



Principio Variacional en Gravitación

Trabajo de Fin de Grado

Grado en Física

Autor: Alejandro Núñez Torregrosa

Tutor: Diego Gómez García

Cotutor: Francisco Javier Moreno González

Departamento de Materia Condensada

Facultad de Física de Sevilla

Septiembre 2019

Resumen

En el presente trabajo se aborda el estudio de las ecuaciones de movimiento en el ámbito de la gravitación. Estudiaremos las ecuaciones de campo de distintas teorías gravitatorias que se obtienen a través del principio de acción extrema en la que el lagrangiano del sistema varía con respecto de la métrica. Realizaremos nuestro estudio en el lenguaje de la geometría diferencial, desarrollando herramientas matemáticas de gran utilidad, con la finalidad de obtener en todos nuestros casos ecuaciones de movimientos diferenciales de segundo orden, resolubles en el campo de la mecánica clásica a partir de la posición y el momento, nuestras condiciones iniciales.

En primer lugar, nos centraremos en obtener las ecuaciones de campo de Einstein a partir de la acción de Einstein-Hilbert. Dichas ecuaciones forman un conjunto de diez ecuaciones diferenciales de segundo orden en la métrica y conforman lo que se conoce en la bibliografía como Relatividad General. Posteriormente estudiaremos posibles extensiones de la acción de Einstein-Hilbert, avanzando hacia gravedad cuadrática en curvatura y concretando en el conocido caso del término de Gauss-Bonnet.

Además, profundizaremos en una de las soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein más conocidas, la métrica de Schwarzschild. Dicha métrica da solución al problema de una esfera simétrica estática en el vacío y está estrechamente ligada a los sucesos naturales de los agujeros negros. Para ello, desarrollaremos dicha solución en diversas coordenadas con la finalidad de explicar correctamente el espacio-tiempo.

Agradecimientos

A Diego, por permitirlo;

A Javi, por hacerlo posible;

A todos con los que he compartido kebabs, urnas, lore, tertulias, utopías, rol y acciones; por convertir mis pifias en críticos;

Y a Sabri, por ser el hilo que me ha sacado de este laberinto.

Contenido

1. Motivación	1
2. Geometría Diferencial	3
2.1 La variedad espacio-tiempo.....	3
2.2 Tensor métrico	3
2.3 Curvatura	4
2.3.1 Transporte paralelo	4
2.3.2 Derivada covariante	5
2.3.3 Tensor de curvatura de Riemann	6
2.4 Propiedades e identidades.....	6
3. Principio Variacional en Relatividad General.....	8
3.1. Acción de Einstein-Hilbert	8
3.2. Variación de la métrica.....	11
3.3. Ecuaciones de campo de Einstein en el vacío	11
3.4. Ecuaciones de campo de Einstein con materia	12
3.5 Ecuaciones de campo con término de frontera. Gibbons-Hawking	13
4. La solución de Schwarzschild para las ecuaciones de campo de Einstein.....	14
4.1 Derivación de la métrica de Schwarzschild.....	14
4.1.1 Cálculo de $R_{\mu\nu}$ para la métrica de Schwarzschild.....	15
4.1.2 Cálculo de R para la métrica de Schwarzschild.....	16
4.1.3 Ecuaciones de Einstein para la métrica de Schwarzschild.....	16
4.2 Estudio de las singularidades en la métrica de Schwarzschild.....	19
4.3 Coordenadas de Eddington-Finkelstein.....	20
4.3.1 Coordenadas de Eddington-Finkelstein Entrantes (IEF)	20
4.3.2 Coordenadas de Eddington-Finkelstein Salientes (OEF)	22
4.4 Coordenadas de Kruskal-Szekeres (KS).....	23
4.5 Diagramas de Penrose-Carter	25
5. Curvatura de segundo orden.....	27
5.1. Correcciones de curvatura cuadrática en el lagrangiano	27
5.1.1 Término de la métrica	27
5.1.2 Término del escalar de Ricci, R	28
5.1.3 Término del tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$	29
5.1.4 Término del tensor de Riemann, $R_{\mu\nu\rho\lambda}$	32
5.1.5 Ecuaciones de campo completas para curvatura cuadrática	35

5.2 Término de Gauss-Bonnet	35
6. Conclusiones	37
Apéndice A. Variaciones.....	38
Apéndice B. Transformación de coordenadas.....	39
Bibliografía.....	41

1. Motivación

Desde que fuera publicada en 1915, la teoría de la relatividad general de Einstein ha sido capaz de explicar un amplio rango de sucesos, como la precesión de Mercurio, la desviación de la luz o las recientemente descubiertas ondas gravitacionales, de forma satisfactoria. Para esta teoría, la acción de Einstein-Hilbert, lineal en términos de curvatura, nos lleva a ecuaciones de movimiento diferenciales de segundo orden en términos de la métrica. Debemos tener en cuenta que, en base a esta teoría, no existe ningún motivo para pensar que no exista gravedad cuadrática o de orden superior que produzca correcciones que hoy en día no somos capaces de distinguir por la precisión de nuestros experimentos.

La importancia de curvaturas superiores a la lineal queda patente principalmente por dos motivos. En primer lugar, se ha comprobado que la teoría de gravedad de Einstein es no renormalizable desde el punto de vista de la gravedad cuántica, hechos que no ocurre para curvaturas superiores. En segundo lugar, existe una dualidad entre gravedad de dimensión D AdS, esto es, con constante cosmológica negativa; y CFT, teorías de campo conformes, de dimensión $D-1$. Estas CFT pueden representar sistemas físicos fuertemente acoplados, como transiciones de fase o sistemas de materia condensada, y en los cuales puede ser difícil realizar cálculos; pero mediante la elección de diferentes acciones gravitatorias modificadas con elementos de curvatura superior, llamadas Toy Model, podemos obtener dicha información y ser capaces de correlacionarlas con su CFT.

A la acción de Einstein-Hilbert se le puede añadir dichos términos de curvatura superior que conllevarían, de forma general, derivadas de orden superior, quedando fuera de nuestros intereses. Sin embargo, en 1938, Cornelius Lanczos propuso un término de curvatura cuadrática que llevaba a ecuaciones de movimientos de segundo orden. Este término, objetivo de nuestro estudio, es conocido actualmente como el término de Gauss-Bonnet, siendo el término de curvatura modificada más simple encontrado hasta ahora.

Encontrar las ecuaciones de movimiento para la métrica no es el fin de la teoría, si no encontrar soluciones que satisfagan esas ecuaciones. En el marco teórico planteado por la Relatividad General se encontró como solución a las ecuaciones de campo de Einstein para un problema simétrico esférico estático en el vacío la conocida como métrica de Schwarzschild, publicada por Karl Schwarzschild en 1916. De forma paralela, Johannes Droste publicó, también en 1916, la misma solución a las ecuaciones de Einstein, empleando para ello una derivación más simple y directa. En los años posteriores a estas publicaciones hubo gran confusión alrededor de la

naturaleza de las singularidades, matemática o física, que planteaban estas soluciones. Si bien quedaba claro que para el centro de dicha esfera la singularidad representaba una singularidad genuinamente física, el significado de la singularidad conocida como Radio de Schwarzschild permanecía en ciernes.

No fue hasta 1924 cuando Arthur Eddington publicó la primera transformación de coordenadas, hoy día conocidas como coordenadas de Eddington-Finkelstein, que mostraban que la singularidad del Radio de Schwarzschild era de origen matemático, fruto de la métrica empleada por Schwarzschild. Dicha singularidad marca lo que actualmente se conoce como horizonte de sucesos de un agujero negro, una hipersuperficie en el espacio-tiempo que sólo puede ser atravesada en una dirección.

A lo largo de los años 50, George Szekeres y Martin Kruskal desarrollaron de forma independiente unas coordenadas, llamadas a posteriori coordenadas de Kruskal-Szekeres, que cubren todo el espacio-tiempo y con las cuales se pudiese describir y visualizar de forma adecuada el comportamiento en el Radio de Schwarzschild.

Durante los años 60 se desarrollaron los diagramas de Penrose-Carter, o simplemente diagramas de Penrose. Dichos diagramas son la evolución lógica de los diagramas de Kruskal-Szekeres y ponen de manifiesto todo lo desarrollado con anterioridad a la vez que simplifica su visualización. Son herramientas ampliamente utilizadas, ya sea para la ilustración del espacio-tiempo que contiene el hipotético puente de Einstein-Rosen, una conexión entre dos universos separados, que surge de la solución de Schwarzschild para agujeros negros; como para el desarrollo de teorías y predicción de comportamientos de agujeros negros.

2. Geometría Diferencial

La teoría de la relatividad general es una teoría métrica de la gravitación que, matemáticamente hablando, describe los efectos del campo gravitatorio modelando el universo como una variedad pseudoriemanniana. El campo gravitatorio se manifiesta en la curvatura del espacio-tiempo de tal manera que cuanto más intenso es el campo gravitatorio en cierto punto, mayores son las componentes del tensor de curvatura en ese punto.

2.1 La variedad espacio-tiempo

Nuestro universo es representado como una variedad pseudoriemanniana, un espacio topológico equipado con un tensor métrico $(0,2)$ diferenciable, simétrico y no degenerado en cada punto de la variedad. En nuestra teoría, el espacio y el tiempo forman una variedad diferenciable de dimensión 4 conocida como espacio-tiempo.

Dentro de nuestra variedad tenemos varias magnitudes para definir tanto la curvatura como relacionar magnitudes físicas medidas por observadores en distintos puntos de la variedad. Estas cantidades son el tensor métrico, el transporte paralelo y la derivada covariante.

2.2 Tensor métrico

El tensor métrico es el objeto matemático que permite calcular distancias y todo lo relacionado con conceptos métricos en nuestra teoría. Es un tensor simétrico, de rango 2, compuesto por componentes $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ que puede variar covariantemente para cada sistema de coordenadas y de forma que el elemento de línea queda

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^n g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad (2.1)$$

aunque el se suele expresar en física empleando el convenio de sumación de Einstein,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.2)$$

Este tensor métrico tiene varios elementos importantes. En primer lugar, el determinante; en segundo lugar, la signatura, el conjunto de los coeficientes de la diagonal del tensor; y, por último, la traza, la suma de los coeficientes de la signatura. Además, podemos definir las componentes de la métrica inversa tal que

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu \quad (2.3)$$

2.3 Curvatura

Una vez definido el tensor métrico, o métrica, para nuestra variedad, cabe empezar a preguntarse por las geodésicas en dicha variedad. Las geodésicas son las líneas de mínima longitud que une dos puntos en una superficie dada y está contenida en esta superficie. Se puede ver como una generalización al espacio curvo de la línea recta en espacio plano. En la teoría de la relatividad general se postula que las partículas materiales en ausencia de fuerzas exteriores se moverán a lo largo de alguna geodésica temporal. Para poder hallar la ecuación de la geodésica, antes debemos definir algunos términos importantes en geometría diferencial

2.3.1 Transporte paralelo

Para un espacio curvo no existe forma obvia de relacionar diferentes vectores o tensores medidas en diferentes puntos de nuestra variedad. Es lógico si pensamos que en cada punto del universo el espacio tangente es diferente. El transporte paralelo es un procedimiento por el que podemos comparar magnitudes vectoriales o tensoriales en diferentes puntos del universo,

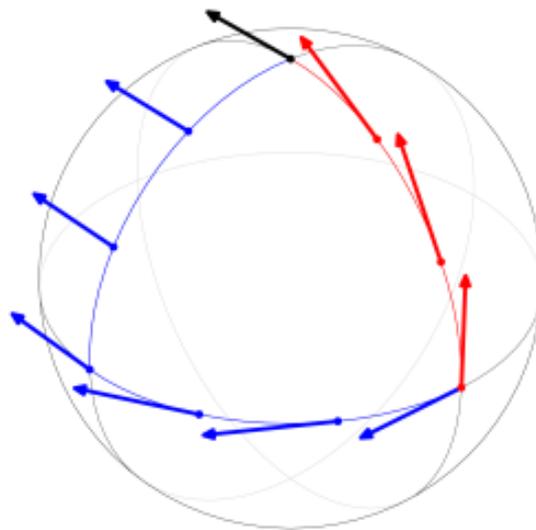


Figura 1: Transporte paralelo de un vector, flecha negra. Las flechas rojas y azules representan transportes paralelos en diferentes direcciones que finalizan en el mismo punto.

Debido a la curvatura, apuntan en direcciones diferentes. [12]

Para definir una forma de transporte paralelo es necesario definir previamente una conexión métrica, un objeto matemático de una variedad diferenciable, como el espacio-tiempo, que permite establecer una relación entre la geometría local entorno a dos puntos diferentes.

