

Trabajo Fin de Grado Ingeniería Aeroespacial

Análisis de la eficiencia de maniobras de evitación de conflictos entre aeronaves

Autor: Jesús Merino Agudo

Tutor: Alfonso Valenzuela Romero

**Dpto. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2021



Trabajo Fin de Grado
Ingeniería Aeroespacial

Análisis de la eficiencia de maniobras de evitación de conflictos entre aeronaves

Autor:

Jesús Merino Agudo

Tutor:

Alfonso Valenzuela Romero

Contratado Doctor

Dpto. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2021

Trabajo Fin de Grado: Análisis de la eficiencia de maniobras de evitación de conflictos entre aeronaves

Autor: Jesús Merino Agudo
Tutor: Alfonso Valenzuela Romero

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:

Agradecimientos

En primer lugar, a mis padres, por su esfuerzo en mi educación, por haberme brindado esta oportunidad de crecer como persona en la escuela, por haber apoyado mis decisiones y por haberme dado los mejores consejos siempre.

A mi tío Antonio, por haberme enseñado a superarme día a día y despertar en mí la inconformidad que un adolescente necesita desarrollar para cumplir sus aspiraciones. Al resto de mi familia, que siempre se han acordado de mí y se han preocupado por como me han ido estos años.

A todas esas personas que me han acompañado en mi vida universitaria, tanto mis amigos de la infancia como aquellos que conocí cuando esta nueva aventura me trajo a Sevilla, han sido un gran apoyo.

A mi tutor, Alfonso, por ayudarme en este trabajo de investigación y trabajar junto a mí día a día en estos meses.

Jesús Merino Agudo

Sevilla, 2021

Resumen

El marco general de este Trabajo Fin de Grado es la detección y resolución de conflictos (conflict detection and resolution, CD&R) entre aeronaves. En particular, se aborda el análisis de la eficiencia de maniobras para la evitación de conflictos. El estudio considera el análisis de escenarios de conflictos de dos aeronaves con trayectorias a la misma altitud y velocidad de vuelo.

Se estudia la eficiencia de varias maniobras de evitación de conflictos, tanto en el plano horizontal como en el plano vertical, con el objetivo de observar en qué escenarios de conflictos tienen un mejor comportamiento, para así compararlas entre ellas y acabar obteniendo, en función del escenario de conflicto, qué maniobra es más eficiente. Las maniobras de evitación se modelan para un AIRBUS A320, teniendo en cuenta modelos aerodinámico, propulsivo y de empuje. El estudio de la eficiencia se realiza mediante la optimización de cada una de las trayectorias, sujetas a las restricciones del problema planteado.

El trabajo presentado en este Trabajo Fin de Carrera puede constituir un primer paso para el desarrollo de una herramienta de apoyo en la toma de decisiones para los controladores de tráfico aéreo, con el objetivo de tener en cuenta la eficiencia de las maniobras de evitación a la hora de resolver un conflicto, y así mejorar la eficiencia del tráfico aéreo.

Índice

<i>Resumen</i>	III
<i>Índice Abreviado</i>	V
<i>Notación</i>	IX
1 Introducción	1
1.1 Motivación	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Metodología y estructura del documento	2
2 Detección y resolución de conflictos	3
2.1 Detección de conflictos	4
2.2 Resolución de conflictos	6
3 Parametrización de trayectorias	9
3.1 Ecuaciones del movimiento	9
3.2 Trayectorias	12
3.3 Ejemplos	24
4 Optimización de las maniobras de resolución	35
4.1 Función f_{mincon}	35
4.2 Planteamiento del problema numérico	36
4.3 Ejemplos	41
4.4 Análisis del peso del término asociado al empuje en la función objetivo	43
5 Barrido de situaciones de tráfico	53
5.1 Mallado	53
5.2 Resolución del conflicto con cada una de las maniobras de desviación	55
5.3 Cálculo de la maniobra óptima en cada región del barrido	72
6 Conclusiones y futuras mejoras	75
6.1 Conclusiones	75
6.2 Futuras mejoras	75
<i>Índice de Figuras</i>	77
<i>Índice de Tablas</i>	81
<i>Bibliografía</i>	83
Apéndice 1: International Standard Atmosphere, (ISA)	85
Apéndice 2: Consumos promedios en segmentos con variación de consumo	87

