

Imágenes Digitales y Complejos Simploidales[©]

Rocío González-Díaz, María José Jiménez, Pedro Real, Yolanda Ruiz

Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla.

E-mail: {rogodi,majiro,real,yolandaruiz}@us.es

Resumen. Nuestro objetivo en este trabajo es adaptar los algoritmos de adelgazamiento topológico y algebraico dados en [4, 5] para el caso de complejos simploidales. La adaptación del adelgazamiento algebraico ya aparece en [8]. Nos centraremos por tanto en la fase de adelgazamiento topológico. Dada una imagen digital I , pretendemos obtener un complejo adelgazado T y una contracción de cadenas entre $C(K(I))$ y $C(T)$ tal que el complejo T “preserve” la geometría de I y no sólo la topología. Para ello, lo primero que debemos hacer es codificar la imagen I en una representación más adecuada como la de árbol cuaternario y asociarle un complejo simploidal que vendrá dado por las adyacencias de cada elemento de la imagen I .

Palabras clave. Imágenes digitales, complejos simploidales, esqueleto.

1 IMÁGENES DIGITALES

La topología asociada a una imagen digital se basa en la definición de adyacencia o vecindad en cada elemento de la imagen. Vamos a centrar nuestra atención en imágenes digitales de dimensión 2 y 3, aunque los algoritmos que exponemos aquí se pueden generalizar a cualquier dimensión. Los elementos básicos que componen una imagen digital $2D$ se llaman *píxeles* y los de una imagen $3D$ se llaman *vóxeles*. A cada elemento de una imagen digital se le asociará un punto de coordenadas enteras. Los vecinos de un píxel (resp. voxel) vienen condicionados por el mallado considerado en la imagen digital en el proceso de digitalización. El más común es el mallado cuadrado (resp. cúbico). Las adyacencias más importantes que se definen en este tipo de mallado son:

- Dos puntos en \mathbb{Z}^2 (resp. \mathbb{Z}^3) se dice que son *8-adyacentes* (resp. *26-adyacentes*) si ellos son distintos y cada coordenada de uno de ellos difiere de la correspondiente coordenada del otro en a lo más 1;

[©] Parcialmente financiado por la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía (FQM-296 y TIC-02268) y la Secretaría de Estado de Universidades e Investigación (MTM-2006-03722).

Todas las imágenes aquí mostradas se han obtenido usando los programas [3] y [16].

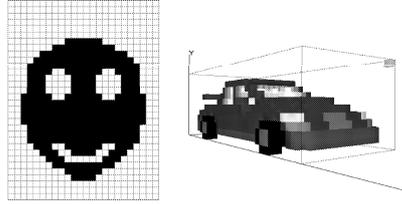


Figura 1.1: Imagen digital binaria 2D y 3D.

- Dos puntos en \mathbb{Z}^2 (resp. \mathbb{Z}^3) se dice que son *4-adyacentes* (*6-adyacentes*) si son *8-adyacentes* (resp. *26-adyacentes*) y difieren en sólo una de sus coordenadas.

Esta definición se puede generalizar a cualquier dimensión.

Seguiremos la terminología dada en [11] para representar imágenes digitales. Consideraremos imágenes digitales *binarias* donde los elementos de la imagen sólo pueden ser blancos (si pertenecen al fondo de la imagen) o negros (si pertenecen a los objetos representados en la imagen). Un *espacio digital nD* o *DPS* (del inglés digital picture space) es una tripleta (V, β, ω) , donde V es el conjunto de puntos de un mallado n -dimensional y β (resp. ω) determina las relaciones de adyacencia entre los puntos negros de la imagen (resp. puntos blancos). Una *imagen digital binaria nD* es un cuádruple $I = (B, V, \beta, \omega)$ donde (V, β, ω) es un espacio digital n -dimensional y B es un subconjunto finito de V (el conjunto de los puntos negros de la imagen).

Nota 1. Diremos que dos puntos negros de una imagen digital (B, V, β, ω) son *adyacentes* si son β -adyacentes y dos puntos blancos o un punto blanco y uno negro son *adyacentes* si son ω -adyacentes.

