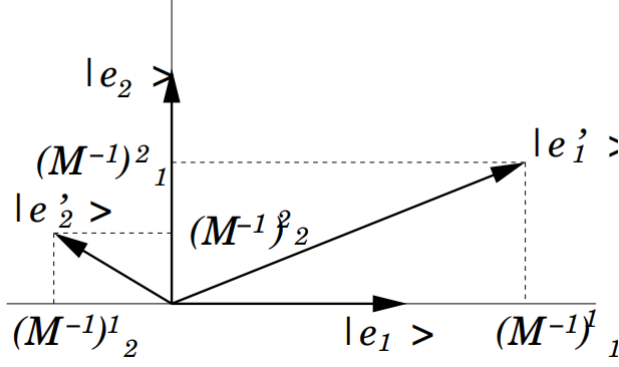


Figura 1: Descomposición de los vectores de la base $|e'_j\rangle$ en la base $|e_i\rangle$. [4]

donde se ha incluido la similitud entre la delta de Kronecker y los elementos de la matriz unidad \mathbb{I} , es evidente comprobar que la relación (2.5) es otra forma de escribir $MM' = \mathbb{I}$ siendo \mathbb{I} la matriz unidad de $N \times N$ dimensiones.

Es evidente que a partir de la relación entre los vectores de la base se deduce una forma de expresar el vector $|x\rangle$ en ambas bases a través de una relación entre las componentes x^i y x'^i . Es trivial comprobar que dicha relación es

$$x'^i = M_j^i x^j \quad (3.7)$$

Consideremos ahora el espacio vectorial conformado por las aplicaciones lineales $\langle y|$ que llevan los vectores definidos anteriormente en \mathbb{R}^N a los números reales \mathbb{R} . Debido a la linealidad, una combinación lineal de estas aplicaciones también conforma una aplicación lineal del mismo tipo, esto dota al espacio de las aplicaciones $\langle y|$ de estructura de espacio vectorial. El espacio vectorial que forman se conoce como *Espacio Dual* \mathbb{R}^{N*} .

Conocida la estructura vectorial del espacio dual, es inmediato definir las aplicaciones $\langle y|$ como vectores en una base del espacio dual $\{\langle e^i|\}$. Estos vectores $\langle y|$ son denominados *vectores covariantes* se pueden representar escritos como una descomposición en la base del espacio dual ó, de manera más simplificada, como vectores fila

$$\langle y| = y_1 \langle e^1| + y_2 \langle e^2| + \dots + y_N \langle e^N| = y_i \langle e^i| \quad (3.8)$$

$$\langle y| = (y_1, y_2, \dots, y_N) \quad (3.9)$$

Una vez introducido el concepto de vector covariante, se puede definir el *producto escalar* a partir de su actuación sobre los vectores contravariantes. Esta definición habitualmente se hace sobre los elementos de la base:

$$\langle e^i|e_j\rangle = \delta_j^i \quad (3.10)$$

donde δ_j^i es la delta de Kronecker.

Para saber cómo cambian las componentes del vector covariante es necesario reformular el razonamiento hecho anteriormente con las formas contravariantes. Las componentes y_i vienen dadas por $y_i = \langle y | e_i \rangle$ en función de los elementos de la base $\{|e_i|\}$. Si realizamos un cambio de base podremos obtener las componentes y'_i en la base $\{|e'_i|\}$ de la forma

$$y'_j = \langle y | e'_j \rangle = \langle y | (M^{-1})^i_j | e_i \rangle = (M^{-1})^i_j \langle y | e_i \rangle = (M^{-1})^i_j y_i \quad (3.11)$$

En definitiva, las componentes de un vector covariante $\langle y |$ transforman de la misma forma que los vectores de la base del espacio originalmente definido $\{|e_i|\}$, al contrario que un vector contravariante. En general, cualquier objeto con N componentes x^i que transforma como (2.7) se conoce como forma *contravariante* o *vector columna*; y cualquier vector que transforma como (2.11) se conoce como forma *covariante* o *vector fila*.

Si tenemos en cuenta la linealidad de las aplicaciones, es inmediato comprobar que el producto escalar entre un vector covariante $\langle y |$ y uno contravariante $|x \rangle$ es

$$\langle y | x \rangle = y_i x^k \langle e^i | e_k \rangle = y_i x^k \delta_k^i = y_i x^i \quad (3.12)$$

que en todo caso será un elemento de \mathbb{R} . También es independiente de la base escogida, siempre y cuando la elección sea consistente para ambos vectores

$$\langle y | x \rangle = y'_i x'^i = y'_i x'^k \langle e'^i | e'_k \rangle = (M^{-1})^j_i y_j M_l^k x^l \langle e'^i | e'_k \rangle = y_j x^l \langle e^j | e_l \rangle = y_j x^l \delta_l^j = y_j x^j \quad (3.13)$$

donde se comprueba también implícitamente que los vectores de la nueva base cumplen (2.10) de forma natural. Esta independencia del producto escalar resultará clave, como comprobaremos más adelante, para el estudio geométrico del espacio.

Una vez conocidas y definidas las propiedades del producto escalar, el siguiente paso natural es relacionar las formas covariantes y contravariantes en \mathbb{R}^N para definir normas, ángulos y distancias. El objeto matemático que proporciona dicha relación son la *métrica*, que transforma un vector covariante en uno contravariante, y la *métrica inversa*, que transforma un vector contravariante en uno covariante.

Las primeras métricas a destacar, por su simplicidad, son las métricas planas. La *métrica euclídea* se define como¹ $\delta_{ij} = \text{diag}(1, \dots, 1) = \delta_j^i$, es decir, una matriz diagonal con todos los elementos unitarios. La *métrica de Minkowski* se define como² $\eta_{ij} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$,

¹No confundir δ_{ij} , que es la métrica; con δ_j^i , que es la delta de Kronecker. La delta de Kronecker sirve para designar los elementos de la matriz unidad

²El criterio de signos de esta métrica no es único, a lo largo de este trabajo se ha seguido este en específico

es decir, una matriz diagonal en la que todos los elementos no nulos son unitarios y negativos excepto el primero.

En definitiva, la métrica y métrica inversa son operaciones que modifican los vectores de la siguiente forma

$$|e_i\rangle = g_{ij} \langle e^j| \quad (3.14)$$

$$\langle e^i| = g^{ij} |e_j\rangle \quad (3.15)$$

donde g_{ij} es la métrica, y g^{ij} es la métrica inversa³. La unicidad de descomposición de vectores en una base implica directamente que $g^{ij}g_{ij} = \delta_j^i$.

Es inmediato comprobar que las componentes de los vectores x_i y x^i presentan el mismo comportamiento al relacionarse entre sí:

$$x^i = g^{ij} x_j \quad (3.16)$$

$$x_i = g_{ij} x^j \quad (3.17)$$

esta relación es lo que se suele llamar como *Ley de bajar o subir índices* y es un procedimiento continuamente empleado en Cálculo Tensorial. Aparte de ser útil para la métrica, esta Ley es válida para operar con cualquier tipo de tensores. Su uso será recurrente a lo largo de este documento para operar con tensores.

Ante un cambio de coordenadas la métrica transforma manteniendo consistencia con las reglas de transformación de vectores covariantes y contravariantes. Las transformaciones bajo cambios de coordenadas para la métrica son de la siguiente forma

$$g'_{ij} = (M^{-1})_i^k (M^{-1})_j^l g_{kl} \quad (3.18)$$

$$g'^{ij} = M_k^i M_l^j g^{kl} \quad (3.19)$$

donde g'^{ij} y g'_{ij} son la métrica y la métrica inversa en las bases $\{|e'_i\rangle\}$ y $\{\langle e'^i|\}$.

Ya que la métrica relaciona vectores covariantes y contravariantes, nos permite extender el producto escalar al permitir hacerlo entre dos vectores covariantes (o entre dos vectores contravariantes),

$$|x\rangle |y\rangle = x^i y^k |e_i\rangle |e_k\rangle = x^i y^k g_{ij} \langle e^j| |e_k\rangle = x_j y^k \delta_k^j = x_j y^j \quad (3.20)$$

A partir de dicho producto escalar se puede definir la norma de un vector $\| |x\rangle \|$ como:

$$\| |x\rangle \|^2 = \langle x|x\rangle = x_i x^i = g_{ij} x^i x^j \quad (3.21)$$

³*métrica* es la forma más directa de referirse a g_{ij} pero, siendo más precisos hay que considerar que es un tensor de rango 2 y designarlo *tensor métrico* (g^{ij} es el *co-tensor métrico* o *métrica inversa*)

También permite obtener el ángulo entre dos vectores de la forma

$$\cos(\theta) = \frac{\langle x|y \rangle}{\| |x\rangle \| \cdot \| |y\rangle \|} \quad (3.22)$$

dos vectores son ortogonales cuando el ángulo es cero, es decir, cuando su producto escalar es cero. A partir de esta definición se puede construir una base ortogonal. Las transformaciones que parten de una base ortonormal y la convierten en otra base también ortonormal son las transformaciones ortogonales (p.ej.: cambio de coordenadas cartesianas a esféricas).

Al haber definido la norma de un vector también se hace posible definir la distancia entre dos puntos $|x\rangle$ e $|y\rangle$ como el módulo del vector $|x - y\rangle = |x\rangle - |y\rangle$; así que si pensamos en dos puntos muy próximos $|x\rangle$ y $|x + dx\rangle$ se define un *elemento de línea* ds :

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (3.23)$$

En el caso de la Relatividad Especial, el espacio tiene (1+3) dimensiones y la métrica correspondiente es la Métrica de Lorentz $\eta_{ij} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, el elemento de línea entonces define el *intervalo relativista* como

$$ds^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (3.24)$$

3.2 Derivada covariante. Variedades. Haz de planos tangentes. Transporte paralelo. Conexión de Levi-Civita.

Cuando pasamos de trabajar en coordenadas planas a coordenadas curvas es necesario efectuar un cambio de coordenadas tal y como se ha mencionado anteriormente. Cuando se aplica un operador diferencial a un vector cualquiera y se realiza el cambio de coordenadas, es necesario tener en cuenta que los vectores en la nueva base también se verán afectados por dicho operador diferencial. La idea detrás de la *derivada covariante* es, precisamente, definir una generalización de la derivada como un operador diferencial que transforme como un tensor de rango 2 bajo cambio de coordenadas, permitiendo definir magnitudes invariantes en coordenadas curvas. La derivada covariante para el caso de un vector es

$$\nabla_\mu V^\rho = \partial_\mu V^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho V^\nu \quad (3.25)$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ es el símbolo de Christoffel (conexión de Levi-Civita).

Observando la definición de la derivada covariante para un vector es inmediato comprobar que actúa como la derivada parcial y, además, un término de corrección dependiente

del transporte paralelo. En general, se introduce un término de corrección por cada índice del tensor. La generalización para un tensor de rango (m,n) es de la forma

$$\nabla_{\rho} T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_m} = \partial_{\rho} T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_m} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu_1} T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\lambda\mu_2 \dots \mu_m} + \dots + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu_m} T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_{m-1}\lambda} - \Gamma_{\rho\nu_1}^{\lambda} T_{\lambda\nu_2 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_m} - \dots - \Gamma_{\rho\nu_n}^{\lambda} T_{\nu_1 \dots \nu_{n-1}\lambda}^{\mu_1 \dots \mu_m} \quad (3.26)$$

Dentro de la Relatividad General es imprescindible aplicar el concepto de derivada covariante no sólo a coordenadas curvilíneas sino también a *variedades*. Una *variedad* N-dimensional M^N es un espacio que localmente es plano, pero no lo es globalmente. En cada punto de la variedad se puede definir el *espacio tangente en el punto p*, $T_p(M^N)$, y ese espacio es isomorfo a \mathbb{R}^N ; es decir, es plano. En Relatividad General, en la mayoría de casos, este espacio plano es el de Minkowski (métrica lorentziana).

Cuando se dice que una variedad es localmente \mathbb{R}^N lo que se quiere decir es que se comporta de esa forma en un entorno pequeño alrededor de p , que se denomina espacio tangente $T_p(M^N)$. Ya que la variedad no es igual en todos los puntos del espacio y dicha aproximación es sólo válida localmente se define el *haz de planos tangentes* $T(M^N)$ (véase Fig. 2), que recoge los planos tangentes en cada punto de la variedad.

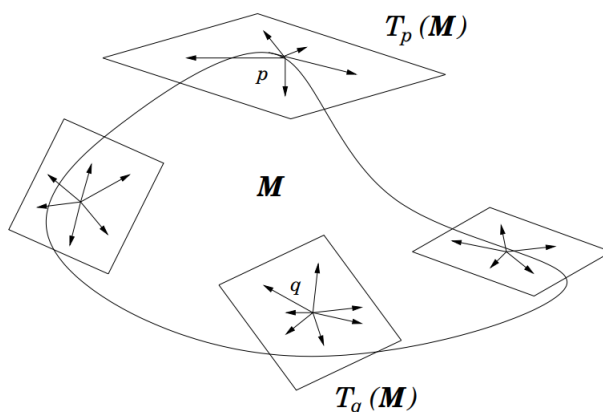


Figura 2: Espacio tangente $T_p(M)$ formado por todos los planos tangentes en cada punto de la variedad. [4]

La forma de conectar desde un plano tangente a otro es lo que se conoce como *conexión afín*. Lo que hace una conexión afín es realizar un *transporte paralelo* de un vector a lo largo de una curva dentro de la variedad (véase Fig. 3). Se puede ver la derivada covariante como la corrección que se le debe de hacer a un vector tras cambiar de un plano tangente a otro para que vuelva a ser el mismo vector, es decir, para que el "transporte" de una parte de la variedad a otra haya sido paralelo. Hay muchas formas de definir una conexión $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$, aunque los criterios que se suelen seguir en Relatividad General suelen tomarse para simplificar cálculos que haya que realizar con ellas y acorde a una forma intuitiva de

transporte paralelo que nos da la experiencia.

