El proyecto CHATA

V. Álvarez, J.A. Armario, M.D. Frau, R. González–Díaz, M.J. Jiménez, P. Real y B. Silva
Dpto. Matemática Aplicada I (Universidad de Sevilla)
Avda. Reina Mercedes, s/n. CP: 41012 Sevilla (España)
E-mails: {valvarez,armario,mfrau,rogodi,majiro,real,silva}@cica.es

Resumen

En este artículo, se pretende dar una visión general y lo más divulgativa posible sobre los propósitos y objetivos del proyecto de investigación CHATA (*Computational Homological Algebra and Algebraic Topology and Applications*), en el que estamos involucrados siete investigadores del Departamento de Matemática Aplicada *I* de la Universidad de Sevilla. Este proyecto tiene como objetivo esencial el desarrollo de procesos algorítmicos en Topología Algebraica y Álgebra Homológica de interés práctico. Es necesario enfatizar que nuestra motivación no es tan sólo obtener soluciones positivas al problema de la computabilidad en estas áreas (problema ya de por sí delicado), sino que *fundamentalmente* nuestra preocupación es la misma que Tangora [48] mostraba en los años ochenta: "convertir, siempre que sea posible, soluciones intratables desde el punto de vista práctico debido a la enorme complejidad que presentan, en algoritmos tratables y viables. Ante tal meta, en una primera etapa es obligado plantearse, por una parte, un procedimiento general para considerar constructivamente los métodos usados en estos campos y, por otra, una teoría de complejidad en estas áreas que nos permita evaluar adecuadamente la eficiencia de los algoritmos, para después intentar realizar un refinamiento de estos.

1 Introducción

La Topología Algebraica analiza transformaciones de datos continuos a discretos. Una primera fase en este proceso de discretización fue el establecer invariantes algebraicos asociados a los espacios topológicos. Dichos invariantes son útiles algebraicos que nos ayudan a distinguir espacios topológicos no–homeomorfos. El proyecto CHATA hace especial hincapié en el diseño de algoritmos de cálculo de invariantes que sean lo más eficientes posible. La tarea teórica es dura debido a los elevados costes computacionales que, en general, presentan estos procesos. No estamos tan interesados en obtener resultados aún no conocidos y originales en Topología Algebraica como en establecer una cimentación algorítmica sólida en este campo.

Esta propuesta tiene cabida dentro de otra iniciativa más amplia que nuestro grupo desarrolla en el contexto de la emergente área de Topología Computacional.

Por supuesto, el objetivo último de este proyecto es el de implementar en máquina informática los algoritmos diseñados por el grupo, usando lenguajes de programación como $C++$ o LISP (donde es posible trabajar en un marco de programación fuertemente orientada a objeto) y/o programas comerciales como Mathematica, MAPLE, etc. Para esta tarea, ya contamos con la ayuda de investigadores expertos en este contexto como son los profesores Julio Rubio (Universidad de Zaragoza) y Francis Sergeraert (Universidad de Grenoble I). Más concretamente, en colaboración con el grupo de investigación que dirige el profesor Julio Rubio coordinamos en los próximos tres años, un proyecto de investigación de la Dirección General de Enseñanza Superior e Investigación Científica (PB98-1621-C02-02) y en donde la línea de acción que propone CHATA está completamente integrada.

El proyecto CHATA requiere un trabajo interdisciplinar bien organizado. Éste se intentará mover entre campos tan extensos como Topología Computacional, Álgebra Computational, Álgebra Homológica, Teoría de Grupos, Topología Algebraica, Teoría de Diseños Combinatoriales, Sistemas Dinámicos, Cálculo Secundario (y aproximaciones algebraicas a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no–lineales) y Física Cohomológica. Todas estas áreas, algunas de ellas aparentemente disconexas entre sí, están ligadas por una visión unificada a través de nuestro proyecto.

En este artículo, no pretendemos ser exhaustivos a la hora de concretar todos los objetivos que nos marcamos en esta iniciativa sino explicar a grandes trazos nuestra forma de trabajar para establecer métodos computacionales en distintos problemas de Topología Algebraica y Álgebra Homológica.

En primer lugar, comentamos someramente el problema de la computabilidad, al tiempo que se aportan soluciones algorítmicas de índole general para tratar una gran cantidad de cuestiones en Topología Algebraica y Álgebra Homológica. Proseguimos dando una idea del problema de la complejidad en este ámbito, para posteriormente meternos de lleno en los objetivos a corto y medio plazo que pretende alcanzar el proyecto CHATA. Operaciones cohomológicas, homología de fibrados simpliciales (siendo los factores conjuntos simpliciales significativos), grupos de homotopía, homología de álgebras diferenciales graduadas conmutativas y homología de grupos son los tópicos sobre los que aquí discutiremos someramente desde una perspectiva computacional.