Sea $V \subset \mathbb{Z}^n$. Un isomorfismo entre dos imágenes digitales nD , (B_1, V, β, ω) e (B_2, V, β, ω) es un homeomorfismo h del espacio euclídeo n -dimensional en sí mismo que lleva V en V , respeta las relaciones de adyacencia en V y tal que $h(B_1) = B_2$.

En la figura 1 podemos ver dos ejemplos sencillos de imágenes digitales usando el mallado cuadrado y cúbico, que se corresponderían con los espacios digitales $(\mathbb{Z}^2, 8, 4)$ y $(\mathbb{Z}^3, 26, 6)$, respectivamente. Estos espacios digitales son muy usados en la actualidad.

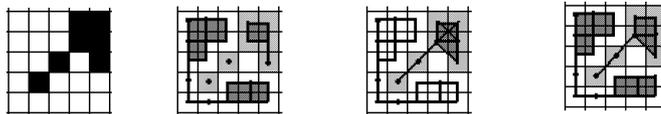


Figura 1.2: Imagen en el espacio digital $(\mathbb{Z}^2, 8, 4)$ y los complejos cúbicos, simpliciales y simploidales asociados.

2 REPRESENTACIÓN SIMPLOIDAL DE IMÁGENES DIGITALES

Los grupos de homología, la característica de Euler digital o el grupo fundamental digital son propiedades topológicas que han sido muy estudiadas en el área de la Topología Digital [10, 15]. Todas estas propiedades son adaptaciones al espacio discreto de invariantes topológicos clásicos. Una forma de hacer esto es asociar un objeto “continuo” $C(I)$ que sea “análogo” (topológica y geoméricamente hablando) a la imagen digital I [12, 1, 9]. De esta manera, $C(I)$ “rellenaría los huecos” existentes entre los punto negros de I según la relación de adyacencia definida en I .

Para obtener $C(I)$, se suelen usar estructuras combinatoriales como los complejos cúbicos y simpliciales [13, 14]. Si nos restringimos a objetos inmersos en \mathbb{R}^3 , un *complejo cúbico* es una colección de puntos, aristas, cuadrados y cubos que se unen de forma adecuada para formar el objeto. Análogamente, un *complejo simplicial* está formado por vértices, aristas, triángulos y tetraedros. En este trabajo usaremos una estructura combinatorial menos conocida que engloba las dos anteriores: los *complejos simploidales* [2]. Con este tipo de representaciones se evitan problemas de alteración de la geometría que surgen con las otras representaciones (ver figura 2). Además, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1. *Dos imágenes digitales $I_1 = (B_1, \mathbb{Z}^2, 8, 4)$ e $I_2 = (B_2, \mathbb{Z}^2, 8, 4)$ son isomorfas si y sólo si sus representaciones simploidales $K(I_1)$ y $K(I_2)$ son homeomorfas. Análogamente ocurre con imágenes en el espacio digital $(\mathbb{Z}^3, 26, 6)$. Además, el complejo simploidal $K(I)$ y a la imagen digital I a la que está asociado tienen la misma dimensión y el mismo número de componentes conexas, agujeros y cavidades.*

Dado que los complejos simpliciales son un caso particular de complejos simploidales, el teorema anterior también es válido para imágenes en los espacios digitales $(\mathbb{Z}^2, 6, 6)$ y $(\mathbb{Z}^3, 14, 14)$ (ver [5, 4]).

3 ÁRBOL CUATERNARIO Y COMPLEJO SIMPLOIDAL

En [5, 4] se exponen algoritmos para adelgazar una imagen digital representada por un complejo simplicial en dos fases. En la primera fase, se realiza un adelgazamiento topológico mediante colapsamiento simplicial para conseguir un complejo simplicial “adelgazado” con la misma topología que el primero; en la segunda fase se realiza un adelgazamiento algebraico mediante un algoritmo incremental para calcular la homología de la imagen. El objetivo último es calcular una contracción de cadenas (ver la definición 1) que conecte el complejo simploidal asociado a la imagen digital con la homología de la imagen. De esta forma se consigue calcular no sólo el número de componentes conexas y agujeros, sino también el conjunto de símlices que representan a cada componente conexa y agujero. Más concretamente, una componente conexa se representará por un vértice y un agujero por un conjunto de aristas que formen un ciclo.