2.3.2 Derivada covariante

El hecho de que el espacio-tiempo sea curvo provoca que en cada puntos del espacio los espacios vectoriales tangentes no coincidan y, al derivar una magnitud tensorial, sea necesario tener en cuenta tanto la variación de las componentes como de la base vectorial al cambiar de punto en el espacio. Así, la derivada covariante con respecto a la coordenada x^μ se denota ∇_μ en lugar de ∂_μ , de forma que la derivada de un vector quedaría

$$\nabla_\mu \mathbf{V} = \nabla_\mu (V^\nu e_\nu) = \nabla_\mu (V^\nu) e_\nu + V^\nu \nabla_\mu (e_\nu) = \nabla_\mu (V^\nu) e_\nu + V^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda, \quad (2.4)$$

pero si tenemos en cuenta que los índices repetidos arriba y abajo son mudos puede ser renombrados a nuestro antojo, y aplicando el resultado de (2.22), obtenemos

$$\nabla_\mu \mathbf{V} = (\partial_\mu V^\lambda + V^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) e_\lambda, \quad (2.5)$$

donde hemos introducido los símbolos de Christoffel, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, una forma de expresar la derivada de un vector como combinación lineal de los vectores de la base. Se puede derivar su expresión de la anulación de la derivada covariante del tensor métrico, $g_{\mu\nu}$,

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu} \Gamma_{\mu\rho}^\lambda - g_{\lambda\mu} \Gamma_{\nu\rho}^\lambda = 0, \quad (2.6)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (2.7)$$

Es importante notar que los símbolos de Christoffel son simétricos, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$, ya que hemos considerado la torsión nula para todo nuestro estudio.

Así pues, la formula más general para la derivada covariante de un tensor queda

$$\nabla_\lambda T_{\nu\dots}^{\mu\dots} = \partial_\lambda T_{\nu\dots}^{\mu\dots} + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu T_{\nu\dots}^{\rho\dots} - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho T_{\rho\dots}^{\mu\dots} \pm \dots \quad (2.8)$$

Podemos ahora recuperar la idea de definir la geodésica como una línea curva en la que el transporte paralelo de su vector tangente a lo largo de la curva coincide en cada punto con el propio vector tangente a la curva. La expresión que se obtiene para las geodésicas, en función de los símbolos de Christoffel, es

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (2.9)$$

donde s es la longitud de arco a lo largo de la curva.

2.3.3 Tensor de curvatura de Riemann

Una vez descritas las geodésicas, podemos pasar a definir el tensor de curvatura, el tensor que representa la medida de la separación de la métrica de la variedad respecto de la métrica euclídea. Formalmente, el tensor de curvatura está definido para toda variedad de Riemann, pero para nuestra variedad espacio-tiempo, el tensor de curvatura está definido según la conmutación de dos derivadas covariantes de la forma

$$R(\rho, \lambda)w = [\nabla_\rho, \nabla_\lambda]w = \nabla_\rho \nabla_\lambda w - \nabla_\lambda \nabla_\rho w. \quad (2.10)$$

Si pasamos a notación de índices, generalizando para w un tensor T cualquiera,

$$[\nabla_\rho, \nabla_\lambda]T_{\nu\dots}^{\mu\dots} = R^\mu_{\sigma\rho\lambda} T_{\nu\dots}^{\sigma\dots} - R^\sigma_{\nu\rho\lambda} T_{\sigma\dots}^{\mu\dots} \pm \dots \quad (2.11)$$

El tensor de Riemann queda entonces

$$R^\sigma_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\sigma - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma, \quad (2.12)$$

siendo dependiente de la métrica y de sus primeras y segundas derivadas. En múltiples ocasiones veremos que se hace referencia a la forma covariante del tensor de Riemann como un tensor (0,4) en lugar del tensor original (1,3). Su definición es

$$R_{\lambda\mu\rho\nu} = g_{\sigma\lambda} R^\sigma_{\mu\rho\nu}. \quad (2.13)$$

A raíz de la contracción del tensor de Riemann podemos obtener el tensor de Ricci,

$$R^\rho_{\mu\rho\nu} = R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\rho, \quad (2.14)$$

y la traza del tensor de Ricci queda definida como el escalar de Ricci,

$$R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

Dicha magnitud escalar es un invariante de curvatura de especial relevancia ya que a partir de él construiremos la acción de Einstein-Hilbert en el próximo capítulo.

2.4 Propiedades e identidades

Una vez definidas las bases matemáticas de la geometría diferencial y relacionadas con la física de nuestro universo, pasamos a describir algunas propiedades de simetrías e identidades recurrentes en relatividad general que nos serán de mucha utilidad en los desarrollos venideros.

- Simetrías para el tensor de Riemann y el tensor de Ricci

$$R_{\lambda\mu\rho\nu} = -R_{\mu\lambda\rho\nu} = R_{\lambda\mu\nu\rho} = R_{\rho\nu\lambda\mu}. \quad (2.16)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (2.17)$$

- Primera identidad de Bianchi

$$R_{\lambda\mu\rho\nu} + R_{\lambda\rho\nu\mu} + R_{\lambda\nu\mu\rho} = 0. \quad (2.18)$$

- Identidad de Bianchi contraída

$$\nabla_\nu R_\mu^\nu = \frac{1}{2} \nabla_\mu R. \quad (2.19)$$

- Segunda identidad de Bianchi

$$\nabla_\sigma R_{\lambda\mu\rho\nu} + \nabla_\rho R_{\lambda\mu\nu\sigma} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu\sigma\rho} = 0. \quad (2.20)$$

- Segunda identidad de Bianchi contraída

$$\nabla_\rho R^\rho_{\mu\lambda\nu} + \nabla_\nu R_{\mu\lambda} - \nabla_\lambda R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.21)$$

- Derivada covariante de un escalar

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi \quad (2.22)$$

Todas estas relaciones pueden verse en [3].

3. Principio Variacional en Relatividad General

3.1. Acción de Einstein-Hilbert

Todas las ecuaciones físicas fundamentales de campos clásicos, incluyendo las ecuaciones de campo de Einstein, pueden ser obtenidas a través del principio variacional. El principio de mínima acción dictamina

$$\delta \int \mathcal{L} d^4x = 0. \quad (3.1)$$

Dicha variación debe ser construida respecto de la métrica $g_{\mu\nu}$, variable dinámica en relatividad general. La densidad lagrangiana queda entonces $\mathcal{L} = \sqrt{-g}R$, donde R es el escalar de Ricci y $\sqrt{-g}$, es el elemento de volumen, que se calcula a partir del determinante de la métrica. Así pues, obtenemos la acción de Einstein-Hilbert, dada por

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} R d^4x \quad (3.2)$$

y aplicando el principio variacional sobre S_{EH} obtenemos

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \delta \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} R d^4x = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \delta(\sqrt{-g} R) \\ &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \delta(\sqrt{-g} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{16\pi} \left(\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \delta \sqrt{-g} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

De esta forma, obtenemos tres términos para la variación de S_{EH}

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi} (\delta S_{EH(1)} + \delta S_{EH(2)} + \delta S_{EH(3)}). \quad (3.4)$$

Para el primer término debemos considerar la variación del tensor de Ricci (apéndice A),

$$\delta S_{EH(1)} = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda] \quad (3.5)$$

donde al integrar por partes y recordar que $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$, obtenemos

$$\delta S_{EH(1)} = \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)]. \quad (3.6)$$

Si renombramos índices mudos podemos obtener la siguiente expresión

$$\delta S_{EH(1)} = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\lambda [g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu]. \quad (3.7)$$

Podemos definir un vector J^λ ,

$$J^\lambda = g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu, \quad (3.8)$$

tal que si dicho vector pertenece a una región \mathcal{M} con frontera Σ , podemos aplicar el teorema de Stokes para transformar (3.7) en

$$\delta S_{EH(1)} = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_\lambda J^\lambda = \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{-h} n_\lambda J^\lambda, \quad (3.9)$$

donde n_λ es el vector unitario normal a la hipersuperficie Σ , está normalizado tal que $n_\lambda n^\lambda = -1$ y se ha definido un tensor $h_{\mu\nu}$ tal que

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (3.10)$$

Si desarrollamos (3.8) a partir de la variación de los símbolos de Christoffel, (apéndice A), obtenemos

$$\begin{aligned} J^\lambda &= g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}) \right] \\ &\quad - g^{\mu\lambda} \left[\frac{1}{2} g^{\nu\rho} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}) \right] \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} \nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} \nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu} \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} \nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} \nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} + \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Intercambiando en el segundo término los índices μ y ν , en el cuarto μ y ρ y en el último ν y ρ , podemos sumar por un lado el primer y segundo término, por otro el tercer y cuarto término y finalmente cancelar los dos últimos. La ecuación (3.12) queda ahora

$$J^\lambda = g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}). \quad (3.13)$$

Retomando el interior de la integral de (3.9),

$$J^\lambda n_\lambda = n_\lambda g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}) = g^{\mu\nu} n^\lambda (\nabla_\mu \delta g_{\nu\lambda} - \nabla_\lambda \delta g_{\mu\nu}) \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}
&= n^\lambda (h^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu) (\nabla_\mu \delta g_{\nu\lambda} - \nabla_\lambda \delta g_{\mu\nu}) \\
&= n^\lambda h^{\mu\nu} \nabla_\mu \delta g_{\nu\lambda} - n^\lambda h^{\mu\nu} \nabla_\lambda \delta g_{\mu\nu} - n^\lambda n^\mu n^\nu \nabla_\mu \delta g_{\nu\lambda} - n^\lambda n^\mu n^\nu \nabla_\lambda \delta g_{\mu\nu},
\end{aligned}$$

podemos comprobar que los dos últimos términos se anulan al intercambiar μ y λ . El primer término se hace cero al estar proyectado en la hipersuperficie cuyas variaciones de la métrica y la métrica inducidas son cero en la frontera Σ . Así pues, obtenemos

$$J^\lambda n_\lambda = -n^\lambda h^{\mu\nu} \nabla_\lambda \delta g_{\mu\nu} \quad (3.15)$$

y podemos ahora introducir el tensor de curvatura extrínseca cuya forma es

$$K_{\mu\nu} = h_\mu^\lambda \nabla_\lambda n_\nu. \quad (3.16)$$

Su traza se obtiene de la contracción del tensor de curvatura con la métrica inducida, tal que

$$K = h^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = h^{\mu\nu} h_\mu^\lambda \nabla_\lambda n_\nu = h^{\mu\nu} \nabla_\mu n_\nu = h^{\mu\nu} (\partial_\mu n_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda n_\lambda). \quad (3.17)$$

y la variación de la traza queda

$$\begin{aligned}
\delta K &= -h^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda n_\lambda \\
&= -h^{\mu\nu} n^\rho g_{\lambda\rho} \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu}) \\
&= -\frac{1}{2} h^{\mu\nu} n^\rho (\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} n^\lambda \nabla_\lambda \delta g_{\mu\nu}.
\end{aligned} \quad (3.18)$$

Es importante notar que en el último paso hemos vuelto a usar que las derivadas tangenciales de la variación de la métrica son cero en la frontera. Así pues, uniendo (3.15) y (3.18) tenemos que

$$\delta K = -\frac{1}{2} J^\lambda n_\lambda. \quad (3.19)$$

Añadiendo este resultado a (3.9) obtenemos para el primer término, $\delta S_{EH(1)}$,

$$\begin{aligned}
\delta S_{EH(1)} &= -2 \int_\Sigma d^3x \sqrt{-h} \delta K \\
&= -2\delta \int_\Sigma d^3x \sqrt{-h} K + 2 \int_\Sigma K d^3x \delta \sqrt{-h}.
\end{aligned} \quad (3.20)$$

3.2. Variación de la métrica

A continuación, vamos a estudiar la variación de la métrica y la métrica inducida. Con ello podremos sustituir en el tercer término de (3.4) y el segundo de (3.20). Lo haremos sin pérdida de generalidad para la métrica y el resultado será extrapolable a la métrica inducida

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\delta(g)}{2\sqrt{-g}} \quad (3.21)$$

Necesitamos $\delta(g)$ para continuar el desarrollo de la variación. Para ello, calcularemos el determinante de la variación de una matriz M invertible y cuya variación es mucho menor que la propia matriz

$$\det(M + \delta M) = \det(M) \det(1 + M^{-1}\delta M) = \det(M) [1 + \text{tr}(M^{-1}\delta M)]. \quad (3.22)$$