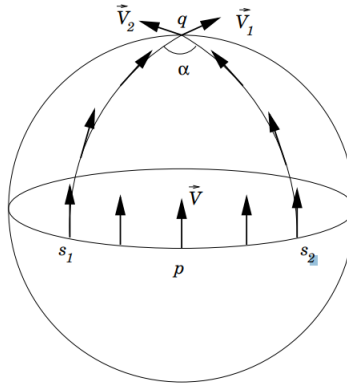


Figura 3: Transporte paralelo de un vector [4]

La conexión más útil en Relatividad General es la antes mencionada Conexión de Levi-Civita, la cual cumple dos propiedades:

1. Es simétrica: $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}$
2. La derivada covariante de la métrica es nula: $\nabla_{\mu}g_{\nu\rho} \equiv 0$

3.3 Acción en una variedad

Una propiedad importante a destacar de las variedades es el cálculo de integrales en una variedad, que viene dado por

$$\int d^N x \sqrt{\|g\|} f(x) \quad (3.27)$$

En concreto, es importante el cálculo de la acción para una densidad lagrangiana \mathcal{L}

$$\int d^N x \sqrt{\|g\|} \mathcal{L} \quad (3.28)$$

Para el caso del electromagnetismo, la forma que tiene la acción en relatividad general es

$$\int d^N x \sqrt{\|g\|} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \quad (3.29)$$

donde $F^{\mu\nu}$ es el Tensor Electromagnético, definido como $F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}$

3.4 Símbolos de Christoffel. Medida de la curvatura: Tensor de Riemann, Tensor de Ricci y Escalar de Ricci.

Cuando se trata de realizar la conexión de Levi-Civita una de las formas más sencillas de calcular todos los parámetros es a través de los *símbolos de Christoffel*⁴. Los símbolos

⁴Concretamente, estos son los símbolos de Christoffel holónomos, existe una generalización para sistemas no-holónomos pero no se usará en este trabajo (en general no se suele usar en R.G.)

de Christoffel consisten en una definición de la conexión $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ a partir de la métrica de la variedad

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda} (\partial_{\mu}g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}) \quad (3.30)$$

Una vez definida una conexión, el siguiente paso a dar es el estudio de la curvatura de una variedad. La forma de definir la curvatura es a partir del transporte paralelo: *Una variedad es curva si el transporte paralelo de un vector a través de una curva cerrada da lugar a un vector diferente al retornar al punto de partida.* El objeto matemático que se define para medir dichas variaciones es el *Tensor de Riemann* $R_{\mu\nu\rho}^{\lambda}$ o, análogamente, el *Tensor de Riemann covariante* $R_{\mu\nu\rho\lambda}$, que se definen como

$$R_{\mu\nu\rho}^{\lambda} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \quad (3.31)$$

$$R_{\mu\nu\rho\lambda} = g_{\lambda\sigma}R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} \quad (3.32)$$

Dada la relación que establece el tensor de Riemann con el transporte paralelo, se puede determinar si una variedad es plana si todas las componentes del tensor de Riemann son idénticamente cero. Para medir y comparar curvaturas debe de hacerse siempre bajo una misma conexión por una cuestión de consistencia, ya que el tensor de Riemann depende de la conexión que se emplee para calcularlo.

Si se contrae el segundo índice del tensor de Riemann con el cuarto se obtiene el *tensor de Ricci*

$$R_{\mu\nu} = g^{\rho\lambda}R_{\mu\rho\nu\lambda} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho} \quad (3.33)$$

Si se contrae el tensor de Ricci, es decir, si se contraen todas las componentes del tensor de Riemann se obtiene el *escalar de curvatura o escalar de Ricci*

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (3.34)$$

El escalar de Ricci es invariante bajo cambios generales de coordenadas y condensa mucha información sobre la curvatura de la variedad. Se relaciona con la diferencia entre un volumen geodésico en la variedad y un volumen geodésico en la métrica euclidea. Resumidamente: Si una métrica es plana su escalar de Ricci es cero, si es 'convexa' su escalar de Ricci es mayor que cero y si en 'cóncava' su escalar de Ricci es menor que cero.

3.5 Formalismo de Vielbein.

El formalismo de Vielbein es una forma de trabajar con las variedades usando el concepto de haz de planos tangentes como se ha explicado anteriormente. Un *Vielbein* consiste en un cambio general de coordenadas que relaciona coordenadas en la variedad $\{|e_{\mu}\rangle\}$ con

coordenadas en el haz de planos tangentes $T_P(M^N)$ en un punto arbitrario P, con una base de coordenadas $\{|e_\alpha\rangle\}$ ⁵

$$|e_\mu\rangle = e_\mu^\alpha(P) |e_\alpha\rangle \quad (3.35)$$

los coeficientes del vielbein e_μ^α son las componentes del vector base $|e_\mu\rangle$ en la base $|e_\alpha\rangle$, que parametrizan el cambio de base.

La forma de calcular cada uno de esos coeficientes es

$$e_\alpha^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \quad (3.36)$$

Se define el vielbein inverso f_α^μ verificando la relación

$$e_\mu^\alpha f_\alpha^\nu = \delta_\mu^\nu \quad (3.37)$$

Una vez definidos los vielbeins y vielbeins inversos, es posible transformar vectores covariantes y contravariantes de una base a otra de la forma

$$V^\alpha = e_\mu^\alpha V^\mu \quad (3.38)$$

$$V^\mu = e_\alpha^\mu V^\alpha \quad (3.39)$$

También se puede relacionar la métrica de la variedad, y su inversa, con la métrica del espacio tangente a través de los vielbeins:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^\alpha g_{\alpha\beta} e_\nu^\beta \quad (3.40)$$

$$g^{\mu\nu} = f_\alpha^\mu g^{\alpha\beta} f_\beta^\nu \quad (3.41)$$

ya que la métrica $g_{\alpha\beta}$ corresponde a un espacio plano, lo habitual es elegir una métrica cartesiana como son la euclídea o la lorentziana. En el capítulo dedicado específicamente a Kaluza-Klein se empleará una métrica lorentziana.

⁵Notar que se está usando letras del principio del abecedario griego (α, β) para el espacio tangente y letras del final (μ, ν) para la variedad

4 Fundamentos de la Teoría de la Relatividad General

Ya en 1907, un par de años después de la publicación de la relatividad especial, Einstein se dio cuenta de que la teoría de la gravedad newtoniana era incompatible con la relatividad especial. Hay varias maneras de ver esto.

Un primer concepto que es contradictorio en ambas teorías es el tiempo. En la gravedad newtoniana el tiempo es una magnitud absoluta independiente del espacio, idéntico para cualquier observador. Sin embargo, en relatividad especial cada observador tiene un tiempo propio particular.

Otro concepto contradictorio es la velocidad de propagación de la fuerza gravitatoria. Dentro de la gravedad newtoniana, si se modifica la distribución de masa, el potencial gravitatorio cambia automáticamente en todo el espacio y sólo depende de la distancia. Mientras tanto, en relatividad especial los campos electromagnéticos se propagan, necesariamente a velocidades iguales a c en el vacío. En definitiva, la propagación instantánea del potencial gravitatorio en todo el espacio implicaría velocidades mayores a la de la luz y rompería con el principio de causalidad. Einstein entonces encontraba necesario encontrar una teoría dinámica de la gravedad que fuese compatible con la velocidad de propagación finita para estar conforme a la relatividad especial.

Si el paso de la electrostática a la electrodinámica (teoría de Maxwell) es un proceso complicado, más aún lo es el paso de la gravedad newtoniana a la relatividad general. A Einstein le llevó 10 años desde que se planteó la relatividad especial para conseguir formular la relatividad general. En primer lugar dio con el planteamiento del *Principio de Equivalencia*, después con el *Principio de Covariancia* y, finalmente, la relatividad general. En este trabajo no se puede hacer justicia al trabajo de esos 10 años pero sí se va a introducir, brevemente, los principios que definió Einstein y las herramientas matemáticas propias de la relatividad general.

4.1 Principio de equivalencia. Origen de la teoría.

El primer razonamiento útil consiste en considerar la gravedad como una fuerza ficticia como puede ser dentro de la gravedad newtoniana la fuerza de Coriolis o la fuerza centrífuga. Según la Segunda Ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ en un sistema inercial la aceleración \vec{a} de una partícula es debida a la fuerza \vec{F} que actúa sobre ella, y la masa que las relaciona es la masa inercial. En sistemas no inerciales las partículas no seguirán trayectorias rec-

tas debido a la aceleración que sufre el propio sistema de referencia. Sin embargo, si un sistema no inercial atribuye la aceleración que sufre a las partículas que mide mediante el uso de fuerzas no inerciales, puede considerarse a sí mismo como un sistema inercial. En definitiva, un sistema inercial puede medir la aceleración de una partícula como si él mismo fuese un sistema inercial si introduce fuerzas ficticias \vec{f} que sean responsable de la aceleración no inercial que sufre la partícula $\vec{a}_{n.i.}$,

$$\vec{F} + \vec{f} = m(\vec{a} + \vec{a}_{n.i.}) \quad (4.1)$$

Hasta este momento, la masa inercial y la masa gravitatoria se habían considerado la misma en base a observaciones pero sin ningún motivo teórico aparente que los ligase, sin embargo, a través de este razonamiento aparecen unificadas directamente al considerar la gravedad como una fuerza inercial sin más. El origen de esta idea es darse cuenta de que las partículas en caída libre dentro de un campo gravitatorio son, localmente, equivalentes a partículas libres en un sistema inercial, sobre el que no actúa ninguna fuerza.

La formulación más general del principio de equivalencia es: *Observadores en caída libre bajo la influencia de un campo gravitatorio general son localmente equivalentes a observadores inerciales. No hay experimentos locales que puedan distinguir entre estas dos situaciones.*

Después de haber repasado los fundamentos de geometría diferencial en los capítulos anteriores resulta intuitivo el funcionamiento de la relatividad general: El campo gravitatorio es el efecto local, en un plano tangente, que produce la curvatura general del espacio, en toda la variedad. Es decir, la *localidad* de la que habla el principio de equivalencia es similar a la consideración del espacio tangente plano que se hace en una variedad en geometría diferencial.

En realidad, lo que supone el planteamiento de Einstein es que la gravedad, entendida como una fuerza ficticia, se debe a la curvatura del espacio-tiempo. Las trayectorias que realizan las partículas son el equivalente a líneas rectas, pero en el espacio curvo: una geodésica (ver Fig. 4). Estas geodésicas al definirse en un espacio lorentziano (métrica (+, -, -, -)) no sólo son las curvas de menor longitud entre dos puntos, sino que dicha longitud es idénticamente 0 para la velocidad de la luz, siendo esta la máxima velocidad alcanzable.

La comparación entre la gravedad enunciada según la Segunda Ley de Newton y la gravedad según la relatividad general es

$$\ddot{x}^i - \frac{F^i_g}{m} = 0 \quad (4.2)$$

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0 \quad (4.3)$$

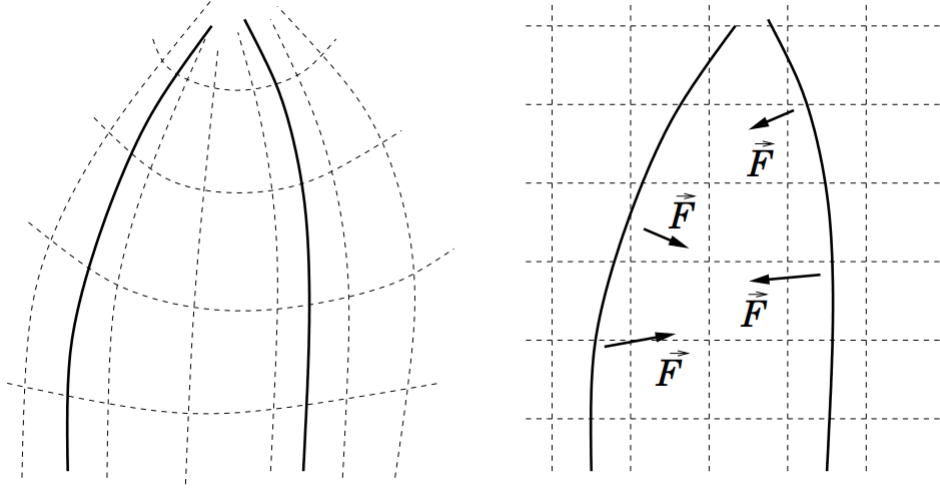


Figura 4: Comparación entre geodésicas y la acción de fuerzas 'ficticias' si se fuerza el uso de coordenadas planas en un espacio curvado [4]

donde F_g^i es la componente i de la fuerza gravitatoria, y $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$ corresponde al símbolo de Christoffel correspondiente.

La ecuación (4.3) es la ecuación de una geodésica métrica usando la conexión de Levi-Civita. Explicar el movimiento a través de dichas geodésicas, pese a partir de la equivalencia entre masas inercial y gravitatoria, es extensible a cualquier partícula. Una consecuencia de ello es que las partículas sin masa también sufren la gravedad, pues esta no es una interacción con su masa sino una deformación del tejido espacio-temporal. Así fue como Einstein predijo el efecto de las *lentes gravitacionales*[8], uno de los test de la teoría que después fue satisfactoriamente comprobado experimentalmente.

Una propiedad que se obtiene a partir de la formulación geométrica del principio de equivalencia es el *Principio de Covariancia*. El principio de covariancia se enuncia: *Las leyes de la física deben tener la misma forma en todos los sistemas de referencia, es decir, deben transformar de manera covariante bajo cambios generales de coordenadas.*

4.2 Ecuaciones de Einstein

En el apartado anterior se ha explicado cómo Einstein describió la gravedad como una manifestación puramente geométrica, en concreto, como la curvatura del espacio. Sin embargo, la teoría de la relatividad no estaría terminada sin explicar cómo se curva dicho espacio y qué lo curva.

A partir de la expresión de la energía en la relatividad especial $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$

sabemos que la energía, el momento y la masa en reposo están íntimamente relacionados. Además, sabemos que en la gravedad newtoniana la masa producía los campos gravitatorios. Teniendo en cuenta los antecedentes, se hace razonable pensar que en relatividad general la deformación del espacio-tiempo es producida por fuentes de energía, momento y/o materia. Así es como nace el concepto del *tensor de energía-momento* $T^{\mu\nu}$.

El tensor de energía-momento debe ser definido según el caso. Se tratan las fuentes de energía (materia-momento) como fluidos y se definen diferente forma según su origen. Por ejemplo, para un conjuntos de partículas que no interaccionan entre sí ('materia fría') el tensor de energía-momento es

$$T_{(mat)}^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \quad (4.4)$$

donde ρ es la densidad y u^μ corresponde a la cuadrivelocidad.