2 Computabilidad en Topología Algebraica

Comencemos con un problema en Topología Digital 2–dimensional. Supongamos que tenemos un objeto A en el plano y que realizamos un proceso de digitalización del mismo. La digitalización que usaremos es la utilizada en [22], la cual aproxima muchos procesos de digitalización reales. Este método está modelado como una aplicación de conjuntos continuos representando objetos reales a conjuntos discretos representando imágenes digitales. Usando un sensor real, la digitalización de A, la definimos con respecto a un mallado de cuadrados que recubre R^2. Un cuadrado es un pixel negro si y solo si el cociente del área del campo “visto” por el sensor en un determinado cuadrado entre el área total del cuadrado correspondiente es mayor que algún valor prefijado α. Supongamos que escogemos un α tal que la digitalización de A, que notamos $Dig(A)$, "preserva la topología" . Por "preservación de la topología" se entenderá que A es homotópicamente equivalente a $Dig(A)$ (esta definición procede de Gross y Latecki [22]). Esto significa, en particular, que ambos objetos presentan el mismo número de componentes conexas y el mismo número de "agujeros". Usando la terminología propia de la Topología Algebraica clásica, sus correspondientes grupos de homología en grado cero y uno son isomorfos y, por tanto, la característica de Euler de ambos objetos es la misma. Desde una perspectiva computacional, esto quiere decir que el cálculo de la homología del objeto continuo A puede hacerse via la del objeto digital $Dig(A)$ y para este último hay algoritmos eficaces de etiquetado y obtención de dichos invariantes.

Lo cierto es que las cosas ya no son tan fáciles si nos interesamos por invariantes más complejos que el de homología de un objeto digital 2D, trabajamos en dimensiones superiores y en el marco más general de la Topología Algebraica clásica (donde la mayoría de los objetos que se maneja son "infinitos"). No sólo nos encontramos con problemas resolubles algorítmicamente pero que no admiten una solución, digamos, eficiente, sino que aparecen una significativa cantidad de problemas decidibles, es decir, problemas para los cuales no existe ningún algoritmo que los resuelva. Ejemplos relevantes de esto último son la decidibilidad del problema de las palabras [35] ó la decidibilidad del problema del homeomorfismo entre dos n-variedades combinatoriales compactas con $n \geq 4$ [33].

Dentro de las teorías que han propuesto un marco algorítmico general en Topología Algebraica y que han aportado soluciones efectivas para amplias partes de este área, podemos destacar fundamentalmente dos: la Topología Algebraica Efectiva [45] y la teoría de Homología Efectiva [44]. En la primera se destaca la idea de que las sucesiones exactas (restringiendo el Álgebra Homológica a grupos abelianos finitamente generados), son susceptibles de un tratamiento algorítmico. En la segunda, se retoma el "modus operandi" de los matemáticos Eilenberg y Mac Lane [14, 15] en los años 50 (que trabajaban en un contexto simplicial y con equivalencias de homotopía explícitas), se continúa con un tratamiento algorítmico adecuado de conjuntos infinitos y con una ulterior codificación e implementación. En el proyecto CHATA, seguiremos la mayoría de las veces la línea de acción perfilada por la Teoría de la Homología Efectiva, *analizando detalladamente la complejidad de los procesos*, de cara a determinar de antemano la potencia de cálculo de sus posibles implementaciones y a proponer posteriores refinamientos.

En otras palabras, en el trabajo que desarrolla nuestro grupo, no estamos sólo interesados en problemas de decidibilidad en Topología Algebraica, sino esencialmente en obtener procesos algorítmicos de cómputo de invariantes que sean lo más "razonables" posible, tanto en tiempo como en espacio. En la sección siguiente, explicaremos más detalladamente este calificativo de "razonable".

3 El problema de la complejidad en Topología Algebraica

El problema que nos ocupa ahora es el de establecer una teoría de complejidad apropiada en el ámbito de la Topología Algebraica Efectiva o Constructiva que nos permita clasificar los problemas decidibles en una escala de eficiencia.

Deseamos ahora trabajar en un ambiente puramente combinatorial en el que podamos describir de manera explícita el traspaso de información entre objetos geométricos y algebraicos. Para ello nos situamos en el contexto de la Topología Simplicial, donde los objetos básicos son conjuntos graduados en los enteros no negativos y dotados de dos tipos de operadores: operadores de cara (con claro significado geométrico) y de degeneración (sin transcripción geométrica pero fundamentales a la hora de reconstituir la Geometría a partir del Álgebra). Estos objetos son llamados conjuntos simpliciales. Es inmediato asociar a un conjunto simplicial X, un módulo graduado $C(X)$ dotado de un operador d, llamado diferencial, que disminuye el grado de uno y tal que $d \circ d = 0$. A partir de este módulo diferencial graduado se puede extraer toda la información homológica de X.