Si identificamos g con M , ya que es invertible, tenemos que

$$\det(g + \delta g) = \det(g) [1 + (g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu})] \quad (3.23)$$

y podemos identificar

$$\delta(g) = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (3.24)$$

por lo que la ecuación (3.21) nos queda

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (3.25)$$

Al pasar de $\delta g_{\mu\nu}$ a $\delta g^{\mu\nu}$ (apéndice A), podemos escribir finalmente

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (3.26)$$

lo cual también es válido para la métrica inducida, tal y como indicamos anteriormente,

$$\delta\sqrt{-h} = -\frac{1}{2}\sqrt{-h} h_{\mu\nu} \delta h^{\mu\nu}. \quad (3.27)$$

3.3. Ecuaciones de campo de Einstein en el vacío

Si recuperamos la ecuación (3.20) y aplicamos el resultado de (3.27) obtenemos

$$\delta S_{EH(1)} = -2\delta \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{-h} K - \int_{\Sigma} K d^3x \sqrt{-h} h_{\mu\nu} \delta h^{\mu\nu}. \quad (3.28)$$

Teniendo en cuenta que la variación de la métrica en la frontera se anula, podemos obtener el resultado en términos de cantidades definidas en el borde para $\delta S_{EH(1)}$

$$\delta S_{EH(1)} = -2\delta \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{-h} K \quad (3.29)$$

y al sustituir el resultado de (3.26) y (3.29) en (3.3), obtenemos

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int_M d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} - 2\delta \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{-h} K = 0. \quad (3.30)$$

Si concretamos para el caso del vacío, el término de frontera se hace cero si elegimos que su variación en el infinito sea nula. De esta forma llegamos a las ecuaciones de Einstein en el vacío

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} = \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = 0. \quad (3.31)$$

3.4. Ecuaciones de campo de Einstein con materia

En el apartado anterior hemos obtenido las ecuaciones de campo de Einstein para el vacío, incluyendo únicamente el término gravitatorio sin atender a la acción de materia. Para obtener las ecuaciones completas, debemos tener en cuenta esa contribución de materia a la acción total

$$S_T = \frac{1}{16\pi} S_{EH} + S_M, \quad (3.32)$$

donde S_M es la acción de materia y se ha renormalizado la acción gravitatoria en unidades naturales ($\hbar = c = G = 1$) para obtener el resultado correcto. Al variar la acción total con respecto a la métrica, igual que hicimos anteriormente, obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_T}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (3.33)$$

Si definimos el tensor momento energía, $T_{\mu\nu}$, como

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (3.34)$$

entonces obtenemos las ecuaciones de campo de Einstein con materia

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (3.35)$$

3.5 Ecuaciones de campo con término de frontera. Gibbons-Hawking

En el apartado 3.3 hemos obtenido las ecuaciones de campo en el vacío sin término de frontera, el cuál definimos como cero en el infinito. A continuación, generalizaremos unas ecuaciones de campo para acciones que incluyan términos de frontera en el vacío tal que

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int_M d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi} \delta \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{-h} K. \quad (3.36)$$

Si deseamos un principio variacional bien definido, deseamos que no existan esos términos de frontera para nuestras soluciones. Así pues, redefinimos el primer término integral como $\delta S_{Gravedad}$,

$$\delta S_{EH} = \delta S_{Gravedad} - \frac{1}{8\pi} \delta \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{-h} K, \quad (3.37)$$

y reordenando términos

$$\delta S_{Gravedad} = \delta S_{EH} + \frac{1}{8\pi} \delta \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{-h} K, \quad (3.38)$$

$$S_{Gravedad} = S_{EH} + \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{-h} K. \quad (3.39)$$

El último término es conocido como el término de Gibbons-Hawking, término de frontera para la acción gravitatoria lineal en curvatura.

4. La solución de Schwarzschild para las ecuaciones de campo de Einstein

4.1 Derivación de la métrica de Schwarzschild

Una vez obtenidas las ecuaciones de campo de Einstein, surge la necesidad de comenzar a encontrar soluciones para diferentes casos físicos. El primer problema físico que se puede plantear es para el caso exterior de una esfera simétrica y estática, de radio R y masa M , en el vacío. Necesitamos encontrar entonces una métrica que satisfaga tanto las ecuaciones de campo de Einstein como nuestras condiciones. Para coordenadas esféricas, en unidades naturales, $h = c = G = 1$, la métrica presenta el siguiente aspecto

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (4.1)$$

En nuestro caso, la métrica más general posible es

$$ds^2 = A dt^2 - B dr^2 - C r^2 d\theta^2 - D r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (4.2)$$

donde las funciones A, B, C, D de dicha métrica debe satisfacer diferentes condiciones.

- Solución en el vacío: para el exterior del objeto no encontramos materia ni energía, por lo que tenemos $T_{\mu\nu} = 0$ para las ecuaciones de campo de Einstein.
- Solución esférica simétrica: nuestra solución no debe depender de las coordenadas θ ni φ . Además, para la parte angular tenemos $C = D = 1$ como solución más sencilla sin pérdida de generalidad.
- Estática: las funciones A y B no deben depender del tiempo, por lo que cualquier derivada temporal es nula. Así pues, $A = A(r)$, $B = B(r)$

Con todo esto, los componentes de la métrica quedan

$$g_{00} = A, g_{11} = -B, g_{22} = -r^2, g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

y los componentes de la métrica inversa son

$$g^{00} = \frac{1}{A}, g^{11} = -\frac{1}{B}, g^{22} = -\frac{1}{r^2}, g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$$

Las ecuaciones (3.34), para este problema quedan

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0, \quad (4.3)$$

$$R_{00} - \frac{A}{2}R = 0, \quad (4.3.1)$$

$$R_{11} + \frac{B}{2}R = 0, \quad (4.3.2)$$

$$R_{22} + \frac{r^2}{2}R = 0, \quad (4.3.3)$$

$$R_{33} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2}R = 0, \quad (4.3.4)$$

donde las dos últimas ecuaciones están relacionadas tal que

$$0 = R_{33} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2}R = \sin^2 \theta R_{22} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2}R = R_{22} + \frac{r^2}{2}R. \quad (4.4)$$

Necesitamos para la resolución de nuestro problema tanto el escalar de Ricci, R , como el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, con $\mu = \nu = 0,1,2,3$.

4.1.1 Cálculo de $R_{\mu\nu}$ para la métrica de Schwarzschild

Es importante recordar que para el cálculo del tensor de Ricci debemos hacer uso de la definición del tensor de Riemann y contraer el primer índice con el segundo de la siguiente forma,

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} = \partial_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\lambda}\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} - \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda}\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}. \quad (4.5)$$

Necesitamos, pues, los símbolos de Christoffel que surgen para nuestra métrica. Dichos símbolos valen

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{A'}{2A} \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{A'}{2B} & \Gamma_{11}^1 &= \frac{B'}{2B} & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{V} & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r}{2V} \sin^2 \theta \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} & \Gamma_{33}^2 &= -\cos \theta \sin \theta \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que en la notación prima denota la derivada con respecto a r . El cálculo explícito de los símbolos de Christoffel para la métrica de Schwarzschild puede ser visto detalladamente en [9].

Podemos ahora escribir las componentes no nulas del tensor de Ricci tal que

$$R_{00} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'B'}{4B^2} - \frac{A'^2}{4BA} + \frac{A'}{rB}, \quad (4.5.1)$$

$$R_{11} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'B'}{4BA} + \frac{A'^2}{4A^2} + \frac{B'}{rB}, \quad (4.5.2)$$

$$R_{22} = -\frac{rA'}{2AB} - \frac{1}{B} + \frac{rB'}{2B^2} + 1, \quad (4.5.3)$$

$$R_{33} = \sin^2\theta \left(-\frac{rA'}{2AB} - \frac{1}{B} + \frac{rB'}{2B^2} + 1 \right) = \sin^2\theta R_{22}. \quad (4.5.4)$$

El desarrollo del cálculo para obtener estos valores puede ser visto en detalle en [9].

4.1.2 Cálculo de R para la métrica de Schwarzschild

Una vez obtenidos todas las componentes del tensor de Ricci, podemos pasar a obtener el escalar de Ricci para poder sustituir todos los términos en las ecuaciones de Einstein. Si atendemos a la definición R , obtenemos

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \\ &= \frac{1}{A} \left(\frac{A''}{2B} - \frac{A'B'}{4B^2} - \frac{A'^2}{4BA} + \frac{A'}{rB} \right) - \frac{1}{B} \left(-\frac{A''}{2A} + \frac{A'B'}{4BA} + \frac{A'^2}{4A^2} + \frac{B'}{rB} \right) \\ &\quad - \frac{2}{r^2} \left(-\frac{rA'}{2AB} - \frac{1}{B} + \frac{rB'}{2B^2} + 1 \right) \\ &= \frac{A''}{AB} - \frac{A'B'}{2AB^2} - \frac{A'^2}{2BA^2} + \frac{2A'}{rAB} - \frac{2B'}{rB^2} + \frac{2}{r^2B} - \frac{2}{r^2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.1.3 Ecuaciones de Einstein para la métrica de Schwarzschild

Una vez hallados todos los términos de (4.3), podemos sustituir para cada término de forma que obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= R_{00} - \frac{A}{2} R = \frac{A''}{2B} - \frac{A'B'}{4B^2} - \frac{A'^2}{4BA} + \frac{A'}{rB} \\ &\quad - \frac{A}{2} \left(\frac{A''}{AB} - \frac{A'B'}{2AB^2} - \frac{A'^2}{2BA^2} + \frac{2A'}{rAB} - \frac{2B'}{rB^2} + \frac{2}{r^2B} - \frac{2}{r^2} \right) \\ &= \frac{AB'}{rB^2} + \frac{A}{r^2B} - \frac{A}{r^2}, \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

$$0 = \frac{B'}{rB^2} + \frac{1}{r^2B} - \frac{1}{r^2}, \quad (4.7.2)$$

$$\begin{aligned} 0 &= R_{11} + \frac{B}{2}R = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'B'}{4BA} + \frac{A'^2}{4A^2} + \frac{B'}{rB} \\ &+ \frac{B}{2} \left(\frac{A''}{AB} - \frac{A'B'}{2AB^2} - \frac{A'^2}{2BA^2} + \frac{2A'}{rAB} - \frac{2B'}{rB^2} + \frac{2}{r^2B} - \frac{2}{r^2} \right) \\ &= \frac{2A'}{2rA} + \frac{1}{r^2} - \frac{B}{r^2}, \end{aligned} \quad (4.8.1)$$

$$0 = \frac{A'}{rAB} + \frac{1}{r^2B} - \frac{1}{r^2}, \quad (4.8.2)$$

$$\begin{aligned} 0 &= R_{22} + \frac{r^2}{2}R = R_{33} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2}R = -\frac{rA'}{2AB} - \frac{1}{B} + \frac{rB'}{2B^2} + 1 \\ &+ \frac{r^2}{2} \left(\frac{A''}{AB} - \frac{A'B'}{2AB^2} - \frac{A'^2}{2BA^2} + \frac{2A'}{rAB} - \frac{2B'}{rB^2} + \frac{2}{r^2B} - \frac{2}{r^2} \right) \\ &= \frac{r^2 A''}{2AB} - \frac{r^2 A'B'}{4AB^2} - \frac{r^2 A'^2}{4BA^2} + \frac{rA'}{2AB} - \frac{rB'}{2B^2}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde hemos empleado que (4.3.3) y (4.3.4) se puede relacionar para poner una única expresión, (4.9), que describa ambas ecuaciones. Utilizamos (4.7.2), que es únicamente función de B , para hallar precisamente $B(r)$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{B'}{rB^2} + \frac{1}{r^2B} - \frac{1}{r^2} \\ 0 &= \frac{B'}{B(B-1)} + \frac{1}{r} \rightarrow -\int \frac{dr}{r} = \int \frac{dB}{B(B-1)} \\ -\ln r + C' &= \ln \frac{(B-1)}{B} \rightarrow B(r) = \frac{1}{1 + \frac{C'}{r}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde C es una constante de integración que obtendremos más adelante. Podemos utilizar (4.10) en (4.8.2) para despejar el último término de la métrica que nos falta por conocer, $A(r)$

$$0 = \frac{A'}{rAB} + \frac{1}{r^2B} - \frac{1}{r^2} = \frac{A'}{rA} \left(1 + \frac{C}{r}\right) + \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{C}{r} - 1\right)$$

$$\frac{A'}{A} = \frac{C}{r^2 \left(1 + \frac{C}{r}\right)} = \frac{C}{r^2 + rC} \rightarrow \int \frac{dA}{A} = C \int \frac{dr}{r(r+C)} \quad (4.11)$$

$$\ln A = \ln \frac{(r+C)}{r} \rightarrow A(r) = 1 + \frac{C}{r}.$$

Ahora que hemos calculado $A(r)$ y $B(r)$ podemos escribir la métrica de Schwarzschild en términos de una constante a determinar,

$$ds^2 = \left(1 + \frac{C}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.12)$$

Lo primero que podemos decir de esta métrica es que es asintóticamente plana. Cuando $r \rightarrow \infty$, la métrica se aproxima a la conocida métrica de Minkowski en coordenadas esféricas, cuya forma es

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.13)$$

por lo que podemos interpretar la métrica de Schwarzschild como el campo gravitacional exterior de un cuerpo aislado. Queda únicamente por determinar el valor de la constante C , si bien no existe un método único para ello. En la bibliografía viene varios métodos como el de la aproximación de campo débil, aplicable cuando el campo gravitatorio es débil, para hallar la constante con un resultado de

$$C = -2M, \quad (4.14)$$

lo que nos lleva a una métrica de Schwarzschild de la forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.15)$$

Esta métrica es una aproximación útil para describir cuerpos astronómicos de lenta rotación, tal como estrellas o planetas, incluyendo la Tierra y el Sol. Además, un agujero negro de Schwarzschild es descrito por esta métrica y no se puede distinguir de otro agujero negro estático salvo por su masa. Esta es una prueba de que diferentes métricas con diferentes tensores de Riemann, pero idénticos tensores de Ricci, son soluciones a ecuaciones de Einstein con el mismo tensor energía-momento, difiriendo únicamente en la constante de integración, relacionada directamente con la masa.