En el caso del campo electromagnético, el tensor de energía-momento viene definido como

$$T_{(em)}^{\mu\nu} = F^{\mu\rho} F_\rho^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda} \quad (4.5)$$

Si se procede a un desglose de las componentes el tensor energía-momento electromagnético se pueden diferenciar expresiones conocidas en el electromagnetismo:

$$T_{(em)}^{00} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2) \quad (4.6a)$$

$$T_{(em)}^{0i} = (\vec{E} \times \vec{B})^i \quad (4.6b)$$

$$T_{(em)}^{ij} = E^i E^j + B^i B^j + \frac{1}{2} \delta^{ij} (E^2 + B^2) \quad (4.6c)$$

La primera componente, $T_{(em)}^{00}$, es la expresión para la densidad de energía del campo electromagnético, las componentes $T_{(em)}^{0i}$ son las componentes del *Vector de Poynting* ($\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$) y las componentes $T_{(em)}^{ij}$ corresponden al *tensor de Maxwell*. Todas estas magnitudes son empleadas en la teoría clásica de campos del electromagnetismo y representan el flujo de energía y momento del campo electromagnético. Es inmediato comprobar que en el tensor $T_{(em)}^{\mu\nu}$ es simétrico en sus dos índices. También es notable que en este tensor no hay contribución de ninguna masa, sólo energía y momento; lo cual se debe a que los fotones no tienen masa.

La divergencia del tensor energía-momento da lugar a la relación

$$\partial_\mu T_{(em)}^{\mu\nu} = j_\nu F^{\mu\nu} \quad (4.7)$$

donde j_μ es la densidad de corriente. Esta igualdad indica que la energía se conserva en ausencia de fuentes de carga eléctrica. En ausencia de fuentes, la expresión toma la forma

$$\partial_\mu T_{(em)}^{\mu\nu} = 0 \quad (4.8)$$

Más adelante veremos cómo en la teoría de Kaluza-Klein se obtiene el lagrangiano y las ecuaciones de Einstein del electromagnetismo clásico en ausencia de fuentes, correspondiendo a una conservación de energía como en la ecuación 4.8.

Una vez se ha definido un tensor ($T^{\mu\nu}$) que modela la distribución de materia-energía-momento en el espacio-tiempo, lo siguiente que se requiere en la teoría de la relatividad general es un tensor y unas ecuaciones que relacione $T^{\mu\nu}$ con la geometría del espacio. Dicha ecuación debe tomar la forma

$$G_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} \quad (4.9)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es un tensor que depende de la geometría, k es una constante de proporcionalidad y el signo negativo se introduce por pura conveniencia (bien podría no aparecer y posteriormente redefinir las ecuaciones). Esta relación tensorial establece un conjunto de ecuaciones denominadas *Ecuaciones de Einstein* y el tensor $G_{\mu\nu}$ es el *Tensor de Einstein*.

La definición del Tensor de Einstein dista de ser una definición arbitraria, al propio Einstein le llevó varios años dar con la definición correcta. En concreto, el Principio de Equivalencia fue descrito en 1907[9] y las ecuaciones de Einstein fueron publicadas en 1915 [10]. La definición de este tensor es:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (4.10)$$

Este tensor satisface todas las imposiciones físicas que hacen consistente esta formulación, aunque su definición no es única (p.ej. se puede añadir una constante cosmológica) se eligen las constantes de la manera más conveniente. El tensor $G_{\mu\nu}$ es simétrico igual que $T_{\mu\nu}$, sólo depende de factores geométricos (*i.e.* de $g_{\mu\nu}$), es idénticamente cero para el espacio plano, en ausencia de fuentes (si se conserva la energía) $\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0$ y, además, permite obtener la gravedad newtoniana en el caso límite⁶. Una vez definido el Tensor de Einstein, las ecuaciones de Einstein toman la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad (4.11)$$

esta relación es tal y como descrita anteriormente pero teniendo en cuenta la constante de proporcionalidad k con un valor $k = 8\pi G$, siendo G la constante de gravitación de Newton.

Se podría incidir más sobre la definición del Tensor de Einstein y los requisitos físicos (y matemáticos) que este debe cumplir, pero para las comprobaciones posteriores en la teoría de Kaluza-Klein será más que necesario con comprender el significado detrás de estas

⁶Se podría incidir más sobre la definición del Tensor de Einstein y los requisitos físicos (y matemáticos) que este debe cumplir, pero para las comprobaciones posteriores en la teoría de Kaluza-Klein será más que necesario con comprender el significado detrás de este tensor y las ecuaciones de Einstein

4.3 Acción de Einstein-Hilbert

La teoría de la Relatividad General es totalmente consistente con los principios de la Mecánica Lagrangiana. Esta afirmación supone una doble relación entre ambas teorías; en primer lugar, cualquier sistema de mecánica clásica (incluyendo teoría clásica de campos) es extensible a espacio-tiempo curvo a través de la Relatividad General y, en segundo lugar, las ecuaciones de Einstein se pueden obtener a partir de un principio variacional como es el Principio de Mínima Acción.

La acción que se define con dicho propósito es la Acción de Einstein-Hilbert, que no fue obtenida por Einstein sino por el matemático alemán David Hilbert⁷ a partir de un seguimiento de los trabajos de Einstein, en 1915. La forma de esta acción es

$$S = \frac{1}{2k} \int d^4x \sqrt{\|g\|} R \quad (4.12)$$

Las ecuaciones de Einstein se obtienen a partir de una generalización de las ecuaciones de Euler-Lagrange mediante la variación de la Acción de Einstein-Hilbert con respecto a la métrica inversa $g^{\mu\nu}$. Esto significa que hay una función lagrangiana asociada $\mathcal{L} = \sqrt{\|g\|} R$ y unas ecuaciones del tipo

$$\partial_\rho \partial_\lambda \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\rho \partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right) - \partial_\rho \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\rho g^{\mu\nu})} \right) + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad (4.13)$$

Aunque obtener las ecuaciones de Einstein a partir de estas ecuaciones de Euler-Lagrange puede parecer muy tedioso existen técnicas⁸ que reducen estas ecuaciones a

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad (4.14)$$

Para añadir las ecuaciones de Maxwell es necesario generalizar la acción de Einstein-Hilbert a la conocida como acción *Einstein-Maxwell*:

$$S = \int d^4x \sqrt{\|g\|} \left[\frac{1}{2k} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \quad (4.15)$$

La variación respecto a $g^{\mu\nu}$ permite obtener las ecuaciones de Einstein, que son de la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k \left(F_{\mu\nu} F_\nu^\rho - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda} \right) \quad (4.16)$$

Por otra parte, las ecuaciones de Euler-Lagrange para A_μ permiten obtener, en este caso, la ecuación de Maxwell en espacio curvo en ausencia de fuentes:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (4.17)$$

⁷A modo de curiosidad: La autoría de estas ecuaciones ha sido fruto de debate; la comunidad de físicos ha mantenido la tendencia de atribuirse a Einstein pero, de hecho, Hilbert las publicó 5 días antes [11]

⁸El método empleado comúnmente es recurrir al *Formalismo de Palatini* que, en combinación con la Conexión de Levi-Civita, permite anular todos los términos en la mayoría de casos

5 La conexión de espín

Una de las piedras angulares de la Teoría de la Relatividad General es el principio de equivalencia, y como consecuencia de este cualquier fenómeno estudiado debe ser invariante bajo transformaciones locales de Poincaré. Este fenómeno es más intuitivo cuando se generaliza a partir de la Teoría de la Relatividad Especial; cuya invariancia está recogida en el grupo de Lorentz.

El grupo de Lorentz es isomorfo al grupo ortonormal generalizado $O(3,1)$ y recoge las transformaciones lineales (grupo de isometrías) que dejan invariante la métrica del espacio de Minkowski.

Cuando se trabaja en el marco de la Relatividad General, una métrica plana como la de Minkowski sólo puede usarse al definir, localmente, un espacio tangente. Cuando se pretende generalizar las simetrías del grupo de Lorentz; fuera de la aproximación local de espacio plano, a una métrica general se deben de recoger las transformaciones posibles del grupo de Lorentz bajo un grupo mayor conocido como Grupo de Poincaré.

Un campo fermiónico (spinor) Ψ modela, bajo el marco de la Teoría Cuántica de Campos, las partículas fermiónicas, *i.e.* partículas de spin semi-entero que siguen la estadística de Fermi-Dirac. Dicho campo debe transformar según el grupo de rotaciones $SO(3,1)$:

$$\Psi(x) \rightarrow \psi'(x') = M(x)\Psi(x)$$

La acción de dicho campo fermiónico es conocida como Acción de Dirac:

$$S_D = \int d^4x \mathcal{L}_D(\Psi, \partial_\mu \Psi)$$

No obstante, cuando esta acción se extiende en Relatividad General debe introducirse la derivada covariante $\nabla_\mu \Psi$, de forma que se cumpla el Principio de Mínima Acción:

$$\delta S_D = \delta \int d^4x \mathcal{L}_D(\Psi, \nabla_\mu \Psi) = 0$$

Se obtiene la expresión para la derivada covariante

$$\nabla_\mu \Psi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} S^{ab} \omega_{ab\mu} \right) \Psi \quad (5.1)$$

donde $S^{ab} = \frac{i}{4} \{\gamma^a, \gamma^b\}$, siendo γ^a matrices de Dirac y $\omega_{ab\mu}$ la conexión de spin, que se define como

$$\omega_{ab\mu} = f_b^\alpha e_{a\beta} \Gamma_{\mu\alpha}^\beta - f_b^\alpha \partial_\mu e_{a\alpha} \quad (5.2)$$

donde $e_{a\beta}$ corresponde a una contracción del vielbein y f_b^α a los vielbein inversos. En consecuencia, al tratar un campo fermiónico, la derivada parcial ∂_μ debe ser complementada por un término geométrico para conservar la covariancia de las ecuaciones cuánticas de campo en todo el espacio curvo.

6 Teoría de Kaluza-Klein

6.1 Origen de la Teoría

En 1914 Gunnar Nordström fue el primero en unificar[1] gravedad y electromagnetismo a partir de una dimensión espacial extra. Sin embargo, Nordström planteó dicha unificación bajo su propia teoría de la gravedad, que consistía en una forma aproximada, incompleta, de lo que años más tarde fue la Relatividad General de Einstein.

Posteriormente, estando ya asentadas las bases de la Relatividad General de Einstein y el Electromagnetismo de Maxwell; desde la comunidad científica se estaba buscando la forma de unificar ambas fuerzas, como ya hizo Maxwell con la fuerza eléctrica y la magnética. La fuerza electromagnética y gravitatoria eran todas las conocidas en aquel momento, así que en aquel contexto histórico la propuesta de Kaluza supuso la formulación de la primera teoría de unificación.

En un artículo de 1921, Theodor Kaluza [2] consideró una extensión de la Relatividad General a 5 dimensiones. En esta propuesta, las ecuaciones en 5 dimensiones siguen exactamente la misma estructura que en la teoría de 4 dimensiones de Einstein y las componentes de la métrica serían, en todo caso, independientes de la dimensión extra (*condición cilíndrica*). En dicha teoría, surgía de forma natural la gravedad de Einstein, las Ecuaciones de Maxwell y la ecuación de ondas de un campo escalar adicional (*dilatón*). Cuando ese campo escalar adicional era considerado constante y con un valor concreto, desaparecía su acción y se obtenían totalmente unificadas las fuerzas electromagnética y gravitatoria.

Sin embargo, la introducción *ad hoc* de una dimensión extra es una decisión que generaba (y genera) controversia ya que la existencia de una dimensión extra dista mucho de la experiencia. Antes de Minkowski y el nacimiento de la Relatividad Especial siempre se había pensado en el espacio como una estructura de 3 dimensiones y el tiempo como una magnitud independiente; a partir de este punto, se consideró el tiempo como una dimensión más con la peculiaridad de poder avanzar sólo hacia delante en ella. Es decir, con la Relatividad Especial se comprendió el universo como una estructura de (1+3) dimensiones conocido como espacio-tiempo. La quinta dimensión del espacio propuesto por Kaluza sería de tipo espacial, planteando un espacio de (1+4) dimensiones que, *a priori*, parecía no encajar con la Realidad.

Cinco años más tarde, en 1926, Oskar Klein [3] aportó una nueva forma a la métrica propuesta por Kaluza y, además, ofreció una explicación para dicha dimensión extra. En

la propuesta de Klein, la dimensión extra consistiría en pequeños anillos presentes en cada punto del espacio-tiempo, pero dichos anillos serían tan pequeños que serían inobservables en escalas normales.

En las posteriores secciones estudiaremos una métrica de Kaluza-Klein similar a esta segunda propuesta. De hecho, usaremos la métrica que originalmente propuso Klein[3] aunque posteriormente se hayan hecho estudios similares proponiendo otras métricas más complejas a partir de su idea.

6.2 Ansätze de Kaluza-Klein

Cuando Kaluza propuso originariamente un espacio-tiempo de 5 dimensiones se trató más de un ejercicio teórico que de una propuesta física realista, siendo plenamente consciente de que la dimensión extra propuesta debería tener propiedades especiales que hiciesen que no fueran observables. Posteriormente, Klein dio forma a esta dimensión extra proponiendo una variedad topológica $M^4 \times S^1$. Es habitual definir la variedad M^4 como el espacio de Minkowski por simplicidad, no obstante, en los cálculos de este documento se supondrá una métrica general salvo cuando se especifique lo contrario. Si suponemos la métrica de partida como plana entonces no obtendremos efecto gravitatorio alguno. Nos referiremos al ansatz con métrica genérica $g_{\mu\nu}$ como *ansatz de Klein* y al caso considerando la métrica plana como *ansatz de métrica plana*. Ambos forman por separados un *ansätze* al incluir también una definición arbitraria para los vielbeins. Una imposición que sí es común en cualquier métrica que se use es que éstas sean lorentzianas.

De aquí en adelante se usará la métrica propuesta conjuntamente por Klein, lo cual incluye términos cruzados entre el vector unitario de la dimensión extra y los demás. Esto originariamente no ocurría en la propuesta de Kaluza donde la dimensión extra no estaba *compactificada* debidamente.

Una vez asumido un espacio-tiempo de 5 dimensiones comenzaremos definiendo el intervalo espacial, es decir, la *distancia* en este espacio:

$$ds^2 = \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (6.1)$$

donde μ y ν son índices que van desde 0 hasta 4 para designar las componentes correspondiente a cada uno de los elementos de la 5-upla que forma la base del espacio $\{ \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \}$. Directamente podemos escribir $\{ \mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_4 \}$ siendo la coordenada 0 el tiempo y las coordenadas 1-3 las coordenadas espaciales habituales, la dimensión extra sí estará designada independientemente para los cálculos.