Analicemos el problema de la complejidad en Topología Algebraica mediante un ejemplo relevante en este area: una contracción Eilenberg-Zilber. Esta equivalencia de homotopía es una terna de morfismos (f, g, h) que liga un producto álgebro-geométrico $C(X \times Y)$ con uno puramente algebraico $C(X) \otimes C(Y)$, y que nos permite expresar la homología de un producto cartesiano de conjuntos simpliciales en términos de las homologías de los factores. Estamos interesados en medir la "eficiencia" de los morfismos componentes de esta contracción a la hora de evaluarlos sobre un elemento homogéneo de grado n del correspondiente módulo diferencial graduado. Consideremos que el tamaño de la instancia sea n, tomemos como operaciones elementales los operadores de cara y de degeneración de los conjuntos simpliciales X e Y. Con estas premisas, podemos afirmar que el morfismo $f : C(X \times Y) \to C(X) \otimes C(Y)$ actúa en tiempo $O(n^2)$, y que $g : C(X) \otimes C(Y) \to C(X \times Y)$ y $h : C(X \times Y) \to C(X \times Y)$ dan una respuesta en tiempo $O(2^n)$. Un resultado prácticamente idéntico a éste lo conseguimos a la hora de analizar la complejidad en espacio de la evaluación de estos morfismos. Estos resultados son previsibles si precisamos que f no es más que una aproximación simplicial al operador diagonal y que g y h permiten reconstituir la Geometría a partir de información puramente algebraica. Además, este comportamiento es el mismo para todas las contracciones que van de $C(X \times Y)$ a $C(X) \otimes C(Y)$. Por tanto, la dificultad que conlleva manejar los morfismos g y h de una contracción Eilenberg-Zilber es esencial. Por otra parte, contracciones de tipo Eilenberg-Zilber aparecen casi por doquier en los procesos de cálculo de invariantes, lo que plantea un panorama global bastante desalentador. En un intento de simplificación, podemos decir que el objetivo fundamental del proyecto CHATA es evitar (en la manera de lo posible) la naturaleza exponencial de los morfismos g y h de una contracción Eilenberg-Zilber, a la hora de diseñar algoritmos de cálculo de invariantes. En las siguientes secciones veremos que dicho propósito lo hemos conseguido en el caso de las operaciones cohomológicas de Steenrod y de la homología de álgebras diferenciales graduadas conmutativas (abreviadamente, ADGCs).

Finalmente, la maquinaria que nos provee las contracciones sugiere nuevas perspectivas y aproximaciones a problemas clásicos de Topología Algebraica y Álgebra Homológica. No obstante, esta idea no es novedosa: como ya hemos comentado anteriormente, Eilenberg y Mac Lane trabajaban ya de esta peculiar forma. Una herramienta importante en este contexto es el de perturbación de contracciones. La Teoría de Perturbación Homológica ([23], [24]) es una técnica sistemática y algorítmicamente eficaz (por ejemplo, la teoría de la Homología Efectiva hace un continuo uso de ella) para la transferencia de estructuras de un objeto a otro salvo homotopía; constituye un útil poderoso para obtener DG-módulos que representen un tipo de homotopía dado. El elemento más importante de esta teoría de perturbación es el Lema de Perturbación Básico, que puede verse como un verdadero algoritmo y que tiene como datos de entrada una contracción (f, g, h) entre dos DG-módulos (N, d_N) y (M, d_M), y una perturbación $\delta : N_* \to N_{*-1}$ (es decir, cumple que $(d_N + \delta)(d_N + \delta) = 0$), y como dato de salida una nueva contracción $(f_\delta, g_\delta, h_\delta)$ de $(N, d_N + \delta)$ a $(M, d_M + d_\delta)$, donde los módulos graduados subyacentes no han sufrido variaciones y sólo se modifican las diferenciales y los morfismos integrantes de la contracción. Por ejemplo, el morfismo $d_\delta : M_* \to M_{*-1}$ presenta la siguiente fórmula:

$$d_\delta \;=\; f\delta g + f\delta h\delta g + f\delta h\delta h\delta g + \dots$$

Obsérvese que la suma anterior puede ser, en principio, infinita.

En las secciones siguientes, mostraremos la potencia de este método algebraico de punto fijo a la hora de algoritmizar procesos en Topología Algebraica y Álgebra Homológica.

De cara a dar una perspectiva más amplia del problema de la complejidad en Topología Algebraica, analizamos ahora la perturbación de una contracción Eilenberg-Zilber (f, g, h). Si usamos como dato de perturbación un morfismo δ que actúe en tiempo polinomial, es obvio que el cálculo de d_δ sobre un elemento muestra un enorme gasto computacional, debido a que en cada sumando (salvo el primero) de su fórmula aparece reiteradamente el operador de homotopía h de dicha contracción. Este escollo, consustancial a la transmisión de información álgebro-geométrica, puede ser evitado en determinadas situaciones, como veremos a continuación.

4 Operaciones cohomológicas desde una perspectiva computacional

Si los grupos de homología y cohomología son apropiadas generalizaciones del invariante algebraico más inmediato (que es el número de componentes conexas de un espacio), las operaciones cohomológicas son morfismos entre los grupos de cohomología que conmutan con homomorfismos inducidos de aplicaciones continuas. Esta maquinaria es útil cuando la estructura de espacio vectorial graduado y el producto cup que presenta la cohomología fallan a la hora de distinguir dos espacios topológicos no homeomorfos.