Ya hemos comentado que esta solución corresponde a la parte exterior, $r > R$ de un objeto esférico, concretamente con $R > 2M$, por lo que un nombre más adecuado es “solución exterior de Schwarzschild”.

De acuerdo con el teorema de Birkhoff, [11], la métrica de Schwarzschild es la solución esférica simétrica estática en el vacío para las ecuaciones de Einstein más general posible.

4.2 Estudio de las singularidades en la métrica de Schwarzschild

Una vez obtenida la métrica de Schwarzschild, cabe realizar un estudio acerca de las singularidades que presenta el interior del objeto y que no pueden, ni deben, ser obviadas. Si tomamos la solución de Schwarzschild,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (4.16)$$

y aceptamos que esta misma solución es válida para un objeto cuya masa está en el origen, dando pie al estudio para $r < 2M$, es fácil ver que existen varias degeneraciones o singularidades.

La primera de ellas surge cuando $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, ya que el elemento de la métrica g_{33} sería nulo. Es fácil ver que esta degeneración es producto del uso de coordenadas esféricas y una simple rotación movería esta singularidad a otro punto anteriormente regular y dejaría el punto original regular. Por lo tanto, esta singularidad no es más que una singularidad de coordenadas.

Existen otras dos singularidades para distintos valores de r . El valor $r = 0$ provoca que el elemento de la métrica g_{00} sea singular y el elemento g_{11} sea regular. Por el contrario, el valor $r = 2M$ hace regular a g_{00} y singular a g_{11} .

La mejor forma de ver si las singularidades tienen un origen físico o de coordenadas es calcular los invariantes de curvatura, en nuestro caso, el invariante de Kretschmann, [13],

$$K = R_{\mu\nu\rho\lambda} R^{\mu\nu\rho\lambda} = \frac{48M^2}{r^6}. \quad (4.17)$$

El invariante K diverge para $r \rightarrow 0$, pero es completamente regular para $r = 2M$, por lo que el punto $r = 0$ representa una singularidad física mientras que $r = 2M$ es una singularidad de coordenadas, aunque en esta ocasión, a diferencia del caso para $\theta = 0$ ó $\theta = \pi$, posee un significado físico, ya que $r = 2M$ se conoce como radio de Schwarzschild.

4.3 Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Para el estudio detallado del comportamiento de objetos físicos en el radio de Schwarzschild debemos utilizar unas coordenadas que no sean singulares en dicho punto. Para hallar unas coordenadas adecuadas, en primer lugar, tomaremos la solución de Schwarzschild a través de las geodésicas nulas radiales, es decir, $d\theta = d\varphi = 0$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2, \quad (4.18)$$

y teniendo en cuenta que son geodésicas,

$$0 = ds^2$$

$$0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (4.19)$$

Definiendo la coordenada radial r_* tal que la geodésica nula obedezca la ecuación $dr_*^2 = dt^2$ y

$$dr_*^2 \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} dr^2, \quad (4.20)$$

podemos obtener

$$r_* = r + 2M \ln\left(\frac{r - 2M}{2M}\right). \quad (4.21)$$

Es importante resaltar que hemos requerido que la solución fuera real y que r_* incrementase su valor con r . Las soluciones $t = \pm r_*$ corresponden a las geodésicas nulas entrantes para el valor positivo y salientes para el negativo. A partir de estas soluciones podemos definir el siguiente par de coordenadas para el cono de luz,

$$u = t - r_*,$$

$$v = t + r_*. \quad (4.22)$$

4.3.1 Coordenadas de Eddington-Finkelstein Entrantes (IEF)

Podemos realizar un cambio de coordenadas, $(t, r, \theta, \varphi) \rightarrow (v, r, \theta, \varphi)$, de forma que la métrica obtenida para IEF es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \quad (4.23)$$

La obtención de esta métrica está desarrollada en el apéndice B.

Se puede apreciar que esta métrica es perfectamente regular para el radio de Schwarzschild. El único problema sigue apareciendo para el origen, $r = 0$, aunque como ya vimos con el invariante de Kretschmann, (4.17), esto era de esperar. Podemos extender entonces el espacio de nuestra solución de $r > 2M$ a $r > 0$, algo que inicialmente no pudimos realizar con la métrica original de Schwarzschild simplemente porque no describía correctamente el comportamiento de $0 < r < 2M$.

Es importante observar el comportamiento de las geodésicas nulas, tanto entrantes como salientes, en la métrica IEF. Como muestra la Figura 2, las geodésicas nulas entrantes, $v = cte$, pueden atravesar el radio de Schwarzschild y eventualmente el fotón caerá al origen. Por otro parte, las geodésicas nulas salientes, $u = cte$, tienen un comportamiento distinto según la región del espacio en la que se encuentren. Para la región exterior, más allá del radio de Schwarzschild, los fotones se alejarán de dicho radio hacia el infinito. Para la región interior, los fotones igualmente se alejan de la hipersuperficie que es el radio de Schwarzschild, pero en dirección contraria hasta caer al origen. Si el fotón se encuentra en el mismo radio de Schwarzschild, permanece en $r = 2M$ de forma indefinida.

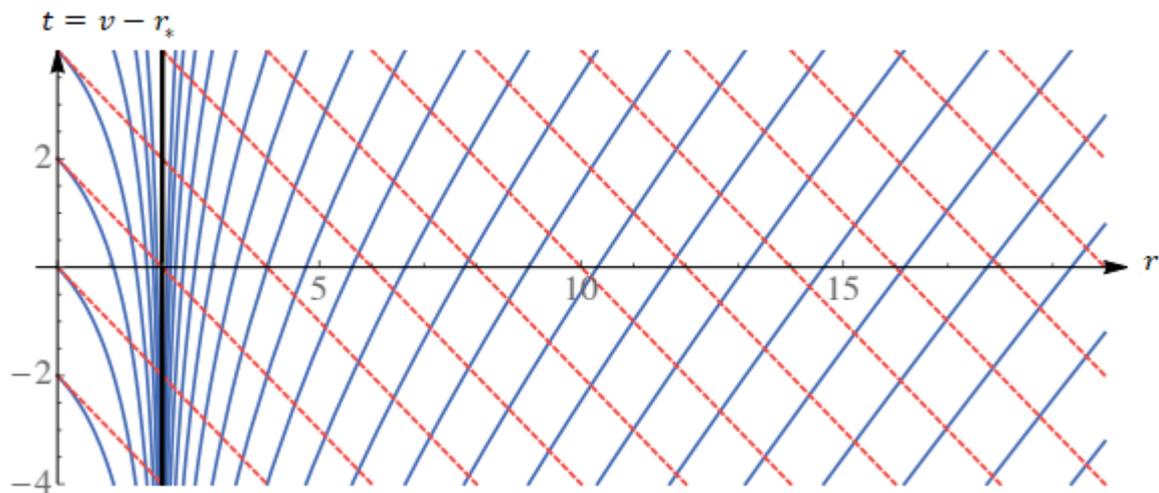


Figura 2: Representación de las geodésicas nulas entrantes (punteado rojo) y salientes (continuo rojo) en las coordenadas IEF para $M = 1$. Radio de Schwarzschild en negro.

Ambos ejes están en unidades de M . [5]

El nombre que recibe actualmente la hipersuperficie $r = 2M$ es horizonte de sucesos y la región interior, $r < 2M$, agujero negro. Podemos observar que ninguna señal del agujero negro llega a un observador en la región exterior de ninguna forma, mientras que todo lo que esté más allá del horizonte de sucesos cae inevitablemente al origen. Si nos fijamos en los

conos de luz que forman las geodésicas entrantes y saliente al aproximarse al horizonte de sucesos, obtenemos la idea de que un observador externo vería a un objeto volverse más disperso hasta desaparecer al acercarse y finalmente atravesar el horizonte de sucesos. En el caso de radiación electromagnética, la luz sufriría un corrimiento al rojo hasta que el observador dejaría de percibir señal alguna.

4.3.2 Coordenadas de Eddington-Finkelstein Salientes (OEF)

Igual que realizamos el cambio de coordenadas IEF, podemos obtener las coordenadas OEF mediante el cambio $(t, r, \theta, \varphi) \rightarrow (u, r, \theta, \varphi)$, de forma que nuestra métrica sería ahora

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 + 2dudr - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (4.24)$$

cuyo desarrollo al completo está detallado en el apéndice B.

Esta métrica comparte las propiedades en cuanto a singularidades con la métrica IEF, sin embargo, el espacio-tiempo que describe es bien distinto, tal como muestra la Figura 3. En ella se puede apreciar que el comportamiento de las geodésicas nulas, ya sean saliente o entrantes es completamente inverso al observado para la métrica IEF. Los fotones que siguen geodésicas nulas entrantes, $v = cte$, se aproximan asintóticamente al radio de Schwarzschild ya sea desde la zona interior o la zona exterior, sin llegar a cruzarlo nunca. Por otra parte, los que siguen geodésicas nulas salientes escapan del origen hacia el infinito con toda seguridad.

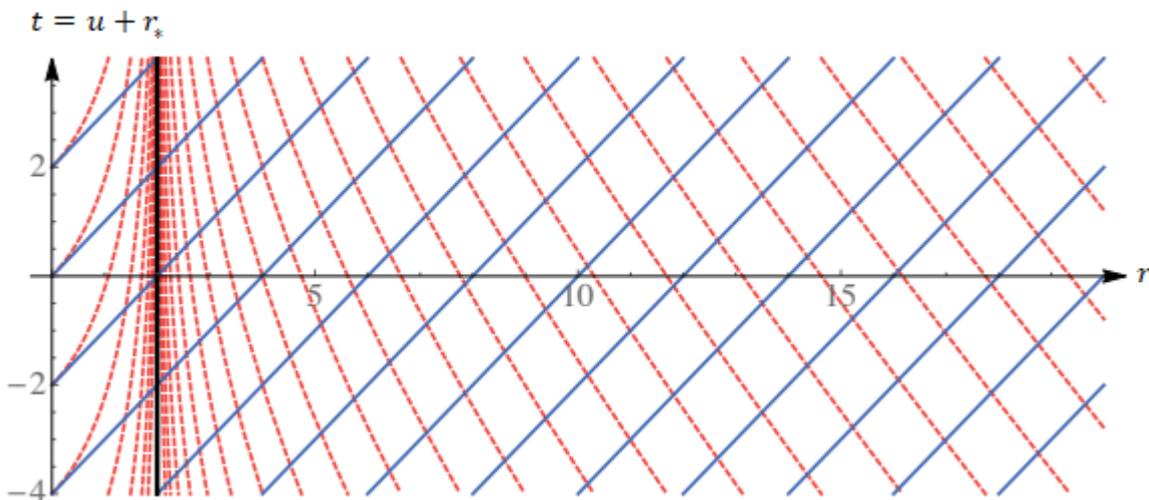


Figura 3: Representación de las geodésicas nulas entrantes (punteado rojo) y salientes (continuo rojo) en las coordenadas OEF para $M = 1$. Radio de Schwarzschild en negro.