El siguiente paso natural es definir la métrica del espacio como

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} & g_{\mu 4} \\ \hline g_{4\nu} & g_{44} \end{array} \right) \quad (6.2)$$

la cual está escrita en forma compacta 2×2 . Como se menciona en el apartado específico de notación, los índices en $\hat{g}_{\mu\nu}$ van desde 0 hasta 4, mientras que en $g_{\mu\nu}$ van desde 0 a 3. La parte correspondiente a las 3+1 dimensiones habituales están recogidas en $g_{\mu\nu}$, mientras que las componentes $g_{\mu 4}$ y g_{44} recogen información correspondiente a la dimensión extra.

Recordemos, en primer lugar, la definición de las componentes del tensor métrico a partir del producto escalar de los vectores de la base:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu \quad (6.3)$$

Teniendo en cuenta que el vector \mathbf{e}_4 no es ortonormal a los demás elementos de la base, podemos hacer una descomposición (véase Fig. 5) de cualquiera de los otros vectores en función a su componente paralela y ortonormal al vector \mathbf{e}_4 :

$$\mathbf{e}_\mu = \mathbf{e}_{\mu\parallel} + \mathbf{e}_{\mu\perp} \quad (6.4)$$

$$\mathbf{e}_{\mu\perp} \cdot \mathbf{e}_4 = \mathbf{0} \quad (6.5)$$

$$\mathbf{e}_{\mu\parallel} = \frac{g_{\mu 4}}{g_{44}} \mathbf{e}_4 \quad (6.6)$$

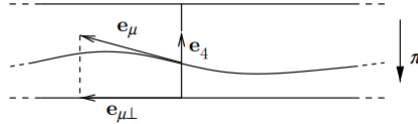


Figura 5: Descomposición vectorial de la cuarta componente en los elementos de la base [12]

Con esta descomposición, el producto entre dos vectores cualquiera de la base entre sí, *i.e.*, las componentes del tensor métrico quedan de la forma

$$\hat{g}_{\mu\nu} = (\mathbf{e}_{\mu\perp} + \mathbf{e}_{\mu\parallel}) \cdot (\mathbf{e}_{\nu\perp} + \mathbf{e}_{\nu\parallel}) = \mathbf{e}_{\mu\perp} \cdot \mathbf{e}_{\nu\perp} + \mathbf{e}_{\mu\parallel} \cdot \mathbf{e}_{\nu\parallel} = g_{\mu\nu}^{(4)} + \frac{g_{\mu 4} g_{\nu 4}}{g_{44} g_{44}} \mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_4 = g_{\mu\nu}^{(4)} + \frac{g_{\mu 4} g_{\nu 4}}{g_{44}} \quad (6.7)$$

Se define:

$$\begin{cases} A_\mu = \frac{g_{\mu 4}}{g_{44}}, \\ \phi = g_{44}, \end{cases} \quad (6.8)$$

Entonces el tensor métrico queda de la forma

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu}^{(4)} + \phi A_\mu A_\nu & \phi A_\mu \\ \hline \phi A_\nu & \phi \end{array} \right) \quad (6.9)$$

La variable ϕ es un campo escalar conocido como el campo del *Dilatón*. Este campo está directamente relacionado con el tamaño de la dimensión compactificada. Es necesario tener en cuenta dos consideraciones sobre las magnitudes que se han ido definiendo hasta ahora. Una de ellas es la condición cilíndrica

$$\partial_4 g_{\mu\nu} = 0 \quad (6.10)$$

esta condición fue incluida en la propuesta inicial de Kaluza y carga de sentido que la 5ª dimensión no sea observable. Debido a esta condición, las 1+3 dimensiones del espacio observable son independientes de la dimensión extra, que sólo se manifestará como un campo de fuerzas covariante.

Por otro lado, el campo A_μ transforma de la forma

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \epsilon \quad (6.11)$$

lo cual significa que es un campo covariante. Como se comprobará posteriormente, está estrechamente relacionado con el campo electromagnético.

Para el cálculo de los *vielbeins*, también es necesario establecer un *ansatz*, no hay una elección única pero aquí, por simplicidad, se ha seleccionado uno disponible en la bibliografía [13] pero siendo modificado para ajustarse mejor a los criterios de signos empleados. Con este *ansatz*, podemos calcular el vielbein inverso así como la métrica inversa. Usaremos la métrica de Minkowski para el cálculo de la métrica inversa en el lugar de $g_{\mu\nu}$ pero, como se comprobará posteriormente, podremos sustituir de nuevo por la métrica genérica $g_{\mu\nu}$ ⁹. Recordemos en primer lugar las expresiones que determinan los Vielbeins para aproximar la métrica general a una variedad plana local con forma de métrica de Minkowski ($\eta_{\alpha\beta}$):

$$e^\mu_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \quad (6.12)$$

$$\hat{g}_{\mu\nu} = e^\alpha_\mu \hat{\eta}_{\alpha\beta} e^\beta_\nu \quad (6.13)$$

$$\hat{g}^{\mu\nu} = f^\mu_\alpha \hat{\eta}^{\alpha\beta} f^\nu_\beta \quad (6.14)$$

Donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski en 4 dimensiones, $\hat{\eta}_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski en 5 dimensiones en la aproximación necesaria para los Vielbeins, $\hat{g}_{\mu\nu}$ es la métrica en 5D y $g_{\mu\nu}$ es una métrica en 4D contenida en nuestra métrica.

El *ansatz* para los vielbeins será

$$e^\alpha_\mu = \left(\begin{array}{c|c} \delta^\alpha_\mu & 0 \\ \hline \sqrt{-\phi} A_\mu & \sqrt{-\phi} \end{array} \right) \quad (6.15)$$

⁹Estos cálculos están disponibles en el anexo

Una vez definidos esos ansätze usando álgebra matricial¹⁰ es posible calcular la métrica inversa y el vielbein inverso. La métrica inversa viene dada por

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} g_{(4)}^{\mu\nu} & -A^\mu \\ \hline -A^\nu & A^m A_m + \frac{1}{\phi} \end{array} \right) \quad (6.16)$$

Por otra parte, el vielbein inverso es

$$f_\alpha^\mu = \left(\begin{array}{c|c} \delta_\alpha^\mu & -A_\mu \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{-\phi}} \end{array} \right) \quad (6.17)$$

6.3 El espacio pentadimensional de Kaluza-Klein

6.3.1 Símbolos de Christoffel para la métrica de K-K

A continuación, se procederá a un cálculo *ab initio* de los tensores geométricos que se derivan del ansätze anteriormente propuesto. El lector podrá así comprobar como surge de manera natural la unificación entre electromagnetismo y gravedad. También podrá comprobar la dificultad y extensión de dichos cálculos que, a veces, serán abreviados mediante aproximaciones o referencias externas. Los símbolos de Christoffel se calcularán para una métrica genérica $g_{\mu\nu}$ en 4D, que se supone lorentziana pero no necesariamente plana (si no, no habría gravedad involucrada).

Si recordamos la definición de los símbolos de Christoffel:

$$\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} \hat{g}^{\lambda X} (\partial_\mu \hat{g}_{\nu X} + \partial_\nu \hat{g}_{\mu X} - \partial_X \hat{g}_{\mu\nu}) \quad (6.18)$$

A priori, se estima que hay que calcular $5^3 = 125$ símbolos diferentes. Sin embargo, es inmediato comprobar que los índices inferiores son simétricos entre sí, lo cual reduce el número de símbolos de Christoffel razonablemente:

$$\#\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = 5 \cdot CR_{5,2} = 5 \cdot \binom{5+2-1}{2} = 75; \quad (5D)$$

$$\#\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 4 \cdot CR_{4,2} = 4 \cdot \binom{4+2-1}{2} = 40; \quad (4D)$$

Además, la parte correspondiente a la métrica $g_{\mu\nu}$ es desconocida. Todos los símbolos de Christoffel que hay que calcular para proseguir con los cálculos de la métrica serán: $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda, \hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda, \hat{\Gamma}_{\mu 4}^4, \hat{\Gamma}_{44}^\lambda, \hat{\Gamma}_{\mu 4}^\lambda, \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^4, \hat{\Gamma}_{\lambda 4}^\lambda, \hat{\Gamma}_{44}^4$ (11). Calcularemos la cardinalidad propia de cada uno de estos símbolos, esto es, calcularemos cuántos símbolos realmente quedan definidos con cada una de esas expresiones. Por ejemplo: $\hat{\Gamma}_{\lambda\lambda}^\lambda$ sirve para definir con un resultado los símbolos $\hat{\Gamma}_{00}^0, \hat{\Gamma}_{11}^1, \hat{\Gamma}_{22}^2$ y $\hat{\Gamma}_{00}^0$ por las simetrías que presenta la métrica; sin embargo, el

¹⁰En el anexo se encuentran dichos cálculos y notas sobre su validez

¹¹No se calculan de forma explícita $\hat{\Gamma}_{\mu\mu}^\lambda$ y $\hat{\Gamma}_{\lambda\lambda}^\lambda$ por obtenerse trivialmente a partir de otros símbolos.

símbolo $\hat{\Gamma}_{44}^4$ debe ser definido independientemente.

Para calcular la cardinalidad de cada tipo de símbolo se supone que dos índices son el mismo solo si van denotados mediante la misma letra. Los cálculos correspondientes a la cardinalidad de cada símbolo son

$$\#\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = 4 \cdot C_{3,2} = 4 \cdot \binom{3}{2} = 12 \quad (6.19)$$

$$\#\hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda = V_{4,2} = \frac{4!}{2!} = 12 \quad (6.20)$$

$$\#\hat{\Gamma}_{\mu\mu}^\lambda = V_{4,2} = 12 \quad (6.21)$$

$$\#\hat{\Gamma}_{\lambda\lambda}^\lambda = 4 \quad (6.22)$$

$$\#\hat{\Gamma}_{\mu 4}^\lambda = V_{4,2} = 12 \quad (6.23)$$

$$\#\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^4 = CR_{4,2} = 10 \quad (6.24)$$

$$\#\hat{\Gamma}_{\mu 4}^4 = 4 \quad (6.25)$$

$$\#\hat{\Gamma}_{44}^\lambda = 4 \quad (6.26)$$

$$\#\hat{\Gamma}_{\lambda 4}^\lambda = 4 \quad (6.27)$$

$$\#\hat{\Gamma}_{44}^4 = 1 \quad (6.28)$$

$$(6.29)$$

Es inmediato comprobar que las componentes correspondientes al espacio 4D suman 40 en total y si las sumamos todas obtenemos un total de 75.

Para los cálculos posteriores es importante tener en mente las leyes de subir y bajar índices $A^\mu = g^{\lambda\mu} A_\lambda$, las propiedades de los tensores electromagnéticos ($F^{\mu\nu}$ es antisimétrico) y aclarar el uso de los índices: ninguno de los índices se refiere a componentes del tensor métrico en la 4ª dimensión espacial; excepto en la primera contracción, tras la cual se separan los términos correspondientemente (esto es: X es el único índice que incluye términos relacionados con x^4). Por otra parte $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ se refiere a símbolos de Christoffel en 5D y $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ a símbolos de Christoffel en 4D. En la métrica, de la misma forma, $\hat{g}^{\mu\nu}$ corresponde a 5D y $g^{\mu\nu}$ a 4D.

Tal y como se explicó antes, en la realización de este trabajo se ha procedido a los cálculos *ab initio* a partir de la métrica para obtener todos los resultados de la teoría; no obstante, los cálculos de los símbolos de Christoffel son largos y complicados así que aquí sólo se mostrarán los resultados obtenidos (en el anexo del trabajo se encontrarán todos los cálculos correspondientes). A continuación se mostrará el cálculo de uno de estos

símbolos $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$, como ejemplo:

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{1}{2}\hat{g}^{\lambda X}(\partial_\mu\hat{g}_{\nu X} + \partial_\nu\hat{g}_{\mu X} - \partial_X\hat{g}_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2}\hat{g}^{\lambda\sigma}(\partial_\mu\hat{g}_{\nu\sigma} + \partial_\nu\hat{g}_{\mu\sigma} - \partial_\sigma\hat{g}_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\hat{g}^{\lambda 4}(\partial_\mu\hat{g}_{\nu 4} + \partial_\nu\hat{g}_{\mu 4} - \partial_4\hat{g}_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu(g_{\nu\sigma} + \phi A_\nu A_\sigma) + \partial_\nu(g_{\mu\sigma} + \phi A_\mu A_\sigma) - \partial_\sigma(g_{\mu\nu} + \phi A_\mu A_\nu)) \\
&\quad + \frac{1}{2}(-A^\lambda)(\partial_\mu(\phi A_\nu) + \partial_\nu(\phi A_\mu) - \partial_4(g_{\mu\nu} + \phi A_\mu A_\nu)) \\
&= \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu(g_{\nu\sigma}) + \partial_\nu(g_{\mu\sigma}) - \partial_\sigma(g_{\mu\nu})) \\
&\quad + \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu(\phi A_\nu A_\sigma) + \partial_\nu(\phi A_\mu A_\sigma) - \partial_\sigma(\phi A_\mu A_\nu)) - \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(A_\sigma)(\partial_\mu(\phi A_\nu) + \partial_\nu(\phi A_\mu)) \\
&= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\phi}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu(A_\sigma)A_\nu + \partial_\mu(A_\nu)A_\sigma + \partial_\nu(A_\sigma)A_\mu + \partial_\nu(A_\mu)A_\sigma - \partial_\sigma(A_\mu)A_\nu \\
&\quad - \partial_\sigma(A_\nu)A_\mu - A_\sigma\partial_\mu(A_\nu) - A_\sigma\partial_\nu(A_\mu)) \\
&\quad + \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(A_\sigma A_\nu\partial_\mu(\phi) + A_\sigma A_\mu\partial_\nu(\phi) - A_\mu A_\nu\partial_\sigma(\phi) - A_\sigma A_\nu\partial_\mu(\phi) - A_\sigma A_\mu\partial_\nu(\phi)) \\
&= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\phi}{2}g^{\lambda\sigma}(A_\nu(\partial_\mu A_\sigma - \partial_\sigma A_\mu) + A_\mu(\partial_\nu A_\sigma - \partial_\sigma A_\nu)) - \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(A_\mu A_\nu\partial_\sigma(\phi)) \\
&= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\phi}{2}g^{\lambda\sigma}(A_\nu F_{\mu\sigma} + A_\mu F_{\nu\sigma}) - \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(A_\mu A_\nu\partial_\sigma(\phi)) \\
&= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\phi}{2}(A_\nu F_\mu^\lambda + A_\mu F_\nu^\lambda) - \frac{1}{2}(A_\mu A_\nu\partial^\lambda(\phi))
\end{aligned}$$