Los cuadrados y potencias reducidas de Steenrod constituyen una clase extremadamente importante de operaciones cohomológicas, no sólo en Topología Algebraica sino también en el area de métodos simpliciales del Álgebra Homológica (cohomología de grupos, cohomología de Hochschild, ...). Existen varios métodos de construcción para estas operaciones. Uno de ellos consiste en construirlas haciendo uso de la cohomología de los espacios de Eilenberg-Mac Lane (espacios de los que posteriormente hablaremos más detalladamente). Otro método consiste en determinar una familia de morfismos $\{D_i\}$ que"miden" la falta de conmutatividad del producto cup a nivel de cocadenas. En Topología Algebraica clásica, la existencia de dicha sucesión de morfismos está garantizada por el método de los modelos acíclicos [13]. En [39] y [20], se presenta un proceso alternativo para obtener la fórmula explícita de los D_i. Más concretamente, en [39], se da una formulación para cada D_i en términos de los morfismos componentes de una contracción Eilenberg-Zilber (f, g, h). Pero este nivel de descripción no es suficiente desde un punto de vista computacional. Por una parte, los morfismos componentes de la contracción anterior se definen en términos de operadores cara y degeneración del conjunto simplicial X de partida. Por otra parte, en la fórmula de cada D_i siempre está envuelto el operador de homotopía h. En consecuencia, si queremos expresar D_i en términos de operadores cara y degeneración de X, en principio obtenemos que el número de sumandos que aparecen en la fórmula para un D_i evaluado sobre un elemento de grado n es exponencial. Por tanto, un algoritmo que se diseñara a partir de esta formulación no sería de mucho interés práctico.

En [20], se simplifican substancialmente estas fórmulas para el caso de productos cup-i y cuadrados de Steenrod, redescubriéndose y clarificándose en un contexto combinatorial general el trabajo germinal (y actualmente bastante olvidado) de Norman Steenrod en 1947 [47]. Dicha simplificación se basa en el hecho de que toda composición de operadores cara y degeneración de un conjunto simplicial puede ser normalizada, es decir, expresada en una forma "canónica". Trabajando así, obtenemos una descripción simplicial económica de estos invariantes (véanse [18] y [19] para un estudio de la complejidad de evaluación de estas operaciones). Además, un tratamiento similar al anterior para potencias reducidas de Steenrod es factible a la luz del trabajo preliminar realizado en [20]. Como muestra de esta viabilidad, limitémonos a decir que, por ejemplo, una primera medida de la complejidad computacional a la hora de evaluar la potencia reducida $P_1^p(c)$ aplicada a un q-cociclo c_q sobre un elemento de grado $pq-1$, puede venir dada por el número de operadores de cara tomando parte en la fórmula, que es $p(p-1)q[(p-1)q-1]$ [21]. Es obvio que en el caso de que X tenga un número finito de símplices no degenerados en cada grado, nuestro método puede ser visto como un verdadero algoritmo para calcular esta operación cohomológica. Por ejemplo, si el número de símplices no degenerados en cada X_ℓ es $O(\ell)$ y cada operador de cara de X es evaluado en tiempo constante, la eficiencia de nuestro algoritmo para calcular $P_1^p(c_q)$ is $O(p^4q^3)$.

Actualmente, disponemos de una formulación simplicial en términos exclusivamente de operadores cara para un gran número de potencias reducidas de Steenrod y de ciertas operaciones cohomológicas secundarias. Un objetivo a corto plazo del proyecto CHATA es finalizar el cuadro de descripciones explícitas de las operaciones cohomológicas primarias y secundarias más relevantes de la Topología Algebraica Clásica.

Ya hemos comentado que esta técnica muestra una falta de novedad en lo concerniente a productos cup-i y cuadrados de Steenrod. Ahora bien, con respecto a las potencias reducidas de Steenrod no hemos encontrado ninguna referencia en la literatura en el que se perfilen sus fórmulas explícitas a nivel de cociclos. La perspectiva que mostramos de las operaciones cohomológicas desde el punto de vista de la Teoría de Perturbación Homológica es novedosa y fructífera y tenemos la convicción de que en un futuro cercano y trabajando de este modo, llegaremos a tener descritas operaciones cohomológicas terciarias a nivel de complejos de cocadenas.

Otro punto interesante de este trabajo es el meramente didáctico, ya que nos permite ver operaciones cohomológicas "desnudas" a nivel combinatorial y, sin argumentos intermedios que difuminen su naturaleza computacional.

Con estos resultados podemos ser optimistas y creemos que representan un primer paso en una previsible poderosa interrelación entre las áreas de la Topología y el Álgebra Computacionales, donde los problemas de determinación de operaciones en Cohomología se reduzcan esencialmente a una simple cuestión de derrecursificación de fórmulas. Veremos que este fenómeno no es un hecho aislado y que podemos obtener algoritmos razonables en otros ámbitos, como es el de la homología de las ADGCs.

5 Ataque algorítmico al cálculo de la homología de "productos" de espacios primos en homotopía

Los espacios de Eilenberg-Mac Lane $K(\pi, n)$ que dependen de un grupo abeliano finitamente generado y de un entero positivo, son espacios "primos" en homotopía, en el sentido de que todo conjunto simplicial puede ser visto en forma factorizada como un producto cartesiano torcido de espacios de este tipo. Como ya apuntábamos antes, el proyecto CHATA sigue como línea de acción la esgrimida por la firma Eilenberg y Mac Lane en los años 50 ([14],[15]), donde el punto de partida lo aportaba la Topología Simplicial, la información homológica venía medida en forma de equivalencias de homotopía explícitas y las herramientas algebraicas que usaban eran las que permitían combinar, componer o perturbar dichos datos para obtener otros más complejos.