A partir de ahora, consideraremos, por simplicidad, que las imágenes están en $(\mathbb{Z}^2, 8, 4)$, aunque los resultados que aquí exponemos se pueden generalizar a cualquier dimensión.

Definición 1. *Un complejo simploidal K viene determinado por la lista de los vértices, aristas, cuadrados (o polígonos de 4 lados) y triángulos que lo componen. A esta lista podemos dotarla de estructura de grupo donde las q -cadenas son sumas formales de q -celdas (una 0-celda es un vértice, una 1-celda es una arista y una 2-celda es un cuadrado o un triángulo). Al complejo simploidal K dotado de estructura de grupo se le denota por $C(K)$. Una q -celda σ viene totalmente determinada por la secuencia de las coordenadas de sus vértices: $\sigma = v_1 \cdots v_n$ de forma que v_1, \dots, v_n es un camino (es decir, dos vértices consecutivos en σ están unidos por una arista en K). El borde de la q -celda σ , $\partial\sigma$, es la suma de las $(q-1)$ -celdas en K cuyos vértices se encuentran en el conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$. El borde de una q -cadena es el borde de cada una de las q -celdas que la componen.*

Una contracción de cadenas entre $C(K_1)$ y $C(K_2)$ donde K_1 y K_2 son dos complejos simploidales, consiste en tres homomorfismos $f : C(K_1) \rightarrow C(K_2)$, $g : C(K_2) \rightarrow C(K_1)$ y $\phi : C(K_1) \rightarrow C(K_1)$ tal que $f\partial(a_1) = \partial f(a_1)$, $g\partial(a_2) = \partial g(a_2)$, $(\phi\partial + \partial\phi)(a_1) = a_1 + gf(a_1)$ y $fg(a_2) = a_2$ para cualquier cadena $a_1 \in C(K_1)$ y $a_2 \in C(K_2)$. Entre otras propiedades, se cumple que si existe una contracción de cadenas entre $C(K_1)$ y $C(K_2)$ entonces K_1 tiene mayor número de celdas que K_2 pero ambos tienen la misma homología.

Nuestro objetivo es adaptar los algoritmos de adelgazamiento topológico y algebraico dados en [4, 5] para el caso de complejos simploidales. Hemos de decir que la adaptación del adelgazamiento algebraico para el caso de trabajar con complejos simploidales ya aparece en [8]. Nos centraremos por tanto en la fase

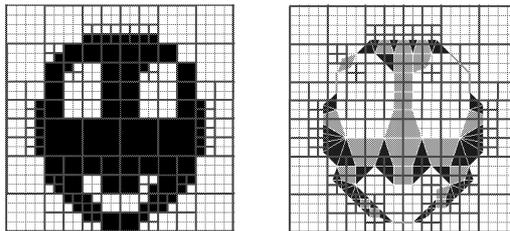


Figura 1.3: Representación del árbol cuaternario de la parte negra de la imagen digital 2D de la figura 1 y el complejo simploidal $K(Q(I))$ asociado.

de adelgazamiento topológico. Dada una imagen digital I , pretendemos obtener un complejo adelgazado T y una contracción de cadenas entre $C(K(I))$ y $C(T)$ tal que el complejo T “preserve” la geometría de I y no sólo la topología. Para ello, lo primero que debemos hacer es codificar la imagen I en una representación más adecuada como la de árbol cuaternario.

Definición 2. *Dada una imagen digital binaria I , las hojas del árbol cuaternario $Q(I)$ de dicha imagen representan los cuadrantes de la imagen y son etiquetadas con el color del área correspondiente, es decir, negro o blanco. A cada hoja A del árbol le asignaremos un código único que lo localiza $(A_1A_2\dots A_n)$ con $A_i \in \{0, 1, 2, 3\}$, donde cada dígito en la secuencia representa la subdivisión del cuadrante de la que procede. Además, a cada hoja le asignaremos un peso que se corresponderá con el radio del cuadrante que represente dicha hoja.*

El complejo simploidal $K(Q(I))$ asociado a $Q(I)$ se construye como sigue: los vértices de $K(Q(I))$ son las hojas de $Q(I)$, las aristas de $K(Q(I))$ unen 2 vértices del mismo color tal que los cuadrantes que representan son adyacentes en I , los cuadrados (o polígonos de 4 lados) unen 4 vértices del mismo color mutuamente adyacentes, y por último, los triángulos unen 3.