Procediendo análogamente para el resto de símbolos se obtienen todas las expresiones para los símbolos de Christoffel:

$$\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\phi}{2}(A_\nu F_\mu^\lambda + A_\mu F_\nu^\lambda) - \frac{1}{2}(A_\mu A_\nu\partial^\lambda(\phi)) \quad (6.30a)$$

$$\hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda = \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \frac{\phi}{2}A^\sigma F_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}A_\mu A^\sigma\partial_\sigma(\phi) \quad (6.30b)$$

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^4 &= \frac{1}{2}(\partial_\mu(A_\nu) + \partial_\nu(A_\mu)) - \frac{\phi}{2}A_\lambda(A_\nu F_\mu^\lambda + A_\mu F_\nu^\lambda) \\
&\quad + A_\mu A_\nu A^\sigma\partial_\sigma(\phi) + \frac{1}{2\phi}(A_\nu\partial_\mu(\phi) + A_\mu\partial_\nu(\phi))
\end{aligned} \quad (6.30c)$$

$$\hat{\Gamma}_{\mu 4}^4 = -\frac{1}{2}(A^\sigma)(\phi F_{\mu\sigma} - A_\mu\partial_\sigma(\phi)) + \frac{1}{2\phi}\partial_\mu(\phi) \quad (6.30d)$$

$$\hat{\Gamma}_{44}^\lambda = -\frac{1}{2}\partial^\lambda(\phi) \quad (6.30e)$$

$$\hat{\Gamma}_{44}^4 = \frac{1}{2}A^\sigma\partial_\sigma(\phi) \quad (6.30f)$$

$$\hat{\Gamma}_{\mu 4}^\lambda = \frac{1}{2}\phi F_\mu^\lambda - \frac{1}{2}A_\mu\partial^\lambda(\phi) \quad (6.30g)$$

$$\hat{\Gamma}_{\lambda 4}^\lambda = 0 \quad (6.30h)$$

6.3.2 Tensor de Ricci

Recordemos en primer lugar la expresión del tensor de Ricci

$$\hat{R}_{\mu\nu} = \partial_X \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^X - \partial_\nu \hat{\Gamma}_{X\mu}^X + \hat{\Gamma}_{XY}^X \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^Y - \hat{\Gamma}_{\nu Y}^X \hat{\Gamma}_{X\mu}^Y \quad (6.31)$$

Para hacer estos cálculos más sencillos vamos a suponer que $\phi = cte$, lo que simplifica considerablemente la forma de los símbolos de Christoffel:

$$\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\phi}{2}(A_\nu F_\mu^\lambda + A_\mu F_\nu^\lambda) \quad (6.32a)$$

$$\hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda = \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \frac{\phi}{2} A^\sigma F_{\mu\sigma} \quad (6.32b)$$

$$\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^4 = \frac{1}{2}(\partial_\mu(A_\nu) + \partial_\nu(A_\mu)) - \frac{\phi}{2} A_\lambda (A_\nu F_\mu^\lambda + A_\mu F_\nu^\lambda) \quad (6.32c)$$

$$\hat{\Gamma}_{\mu 4}^4 = -\frac{1}{2}(A^\sigma)(\phi F_{\mu\sigma}) \quad (6.32d)$$

$$\hat{\Gamma}_{44}^\lambda = 0 \quad (6.32e)$$

$$\hat{\Gamma}_{44}^4 = 0 \quad (6.32f)$$

$$\hat{\Gamma}_{\mu 4}^\lambda = \frac{\phi}{2} F_\mu^\lambda \quad (6.32g)$$

$$\hat{\Gamma}_{\lambda 4}^\lambda = 0 \quad (6.32h)$$

Así ya podemos calcular las componentes del tensor de Ricci. De nuevo, se simplificarán los cálculos directamente para no alargar innecesariamente esta parte. Es importante mencionar que la condición cilíndrica, por extensión, afecta también a los símbolos de Christoffel: $\partial_4(\Gamma_{XY}^Z) = 0$. Los cálculos, igual que en apartado anterior, se encontrarán disponibles en el anexo del trabajo. Las expresiones correspondientes para las componentes del tensor de Ricci son:

$$\hat{R}_{44} = \frac{\phi^2}{4} F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} \quad (6.33a)$$

$$\hat{R}_{\mu 4} = \frac{\phi}{2} \partial_\kappa (F_\mu^\kappa) + \frac{\phi^2}{4} A_\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (6.33b)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu}^{(4)} + \frac{\phi}{2}(A_\mu \partial_\kappa F_\nu^\kappa + A_\nu \partial_\kappa F_\mu^\kappa) \\ &\quad - \frac{\phi^2}{4} A_\mu A_\nu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{\phi}{4}(F_\nu^\lambda F_{\lambda\mu} + F_\mu^\lambda F_{\lambda\nu}) \end{aligned} \quad (6.33c)$$

6.3.3 Escalar de Ricci

En este caso, la expresión del escalar de Ricci es de la forma

$$\hat{R} = \hat{g}^{\mu\nu} \hat{R}_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + 2\hat{g}^{\mu 4} \hat{R}_{\mu 4} + \hat{g}^{44} \hat{R}_{44} \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned}
\hat{R} &= R^{(4)} + \frac{\phi}{2} (2A^\sigma \partial_\kappa F_\sigma^\kappa + \frac{\phi^2}{4} A^\kappa A_\kappa F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{\phi}{4} (2F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})) \\
&\quad - 2 \left(\frac{\phi}{2} A^\sigma \partial_\kappa F_\sigma^\kappa + \frac{\phi^2}{4} A_\kappa A^\kappa F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) + \left(\frac{1}{\phi} + A_\kappa A^\kappa \right) \left(\frac{\phi^2}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \\
&= R^{(4)} + \left(\frac{\phi^2}{4} - 2\frac{\phi^2}{4} + \frac{\phi^2}{4} \right) A^\kappa A_\kappa F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \left(-\frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{4} \right) F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\
&= R^{(4)} - \frac{\phi}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

Si se hubiese considerado el campo escalar ϕ como no-constante los cálculos habrían aumentado considerablemente tanto en dificultad como extensión y hacerlo *manualmente* como se ha hecho al elaborar este trabajo es demasiado tedioso. Consultando bibliografía externa [14] [13] se puede encontrar el resultado de esta operación debidamente calculada con software de cálculo simbólico:

$$\hat{R} = R^{(4)} - \frac{\phi}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{2}{\sqrt{-\phi}} \partial_\kappa \partial^\kappa \sqrt{-\phi}$$

6.4 La acción de Kaluza-Klein

La acción de Kaluza-Klein es el resultado de aplicar la acción de Einstein-Hilbert al espacio 5D propuesto por Kaluza-Klein. Recordemos la expresión de la acción de E-H como aparece en (4.12):

$$S_{E-H} = \alpha \int d^4x ER = \alpha \int d^4x \sqrt{\|g\|} R \quad (6.35)$$

donde $\|g\|$ es el determinante de la matriz del tensor métrico, α es una constante de normalización ($\alpha = 1/16\pi G = 1/2k$) y R es el escalar de Ricci.

La generalización queda de la forma

$$S_{K-K} = \hat{\alpha} \int d^5x \hat{E} \hat{R} = \hat{\alpha} \int d^5x \sqrt{\|\hat{g}\|} \hat{R} \quad (6.36)$$

Definir la acción en 5 dimensiones tiene el mismo efecto que en la Relatividad General usual en 4D. La integral de acción define una densidad lagrangiana asociada $\hat{\mathcal{L}} = \sqrt{\|\hat{g}\|} \hat{R}$, a partir de la cual se pueden obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange y las ecuaciones de Einstein derivando respecto alguna *coordenada generalizada* o la métrica inversa $g^{\mu\nu}$ respectivamente.

6.4.1 Métrica plana

Haciendo uso del ansätze de métrica plana en el que la métrica se construye a partir de la métrica de Minkowski, el determinante de la matriz $[\hat{g}_{\mu\nu}]$ se puede calcular gracias a los vielbeins de forma muy sencilla

$$\|\hat{g}_{\mu\nu}\| = \|e_\mu^\alpha\| \|\hat{\eta}_{\alpha\beta}\| \|e_\nu^\beta\| = \sqrt{-\phi} (+1) \sqrt{-\phi} = -\phi \quad (6.37)$$

recordando que $[e_\mu^\alpha]$ es una matriz triangular, así que su determinante es el producto de su diagonal. También es conveniente recordar en el espacio de Minkowski $R^{(4)} = 0$, al tratarse de una métrica plana. La acción generalizada ahora es

$$S = \hat{\alpha} \sqrt{-\phi} \left[\int d^5 x \frac{\phi}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{2}{\sqrt{-\phi}} \partial_\kappa \partial^\kappa \sqrt{-\phi} \right] \quad (6.38)$$

Si añadimos a la integral de la acción los valores correspondientes e integramos respecto a la dimensión extra, esta queda de la forma

$$S_{Efectiva} = 2\pi R \hat{\alpha} \sqrt{-\phi} \left[- \int d^4 x \frac{\phi}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \int d^4 x \frac{2}{\sqrt{-\phi}} \partial_\kappa \partial^\kappa \sqrt{-\phi} \right] \quad (6.39)$$

Donde R es el radio de la dimensión extra, es decir, la longitud del anillo que forma dicha dimensión es $L = 2\pi R$.

Si ahora suponemos que el campo del dilatón es constante y con valor $\phi = -1$, se sustituirá $\alpha = 2\pi R \hat{\alpha} = L \hat{\alpha}$ y se definirá el cuadvivector gauge como $A_\mu = \mathcal{A}_\mu / \sqrt{-\alpha}$, siendo \mathcal{A}_μ el *cuadripotencial electromagnético* usual. De esta forma se obtiene una acción efectiva que no es otra que la acción electromagnética en *Relatividad Especial*¹²

$$S_{Efectiva} = - \int d^4 x \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = S_{EM} \quad (6.40)$$

Este resultado no deja de ser impresionante pues según él, en la teoría de Kaluza-Klein, aún siendo el espacio *plano* se presenta una curvatura en la *dimensión extra* que no es otra cosa que el campo electromagnético. Es decir, de ser este resultado cierto, los campos clásicos dejarían de ser entes físicos que se propagan en el espacio y pasarían a ser *parte del espacio-tiempo*.

6.4.2 Métrica genérica

Cuando la métrica a partir de la cual se construye $\hat{g}_{\mu\nu}$ no es plana, usando el ansatz de Klein, aún se puede calcular el determinante de $\hat{g}_{\mu\nu}$ [14] como

$$\|\hat{g}_{\mu\nu}\| = -\phi \|g_{\mu\nu}\| \quad (6.41)$$

Procedemos de forma análoga al caso de la métrica plana:

$$S = \hat{\alpha} \sqrt{-\phi} \sqrt{\|g_{\mu\nu}\|} \left[\int d^5 x R^{(4)} - \frac{\phi}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{2}{\sqrt{-\phi}} \partial_\kappa \partial^\kappa \sqrt{-\phi} \right] \quad (6.42)$$

¹²Nótese que se obtiene la acción en Relatividad Especial pues esta es el caso límite de la Relatividad General cuando el espacio es plano

y tras integrar en la dimensión extra queda

$$S_{Efectiva} = 2\pi R\hat{\alpha}\sqrt{-\phi}\sqrt{\|g_{\mu\nu}\|} \left[\int d^4x R^{(4)} - \int d^4x \frac{\phi}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \int d^4x \frac{2}{\sqrt{-\phi}} \partial_\kappa \partial^\kappa \sqrt{-\phi} \right] \quad (6.43)$$

Al evaluar en el caso $\phi = -1$ y haciendo las mismas sustituciones que antes obtenemos

$$S_{Efectiva} = \sqrt{\|g_{\mu\nu}\|} \left[\int d^4x \left(\alpha R^{(4)} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \right] \quad (6.44)$$

Esta es, exactamente, la acción de Einstein-Maxwell [4] como aparece en (4.15). Esta acción modela los campos electromagnéticos dentro de un espacio-tiempo curvo en el marco de la Relatividad General en ausencia de fuentes de carga. Al ser este el caso más general el resultado tiene las mismas implicaciones al suponer un cambio de paradigma en la definición de campo, según la teoría de Kaluza-Klein los campos ya no se encuentran en el espacio sino que son parte de la *misma entidad*.

6.5 Ecuaciones de Einstein y de Euler-Lagrange en el espacio de Kaluza-Klein

A partir de la Acción definida anteriormente es trivial extraer una expresión para la función lagrangiana del sistema

$$\mathcal{L} = \sqrt{\|g_{\mu\nu}\|} \left[\sqrt{-\phi} \alpha R^{(4)} + \frac{\phi \sqrt{-\phi}}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - 2\alpha \partial_\kappa (\partial^\kappa \sqrt{-\phi}) \right] \quad (6.45)$$

Por simplicidad se sustituirá $\psi = \sqrt{-\phi}$, y se extraerá el resultado de la bibliografía [14]. Variando esta expresión en función de la métrica se pueden obtener las ecuaciones de Einstein:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad (6.46)$$

Las ecuaciones de Einstein quedan

$$\psi R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \psi R = \frac{\psi^3}{2\alpha} \left(F_{\mu\nu} F_\nu^\rho - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda} \right) + (\partial_\mu \partial_\nu \psi - g_{\mu\nu} \partial_\kappa \partial^\kappa \psi) \quad (6.47)$$

La parte izquierda de esa igualdad corresponde al tensor de Einstein, mientras que la parte derecha corresponde al tensor energía-momento electromagnético-dilatón.

Una vez más, podemos comprobar como en el caso $\phi = -1 \rightarrow \psi = 1$ se simplifican las ecuaciones hasta quedar solo las ecuaciones de Einstein del electromagnetismo en espacio curvo [4]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{2\alpha} \left(F_{\mu\nu} F_\nu^\rho - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda} \right) \quad (6.48)$$

Tal y como se mencionó en el apartado 4.3 de este documento, las ecuaciones de Euler-Lagrange respecto a A_μ permite obtener la ecuación de Maxwell en ausencia de fuentes (para espacio curvo). En este caso es inmediato comprobar que se obtiene el mismo resultado pues la acción de partida es idéntica frente a la variable A_μ ya que el campo adicional del dilatón no tiene ningún término vinculado a dicho campo A_μ .