Apéndice 3: Cálculo del parámetro de variación de empuje

91

Notación

x	Coordenada x del plano cartesiano, dirección sur-norte
y	Coordenada y del plano cartesiano, dirección oeste-este
h	Altitud de vuelo
Δh	Cambio de altitud de una aeronave respecto a una altitud h
h_{AB}	Distancia vertical entre las aeronaves A y B
H_{AB}	Distancia vertical mínima de separación entre las aeronaves A y B
V	Velocidad TAS de la aeronave
ΔV	Incremento de velocidad en un segmento de vuelo respecto a la velocidad V
M	Número de Mach de la aeronave
χ	Rumbo de la aeronave (medido desde el norte y positivo en sentido horario)
$\Delta\chi$	Cambio de rumbo de una aeronave respecto a un rumbo χ
d	Distancia recorrida por una aeronave desde el punto inicial
d_{AB}	Distancia horizontal entre las aeronaves A y B
D_{AB}	Distancia horizontal mínima de separación entre las aeronaves A y B
r_i	Distancia recorrida en un segmento de vuelo i
δ_{AB}	Distancia adimensional entre las aeronaves A y B
$ROCD$	Velocidad de ascenso o descenso
γ	Ángulo de ascenso o descenso, medido desde la horizontal en sentido antihorario
a	Aceleración o desaceleración de una aeronave
c	Consumo de combustible de la aeronave
\bar{c}	Consumo de combustible promedio de la aeronave en un segmento con cambio de velocidad o de altitud
η	Consumo específico
T	Empuje de la aeronave
$T_{maxclimb}$	Empuje máximo de la aeronave en subida
$T_{maxCRUISE}$	Empuje máximo de la aeronave en crucero
$T_{des,high}$	Empuje mínimo de la aeronave
\bar{T}	Empuje promedio de la aeronave en un segmento de vuelo con cambio de velocidad o de altitud
$\bar{\Delta T}$	Parámetro que mide el cambio de régimen del motor
C_{f_1}	Parámetro del modelo de consumo de combustible
C_{f_2}	Parámetro del modelo de consumo de combustible
$C_{Tc,1}$	Parámetro del modelo de empuje
$C_{Tc,2}$	Parámetro del modelo de empuje
$C_{Tc,3}$	Parámetro del modelo de empuje
C_{Tcr}	Parámetro del modelo de empuje

$C_{Tdes,high}$	Parámetro del modelo de empuje
C_{D0}	Parámetro de resistencia parásita de la polar parabólica
k	Parámetro de la resistencia inducida de la polar parabólica
S_{ref}	Superficie de referencia de una aeronave
m_0	Masa de referencia de una aeronave
a_s	Velocidad del sonido
g_0	Gravedad a nivel del mar, 9.81 m/s ²
L	Sustentación de la aeronave
D	Resistencia aerodinámica
\bar{D}	Resistencia aerodinámica promedio de la aeronave en un segmento de vuelo
ub	Límites superiores de las variables del problema de optimización
lb	Límites inferiores de las variables del problema de optimización
u	Variables del problema de optimización
f	Función objetivo del problema de optimización
s	Restricciones no lineales de desigualdad del problema de optimización
seq	Restricciones no lineales de igualdad del problema de optimización
R	Parámetro del barrido, distancia al punto en el que se cruzan las trayectorias de ambas aeronaves
β	Parámetro del barrido, ángulo que forman las trayectorias de dos aeronaves

1 Introducción

En este primer capítulo se pretende justificar la necesidad de la realización de este Trabajo Fin de Grado (TFG) y determinar el alcance y los objetivos del mismo. Además se explica qué metodología se seguirá a lo largo del documento y la organización que tiene el mismo.

1.1 Motivación

El creciente incremento del tráfico aéreo (previo a la pandemia) en regiones europeas y regiones de elevado movimiento de aeronaves puede llevar a situaciones de congestión en diferentes sectores del espacio aéreo. El movimiento de aeronaves en el espacio aéreo ha sido un tema de interés para la comunidad internacional desde diversos ámbitos de actuación. Esta congestión, en ocasiones, puede dar lugar a que dos aeronaves no cumplan una distancia mínima de separación, produciéndose lo que se conoce como conflicto entre aeronaves.