La realización geométrica $|K(Q(I))|$ se puede obtener a partir de $|K(I)|$ mediante deformaciones continuas de forma similar a como se hizo en [6] para complejos simpliciales.

Dado un complejo simploidal K , llamaremos *celdas maximales* a las celdas que no pertenecen al borde de ninguna otra celda en K . Diremos que v es *vértice simple* de K (por analogía al concepto de punto simple [11]) si el complejo simploidal T que se obtiene al aplicar el algoritmo 1 es homotópico a K .

Si $K(Q(I))$ es un complejo simploidal asociado a una imagen digital 2D, un vértice v es simple en K si: o bien, pertenece a una única arista de K , o bien el número de aristas a las que pertenece v (que denotaremos $\delta(v)$) es uno más que el número de 2-celdas a las que pertenece.

El siguiente algoritmo nos muestra cómo debe ser eliminado un vértice simple en un complejo simploidal K inmerso en \mathbb{R}^2 .

Algoritmo 1. Eliminar un vértice simple v de un complejo simploidal K .

INPUT: *El complejo simploidal K y el vértice v .*

OUTPUT: *Un complejo simploidal T .*

Inicio: $T := K$.

Sea $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ el conjunto de celdas maximales de K que contienen al vértice v .

Desde $i = 1$ hasta m hacer:

Caso 1: *Si σ_i es una arista, $\sigma_i = vw$:*

$T := T \setminus \{v, vw\}$.

Caso 2: *Si σ_i es un triángulo, $\sigma_i = xv w$:*

$T := T \setminus \{v, vw, xv, xv w\}$.

Caso 3: *Si σ_i es un cuadrado, $\sigma_i = xyvw$:*

$T := T \setminus \{v, yv, vw, xyvw\} \cup \{yw, xyw\}$.

Observemos que si eliminamos un vértice v que pertenece a un cuadrado $xyvw$ en K , entonces desaparece el cuadrado de K y aparece el triángulo xyw . Para calcular una contracción de cadenas entre la entrada y la salida del algoritmo anterior, sólo hemos de aplicar el algoritmo 4 que aparece en [7].

Para preservar en cierta medida la geometría de la imagen, a la hora de adelgazar el complejo simploidal K , para cada vértice v tendremos en cuenta su peso $p(v)$ y su número de incidencia $\delta(v)$. Fijado un valor umbral p , sólo eliminaremos aquellos vértices simples de K cuyo peso sea menor que p .

Algoritmo 2. Algoritmo de adelgazamiento de un complejo simploidal K .

INPUT: *Un complejo simploidal K y un valor umbral p .*

OUTPUT: *Un complejo simploidal T , sin vértices simples de peso menor que p , homotópico a K .*

Inicio: $T := K$.

Mientras: T tenga vértices simples de peso menor que p :

Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ el conjunto de vértices simples de T de peso menor que p , ordenados por pesos de menor a mayor y por número de incidencia de menor a mayor.

Desde $i = 1$ hasta n hacer:

Si v_i es simple en T , aplicar el algoritmo 1 a v_i y T , para obtener como salida un complejo simploidal S .

$T := S$.