6.6 Campo fermiónico en el espacio K-K

Para definir un campo fermiónico en el espacio de Kaluza-klein es necesario recurrir a la *conexión de espín* para definir el campo fermiónico en teoría cuántica de campos extendida a espacios curvos. Para ello, partiremos desde el formalismo de Dirac pero se generalizará la *derivada parcial* a la *derivada covariante* tal y como se vio en el apartado 4. La acción de Dirac originalmente en Teoría Cuántica de Campos, en 4D, es de la forma

$$S_D = \int d^4x ((\Psi^\dagger \gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi + h.c.) \quad (6.49)$$

Haciendo uso del *ansätze de métrica plana*, en la generalización a 5 dimensiones la acción correspondiente a un campo fermiónico toma la forma[13]

$$S_D = \int d^5x \sqrt{-\phi} \left(\frac{1}{2} \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^a p_{0a} \Psi + h.c. \right) \quad (6.50)$$

donde el operador p_{0a} es definido en función de la derivada covariante y toma la forma

$$p_{0a} = f_a^\alpha \left(p_\alpha + \frac{1}{2} S^{cd} \omega_{cd\alpha} \right) \quad (6.51)$$

Introduciendo la definición de dicho operador en la acción se obtiene una expresión completa para el campo fermiónico en el espacio de Kaluza-Klein usando el *ansätze de métrica plana* queda

$$S_D = \int d^5x \sqrt{-\phi} \left(\frac{1}{2} \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^a f_a^\alpha \left(p_\alpha + \frac{1}{2} S^{cd} \omega_{cd\alpha} \right) \Psi + h.c. \right) \quad (6.52)$$

Si insertamos el valor $\phi = -1$ y del vielbein inverso f_a^α la acción queda¹³

$$S_D = \int d^5x \left[\frac{1}{2} \Psi^\dagger \gamma^0 \left(\gamma^m \left(p_m - \frac{p_4}{\sqrt{\alpha}} A_m \right) + \gamma^5 p_4 + \gamma^a f_a^\alpha \frac{1}{2} S^{mn} \omega_{mn\alpha} \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma^a f_a^\alpha \frac{1}{2} S^{m4} \omega_{m4\alpha} \right) \Psi + h.c. \right] \quad (6.53)$$

El término $\gamma^a f_a^\alpha \frac{1}{2} S^{mn} \omega_{mn\alpha}$ describe acoplamiento con la gravedad, que puede ser descartado. Por otra parte, $S^{m4} = 0$, así que el término $\gamma^a f_a^\alpha \frac{1}{2} S^{m4} \omega_{m4\alpha} = 0$.

¹³Se usa γ^5 en lugar de γ^4 para respetar la notación que se suele usar, en la que se define $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$

En esta expresión puede apreciarse la forma que toman la carga eléctrica y la masa:

$$q = \frac{p_4}{\sqrt{\alpha}} \quad (6.54)$$

$$m = p_4 \quad (6.55)$$

Ambas magnitudes están directamente relacionadas con la dimensión extra. Para obtener la acción efectiva en el espacio ordinario de 4 dimensiones sólo hay que integrar sobre la dimensión extra tal y como se ha hecho anteriormente:

$$S_D = 2\pi R \int d^4x \left[\frac{1}{2} \Psi^\dagger \gamma^0 \left(\gamma^m \left(p_m - \frac{p_4}{\sqrt{\alpha}} A_m \right) + \gamma^5 p_4 \right) \Psi + h.c. \right]$$

La topología del espacio de Kaluza-Klein tiene la peculiaridad de que la dimensión extra está compactificada, con una topología S^1 (forma de anillo) y se distribuye periódicamente en cada punto del espacio M^4 (espacio 4-dimensional). Por la periodicidad de la dimensión extra (*i.e.* $x^4 = x^4 + 2\pi R$) se puede expresar el spinor Ψ como un desarrollo en series de potencias de Fourier:

$$\Psi = \sum_n \Psi_n(x^\mu) Y_n(x^4) \quad (6.56)$$

donde $Y_n(x^4)$ son autofunciones ortonormales del operador $\hat{p}_4 = -i\partial_4$ que cumplen

$$Y_n(x^4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} e^{-inx^4/R} \quad (6.57)$$

$$-i\partial_4 Y_n = \frac{n}{R} Y_n; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.58)$$

Si introducimos la expansión en serie de Fourier del spinor en la expresión de la acción queda

$$S_D = 2\pi R \sum_n \int d^4x \left[\frac{1}{2} \Psi_n^\dagger \gamma^0 \left(\gamma^m \left(p_m - \frac{n}{R\sqrt{\alpha}} A_m \right) + \gamma^5 \frac{n}{R} \right) \Psi_n + h.c. \right]$$

Las expresiones cuantizadas de la carga y la masa son:

$$q = \frac{n}{\sqrt{R\alpha}} \quad (6.59)$$

$$m = \frac{n}{\sqrt{R}} \quad (6.60)$$

Si fijamos el valor $q = e_0$ y estimamos la masa del electrón:

$$m_e = e_0 \sqrt{\alpha} \approx 250kg \approx 1,4 \cdot 10^{32} MeV$$

El valor conocido de la masa del electrón es $m_e = 0,51 MeV$; lo que implica una diferencia entre el valor real y el predicho por esta teoría de 33 órdenes de magnitud. Esto supone una prueba flagrante de que la Teoría de Kaluza-Klein fracasa cuando se tienen en cuenta campos cuánticos.

Una forma alternativa de comprender este fallo predictivo es teniendo en cuenta el tamaño de las dimensiones extras. Si hay una dimensión extra arrollada en cada punto del espacio, en forma de anillo, el radio de este debe ser del orden de la distancia de Planck ($l_P \approx 10^{-35}m$). Con esta estimación la masa esperada del electrón sería del orden de $l_P^{-1} = m_P \approx 10^{19}GeV$.

Estos resultados distan enormemente de la realidad, lo cual supone una prueba flagrante de que la teoría original de Kaluza-Klein es errónea cuando se trata de campos cuánticos. No obstante, poder explicar los *cuantos* de los campos a partir de la periodicidad del espacio-tiempo supone una idea pionera de esta teoría.

7 Problemas y generalizaciones de la Teoría de Kaluza-Klein

La teoría original de Kaluza-Klein; tal y como se ha expuesto anteriormente en este trabajo, unifica de manera brillante gravedad y electromagnetismo como campos clásicos, pero fracasa al incorporar campos cuánticos para describir fermiones. También falta en este modelo una explicación para las fuentes de corrientes ya que todos estos resultados eran válidos cuando no había fuentes de corriente y estas deben ser añadidas *ad hoc* para un modelo completo. Por otra parte, la predicción de la partícula escalar *dilatón* no concuerda con las partículas conocidas. Además de estos errores evidentes, es notable que una Teoría de Unificación actualmente no puede limitarse a dos de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza.

Tras varias décadas en la sombra, la idea de las dimensiones extras fue recuperada en el último cuarto del siglo pasado como una estrategia para formular teorías que unificaran, esta vez, el Modelo Estándar de la Física de Partículas y la Relatividad General. Ya que el Modelo Estándar unifica en sí tres de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza, sólo es necesaria esta última unificación para conseguir una Teoría Del Todo (lo que se suele denominar en inglés *T.O.E*, *i.e.* , *Theory Of Everything*).

Las teorías que pretenden conseguir la ya mencionada unificación toman diferentes planteamientos para las dimensiones extras:

1. Modelo *compactificado*, con dimensiones extras tan pequeñas que no pueden ser observadas
2. Modelo *proyectivo*, donde las dimensiones extras no son físicas sino una herramienta puramente matemática.
3. Modelo *no-compactificado*, donde la naturaleza física de las dimensiones extras puede ser no-espacial o puede no estar compactificada sino ser extremadamente grande.

Todas las alternativas tienen en común la agregación de dimensiones extras así como la reducción de sus acciones a nuestra percepción en un espacio con (1+3) dimensiones espacio-temporales mediante diferentes métodos.

Algunas de las teorías más importantes que han hecho uso de dimensiones extras en un intento de convertirse en una T.O.E. son:

1. Supersimetría y supergravedad

2. Teoría de cuerdas y supercuerdas
3. Teoría STM (*Space-Time-Matter*)
4. Teoría de branas (*braneworlds*)

Todas estas teorías hacen uso de la hipótesis de dimensiones extras incluyendo fenómenos cuánticos. Sin embargo, de entre todas estas teorías las que derivan directamente de la Teoría de Kaluza-Klein son la supergravedad y la supersimetría, que fueron unidas bajo un mismo marco teórico pasando a ser la supergravedad en la década de los 80 *Gravedad supersimétrica*[15]. Posteriormente, las teorías de supercuerdas también han acabado estando estrechamente relacionadas con este planteamiento a partir de ciertas correspondencias entre teorías.

La forma de construir la supergravedad pasa por un razonamiento análogo a la Teoría de Kaluza-Klein añadiendo también el concepto de supersimetría: Cada bosón debe tener una *superpareja* en forma de fermión, y viceversa.

Es posible deducir; a partir de las simetrías del modelo estándar, el número de dimensiones extras mínimas que serían necesarias para conseguir dicha unificación. El modelo estándar posee simetría $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. El electromagnetismo se describe mediante el grupo de simetría $U(1)$, la fuerza nuclear débil corresponde a $SU(2)$ y la fuerza nuclear fuerte a $SU(3)$. Anteriormente se mencionó que la topología de la dimensión extra en la teoría de Kaluza-Klein original era S^1 , esto era porque dicha geometría posee el grupo de simetría $U(1)$, propio del electromagnetismo. Si se pretende construir la métrica de un espacio de $(1+3+D)$ dimensiones con una topología $M^4 \times B^D$, donde B^D contenga todos los grupos de simetría necesarios, se requieren un mínimo de 7 dimensiones extras [16]. Esta demostración fue originalmente hecha por Edward Witten en 1981[17] demostrando que el *mínimo* de dimensiones totales para este tipo de teorías es 11 dimensiones, es decir, un espacio con 7 dimensiones extras compactificadas.

En la generalización con 10 u 11 dimensiones las dimensiones extras siguen una lógica análoga a los anillos que propuso Klein originalmente, situándose una variedad de múltiples dimensiones en cada punto de nuestro espacio $(1+3)$ observable. Cuando se da el salto de una dimensión extra a dos, la generalización es bien sencilla pues las variedades topológicas compactas de obtener espacios de 2 dimensiones se pueden simplificar en superficies esféricas, toroides y la suma conexa de varias de estas variedades. Sin embargo, la geometría de las dimensiones extras es extremadamente enrevesada cuando se trata del caso de 6 dimensiones extras. La geometría de estas dimensiones extras se conoce como variedad de Calabi-Yau (véase Fig. 6).

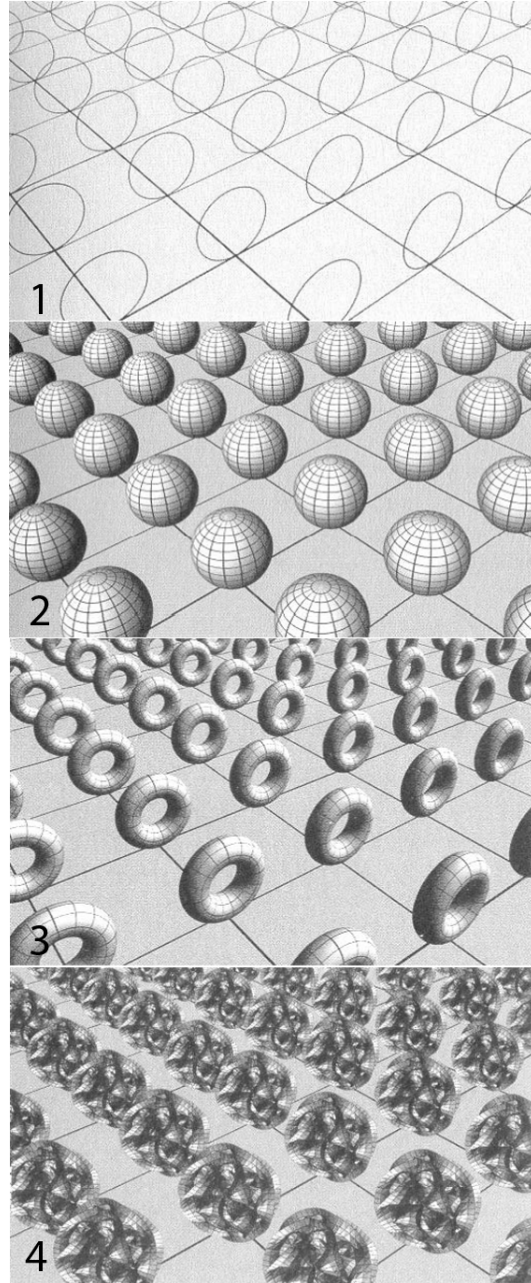


Figura 6: Generalización de la Teoría de Kaluza-Klein, representadas en un plano [18]. 1: Forma original 1D (anillo). 2: Representación 2D (superficie esférica). 3: Representación 2D (toroide). 4: Representación 6D (variedad de Calabi-Yau)

Años antes de la demostración de E. Witten se había publicado una demostración[19] según la cual el número máximo de dimensiones posibles, según ciertas restricciones, era también 11. Las restricciones de este resultado era asumir que el hipotético bosón gauge de la gravedad (*i.e. gravitón*) sea de un sólo tipo y de espín 2.

Por otra parte, también es posible formular una supergravedad en 10 dimensiones pero, de esa forma, los campos fermiónicos han de ser añadidos *ad hoc* en la formulación lagrangiana, perdiéndose parte del propósito y belleza original de las teorías de supergravedad que pretenden explicar todo a partir de argumentos puramente geométricos.

Sin embargo, en las teorías de supercuerdas se pueden arreglar esos problemas para explicar los términos extras en la formulación lagrangiana. Uno de los primeros resultados relevantes en este sentido fue la demostración de que sólo hay dos modelos de supergravedad en 10 dimensiones posibles: Uno basado en el grupo algebraico $E_8 \times E_8$ y otro basado en $SO(32)$. Estas demostraciones se deben a contribuciones conjuntas de B. Greene y H. Schwarz[20]; y David J. Gross, Jeffrey A. Harvey, Emil Martinec, and Ryan Rohm [21]. Estas teorías de supercuerdas se conocen respectivamente como teorías heteróticas de tipo O ($SO(32)$) y de tipo E ($E_8 \times E_8$).