Ambos ejes están en unidades de M . [5]

En estas coordenadas, la parte interior, $r < 2M$, recibe el nombre de agujero blanco y la hipersuperficie $r = 2M$ recibe el nombre de horizonte de sucesos de un agujero blanco. Todo lo que ocurre en el interior del agujero blanco es observable por un observador situado en la zona exterior, sin embargo, es imposible aproximarse, ya sea desde el interior o el exterior del horizonte de sucesos, a dicho agujero blanco.

La descripción del espacio-tiempo por parte de las coordenadas IEF y OEF son completamente distintas, es más, una es la inversión temporal de la otra, a pesar de que ambas provienen de la misma solución de Schwarzschild. Este suceso queda explicado en el siguiente apartado con la introducción de las coordenadas de Kruskal-Szekeres.

4.4 Coordenadas de Kruskal-Szekeres (KS)

Para llegar hasta la métrica en coordenadas KS, en primer lugar, debemos realizar el cambio de coordenadas $(t, r, \theta, \varphi) \rightarrow (u, v, \theta, \varphi)$, empleando todas las ecuaciones de (4.22), de forma que la métrica queda

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (4.25)$$

La métrica (4.25) sigue arrastrando la singularidad en $r = 2M$, además de la existente para $r = 0$. Para solucionar esto, realizaremos otro cambio de coordenadas,

$$\begin{aligned} U &= -\exp\left(-\frac{u}{4M}\right), \\ V &= \exp\left(\frac{v}{4M}\right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

obteniendo la métrica de Schwarzschild en coordenadas KS (U, V, θ, φ) tal que

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{2M}\right) dUdV - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (4.27)$$

donde r es función de U y V mediante la ecuación implícita

$$UV = -\left(\frac{r - 2M}{r}\right) \exp\left(\frac{r}{2M}\right). \quad (4.28)$$

El desarrollo completo de la métrica en coordenadas KS está detallado en el apéndice B.

Esta métrica está perfectamente definida para $r > 0$ y podemos extender el dominio de las nuevas coordenadas a $-\infty < U, V < \infty$. El análisis de la representación gráfica del espacio-tiempo descrito por la métrica en coordenadas KS en la Figura 4 muestra la solución conjunta,

y un paso más, de todo lo recopilado anteriormente en diversas coordenadas para la métrica de Schwarzschild como solución a las ecuaciones de Einstein.

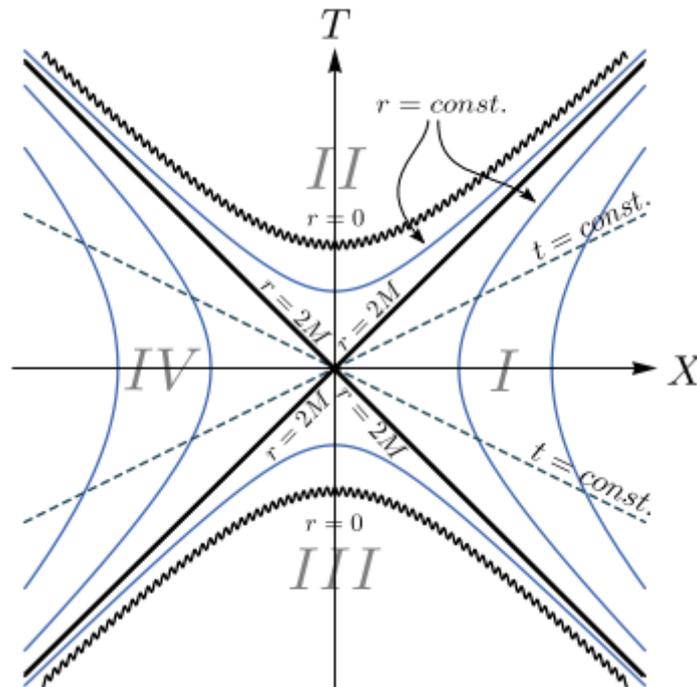


Figura 4: Representación del espacio-tiempo para la métrica de Schwarzschild en coordenadas KS. En abscisas se representa la coordenada espacial, $X = U + V$ y en ordenadas la temporal, $T = U - V$. Las líneas negras sólidas representan $r = 2M$ y las negras onduladas representan $r = 0$. Las líneas azules sólidas y las punteadas corresponden a r y t constantes. [5]

La métrica original de Schwarzschild sólo describía el espacio-tiempo en la región I, para la que el radio de Schwarzschild era una singularidad insalvable por un observador externo y la singularidad del origen estaba más allá. Cuando avanzamos hacia las coordenadas IEF y OEF, incorporamos las regiones II y III respectivamente. Para las IEF, obteníamos un horizonte de sucesos y más allá, el agujero negro para $r < 2M$, llegando a la singularidad en $r = 0$. Para la OEF, de forma inversa, obteníamos para la singularidad en el origen un agujero blanco y para $r = 2M$, el horizonte de sucesos de un agujero blanco. Así pues, obteníamos resultados distintos para las coordenadas de EF porque mostraban regiones del espacio-tiempo distintas. Existe además una nueva región, IV, isométrica a la región I, ya que es la región descrita si cambiamos el signo a las ecuaciones (4.26), pudiendo obtener de nuevo la misma métrica de (4.27).

4.5 Diagramas de Penrose-Carter

Los diagramas de Penrose-Carter, o simplemente diagramas de Penrose, son un buen método para la representación la estructura del espacio-tiempo infinito en un espacio finito. Para ello, debemos realizar una transformación conforme de la métrica, $\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Lambda(x)^2 g_{\mu\nu}$, con $\Lambda(x)$ una función de las coordenadas espaciotemporales y siempre distinto de cero. La idea básica de esta transformación conforme es traer el infinito a una distancia finita, manteniendo el comportamiento de la métrica y la estructura causal del espacio-tiempo, aunque es importante tener en mente que los tensores de curvatura, como el tensor de Riemann, no se conservan de forma general en estas transformaciones.

Si bien el proceso de construcción de los diagramas de Penrose queda fuera de nuestros objetivos, podemos analizar y discutir brevemente los diagramas de Penrose ya construidos para las métricas más familiares en nuestro estudio, la métrica de Minkowski y la métrica de Schwarzschild.

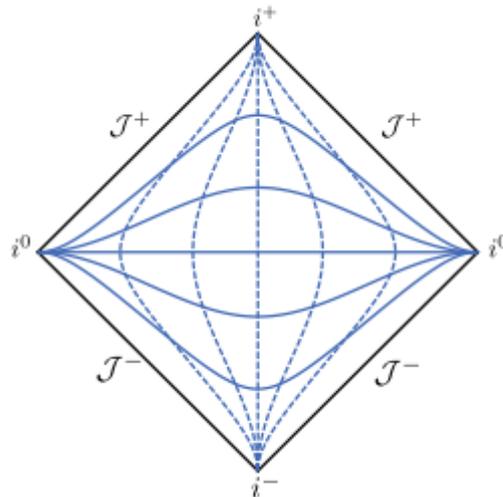


Figura 5: Diagrama de Penrose para el espacio de Minkowski en métrica conforme. En abscisas el eje espacial y en ordenadas el temporal. En azul punteado las líneas para $r = cte$, en azul continuo las líneas para $t = cte$. [5]

En la Figura 5 podemos apreciar que las curvas de tipo temporal ($r = cte$) comienzan en i^- y acaban en i^+ . Por esto, nos referimos i^- (i^+) respectivamente como infinito temporal pasado (futuro). De forma análoga, los puntos i^0 representan el infinito espacial y denotan el conjunto de puntos finales de geodésicas espaciales ($t = cte$). Las geodésicas nulas se dirigen desde el conjunto de puntos J^- , conocido como infinito nulo pasado, hacia el

conjunto de puntos \mathcal{J}^+ , infinito nulo futuro con una trayectoria cuya inclinación con respecto a la horizontal no puede ser menor que $\frac{\pi}{2}$, siendo el caso extremo la radiación electromagnética.

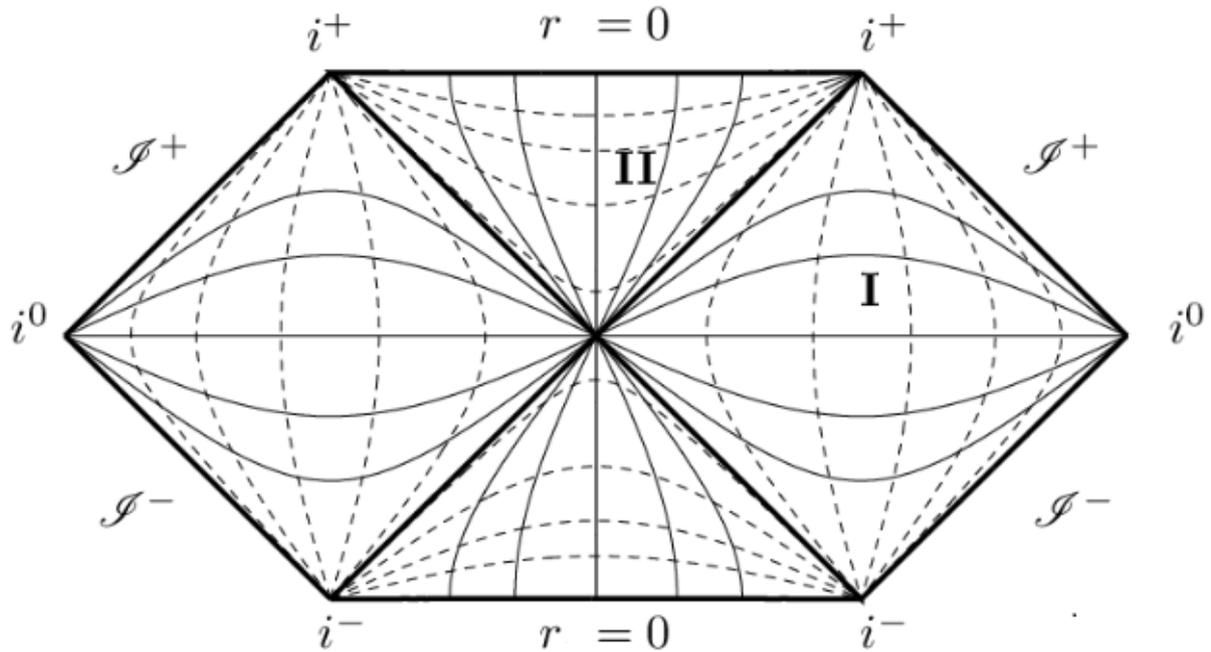


Figura 6: Diagrama de Penrose para el espacio de Kruskal en métrica conforme. En abscisas el eje espacial y en ordenadas el temporal. En negro punteado las líneas para $t = cte$, en negro continuo las líneas para $r = cte$. [7]

Para la métrica de Schwarzschild podemos obtener el diagrama de Penrose que aparece en la Figura 6. Los elementos son los mismos que para la Figura 6, con la introducción de algunos nuevos elementos; el agujero negro (región II) y el agujero blanco (región III), líneas rectas paralelas al eje de abscisas correspondiente a la singularidad en el origen, $r = 0$. Las líneas que separan la región II de las regiones I y IV corresponden al horizonte de sucesos del agujero negro y las que separan la región II de las regiones I y IV corresponden al horizonte de sucesos de un agujero negro

Cuando se piensa en la trayectoria que seguiría un fotón, una línea recta con $\frac{\pi}{2}$ de inclinación, es fácil ver que, si se encuentra en la región II, nunca podrá llegar a \mathcal{J}^+ , si no que caerá al agujero negro de forma irremediable. Por el contrario, un fotón proveniente del agujero blanco de la región III, jamás podrá caer al agujero negro y llegará a \mathcal{J}^+ , no importa el sentido que tome.