Henri Cartan en 1964 (véase [12] para tener una mayor pespectiva histórica) dio una respuesta completa al cálculo de los grupos de homología de dichos espacios. El trabajo de traducción de este cómputo a la forma de algoritmo es sencillo, pero la posterior reutilización de esta información de cara a obtener la homología de productos cartesianos torcidos de espacios de Eilenberg-Mac Lane se nos antoja llena de dificultades técnicas y sutilidades teóricas (sin mencionar las posibles deficiencias y limitaciones, sobre todo problemas de extensión, que presenta el desarrollo de un método constructivo a partir de estas premisas). Para poder diseñar un algoritmo de cálculo directo en este sentido, nos resulta imprescindible el uso de la maquinaria sobre contracciones establecida por Eilenberg y Mac Lane y de la Teoría de Perturbación Homológica.

En [41], se establece información homológica en términos de contracciones sobre los "pequeños" complejos de Cartan, que nos permite trasladar cómodamente el método de Cartan-Moore para obtener los grupos de homología de cualquier $K(\pi, n)$ al contexto de la Teoría de Perturbación Homológica. En estas condiciones, la pregunta que nos hacemos es la siguiente: ¿qué podemos decir de la homología de un fibrado simplicial (producto cartesiano torcido o, más abreviadamente, PCT) $K(\pi, n) \times_\tau K(\pi', n')$, con fibra y base siendo espacios de Eilenberg-Mac Lane?. Más concretamente, ¿es posible establecer un algoritmo de cálculo razonable de sus grupos de homología?

Un primer algoritmo de cálculo ha sido planteado en [2]. Sin embargo, este método, debido a la elevada complejidad que presenta, no lo consideramos viable a efectos de implementación. El mayor gasto computacional de dicho método estriba en el proceso de perturbación de la contracción Eilenberg-Zilber de $C(K(\pi, n) \times K(\pi', n'))$ a $C(K(\pi, n)) \otimes C(K(\pi', n'))$, usando como dato de perturbación el producido por el operador de torsión geométrica τ en la diferencial del PCT. En otras palabras, el instalar una cocadena de torsión algebraica $t : C(\pi', n') \to C(\pi, n)$ en el producto tensorial $C(K(\pi, n) \otimes_t C(K(\pi', n')$ que nos proporcione la misma información homológica que el PCT de partida es el proceso más costoso. Por una parte, el optimizar el cálculo de t y, por otra, el hecho de que podamos enriquecer nuestro algoritmo con técnicas de preservación de estructuras de álgebras, A_∞-coálgebras y cocadenas de torsión hacen que las expectativas de establecer un método computacional "tratable" para ese cálculo sean halagüeñas. Finalmente, la obtención de un resultado algorítmico positivo para este proceso de "multiplicación" repercutiría inmediatamente en una mejora ostensible de la eficiencia del algoritmo teórico de cálculo de grupos de homotopía (especificado en los artículos [38] y [40]).

6 ¿Un sistema de cálculo formal para la homología de DG-álgebras conmutativas?

El cálculo de la homología de álgebras es un problema clásico en Álgebra Homológica. Entenderemos por homología de un álgebra A, la homología del módulo diferencial graduado $\bar{B}(A)$, llamado construcción bar reducida de A. Este objeto puede verse como una inversa formal de A. De esta forma, obligamos al producto del álgebra A a aparecer en el cálculo homológico. Ahora bien, frecuentemente la construcción bar se presenta intratable desde un punto de vista computacional, debido al gran número de generadores que posee. Hay veces, sin embargo, donde es posible establecer una equivalencia de homotopía explícita (f, g, h) entre la construcción bar de un álgebra diferencial graduada A y otra construcción "más sencilla" H, es decir, con un menor número de generadores (H es un "pequeño" modelo homológico de A). Este es el caso de las álgebras diferenciales graduadas libres conmutativas, que pueden verse en forma "factorizada" como productos tensoriales torcidos (o PTTs) de álgebras exteriores y polinomiales. A su vez, las construcciones bar reducida de estás últimas álgebras admiten contracciones hacia ADGCs "pequeñas" (estas últimas siendo también PTTs de álgebras simples). Estas contracciones son composiciones de otras más simples, entre las cuales se ven envueltas contracciones de tipo Eilenberg-Zilber.

Es en este ámbito donde ya hemos planteado un primer algoritmo de cálculo (véase [4]), el cuál presenta problemas de complejidad que pasamos ahora a detallar. Consideremos como datos de entrada una secuencia creciente de enteros no-negativos $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_q$ (que expresan el grado de los generadores de las álgebras exteriores y polinomiales que conforman el producto tensorial torcido de álgebras de partida) y el valor de la diferencial de este PTT sobre cada generador. Este proceso da como salida los valores de la diferencial perturbada d_δ para cada generador del álgebra H. Sólo es necesario conocer d_δ sobre los q generadores del álgebra y no sobre todo elemento de H, ya que utilizamos una herramienta refinada de perturbación de álgebras (la teoría de la semi-completitud [41]).