Las teorías de supercuerdas tienen como caso límite a bajas energías la supergravedad en 10D[22], explicando la aparición de los términos *extras* que necesitaba el lagrangiano, permitiendo también la presencia de gravitones. Actualmente esta es una de las teorías candidatas a T.O.E. más reconocidas y activas en la comunidad científica.

8 Conclusiones

Tras la lectura y comprensión de este documento hay varias conclusiones destacables respecto a la Teoría de Kaluza-Klein y su impacto en la historia de la Física. En primer lugar, la teoría de Kaluza-Klein fue la primera teoría de unificación que se ha planteado de forma efectiva, aunque sólo lo fue en forma de campos clásicos. La comprensión de los conceptos fundamentales de la Relatividad General y las herramientas matemáticas que esta emplea hacen emerger, de forma natural, las Leyes del Electromagnetismo Clásico a partir de argumentos *puramente geométricos* de un espacio con una dimensión extra. Además, el desarrollo en series de funciones periódicas basadas en la *propia periodicidad del espacio-tiempo* es una idea revolucionaria, aunque en esta teoría original condujo a predicciones erróneas hay muchos sectores dentro de la física teórica desde los años 80 hasta la actualidad que creen que mecanismos de compactificación de esta índole pueden ser el camino correcto para conseguir la Teoría de Gran Unificación definitiva.

Por otra parte, también ha quedado patente que esta teoría original presentaba algunos problemas insalvables: La existencia de cargas libres y la mala predicción de la relación q/m del electrón son los más importantes. Pese a esto, la Teoría de Kaluza-Klein ha sido determinante para el desarrollo teórico de las conocidas como teorías de tipo Kaluza-Klein (supergravedad) que son actualmente parte del núcleo de investigación de las teorías de supercuerdas y teorías de branas. A veces es, directamente, parte de la solución (teoría efectiva) y otras veces es parte de la inspiración del planteamiento (dimensiones extras compactificadas).

No obstante, ahondar en estas teorías generalizadas más allá de la revisión bibliográfica es algo que se escapa a este nivel de desarrollo donde lo más pertinente es entender la influencia de la teoría de Kaluza-Klein sobre las teorías de gran unificación actuales de las que, en cierto modo, la teoría de Kaluza-Klein fue el germen. Estas teorías trabajan actualmente sobre demostraciones puramente matemáticas basadas en simetrías en teoría de grupos, ya que proponer y comprobar un *ansatz* de 11 dimensiones es algo, a día de hoy, inalcanzable.

Referencias

- [1] Gunnar Nordström. Über die möglichkeit das elektromagnetische feld und das gravitationsfeld zu vereinigen. *Phys. Zeit.*, 15:504–506, 1914.
- [2] Th. Kaluza. Zum Unitätsproblem der Physik. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1921:966–972, 1921.
- [3] Oskar Klein. Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. *Phys. Zeit.*, 37:895–906, 1926.
- [4] Bert Janssen. *Teoría de la Relatividad General*. (Universidad de Granada, Granada, 2017).
- [5] Ray D’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. (Oxford University Press, New York, 1992).
- [6] Derek F. Lawden. *An Introduction to Tensor Calculus and Relativity*. (Dover Publications, Mineola, 1962).
- [7] José Ignacio Illana. *Teoría Cuántica de Campos*. (Universidad de Granada, Granada, 2017).
- [8] Albert Einstein. Lens-like action of a star by the deviation of light in the gravitational field. *Science*, 84:506–507, 1936.
- [9] Galina Weinstein. Einstein’s pathway to the equivalence principle 1905-1907. *arXiv:1208.5137*.
- [10] Albert Einstein. Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1915:844–847, 1915.
- [11] Dieter W Ebner. How hilbert has found the einstein equations before einstein and forgeries of hilbert’s page proofs. *arXiv physics/0610154*.
- [12] Øyvind GrønSigbjørn Hervik. *Einstein’s General Theory of Relativity*. (Springer New York, New York, 2007).
- [13] Anze Zaloznik. *Kaluza-Klein Theory*. (University of Ljubljana, Ljubljana, 2012).
- [14] L L. Williams. Field equations and lagrangian for the Kaluza metric evaluated with tensor algebra software. *Journal of Gravity*, 2015:1–6, 2015.
- [15] James Martin Overduin and Paul S Wesson. Kaluza-klein gravity. *Physics Reports*, 283:303–378, 1997.

- [16] M. Baglojevic. *Gravitation and Gauge Symmetries*. (Institute Of Physics Publishing, Belgrade, 2002).
- [17] Edward Witten. Search for a Realistic Kaluza-Klein Theory. *Nucl. Phys.*, 186:412–428, 1981.
- [18] Brian Greene. *The Elegant Universe*. (Booket Ciencia, Barcelona, 2006).
- [19] W. Nahm. Supersymmetries and their Representations. *Nucl. Phys.*, 135:149–166, 1978.
- [20] Michael B. Green and John H. Schwarz. Anomaly cancellation in supersymmetric d=10 gauge theory and superstring theory. *Phys. Lett.*, 149:117–122, 1984.
- [21] David J Gross, Jeffrey A Harvey, Emil Martinec, and Ryan Rohm. Heterotic string. *Physical Review Letters*, 54:502, 1985.
- [22] Ferdinando Gliozzi, Joel Scherk, and David Olive. Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model. *Nuclear Physics*, 122:253–290, 1977.

Anexos

Cálculos de la métrica y vielbein inverso K-K

Procedemos a los cálculos con el ansatz de métrica localmente plana y vielbeins para el espacio tangente:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} \eta_{\mu\nu}^{(4)} + \phi A_\mu A_\nu & \phi A_\mu \\ \hline \phi A_\nu & \phi \end{array} \right) \quad (8.1)$$

$$e_\mu^\alpha = \left(\begin{array}{c|c} \delta_\mu^\alpha & 0 \\ \hline \sqrt{-\phi} A_\mu & \sqrt{-\phi} \end{array} \right) \quad (8.2)$$

Cálculo de la vielbein inversa (cuando los tensores se manipulan como matrices irán entre paréntesis):

$$(e_\mu^\alpha)^T (f_\alpha^\mu) = I_5 = \left(\begin{array}{c|c} \delta_\mu^\alpha & \sqrt{-\phi} A_\mu \\ \hline 0 & \sqrt{-\phi} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \delta_\alpha^\mu & C_1 \\ \hline C_2 & C_3 \end{array} \right) \quad (8.3)$$

Las cuatro ecuaciones resultantes de este producto entre matrices

$$\begin{cases} C_3 \sqrt{-\phi} = 1 \rightarrow C_3 = (\sqrt{-\phi})^{-1} \\ 1 + C_2 \sqrt{-\phi} A_\mu = 1 \rightarrow C_2 = 0 \\ C_1 + A_\mu = 0 \rightarrow C_1 = -A_\mu \\ C_2 \sqrt{-\phi} = 0 \end{cases} \quad (8.4)$$

El vielbein inverso queda

$$f_\alpha^\mu = \left(\begin{array}{c|c} \delta_\alpha^\mu & -A_\mu \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{-\phi}} \end{array} \right) \quad (8.5)$$

Comprobación (Se usan como matrices, $P = \sqrt{-\phi}$):

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\mu\nu} &= (e_\mu^\alpha)^T \hat{\eta}_{\alpha\beta} e_\nu^\beta = \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & PA_0 \\ & 1 & & PA_1 \\ & & 1 & PA_2 \\ & & & 1 & PA_3 \\ \hline & & & & P \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ \hline PA_0 & PA_1 & PA_2 & PA_3 & P \end{array} \right) = \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & -PA_0 \\ & -1 & & -PA_1 \\ & & -1 & -PA_2 \\ & & & -1 & -PA_3 \\ \hline & & & & -P \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ \hline PA_0 & PA_1 & PA_2 & PA_3 & P \end{array} \right) = \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 - P^2 A_0 A_0 & -P^2 A_0 A_1 & -P^2 A_0 A_2 & -P^2 A_0 A_3 & -P^2 A_0 \\ -P^2 A_1 A_0 & -1 - P^2 A_1 A_1 & -P^2 A_1 A_2 & -P^2 A_1 A_3 & -P^2 A_1 \\ -P^2 A_2 A_0 & -P^2 A_2 A_1 & -1 - P^2 A_2 A_2 & -P^2 A_2 A_3 & -P^2 A_2 \\ -P^2 A_3 A_0 & -P^2 A_3 A_1 & -P^2 A_3 A_2 & -1 - P^2 A_3 A_3 & -P^2 A_3 \\ \hline -P^2 A_0 & -P^2 A_1 & -P^2 A_2 & -P^2 A_3 & -P^2 \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \eta_{\mu\nu}^{(4)} + \phi A_\mu A_\nu & \phi A_\mu \\ \hline \phi A_\nu & \phi \end{array} \right)$$

Cálculo de la métrica inversa $\hat{g}^{\mu\nu}$:

$$\hat{g}^{\mu\nu} = (f_\alpha^\mu)^T \hat{\eta}^{\alpha\beta} f_\beta^\nu =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ \hline -A_0 & -A_1 & -A_2 & -A_3 & \frac{1}{P} \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & -A_0 \\ & 1 & & -A_1 \\ & & 1 & -A_2 \\ & & & 1 & -A_3 \\ \hline & & & & \frac{1}{P} \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \\ \hline -A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & -\frac{1}{P} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & -A_0 \\ & 1 & & -A_1 \\ & & 1 & -A_2 \\ & & & 1 & -A_3 \\ \hline & & & & \frac{1}{P} \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & -A_0 \\ & -1 & & & A_1 \\ & & -1 & & A_2 \\ & & & -1 & A_3 \\ \hline -A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A^m A_m - \frac{1}{P^2} \end{array} \right) =$$

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} \eta_{\mu\nu}^{(4)} & -A^\mu \\ \hline -A^\nu & A^m A_m + \frac{1}{\phi} \end{array} \right) \quad (8.6)$$

Donde es conveniente recordar la forma del potencial vector: $A_\mu = (\Phi, A_x, A_y, A_z)$ y $A^\mu = (\Phi, -A_x, -A_y, -A_z)$.

De aquí en adelante se usará la notación compacta 2x2 para los tensores métricos. También vamos a sustituir la métrica de minkowski por una métrica genérica. Es cuasi-inmediato comprobar $\hat{g}_{\mu\nu} \hat{g}^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\sigma$ lo que, tomando los tensores métricos como matrices, se puede tratar como $(\hat{g}_{\mu\nu})(\hat{g}^{\mu\nu}) = I_5$:

$$\hat{g}_{\mu\nu} \hat{g}^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu}^{(4)} + \phi A_\mu A_\nu & \phi A_\mu \\ \hline \phi A_\nu & \phi \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} g_{(4)}^{\mu\nu} & -A^\mu \\ \hline A^\nu & A^m A_m + \frac{1}{\phi} \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \delta_\nu^\mu + \phi A_m A^m - \phi A_m A^m & -A_\mu - \phi A_m A^m A_\mu + A_\mu + \phi A_m A^m A_\mu \\ \hline \phi A^\mu - \phi A^\mu & -\phi A^m A_m + \phi A^m A_m + \frac{\phi}{\phi} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \delta_\nu^\mu & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

Cálculo de Símbolos de Christoffel

Primero se calculará el símbolo $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{1}{2} \hat{g}^{\lambda X} (\partial_\mu \hat{g}_{\nu X} + \partial_\nu \hat{g}_{\mu X} - \partial_X \hat{g}_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} \hat{g}^{\lambda\sigma} (\partial_\mu \hat{g}_{\nu\sigma} + \partial_\nu \hat{g}_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \hat{g}_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \hat{g}^{\lambda 4} (\partial_\mu \hat{g}_{\nu 4} + \partial_\nu \hat{g}_{\mu 4} - \partial_4 \hat{g}_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu (g_{\nu\sigma} + \phi A_\nu A_\sigma) + \partial_\nu (g_{\mu\sigma} + \phi A_\mu A_\sigma) - \partial_\sigma (g_{\mu\nu} + \phi A_\mu A_\nu)) \\ &\quad + \frac{1}{2} (-A^\lambda) (\partial_\mu (\phi A_\nu) + \partial_\nu (\phi A_\mu) - \partial_4 (g_{\mu\nu} + \phi A_\mu A_\nu)) \\ &= \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu (g_{\nu\sigma}) + \partial_\nu (g_{\mu\sigma}) - \partial_\sigma (g_{\mu\nu})) \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu (\phi A_\nu A_\sigma) + \partial_\nu (\phi A_\mu A_\sigma) - \partial_\sigma (\phi A_\mu A_\nu)) - \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (A_\sigma) (\partial_\mu (\phi A_\nu) + \partial_\nu (\phi A_\mu)) \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\phi}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu (A_\sigma) A_\nu + \partial_\nu (A_\sigma) A_\mu + \partial_\sigma (A_\mu) A_\nu + \partial_\sigma (A_\nu) A_\mu - \partial_\sigma (A_\mu) A_\nu \\ &\quad - \partial_\sigma (A_\nu) A_\mu - A_\sigma \partial_\mu (A_\nu) - A_\sigma \partial_\nu (A_\mu)) \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (A_\sigma A_\nu \partial_\mu (\phi) + A_\sigma A_\mu \partial_\nu (\phi) - A_\mu A_\nu \partial_\sigma (\phi) - A_\sigma A_\nu \partial_\mu (\phi) - A_\sigma A_\mu \partial_\nu (\phi)) \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\phi}{2} g^{\lambda\sigma} (A_\nu (\partial_\mu A_\sigma - \partial_\sigma A_\mu) + A_\mu (\partial_\nu A_\sigma - \partial_\sigma A_\nu)) - \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (A_\mu A_\nu \partial_\sigma (\phi)) \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\phi}{2} g^{\lambda\sigma} (A_\nu F_{\mu\sigma} + A_\mu F_{\nu\sigma}) - \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (A_\mu A_\nu \partial_\sigma (\phi)) \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\phi}{2} (A_\nu F_\mu^\lambda + A_\mu F_\nu^\lambda) - \frac{1}{2} (A_\mu A_\nu \partial^\lambda (\phi)) \end{aligned}$$