5. Curvatura de segundo orden

5.1. Correcciones de curvatura cuadrática en el lagrangiano

Si consideramos todos los términos para la acción, ya sean gravitatorios o de materia, además del caso más general posible para curvaturas cuadráticas expresadas en términos de Riemann para una cierta dimensión D arbitraria, tenemos

$$S = S_M + \frac{1}{16\pi G} \int_M d^D x \sqrt{-g} (R + \alpha R^2 + \beta R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \gamma R^{\mu\nu\rho\lambda} R_{\mu\nu\rho\lambda}). \quad (5.1)$$

Donde α , β y γ son constantes arbitrarias. Si aplicamos el principio de mínima acción, vemos que ya hemos resuelto anteriormente el término lineal y el término correspondiente a la acción de materia. Queda pues, variar los términos de curvatura cuadrática, lo que llamaremos $\delta S'$

$$\begin{aligned} \delta S' &= \delta \int_M d^D x \sqrt{-g} (\alpha R^2 + \beta R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \gamma R^{\mu\nu\rho\lambda} R_{\mu\nu\rho\lambda}) \\ &= \int_M d^D x (\alpha R^2 + \beta R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \gamma R^{\mu\nu\rho\lambda} R_{\mu\nu\rho\lambda}) \delta \sqrt{-g} \\ &+ \int_M d^D x [\alpha \delta(R^2) + \beta \delta(R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) + \gamma \delta(R^{\mu\nu\rho\lambda} R_{\mu\nu\rho\lambda})] \sqrt{-g} \\ &= \delta S'_g + \delta S'_\alpha + \delta S'_\beta + \delta S'_\gamma. \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.1.1 Término de la métrica

Para la variación del primer término, $\delta S'_g$, podemos hacer uso de la ecuación (3.26)

$$\begin{aligned} \delta S'_g &= \int_M d^D x (\alpha R^2 + \beta R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \gamma R^{\mu\nu\rho\lambda} R_{\mu\nu\rho\lambda}) \delta \sqrt{-g} \\ &= -\frac{1}{2} \int_M d^D x (\alpha R^2 + \beta R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \gamma R^{\mu\nu\rho\lambda} R_{\mu\nu\rho\lambda}) \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

por lo que tendríamos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S'_g}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\alpha R^2 + \beta R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \gamma R^{\mu\nu\rho\lambda} R_{\mu\nu\rho\lambda}). \quad (5.4)$$

5.1.2 Término del escalar de Ricci, R

Para la variación del segundo término, $\delta S'_\alpha$, asociado al escalar de Ricci, debemos descomponer el escalar en el tensor de Ricci y la métrica inversa

$$\delta S'_\alpha = \alpha \int_M d^D x \sqrt{-g} \delta R^2 = \alpha \int_M d^D x \sqrt{-g} 2R \delta(R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}), \quad (5.5)$$

$$2R \delta(R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}) = 2R(g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}). \quad (5.6)$$

La ecuación (5.6) consta de dos términos. El segundo de ellos muestra directamente el aspecto que buscamos, mientras que el primero aún hay que desarrollarlo a través de la identidad de Palatini.

$$2R g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 2R g^{\mu\nu} (\nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda). \quad (5.7)$$

Cada uno de los términos de (5.7) debe ser desarrollado por separado dado su longitud. Comenzando por el primero, si integramos por partes obtenemos

$$2R g^{\mu\nu} \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 2\nabla_\lambda (R g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - 2R \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda g^{\mu\nu} - 2g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda R. \quad (5.8)$$

El segundo término es nulo, ya que la derivada covariante de la métrica o métrica inversa es nula. El primer término puede ser tratado como una cantidad definida en el borde al aplicar el teorema de Stokes si se introduce en la integral, heredando la naturaleza que tendría el término de Gibbons-Hawking para la acción de Einstein-Hilbert. Por este motivo, para tener un problema variacional bien definido, deberíamos considerar un término extra que cancelara a éste y cualquier otro término de frontera, el cual se conoce en la literatura como término de Gibbons-Hawking generalizado y se puede encontrar en la literatura en [8], por lo que continuaremos la variación con el último término, en el que aplicaremos el desarrollo de la variación del símbolo de Christoffel.

$$\begin{aligned} -2g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda (R) &= -2\nabla_\lambda (R) g^{\mu\nu} g^{\rho\lambda} \frac{1}{2} (\nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} + \nabla_\mu \delta g_{\rho\nu} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}) \\ &= \nabla_\lambda (R) g^{\mu\nu} (g_{\mu\rho} \nabla_\nu \delta g^{\rho\lambda} + g_{\nu\rho} \nabla_\mu \delta g^{\rho\lambda} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^\lambda \delta g^{\alpha\beta}) \\ &= \nabla_\lambda (R) (\delta_\rho^\nu \nabla_\nu \delta g^{\rho\lambda} + \delta_\rho^\mu \nabla_\mu \delta g^{\rho\lambda} - \delta_\alpha^\nu g_{\nu\beta} \nabla^\lambda \delta g^{\alpha\beta}) \\ &= \nabla_\lambda (R) (2\nabla_\rho \delta g^{\rho\lambda} - g_{\alpha\beta} \nabla^\lambda \delta g^{\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Podemos volver a integrar por partes de forma que el término general de derivada covariante vuelve a ser un término de frontera y podemos volver a ignorarlo. Además, podemos renombrar índices en ambos términos para disponer de los mismos índices que en (5.4)

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda(R)(2\nabla_\rho\delta g^{\rho\lambda} - g_{\alpha\beta}\nabla^\lambda\delta g^{\alpha\beta}) &= [g_{\mu\nu}\nabla^\lambda\nabla_\lambda(R) - 2\nabla_\mu\nabla_\nu(R)]\delta g^{\mu\nu} \\ &= (g_{\mu\nu}\nabla^2R - 2\nabla_\mu\nabla_\nu R)\delta g^{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (5.10)$$

Guardamos este resultado por ahora y pasamos al desarrollo del segundo término de la ecuación (5.7). Dicho desarrollo es similar al primero, empezando por realizar una integración por partes

$$-2Rg^{\mu\nu}\nabla_\nu\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda = -2\nabla_\nu(Rg^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) + 2R\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda\nabla_\nu g^{\mu\nu} + 2g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda\nabla_\nu R. \quad (5.11)$$

Aplicando el mismo razonamiento que se usó en (5.8), nos quedamos únicamente con el último término y desarrollamos la variación del símbolo de Christoffel

$$\begin{aligned}2g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda\nabla_\nu R &= 2\nabla_\nu(R)g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda}\frac{1}{2}(\nabla_\lambda\delta g_{\mu\rho} + \nabla_\mu\delta g_{\rho\lambda} - \nabla_\rho\delta g_{\mu\lambda}) \\ &= -\nabla_\nu(R)g^{\mu\nu}(g_{\mu\rho}\nabla_\lambda\delta g^{\rho\lambda} + g_{\rho\lambda}\nabla_\mu\delta g^{\rho\lambda} - g_{\mu\lambda}\nabla_\rho\delta g^{\rho\lambda}),\end{aligned}\quad (5.12)$$

y renombrando en el primer término ρ por λ y λ por ρ se cancela con el último y sólo sobrevive un término, de forma que, si volvemos a integrar por parte y renombramos índices para nuestro propósito, obtenemos

$$\begin{aligned}-\nabla_\nu(R)g^{\mu\nu}g_{\rho\lambda}\nabla_\mu\delta g^{\rho\lambda} &= -\nabla_\nu(R)g_{\rho\lambda}\nabla^\nu\delta g^{\rho\lambda} = \nabla^\nu[\nabla_\nu(R)]g_{\rho\lambda}\delta g^{\rho\lambda} \\ &= g_{\mu\nu}\nabla^2R\delta g^{\mu\nu},\end{aligned}\quad (5.13)$$

de esta forma (5.7) queda

$$2Rg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = 2(g_{\mu\nu}\nabla^2R - \nabla_\mu\nabla_\nu R)\delta g^{\mu\nu}. \quad (5.14)$$

Por lo que tendríamos finalmente para el término del escalar de Ricci

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S'_\alpha}{\delta g^{\mu\nu}} = \alpha(2g_{\mu\nu}\nabla^2R - 2\nabla_\mu\nabla_\nu R + 2RR_{\mu\nu}). \quad (5.15)$$

5.1.3 Término del tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$

Para la variación del tercer término, $\delta S'_\beta$, debemos expresarlo en función del tensor de Ricci y de la métrica inversa

$$\delta S'_\beta = \beta \int_M d^D x \sqrt{-g} \delta(R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = \beta \int_M d^D x \sqrt{-g} \delta(g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta} R_{\mu\nu}), \quad (5.16)$$

$$\delta(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta} R_{\mu\nu}) = 2(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\mu\nu} \delta R_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} R_{\mu\nu} g^{\alpha\mu} \delta g^{\beta\nu}). \quad (5.17)$$

Podemos contraer en el segundo término la métrica con uno de los tensores de Ricci y renombrar índices mudos para obtener

$$2R_{\alpha\beta} R_{\mu\nu} g^{\alpha\mu} \delta g^{\beta\nu} = 2R_{\mu\nu} R_\beta^\mu \delta g^{\beta\nu} = 2R_{\mu\rho} R_\nu^\rho \delta g^{\mu\nu}. \quad (5.18)$$

Si volvemos al primer término de (5.17), debemos emplear de nuevo la identidad de Palatini,

$$2g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\mu\nu} \delta R_{\alpha\beta} = 2R^{\alpha\beta} (\nabla_\lambda \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \nabla_\beta \delta \Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda). \quad (5.19)$$

El desarrollo de cada término es similar al realizado para $\delta S'_\alpha$ a partir de la ecuación (5.7), teniendo que debe hacerse por separado debido a su longitud y tomando como nulos los términos de frontera que surgen de las integraciones por partes, de forma que

$$\begin{aligned} 2R^{\alpha\beta} \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda &= -2\nabla_\lambda (R^{\alpha\beta}) \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \\ &= -2\nabla_\lambda (R^{\alpha\beta}) g^{\rho\lambda} \frac{1}{2} (\nabla_\beta \delta g_{\alpha\rho} + \nabla_\alpha \delta g_{\rho\beta} - \nabla_\rho \delta g_{\alpha\beta}) \\ &= \nabla_\lambda (R^{\alpha\beta}) (g_{\alpha\rho} \nabla_\beta \delta g^{\rho\lambda} + g_{\rho\beta} \nabla_\alpha \delta g^{\rho\lambda} - g_{\alpha\gamma} g_{\nu\delta} \nabla^\lambda \delta g^{\nu\delta}) \\ &= [\nabla_\lambda (R_\rho^\beta) \nabla_\beta + \nabla_\lambda (R_\rho^\alpha) \nabla_\alpha] \delta g^{\rho\lambda} - \nabla_\lambda (R_{\gamma\delta}) \nabla^\lambda \delta g^{\gamma\delta}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

volviendo a integrar por partes y renombrando índices mudos podemos sumar los dos primeros términos

$$\begin{aligned} &[\nabla_\lambda (R_\rho^\beta) \nabla_\beta + \nabla_\lambda (R_\rho^\alpha) \nabla_\alpha] \delta g^{\rho\lambda} - \nabla_\lambda (R_{\gamma\delta}) \nabla^\lambda \delta g^{\gamma\delta} \\ &= \nabla^\lambda (\nabla_\lambda R_{\gamma\delta}) \delta g^{\gamma\delta} - [\nabla_\beta \nabla_\lambda (R_\rho^\beta) + \nabla_\alpha \nabla_\lambda (R_\rho^\alpha)] \delta g^{\rho\lambda} \\ &= \nabla^2 R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - 2\nabla_\alpha \nabla_\lambda (R_\rho^\alpha) \delta g^{\rho\lambda}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Sobre el segundo término podemos aplicar (2.11) para obtener

$$\begin{aligned} -2\nabla_\alpha \nabla_\lambda (R_\rho^\alpha) \delta g^{\rho\lambda} &= [-2\nabla_\lambda \nabla_\alpha (R_\rho^\alpha) - 2R_{\sigma\alpha\lambda}^\alpha R_\rho^\sigma + 2R_{\rho\alpha\lambda}^\sigma R_\sigma^\alpha] \delta g^{\rho\lambda} \\ &= -2\nabla_\mu \nabla_\alpha (R_\nu^\alpha) \delta g^{\mu\nu} - 2R_{\sigma\lambda}^\sigma R_\rho^\sigma \delta g^{\rho\lambda} + 2R_{\rho\alpha\lambda}^\sigma R_\sigma^\alpha \delta g^{\rho\lambda}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Aplicando sobre el primer término la identidad contraída de Bianchi y renombrando términos en el segundo y tercer término tenemos

$$\begin{aligned} & -2\nabla_\mu\nabla_\alpha(R^\alpha_\nu)\delta g^{\mu\nu} - 2R_{\sigma\lambda}R^\sigma_\rho\delta g^{\rho\lambda} + 2R^\sigma_{\rho\alpha\lambda}R^\alpha_\sigma\delta g^{\rho\lambda} \\ & = -\nabla_\mu\nabla_\nu(R)\delta g^{\mu\nu} - 2R_{\mu\rho}R^\rho_\nu\delta g^{\mu\nu} + 2R_{\rho\mu\lambda\nu}R^{\lambda\rho}\delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

por lo que para el primer término de (5.19) tenemos

$$2R^{\alpha\beta}\nabla_\lambda\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = [\nabla^2R_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu(R) + 2R_{\rho\mu\lambda\nu}R^{\lambda\rho} - 2R_{\mu\rho}R^\rho_\nu]\delta g^{\mu\nu}. \quad (5.24)$$