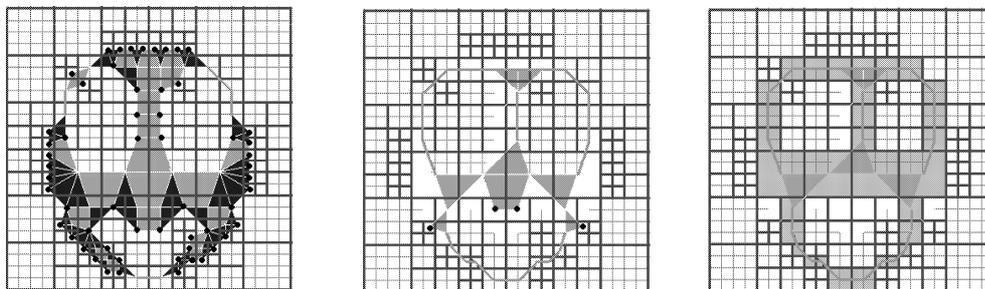


Figura 1.4: Sucesivos pasos del algoritmo 2.

Es fácil ver que la salida de este algoritmo, T , satisface que no tiene vértices simples y que es homotópico a K .

4 TRABAJO FUTURO

En [4, 5] se calcula un invariante nuevo llamado $HB1$ derivado del producto existente en cohomología (dual algebraico de la homología) y que tiene la propiedad de ser un invariante más fino que la homología. Es decir, dos imágenes no isomorfas con el mismo número de componentes conexas, agujeros y cavidades, pueden tener distinto $HB1$. El principal problema que nos enfrentamos a la hora de trabajar con complejos simploidales y aplicar los algoritmos desarrollados para el cálculo de cohomología de una imagen simplicial en [4, 5], es que en un complejo simplicial se puede definir una función diagonal que produce un producto en cohomología de forma natural. Nosotros pretendemos definir de forma adecuada algún tipo de función diagonal que también nos permita desarrollar algoritmos que calculen la cohomología y el producto en cohomología para complejos simploidales.

REFERENCIAS

- [1] Ayala R., Domínguez E., Francés A.R., Quintero A.: Homotopy in Digital Spaces. DGCI2000, LNCS, Springer-Verlag **1953** (2000) 3–14
- [2] Dahmen W., Micchelli C.A.: On the Linear Independence of Multivariate b-Splines. Triangulation of Simplicoids. SIAM J. Numer. Anal., **19** (1982).
- [3] Garcia J., Marín M.A., Real P.: Herramientas Experimentales para el Análisis Topológico de Imágenes Digitales 3D. Revista digital Imagen-A <http://imagen-a.us.es> **2** (2007).

- [4] González-Díaz R., Real P.: Towards Digital Cohomology. DGCI2003, LNCS, Springer **2886** (2003) 92–101.
- [5] González-Díaz R., Real P.: On the Cohomology of 3D Digital Images. Discrete Applied Math v. 147 (2005) 245–263.
- [6] Gonzalez-Diaz R., Medrano B., Real P., Sánchez-Peláez J.: Algebraic Topological Analysis of Time-Sequence of Digital Images. CASC2005, LNCS **139** (2005) 208–219.
- [7] Gonzalez-Diaz R., Medrano B., Real P., Sánchez-Peláez J.: Simplicial Perturbation Technique and Effective Homology. CASC2006, LNCS **4194** (2006) 166–177.
- [8] Gonzalez-Diaz R., Jiménez M.J., Medrano B., Real P.: Extending the notion of AT-model for integer homology computation. GbR2007, LNCS, to appear.
- [9] Khalimsky E.D., Kopperman R.D., Meyer P.R.: Computer Graphics and Connected Topologies on Finite Ordered Sets. Topology and Appl. **36** (1990) 1–17
- [10] Kong T.Y.: A digital Fundamental Group. Comput. Graphics **13** (1989) 159–166
- [11] Kong T.Y., Roscoe A.W., Rosenfeld A.: Concepts of Digital Topology. Topology and its Applications **8** (1992) 219–262
- [12] Kovalevsky V.: Axiomatic Digital Topology. J. of Mathematical Imaging and Vision **26** (2006) 41–58.
- [13] Massey W.M.: A Basic Course in Algebraic Topology. New York, 1991.
- [14] Munkres J.R.: Elements of Algebraic Topology. Addison–Wesley Co. (1984)
- [15] Rosenfeld A.: 3D Digital Topology. Inform. and Control **50** (1981) 119–127
- [16] Sánchez-Peláez, J., Real P.: VOXELO. <http://alojamientos.us.es/gtocomma/voxelo.rar> (2004).