Ahora bien, ya hemos expresado anteriormente que el cálculo de d_δ sobre un elemento de grado n en principio requiere como mínimo un tiempo exponencial. Este obstáculo lo podemos salvar conjugando la teoría de la semi-completitud con la técnica, que nosotros hemos bautizado, de inversiones ([41], [7]). La técnica de inversiones nos permite afirmar que, a la hora de evaluar un sumando $f\delta h\delta \cdots h\delta g$ de d_δ sobre un elemento cualquiera, sólo es necesario tener en cuenta un número polinomial de sumandos en cada aplicación del operador de homotopía h, ya que para el resto se tiene la certeza (usando argumentos de filtraciones) de que finalmente su evaluación abocará en cero. Finalmente, el iniciar esta maquinaria con un preprocesamiento adecuado de la diferencial del álgebra de partida A revierte en el diseño de un algoritmo mejorado con respecto al inicial.

El objetivo de CHATA en este área es la implementación en máquina informática de dicho algoritmo de cálculo de homología de ADGCs. Una vez realizado , el cálculo de la n-homología (con $n \geq 2$) y homologías de Harrison, de Hochschild y cíclica de ADGCs [32] aparecen factibles de ser atacados [5].

7 Homología de grupos y matrices estructuradas

La determinación de modelos homológicos computables de grupos discretos se presenta abordable desde la óptica de la Teoría de Perturbación Homológica. Es bien sabido que la homología de un grupo G puede ser vista (desde el punto de vista geométrico) como la homología de un espacio de Eilenberg-Mac Lane $K(G, 1)$. Por tanto, parece claro que las técnicas de perturbación deberían proporcionar ideas para el diseño de algoritmos de cálculo de la homología de grupos. Este camino ya ha sido explorado fructíferamente por Lambe y Stasheff [31], Huebschmann [27, 28], Rubio [43] y otros

([30], [16]).

Nuestro punto de partida es el artículo [3], donde se da un tratamiento homológico de perturbación de ciertos productos semidirectos de grupos. Una prioridad para el proyecto CHATA es la completa comprensión de esta técnica, así como la total determinación de la homología efectiva de dichos grupos y de otros más complejos.

En [3] consideramos la cohomología de un producto semidirecto de grupos finitos $G = A \times_\phi H$ en su vertiente geométrica, (es decir, como la cohomología de un PCT de dos espacios de Eilenberg-Mac Lane $K(A, 1)$ y $K(H, 1)$). El problema que comentábamos en una sección anterior de implantar una cocadena de torsion algebraica t, se ve resuelto en este caso ya que es inmediato deducir su fórmula. De esta forma, la obtención de un modelo homológico pequeño para G, se hace a partir de los modelos homológicos pequeños de los factores via perturbación. El proyecto CHATA pretende mejorar este primer algoritmo haciendo uso de las propiedades homológicas de la acción de la conjugación [51].

Por otra parte, en los últimos diez años, se ha desarrollado una nueva aproximación algebraica a la teoría de códigos correctores de errores a través de la aplicación de la cohomología de grupos finitos : *la Teoría del Desarrollo Cocíclico de Diseños y Generación de Matrices Cocíclicas* [8, 9]. En este sentido, sólo apuntaremos aquí que un objetivo prioritario de CHATA es proponer un algoritmo especializado para determinar explícitamente, a partir de un producto semidirecto G de grupos finitos, un representante para cada elemento (una clase de 2-cociclos) en $H^2(G, \mathbb{Z})$. Estos cociclos pueden verse naturalmente como $|G| \times |G|$ matrices (matrices cocíclicas). Este software mejoraría el programa ya realizado en Mathematica por los profesores Alvarez,Armario,Frau y Real [1].

8 Aplicaciones en otros ámbitos

Tal vez, a mitad de siglo, hubiera sido verdaderamente difícil encontrar relaciones de la Topología Algebraica y el Álgebra Homológica con las ciencias de la naturaleza. La respuesta habría sido que no eran más que indirectas, a través de otras teorías matemáticas en las que interviene la Topología. Los teoremas de Topología mostraban su naturaleza puramente cualitativa, es decir, afirmaban la existencia (o la no existencia) de objetos sin dar ningún medio para determinarlos explícitamente. Una muestra de lo que decimos es, por ejemplo, la aplicación de los teoremas de punto fijo de Schauder al Análisis en 1930, probando la existencia de, al menos, una solución al problema local de Cauchy para ecuaciones hiperbólicas cuasilineales.

Este panorama ha cambiado bastante en los últimos 30 años. En 1.963, Atiyah y Singer establecen la fórmula del índice para variedades cerradas. Aplicaciones de esta fórmula las encontramos en la teoría de operadores pseudo-diferenciales sobre variedades, en problemas de valores elípticos en la frontera y en el análisis de espacios simétricos. Ahora bien, este resultado no sólo influye de manera poderosa en el análisis, sino que también se introduce con fuerza en la teoría cuántica de campos, en la que la teoría de homotopía y de espacios fibrados juegan un papel fundamental. En estos últimos años, ha sido la Física Cohomológica la que ha tenido un auge espectacular. Conceptos como DG-álgebras, A_∞-estructuras, homotopía racional, cohomología de Rham, Teoría de Perturbación Homológica y espacios de lazos libres aparecen fuertemente interrelacionados con nociones de Física Cuántica. Unas pocas referencias pueden servirnos para valorar el enorme impulso que ha tenido estas cuestiones [46, 17, 29]. Otra relaciones entre el Álgebra Homológica y/o la Topología Algebraica y la Física son: (1) *la teoría de Cálculo Secundario* [49, 50] en la que se establece una aproximación algebraica a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales y (2) la reciente teoría (véase [6, 42]) en la que usando la técnica de múltiple resolución en Geometría Fractal y Sistemas Dinámicos, ataca el problema de extracción y cómputo de información cualitativa y topológica.