Procedemos de la misma manera para el segundo término de (5.19)

$$\begin{aligned} & -2R^{\alpha\beta}\nabla_\beta\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\lambda} = 2\nabla_\beta(R^{\alpha\beta})\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\lambda} \\ & = 2\nabla_\beta(R^{\alpha\beta})g^{\rho\lambda}\frac{1}{2}(\nabla_\lambda\delta g_{\alpha\rho} + \nabla_\alpha\delta g_{\rho\lambda} - \nabla_\rho\delta g_{\alpha\lambda}) \\ & = -\nabla_\beta(R^{\alpha\beta})(g_{\alpha\rho}\nabla_\lambda\delta g^{\rho\lambda} + g_{\rho\lambda}\nabla_\alpha\delta g^{\rho\lambda} - g_{\alpha\lambda}\nabla_\rho\delta g^{\rho\lambda}). \end{aligned} \quad (5.25)$$

El primer y tercer término se anulan con un cambio de índices entre λ y ρ en alguno de ellos, por lo que nos queda un único término sobre el que integraremos por partes

$$-\nabla_\beta(R^{\alpha\beta})g_{\rho\lambda}\nabla_\alpha\delta g^{\rho\lambda} = \nabla_\alpha\nabla_\beta(R^{\alpha\beta})g_{\rho\lambda}\delta g^{\rho\lambda}. \quad (5.26)$$

Aplicando nuevamente la identidad contraída de Bianchi y renombrando índices obtenemos finalmente para el segundo término de (5.19)

$$-2R^{\alpha\beta}\nabla_\beta\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla^\alpha(R)g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla^2(R)g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (5.27)$$

de forma que para (5.27) obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} \delta(R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) & = 2R_{\mu\rho}R^\rho_\nu\delta g^{\mu\nu} + [\nabla^2R_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu(R) + 2R_{\rho\mu\lambda\nu}R^{\lambda\rho} \\ & \quad - 2R_{\mu\rho}R^\rho_\nu]\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla^\alpha(R)g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ & = \left[\nabla^2R_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu(R) + 2R_{\rho\mu\lambda\nu}R^{\lambda\rho} + \frac{1}{2}\nabla^2(R)g_{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Como resultado final para el término del tensor de Ricci obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S'_\beta}{\delta g^{\mu\nu}} = \beta\left(\nabla^2R_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu(R) + 2R_{\rho\mu\lambda\nu}R^{\lambda\rho} + \frac{1}{2}\nabla^2(R)g_{\mu\nu}\right). \quad (5.29)$$

5.1.4 Término del tensor de Riemann, $R_{\mu\nu\rho}^{\lambda}$

De forma puntual, se empleará en esta sección una notación latina para índices con la finalidad de simplificar su lectura y visualización, dado el gran número de índices que se van a utilizar. Al final de ésta, se traducirá dicha notación latina a la notación griega tradicional.

De la misma forma análoga al apartado anterior, debemos expresar la variación del tercer término, $\delta S'_\gamma$, en función del tensor de Riemann, de la métrica y la métrica inversa.

$$\delta S'_\gamma = \gamma \int_M d^D x \sqrt{-g} \delta(R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}) \equiv \gamma \int_M d^D x \sqrt{-g} \delta(R^{abcd} R_{abcd}) \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} &= \gamma \int_M d^D x \sqrt{-g} \delta(g^{bf} g^{ch} g^{dj} R_{fhj}^a g_{ae} R_{bcd}^e), \\ \delta(g^{bf} g^{ch} g^{dj} R_{fhj}^a g_{ae} R_{bcd}^e) &= 3g^{bf} g^{ch} R_{fhj}^a g_{ae} R_{bcd}^e \delta g^{dj} \\ &+ g^{bf} g^{ch} g^{dj} R_{fhj}^a R_{bcd}^e \delta g_{ae} + 2g^{bf} g^{ch} g^{dj} g_{ae} R_{fhj}^a \delta R_{bcd}^e. \end{aligned} \quad (5.31)$$

En el primer término de (5.31) se pueden contraer las métricas con el tensor de Riemann y redefinir índices mudos de tal forma que obtenemos

$$3g^{bf} g^{ch} R_{fhj}^a g_{ae} R_{bcd}^e \delta g^{dj} = 3R_{abcd} R_j^{abc} \delta g^{bf} = 3R_{acde} R_b^{cde} \delta g^{ab}. \quad (5.32)$$

En el segundo término de (5.31) se puede realizar un proceso similar, teniendo que pasar de la variación de la métrica a la variación de la métrica inversa,

$$\begin{aligned} g^{bf} g^{ch} g^{dj} R_{fhj}^a R_{bcd}^e \delta g_{ae} &= -g^{bf} g^{ch} g^{dj} R_{fhj}^a R_{bcd}^e g_{ak} g_{el} \delta g^{kl} \\ &= -R_{lbcd} R_k^{bcd} \delta g^{kl} = -R_{acde} R_b^{cde} \delta g^{ab}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Para el tercer término volvemos a aplicar la identidad de Palatini,

$$2g^{bf} g^{ch} g^{dj} g_{ae} R_{fhj}^a \delta R_{bcd}^e = 2R_e^{bcd} (\nabla_c \delta \Gamma_{db}^e - \nabla_d \delta \Gamma_{cb}^e). \quad (5.34)$$

Cada uno de los términos deben ser tratados de la misma forma que el desarrollo de (5.7) o (5.19), haciendo cada término por separado por su longitud, tomando como nulos los términos de frontera que surgen al realizar la integración por partes y sustituyendo la variación de los símbolos de Christoffel. Para el primer término tenemos

$$\begin{aligned}
2R_e^{bcd}\nabla_c\delta\Gamma_{db}^e &= -2\nabla_c(R_e^{bcd})\delta\Gamma_{db}^e \\
&= -2\nabla_c(R_e^{bcd})g^{ke}\frac{1}{2}(\nabla_d\delta g_{kb} + \nabla_b\delta g_{dk} - \nabla_k\delta g_{db}) \\
&= \nabla_c(R_e^{bcd})(g_{kb}\nabla_d\delta g^{ke} + g_{dk}\nabla_b\delta g^{ke} - g_{lb}g_{md}\nabla^e\delta g^{lm}) \\
&= \nabla^e\nabla_c(R_{el}{}^c{}_m)\delta g^{lm} - [\nabla_d\nabla_c(R_{ek}{}^{cd}) + \nabla_b\nabla_c(R_e{}^{bc}{}_k)]\delta g^{ke},
\end{aligned} \tag{5.35}$$

pero el segundo término de (5.35) es nulo por reglas de simetría y antisimetría, con lo que el primer término que surge de (5.34) queda

$$2R_e^{bcd}\nabla_c\delta\Gamma_{db}^e = \nabla^e\nabla_c(R_{el}{}^c{}_m)\delta g^{lm} - \nabla_b\nabla_c(R_e{}^{bc}{}_k)\delta g^{ke}. \tag{5.36}$$

Para el segundo término de (5.34) operamos de manera similar al primero

$$\begin{aligned}
-2R_e^{bcd}\nabla_d\delta\Gamma_{cb}^e &= 2\nabla_d(R_e^{bcd})\delta\Gamma_{cb}^e \\
&= 2\nabla_d(R_e^{bcd})g^{ke}\frac{1}{2}(\nabla_c\delta g_{kb} + \nabla_b\delta g_{ck} - \nabla_k\delta g_{cb}) \\
&= -\nabla_d(R_e^{bcd})(g_{kb}\nabla_c\delta g^{ke} + g_{ck}\nabla_b\delta g^{ke} - g_{lb}g_{mc}\nabla^e\delta g^{lm}) \\
&= [\nabla_c\nabla_d(R_{ek}{}^{cd}) + \nabla_b\nabla_d(R_e{}^{b}{}_k{}^d)]\delta g^{ke} - \nabla^e\nabla_d(R_{elm}{}^d)\delta g^{lm},
\end{aligned} \tag{5.37}$$

y como ya ocurrió antes, el primer término de (5.37) es nulo. De esta forma el segundo término de (5.34) queda

$$-2R_e^{bcd}\nabla_d\delta\Gamma_{cb}^e = \nabla_b\nabla_d(R_e{}^b{}_k{}^d)\delta g^{ke} - \nabla^e\nabla_d(R_{elm}{}^d)\delta g^{lm}. \tag{5.38}$$

Y, al combinar (5.36) y (5.38), el tercer término de (5.31) queda

$$\begin{aligned}
2g^{bf}g^{ch}g^{dj}g_{ae}R_{fhj}^a\delta R_{bcd}^e &= \nabla^e\nabla_c(R_{el}{}^c{}_m)\delta g^{lm} - \\
\nabla_b\nabla_c(R_e{}^{bc}{}_k)\delta g^{ke} + \nabla_b\nabla_d(R_e{}^b{}_k{}^d)\delta g^{ke} &- \nabla^e\nabla_d(R_{elm}{}^d)\delta g^{lm}.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Podemos renombrar índices mudos para expresar todos los términos en los mismos índices y contraer derivadas contravariantes con tensores de Riemann de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
2g^{bf}g^{ch}g^{dj}g_{ae}R_{fhj}^a\delta R_{bcd}^e &= \nabla_e\nabla_c(R_{l}{}^c{}_m)\delta g^{lm} - \\
\nabla_e\nabla_c(R_l{}^{ec}{}_m)\delta g^{lm} + \nabla_e\nabla_c(R_l{}^e{}_m{}^c)\delta g^{lm} &- \nabla_e\nabla_c(R_{lm}{}^c)\delta g^{lm} \\
&= \nabla_e\nabla_c(R_{l}{}^c{}_m + R_l{}^e{}_m{}^c - R_l{}^{ec}{}_m - R_{lm}{}^c)\delta g^{lm}.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Podemos trabajar con el argumento de ∇_e para expresarlo como un único sumando aplicando reglas de simetrías,

$$\begin{aligned}
& \nabla_c(R_l^e{}^c{}_m + R_l^e{}^c{}_m - R_l^{ec}{}_m - R_{lm}^e{}^c) \\
&= \nabla_c[g^{ye}g^{zc}(R_{ylzm} + R_{lymz} - R_{lyzm} - R_{ylmz})] \\
&= g^{ye}g^{zc}\nabla_c(R_{ylzm} + R_{ylzm} + R_{ylzm} + R_{ylzm}) \\
&= 4g^{ye}\nabla_c R_{ylm}{}^c,
\end{aligned} \tag{5.41}$$

y aplicando la segunda identidad de Bianchi contraída, podemos obtener

$$4g^{ye}\nabla_c R_{ylm}{}^c = -4g^{ye}(\nabla_m R_{ly} - \nabla_y R_{lm}) = 4\nabla^e R_{lm} - 4\nabla_m R_l^e. \tag{5.42}$$