Podemos usar este resultado para calcular otros símbolos:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^\lambda &= \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \frac{\phi}{2} g^{\lambda\sigma} (A_\lambda F_{\mu\sigma} + A_\mu F_{\lambda\sigma}) - \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (A_\mu A_\lambda \partial_\sigma (\phi)) \\ &= \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \frac{\phi}{2} A^\sigma F_{\mu\sigma} + \frac{\phi}{2} A_\mu g^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} A_\mu A^\sigma \partial_\sigma (\phi) \\ &= \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \frac{\phi}{2} A^\sigma F_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} A_\mu A^\sigma \partial_\sigma (\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^4 &= \frac{1}{2}\hat{g}^{4\sigma}(\partial_\mu(g_{\nu\sigma}) + \partial_\nu(g_{\mu\sigma}) - \partial_\sigma(g_{\mu\nu})) \\
&\quad + \frac{1}{2}\hat{g}^{4\sigma}(\partial_\mu(\phi A_\nu A_\sigma) + \partial_\nu(\phi A_\mu A_\sigma) - \partial_\sigma(\phi A_\mu A_\nu)) + \frac{1}{2}(\hat{g}^{44})(\partial_\mu(\phi A_\nu) + \partial_\nu(\phi A_\mu)) \\
&= \Gamma_{\mu\nu}^4 + \frac{1}{2}(-A^\sigma)(\partial_\mu(\phi A_\nu A_\sigma) + \partial_\nu(\phi A_\mu A_\sigma) - \partial_\sigma(\phi A_\mu A_\nu)) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\phi} + A_\kappa A^\kappa\right)(\partial_\mu(\phi A_\nu) + \partial_\nu(\phi A_\mu)) \\
&= -\frac{1}{2}A^\sigma[\phi(A_\sigma\partial_\mu(A_\nu) + A_\nu\partial_\mu(A_\sigma) + A_\sigma\partial_\nu(A_\mu) + A_\mu\partial_\nu(A_\sigma) - A_\mu\partial_\sigma(A_\nu) - A_\nu\partial_\sigma(A_\mu)) \\
&\quad\quad\quad + (A_\sigma A_\nu\partial_\mu(\phi) + A_\sigma A_\mu\partial_\nu(\phi) - A_\mu A_\nu\partial_\sigma(\phi))] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\phi} + A_\kappa A^\kappa\right)[\phi(\partial_\mu(A_\nu) + \partial_\nu(A_\mu)) + (A_\nu\partial_\mu(\phi) + A_\mu\partial_\nu(\phi))] \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu(A_\nu) + \partial_\nu(A_\mu)) - \frac{\phi}{2}A^\sigma(A_\nu(\partial_\mu A_\sigma - \partial_\sigma A_\mu) + A_\mu(\partial_\nu A_\sigma - \partial_\sigma A_\nu)) + A_\mu A_\nu A^\sigma\partial_\sigma(\phi) \\
&\quad + \frac{1}{2\phi}(A_\nu\partial_\mu(\phi) + A_\mu\partial_\nu(\phi)) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu(A_\nu) + \partial_\nu(A_\mu)) - \frac{\phi}{2}A_\lambda(A_\nu F_\mu^\lambda + A_\mu F_\nu^\lambda) + A_\mu A_\nu A^\sigma\partial_\sigma(\phi) + \frac{1}{2\phi}(A_\nu\partial_\mu(\phi) + A_\mu\partial_\nu(\phi)) \\
\hat{\Gamma}_{\mu 4}^4 &= \frac{1}{2}\hat{g}^{4X}(\partial_\mu\hat{g}_{4X} + \partial_4\hat{g}_{\mu X} - \partial_X\hat{g}_{\mu 4}) \\
&= \frac{1}{2}(-A^\sigma)(\partial_\mu(\phi A_\sigma) - \partial_\sigma(\phi A_\mu)) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\phi} + A_\kappa A^\kappa\right)(\partial_\mu(\phi) + \partial_4(A_\mu)) \\
&= \frac{1}{2}(-A^\sigma)(\phi\partial_\mu(A_\sigma) + A_\sigma\partial_\mu(\phi) - \phi\partial_\sigma(A_\mu) - A_\mu\partial_\sigma(\phi)) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\phi} + A_\kappa A^\kappa\right)(\partial_\mu(\phi)) \\
&= -\frac{1}{2}(A^\sigma)(\phi F_{\mu\sigma} - A_\mu\partial_\sigma(\phi)) + \frac{1}{2\phi}\partial_\mu(\phi) \\
\hat{\Gamma}_{44}^\lambda &= \frac{1}{2}\hat{g}^{\lambda X}(\partial_4\hat{g}_{4X} + \partial_4\hat{g}_{4X} - \partial_X\hat{g}_{44}) \\
&= -\frac{1}{2}(g^{\lambda\sigma}\partial_\sigma(\phi) + A^\lambda\partial_4(\phi)) \\
&= -\frac{1}{2}\partial^\lambda(\phi) \\
\hat{\Gamma}_{44}^4 &= \frac{1}{2}\hat{g}^{4X}(\partial_4\hat{g}_{4X} + \partial_4\hat{g}_{4X} - \partial_X\hat{g}_{44}) \\
&= -\frac{1}{2}(g^{4\sigma}\partial_\sigma(\phi)) \\
&= \frac{1}{2}A^\sigma\partial_\sigma(\phi) \\
\hat{\Gamma}_{\mu 4}^\lambda &= \frac{1}{2}\hat{g}^{\lambda X}(\partial_\mu\hat{g}_{4X} + \partial_4\hat{g}_{\mu X} - \partial_X\hat{g}_{\mu 4}) \\
&= \frac{1}{2}\hat{g}^{\lambda\sigma}(\partial_\mu(\phi A_\sigma) - \partial_\sigma(\phi A_\mu) - \frac{1}{2}(\partial_\mu(\phi))) \\
&= \frac{1}{2}\hat{g}^{\lambda\sigma}(\phi\partial_\mu(A_\sigma) + A_\sigma\partial_\mu(\phi) - \phi\partial_\sigma(A_\mu) - A_\mu\partial_\sigma(\phi)) - \frac{1}{2}(\partial_\mu(\phi)) \\
&= \frac{1}{2}\hat{g}^{\lambda\sigma}(\phi F_{\mu\sigma} + A_\sigma\partial_\mu(\phi) - A_\mu\partial_\sigma(\phi)) - \frac{1}{2}A^\lambda\partial_\mu(\phi) \\
&= \frac{1}{2}\phi F_\mu^\lambda - \frac{1}{2}A_\mu\partial^\lambda(\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{\lambda 4}^\lambda &= \frac{1}{2} \hat{g}^{\lambda X} (\partial_\lambda \hat{g}_{4X} + \partial_4 \hat{g}_{\lambda X} - \partial_X \hat{g}_{\lambda 4}) \\
&= \frac{1}{2} (\partial^X (\phi A_X) - \partial^\lambda (\phi A_\lambda)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Cálculo del tensor de Ricci

Los términos cruzados entre los símbolos de Christoffel de la métrica en 4D no se mezcla con la dimensión extra, en el primer caso se mostrará explícitamente pero más adelante se omitirá. También es importante recordar que al subir índices en los tensores electromagnéticos se corresponde: $F_\mu^\lambda = g^{\nu\lambda} F_{\mu\nu} = F_\mu^\lambda$

Comenzamos con las componentes \hat{R}_{44} y $\hat{R}_{\mu 4}$:

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{44} &= \partial_X \hat{\Gamma}_{44}^X - \partial_4 \hat{\Gamma}_{X4}^X + \hat{\Gamma}_{XY}^X \hat{\Gamma}_{44}^Y - \hat{\Gamma}_{4Y}^X \hat{\Gamma}_{X4}^Y \\
&= -\hat{\Gamma}_{4Y}^X \hat{\Gamma}_{X4}^Y \\
&= -\left(\frac{\phi}{2} F_\lambda^\rho\right) \left(\frac{\phi}{2} F_\rho^\lambda\right) - \left(-\frac{\phi}{2} A^\kappa F_{\lambda\kappa}\right) (0) - (0) - (0) \\
&= -\frac{\phi^2}{4} F_\lambda^\rho F_\rho^\lambda \\
&= -\frac{\phi^2}{4} g^{\rho\sigma} F_{\lambda\sigma} F_\rho^\lambda \\
&= -\frac{\phi^2}{4} F_{\lambda\sigma} F^{\sigma\lambda} \\
&= \frac{\phi^2}{4} F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} \\
\hat{R}_{\mu 4} &= \partial_X \hat{\Gamma}_{\mu 4}^X - \partial_4 \hat{\Gamma}_{X\mu}^X + \hat{\Gamma}_{XY}^X \hat{\Gamma}_{\mu 4}^Y - \hat{\Gamma}_{4Y}^X \hat{\Gamma}_{X\mu}^Y \\
&= \partial_\kappa \hat{\Gamma}_{\mu 4}^\kappa + \hat{\Gamma}_{XY}^X \hat{\Gamma}_{\mu 4}^Y - \hat{\Gamma}_{4Y}^X \hat{\Gamma}_{X\mu}^Y \\
&= \left[\partial_\kappa \left(\frac{\phi}{2} F_\mu^\kappa \right) \right] + \left[\left(\Gamma_{\kappa\lambda}^\kappa + \frac{\phi}{2} A^\sigma F_{\lambda\sigma} - \frac{\phi}{2} A^\sigma F_{\lambda\sigma} \right) \left(\frac{\phi}{2} F_\mu^\lambda \right) - (0+0)(\dots) \right] \\
&\quad - \left[\left(\frac{\phi}{2} F_\lambda^\rho \right) \left(\Gamma_{\rho\mu}^\lambda + \frac{\phi}{2} (A_\mu F_\rho^\lambda + A_\rho F_\mu^\lambda) \right) + \left(-\frac{\phi}{2} A^\sigma F_{\sigma\lambda} \right) \left(\frac{\phi}{2} F_\mu^\lambda \right) + (0) + (0) \right] \\
&= \partial_\kappa \left(\frac{\phi}{2} F_\mu^\kappa \right) + \frac{\phi}{2} \Gamma_{\kappa\lambda}^\kappa F_\mu^\lambda - \frac{\phi}{2} \Gamma_{\kappa\lambda}^\kappa F_\mu^\lambda - \frac{\phi^2}{4} (A_\mu F_\lambda^\lambda + A_\rho F_\mu^\lambda) + \frac{\phi^2}{4} A^\sigma F_{\sigma\lambda} F_\mu^\lambda \\
&= \frac{\phi}{2} \partial_\kappa (F_\mu^\kappa) + \frac{\phi^2}{4} A_\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{\mu\nu} &= \partial_X \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^X - \partial_\nu \hat{\Gamma}_{X\mu}^X + \hat{\Gamma}_{XY}^X \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^Y - \hat{\Gamma}_{\nu Y}^X \hat{\Gamma}_{X\mu}^Y \\
&= \left[\partial_\kappa \Gamma_{\mu\nu}^\kappa + \frac{\phi}{2} (A_\nu \partial_\kappa F_\mu^\kappa + F_\mu^\kappa \partial_\kappa A_\nu + A_\mu \partial_\kappa F_\nu^\kappa + F_\nu^\kappa \partial_\kappa A_\mu) \right] \\
&\quad - [\partial_\nu \Gamma_{\mu\kappa}^\kappa] + [\Gamma_{\lambda\kappa}^\kappa \Gamma_{\mu\nu}^\lambda] - \left[\Gamma_{\nu\sigma}^\kappa \Gamma_{\kappa\mu}^\sigma + \frac{\phi^2}{4} (A_\sigma F_\nu^\kappa + A_\nu F_\sigma^\kappa) (A_\mu F_\kappa^\sigma + A_\kappa F_\mu^\sigma) \right. \\
&\quad \quad + \frac{\phi}{4} F_\nu^\kappa (\partial_\kappa A_\mu + \partial_\mu A_\kappa) - \frac{\phi^2}{4} F_\nu^\kappa A_\lambda (A_\mu F_\kappa^\lambda + A_\kappa F_\mu^\lambda) + \frac{\phi^2}{4} (A^\rho F_{\nu\rho}) (A^\rho F_{\mu\rho}) \\
&\quad \quad \left. + \frac{\phi}{4} F_\mu^\sigma (\partial_\nu A_\sigma + \partial_\sigma A_\nu) - \frac{\phi^2}{4} F_\lambda^\sigma A_\lambda (A_\nu F_\sigma^\lambda + A_\sigma F_\nu^\lambda) + \frac{\phi^2}{4} (A^\rho F_{\nu\rho}) (A^\rho F_{\mu\rho}) \right] \\
&= R_{\mu\nu}^{(4)} + \left[\frac{\phi}{2} (A_\nu \partial_\kappa F_\mu^\kappa + F_\mu^\kappa \partial_\kappa A_\nu + A_\mu \partial_\kappa F_\nu^\kappa + F_\nu^\kappa \partial_\kappa A_\mu) \right] - \\
&\quad - \left[\frac{\phi^2}{4} (A_\sigma F_\nu^\kappa + A_\nu F_\sigma^\kappa) (A_\mu F_\kappa^\sigma + A_\kappa F_\mu^\sigma) + \frac{\phi}{4} F_\nu^\kappa (\partial_\kappa A_\mu + \partial_\mu A_\kappa) \right. \\
&\quad \quad - \frac{\phi^2}{4} F_\nu^\kappa A_\lambda (A_\mu F_\kappa^\lambda + A_\kappa F_\mu^\lambda) + \frac{\phi^2}{4} (A^\rho F_{\nu\rho}) (A^\rho F_{\mu\rho}) + \frac{\phi}{4} F_\mu^\sigma (\partial_\nu A_\sigma + \partial_\sigma A_\nu) \\
&\quad \quad \left. - \frac{\phi^2}{4} F_\lambda^\sigma A_\lambda (A_\nu F_\sigma^\lambda + A_\sigma F_\nu^\lambda) + \frac{\phi^2}{4} (A^\rho F_{\nu\rho}) (A^\rho F_{\mu\rho}) \right] \\
&= R_{\mu\nu}^{(4)} + \frac{\phi}{2} (A_\mu \partial_\kappa F_\nu^\kappa + A_\nu \partial_\kappa F_\mu^\kappa) - \frac{\phi^2}{4} A_\mu A_\nu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{\phi}{4} (F_\nu^\lambda F_{\lambda\mu} + F_\mu^\lambda F_{\lambda\nu})
\end{aligned}$$