Vemos que esta relación de la cultura matemática con la física, está lejos de ser una mera modelización "exótica" e "intrascendente". A nuestro entender, una de las causas que ha repercutido en esta impresionante progresión de la Topología Algebraica en el campo físico, viene dada por la introducción en la primera de eficientes herramientas de cálculo cohomológico. El dotar de un mayor talante "algorítmico" a una teoría de perfil tan abstracto y cualitativo como es la Topología Algebraica, no sólo provoca "una conexión de los distintos niveles en la jerarquía de las matemáticas" (Wiener), sino que despierta el foco primario de interés de la Física: la descripción cuantitativa de fenómenos.

Indiquemos también que la computación eficiente de la homología y cohomología de objetos algebraicos y/o topológicos constituye una premisa esencial para avanzar en teorías recientes como son: (1)*Autómatas, algoritmos distribuidos, paralelismo y Álgebra Homológica*, de la cual destacamos las referencias [25, 26] y (2)*Persistencia Topológica y Modelización Geométrica* (véase [10, 11]).

Los beneficiarios potenciales de la investigación que plantea el proyecto CHATA serían pues, investigadores no sólo de Topología Algebraica y Álgebra Homológica, sino también de áreas más aplicadas (Códigos y diseños combinatoriales, Informática, Física cohomológica, etc.) donde el cómputo de invariantes algebraicos se hace imprescindible para desarrollar adecuadamente sus trabajos. Estos dispondrían de un software para manipular en el ordenador las estructuras y operaciones con las que están habituados a trabajar sobre el papel.

Referencias

[1] Alvarez V., Armario J. A., Frau M. D., Real P.: *An algorithm for computing homology groups of some semidirect products of finite groups.* IMS99, (Linz) Austria, Agosto 1999.

[2] Álvarez V., Armario J.A. y Real P.: *On the computability of the p-primary homology of TCP of Eilenber-MacLane spaces*, EMIS Electronic Proceedings. http://www.emis.de/proceedings/Braga97/

[3] Álvarez V., Armario J.A. y Real P.: *On the homology of semidirect product of groups*, Colloquium on Topology, Gyula (Hungría) (1998).

[4] Álvarez V. , Armario J.A., Real P. y Silva B.: *HPT and computability of Hochschild and cyclic homologies of CDGAs.* EMIS Electronic Proceedings. http://www.emis.de/proceedings/SCCP97

[5] Armario J.A., Real P. y Silva B.: *On p-minimal homological models of twisted tensor products of elementary complexes localised at a prime.* Contemporary Mathematics, **227**, (1999) 303-314.

[6] Bradley E., Meiss J.D. y Robins V.: *Computing connectedness: An exercise in computational topology*, Nonlinearity 11 (1998) 913-922

[7] CHATA group: *Computing "small" 1-homological models for commutative differential graded algebras*, CASC2000, Ganzha et al. (Ed.), 87-100, Springer, 2000.

[8] de Launey W.: *Generalised Hadamard matrices which are developed modulo a group*, Discrete Mathematics 104 (1992) 49-65.

[9] de Launey W., Horadam K.J.: *Cocyclic development of designs.* J. Alg. Combinatorics. 2 (1993) 267-290.

[10] Delfinado C.J.A. y Edelsbrunner H.: *An incremental algorithm for Betti numbers of simplicial complexes on the 3-sphere*, Computer Aided Geometric Design 12 (1995) 771-784

[11] Dey T.K., Edelsbrunner H. y Guha S.: *Computational Topology*, Contemp. Math., A.M.S., vol 223, 1999.

[12] Dieudonné. J. :*A history of Algebraic Topology 1990-1960.* Birkhäuser,Boston 1989.

[13] Dold A.: *Uber die Steenrodschen Kohomologieoperationen.* Annals Math., **73** (1961)258-294.

[14] Eilenberg S, y Mac Lane S.: *On the groups $H(\pi, n)$, I.* Annals of Math., **58** (1953) 55-106.

[15] Eilenberg S. y Mac Lane S.: *On the groups $H(\pi, n)$, II.* Annals of Math., **60** (1954) 49-139.

[16] Ekedahl T., Grabmeier J. y Lambe L.: *Algorithms for algebraic computations with applications to the cohomology of finite p-groups.* Preprint of Dept. of Math., Univ. of Wales, 1997.

[17] Fisch J. y Henneaux M.: *Homological Perturbation Theory and the algebraic structure of the antifield-antibracket formalism for gauge theories.* Comm. in Mathematical Physics, **128**, n. 3 (1990) 627-640.