Incorporando el resultado de (5.42) en (5.40) podemos llegar a

$$\begin{aligned}
2g^{bf}g^{ch}g^{dj}g_{ae}R_{fhj}^a\delta R_{bcd}^e &= 4\nabla_e(\nabla^e R_{lm} - 4\nabla_m R_l^e)\delta g^{lm} \\
&= 4\nabla^2 R_{ab}\delta g^{ab} - 4\nabla_e\nabla_b(R_a^e)\delta g^{ab},
\end{aligned} \tag{5.43}$$

sobre el segundo término podemos aplicar (2.11) para tener

$$\begin{aligned}
-4\nabla_e\nabla_b(R_a^e)\delta g^{ab} &= -4[\nabla_b\nabla_e(R_a^e) + R_{xeb}R_a^x - R_{aeb}^xR_x^e]\delta g^{ab} \\
&= [4(R_{aeb}^xR_x^e - R_{xb}R_a^x) - 2\nabla_b\nabla_a R]\delta g^{ab},
\end{aligned} \tag{5.44}$$

de esta forma, (5.34) nos queda

$$\begin{aligned}
& 2g^{bf}g^{ch}g^{dj}g_{ae}R_{fhj}^a\delta R_{bcd}^e \\
&= 4\nabla^2 R_{ab}\delta g^{ab} + [4(R_{aeb}^xR_x^e - R_{xb}R_a^x) - 2\nabla_b\nabla_a R]\delta g^{ab}.
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Podemos escribir finalmente todos los términos para (5.31)

$$\begin{aligned}
\delta(R^{abcd}R_{abcd}) &= \delta(g^{bf}g^{ch}g^{dj}R_{fhj}^a g_{ae}R_{bcd}^e) \\
&= [2(R_{acde}R_b^{cde} - \nabla_b\nabla_a R) + 4(\nabla^2 R_{ab} + R_{xaeb}R^{ex} - R_{xb}R_a^x)]\delta g^{ab}.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Como resultado final para el término del tensor de Riemann obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S'_\gamma}{\delta g^{ab}} &= \gamma[2(R_{acde}R_b^{cde} - \nabla_b\nabla_a R) \\
&+ 4(\nabla^2 R_{ab} + R_{xaeb}R^{ex} - R_{xb}R_a^x)],
\end{aligned} \tag{5.47}$$

y recuperando la notación de índices griega

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S'_\gamma}{\delta g^{\mu\nu}} &= \gamma \left[2(R_{\mu\rho\lambda\sigma} R_\nu^{\rho\lambda\sigma} - \nabla_\mu \nabla_\nu R) \right. \\ &\left. + 4(\nabla^2 R_{\mu\nu} + R_{\rho\mu\lambda\nu} R^{\rho\lambda} - R_{xb} R_a^x - R_{\mu\rho} R_\nu^\rho) \right]. \end{aligned} \quad (5.48)$$

5.1.5 Ecuaciones de campo completas para curvatura cuadrática

Una vez realizada la variación de cada término, podemos unir todas las variaciones para obtener

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S'}{\delta g^{\mu\nu}} = \alpha(2g_{\mu\nu} \nabla^2 R - 2\nabla_\mu \nabla_\nu R + 2RR_{\mu\nu}) \\ &+ \beta \left(\nabla^2 R_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu (R) + 2R_{\rho\mu\lambda\nu} R^{\rho\lambda} + \frac{1}{2} \nabla^2 (R) g_{\mu\nu} \right) \\ &+ \gamma \left[2(R_{\mu\rho\lambda\sigma} R_\nu^{\rho\lambda\sigma} - \nabla_\mu \nabla_\nu R) + 4(\nabla^2 R_{\mu\nu} + R_{\rho\mu\lambda\nu} R^{\rho\lambda} - R_{\mu\rho} R_\nu^\rho) \right] \\ &- \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\alpha R^2 + \beta R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \gamma R^{\mu\nu\rho\lambda} R_{\mu\nu\rho\lambda}), \end{aligned} \quad (5.49)$$

de forma que, teniendo en cuenta el término lineal y de materia, podemos expresar las ecuaciones completas de campo para nuestro modelo con correcciones cuadráticas de curvatura

$$G_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (5.50)$$

5.2 Término de Gauss-Bonnet

Como era de esperar, la variación de los términos de curvatura cuadrática desemboca en ecuaciones diferenciales de orden superior a dos. Con la elección adecuada de las constantes α , β y γ , podemos llegar a una expresión de $H_{\mu\nu}$ sin términos de orden superior. Se puede mostrar que para $D = 4$ este término es una derivada total, sin embargo, para demostrarlo sería muy conveniente realizarlo en formalismo de primer orden, el cual no se discute en este trabajo. Si tomamos $\alpha = 1$, $\beta = -4$ y $\gamma = 1$, llegamos a

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S'}{\delta g^{\mu\nu}} = (2g_{\mu\nu} \nabla^2 R - 2\nabla_\mu \nabla_\nu R + 2RR_{\mu\nu}) \\ &- 4 \left(\nabla^2 R_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu (R) + 2R_{\rho\mu\lambda\nu} R^{\rho\lambda} + \frac{1}{2} \nabla^2 (R) g_{\mu\nu} \right) \\ &+ \left[2(R_{\mu\rho\lambda\sigma} R_\nu^{\rho\lambda\sigma} - \nabla_\mu \nabla_\nu R) + 4(\nabla^2 R_{\mu\nu} + R_{\rho\mu\lambda\nu} R^{\rho\lambda} - R_{\mu\rho} R_\nu^\rho) \right] \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\alpha R^2 + \beta R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \gamma R^{\mu\nu\rho\lambda}R_{\mu\nu\rho\lambda}) \\
= & 2RR_{\mu\nu} - 4R_{\rho\mu\lambda\nu}R^{\rho\lambda} + 2R_{\mu\rho\lambda\sigma}R^{\rho\lambda\sigma} - 4R_{\mu\rho}R^{\rho}_{\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R^2 - \\
& 4R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^{\mu\nu\rho\lambda}R_{\mu\nu\rho\lambda}).
\end{aligned}$$

La ecuación (5.51) muestra una expresión reducida para $H_{\mu\nu}$ conocida como el tensor de Lanczos. Dicho tensor sustituye a las ecuaciones de Einstein en el principio de mínima acción cuando dicha acción es el conocido como el término de Gauss-Bonnet,

$$\mathcal{L}_{GB} = (R^2 - 4R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^{\mu\nu\rho\lambda}R_{\mu\nu\rho\lambda})\sqrt{-g}. \quad (5.52)$$

6. Conclusiones

En primer lugar, se ha desarrollado de forma simple y sencilla nuestra teoría gravitatoria en el lenguaje de la geometría diferencial, plasmando lo realizado por Einstein en su teoría de la Relatividad General.

También se han derivado las ecuaciones de campo de Einstein a partir de la variación de la acción para curvaturas lineales, obteniendo ecuaciones diferenciales de segundo orden y, de forma análoga para curvaturas cuadráticas, se obtuvieron ecuaciones diferenciales de cuarto orden que quedaron simplificadas el tensor de Lanczos, correspondiente a ecuaciones de segundo orden, particularizando para el término de Gauss-Bonnet.

Por último, se ha hallado la solución de Schwarzschild para las ecuaciones de Einstein y se ha representado gráficamente nuestro espacio-tiempo a partir de las transformaciones de coordenadas correctas.

El desarrollo de este trabajo ha servido para introducirnos en la teoría de la Relatividad General en un aspecto tanto matemático como físico de forma satisfactoria y asentar las bases para el estudio gravedades modificadas, siendo Gauss-Bonnet el caso más simple de todas.

Apéndice A. Variaciones

- Variación de la métrica inversa

$$0 = \delta\delta_v^\mu = \delta(g_{\nu\lambda}g^{\mu\lambda}) = g^{\mu\lambda}\delta g_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}\delta g^{\mu\lambda}, \quad (\text{A.1})$$

$$\delta g_{\nu\lambda} = -g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}\delta g^{\mu\rho}. \quad (\text{A.2})$$

- Variación del símbolo de Christoffel

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu\sigma} &= g_{\sigma\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g_{\sigma\lambda}g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \delta(g^{\sigma\lambda}\Gamma_{\mu\nu\sigma}) \\ &= \Gamma_{\mu\nu\sigma}\delta g^{\sigma\lambda} + g^{\sigma\lambda}\delta\Gamma_{\mu\nu\sigma} = g^{\delta\sigma}g^{\lambda\rho}\Gamma_{\mu\nu\sigma}\delta g_{\delta\rho} + g^{\rho\lambda}\delta\Gamma_{\mu\nu\rho} \\ &= \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\mu\delta g_{\rho\nu} + \partial_\nu\delta g_{\rho\mu} - \partial_\rho\delta g_{\mu\nu} - 2\Gamma_{\mu\nu}^\delta\delta g_{\delta\rho}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}[(\partial_\mu\delta g_{\rho\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha\delta g_{\alpha\rho} - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha\delta g_{\alpha\mu}) \\ &\quad + (\partial_\nu\delta g_{\rho\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha\delta g_{\alpha\rho} - \Gamma_{\rho\mu}^\alpha\delta g_{\alpha\nu}) \\ &\quad - (\partial_\rho\delta g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha\delta g_{\alpha\mu} - \Gamma_{\rho\mu}^\alpha\delta g_{\alpha\nu})] \\ &= \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\nabla_\mu\delta g_{\rho\nu} + \nabla_\nu\delta g_{\rho\mu} - \nabla_\rho\delta g_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

- Variación del tensor de Ricci, identidad de Palatini.

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda = \partial_\lambda\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda\Gamma_{\mu\lambda}^\rho, \quad (\text{A.5})$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho\delta\Gamma_{\lambda\rho}^\lambda - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho\delta\Gamma_{\nu\rho}^\lambda, \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla_\lambda\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \partial_\lambda\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho\delta\Gamma_{\nu\rho}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho\delta\Gamma_{\nu\rho}^\lambda, \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla_\beta\delta\Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda = \partial_\nu\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\rho\delta\Gamma_{\lambda\rho}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho\delta\Gamma_{\mu\rho}^\lambda, \quad (\text{A.8})$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda. \quad (\text{A.9})$$

Apéndice B. Transformación de coordenadas

- Coordenadas IEF

$$r_* = r + 2M \ln\left(\frac{r-2M}{2M}\right) \rightarrow dr_* = dr\left(1 + \frac{2M}{r-2M}\right), \quad (B.1)$$

$$v = t + r_* \rightarrow dv = dt + dr\left(1 + \frac{2M}{r-2M}\right) = dt + dr\left(\frac{r}{r-2M}\right), \quad (B.2)$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 - \left(\frac{2r}{r-2M}\right)\left(\frac{r-2M}{r}\right) dvdr + \left(\frac{r}{r-2M}\right)^2 \left(\frac{r-2M}{r}\right) dr^2 \\ &\quad - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \end{aligned} \quad (B.3)$$

- Coordenadas OEF

$$u = t - r_* \rightarrow du = dt - dr\left(1 + \frac{2M}{r-2M}\right) = dt - dr\left(\frac{r}{r-2M}\right), \quad (B.4)$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 + \left(\frac{2r}{r-2M}\right)\left(\frac{r-2M}{r}\right) dudr + \left(\frac{r}{r-2M}\right)^2 \left(\frac{r-2M}{r}\right) dr^2 \\ &\quad - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 + 2dudr - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \end{aligned} \quad (B.5)$$

- Coordenadas KS

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2, \end{aligned} \quad (B.6)$$

$$U = -\exp\left(-\frac{u}{4M}\right) \rightarrow du = -4M \frac{dU}{U}, \quad (B.7)$$

$$V = \exp\left(\frac{v}{4M}\right) \rightarrow dv = 4M \frac{dV}{V}, \quad (B.8)$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ &= \frac{32M^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{2M}\right) dUdV - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \end{aligned} \quad (B.9)$$

Bibliografía

- [1] Robert M. Wald. General Relativity. *The University of Chicago Press*, 1984.
- [2] Steven Weinberg. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity. *John Wiley & Sons*, 1972.
- [3] Chakkrit Kawonikhom. Variational Principle Approach to General Relativity, 2006.
http://www.if.nu.ac.th/sites/default/files/bin/BS_chakkrit.pdf
- [4] Mónica Borunda, Bert Janssen y Mar Bastero-Gil. Palatini versus metric formulation in higher-curvature gravity. JCAP 0811 (2008) 008. arXiv:0804.4440
- [5] Fay Dowker. Lecture notes on Black Holes, 2015.
https://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/research-centres-and-groups/theoretical-physics/msc/current/black-holes/bh-notes-2014_15.pdf
- [6] Hideki Maeda, Robert Švart y Jiří Podolský. Decreasing entropy of dynamical black holes in critical gravity. JHEP 1806 (2018) 118. arXiv:1805.00026
- [7] Anil Çolpan Zenginoğlu. A conformal approach to numerical calculations of asymptotically flat spacetimes, 2007. arXiv:0711.0873
- [8] Robert C. Myers. Higher Derivative Gravity, Surface Terms and String Theory. Phys.Rev. D36 (1987) 392
- [9] Gary Oas. Lecture notes on Special and general relativity, 2015.
<https://web.stanford.edu/~oas/SI/SRGR/notes/SchwarzschildSolution.pdf>
- [10] F. Javier Moreno. Dimensional Reduction in Lovelock Gravity, TFM, Universidad Autónoma de Madrid. Instituto de Física Teórica, 2017.
- [11] Bert Janssen. Teoría de la Relatividad General. 2017
<https://www.ugr.es/~bjanssen/text/BertJanssen-RelatividadGeneral.pdf>
- [12] Imagen tomada de
https://einsteinrelativelyeasy.com/index.php?option=com_content&view=article&id=61&catid=9&Itemid=111