[18] González-Díaz R. y Real P.: *Una curiosa combinación de Topología, Algebra y Combinatoria: los cuadrados de Steenrod.* La Gaceta de la R.S.M.E. **3** (1999) 457-466.

[19] González-Díaz R. y Real P.: *Computing cocycles on simplicial complexes.* Computer Algebra in Scientific Computing CASC99, Ganzha et al. (Eds.), 177-190, Springer 1999.

[20] González-Díaz R. and Real P.: *A combinatorial method for computing Steenrod Squares.* Journal of Pure and Applied Algebra, **139**, n. 1-3, (1999) 89-108.

[21] González-Díaz R. and Real P.: *Steenrod reduced powers and computability.* International Congress IMACS-ACA99, del 24 al 27 de Junio de 1999, (El Escorial, Madrid).

[22] Gross A. y L. Latecki L.: *Digitizations preserving topological and differential geometric properties.* Computer Vision and Image Understanding. v. 62., n. 3., (1995) 370-381.

[23] Gugenheim V.K.A.M. y Lambe L.: *Perturbation theory in Differential Homological Algebra, I*, Illinois J. Math., (**vol. 33**), pp. 556-582 (1989).

[24] Gugenheim V.K.A.M., Lambe L. y Stasheff J.D.: *Perturbation theory in differential homological algebra, II*, Illinois J. Math., **35**, n. 3 (1991) 357-373.

[25] Gunawardena J.: *Homotopy and concurrency.* Bulletin of EATCS, n. 54, (1994) 184-193

[26] Herlihy M.: *A Tutorial on Algebraic Topology and Distributed Computation.* Tech. Report, UCLA, 1994.

[27] Huebschmann J.: *Cohomology of nilpotent groups of class 2*, J. Algebra, **126** (1989) 400–450.

[28] Huebschmann J.: *Cohomology of metacyclic groups*, Transactions of the American Mathematical Society, **328** n. 1 (1991) 1–72.

[29] Lambe L.: *Homological perturbation theory, Hochschild homology and formal groups.* Contemporary Math., **134**, (1992)183-218 AMS, Providence, RI.

[30] Lambe L.:*An algorithm for calculating cocycles*, Preprint of Department of Mathematics and Center for Innovative Computation, University of Wales, 1997.

[31] Lambe L. y Stasheff J.: *Applications of perturbation theory to iterated fibrations*, Manuscripta Math., **58** (1987) 367–376.

[32] Mac Lane S.: *Homology.* Springer-Verlag, 1995. Reprint of the 1975 edition.

[33] Markov A.A.: *Insolubility of the problem of homeomorphy.* Proc. Inter. Congr. of Math., 1958, Cambridge Univ. Press, 300-306.

[34] May P.: *Simplicial objects in Algebraic Topology.* Van Nostrand, Princeton, 1967.

[35] Novikov P.S.: *On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory.* Trudy Mat. Inst. Steklov, n. 44, 1955.

[36] Real P.: *An algorithm for calculating homotopy groups*, Proceedings of International IMACS Symposium on Symbolic Computation, Lille (Junio, 1993).

[37] Real P.: *Algoritmos de cálculo de homología efectiva de los espacios clasificantes*, Tesis, Universidad de Sevilla (Septiembre, 1993).

[38] Real P.: *Sur les groupes d'homotopie*, C.R. Acad. Sci. Paris, **319**, série I, (1994) 475-478.

[39] Real P.: *On the computability of the Steenrod squares*, Annali de'll Università di Ferrara, Sez. VII, Sc. Mat. Vol. XLII, (1996) 57-63.

[40] Real P.: *An algorithm computing homotopy groups*, Mathematics and Computers in Simulation, **42**, (1996) 461-465.

[41] Real P.: *Homological Perturbation Theory and associativity*, Homology, Homotoy and Applications, **v. 2**, n.5, (2000) 51-88.

[42] Robins V.: *Computational Topology with Applications to Fractal Geometry*, Ph.D. Thesis, University of Colorado at Boulder, 2000.

[43] Rubio J.: *Integrating functional programming and symbolic computation.* Mathematics and computers in simulation, n.4 (1997) 505-511.

[44] Sergeraert F.: *The computability problem in algebraic topology.* Adv. Math., 104, **1** (1994) 1-29.

[45] Schön R.: *Effective algebraic topology*, Memoirs of the A.M.S., **451**, 1991.

[46] Stasheff J.: *Cohomological Physics.* Lect. Notes Math., **1318** (1988) 228-237, Springer.

[47] N. E. Steenrod.: *Products of cocycles and extension of mappings*, Ann. Math. **48** (1947) 290-320.

[48] Tangora M.C.: *Computing the homology of the lambda algebra*, Mem. A.M.S., **337**, 1985.

[49] Vinogradov A.M.: *From symmetries of partial differential equations towards secondary ("quantized") calculus.* J. Geom. Phys., **14**, (1994) 146-194.

[50] Vinogradov A.M., Krasil'shchik I.S. y Lychagin V.V.: *Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*, Gordon and Breach, New York, 1986.

[51] Weibel, C.A.: *An introduction to Homological Algebra.* Cambridge studies in advanced mathematics, **38**, Cambridge University Press, 1994.