Concretamente, EUROCONTROL identifica que “Una pérdida de separación entre aeronaves en el aire ocurre cuando se vulneran los mínimos de separación especificados en el espacio aéreo controlado, definidos por las autoridades de tránsito aéreo y basadas en las normas de la OACI”. Los mínimos de separación se establecen para mitigar el riesgo y, por lo tanto, es fundamental para el trabajo de un controlador evitar que ocurra esta situación.

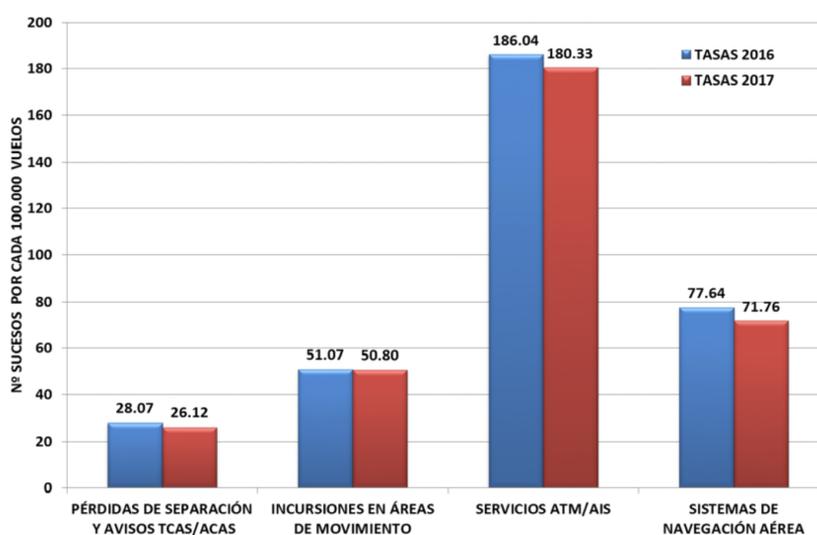


Figura 1.1 Tasa de sucesos de Navegación Aérea por categoría (2016-17) [1].

Si se analizan los sucesos de Navegación Aérea por categoría en los años previos a la pandemia publicados en los informes anuales de CEANITA, se comprueba la común existencia de conflictos en el espacio aéreo (ocurre en torno a treinta vuelos de cada cien mil, siendo 582 en el año 2016 [1]), es necesario disponer de un

conjunto de maniobras que permitan evitar dichos conflictos. En este Trabajo Fin de Grado se quiere abordar el estudio y la optimización de dichas maniobras que permiten la evitación de conflictos entre aeronaves, de tal forma que se disponga en cada escenario, en función de la situación de las aeronaves, de la maniobra más eficiente para evitar dicho conflicto.

1.2 Objetivos

Dado el riesgo que supone que dos o más aeronaves incumplan unos mínimos de separación, es imprescindible disponer de herramientas que eviten dichos acercamientos. En la aviación comercial actual, los beneficios están muy ajustados debido a la competencia entre aerolíneas por lo que resulta de vital importancia para las propias compañías que sus vuelos no se alarguen mucho más de lo establecido, ya que el aumento de combustible o un posible retraso puede llegar a generar pérdidas económicas y malestar en los pasajeros.

En esta línea, en este TFG se pretende obtener trayectorias para la evitación de conflictos de tal forma que los retrasos y los gastos no previstos de combustible sean mínimos y por tanto no afecten de forma excesiva en los resultados económicos de los vuelos ni en posibles retrasos de los pasajeros al llegar a su destino. En resumen, se pretende obtener una relación de trayectorias óptimas para emplear en cada conflicto según sus características.

1.3 Metodología y estructura del documento

Este documento se estructura en seis capítulos, siendo este el primero. En el segundo capítulo se explica el problema que se va a abordar en el Trabajo Fin de Grado: la detección y resolución de conflictos entre aeronaves y su optimización. Dado que este problema es muy complejo y extenso, se determinan las características específicas del problema en el que se va a centrar el estudio. Como se explicará en el capítulo 2, existe la necesidad de un propagador de la posición de las aeronaves en el tiempo (para el vuelo en crucero y para diferentes maniobras de evitación de conflictos), este propagador, junto con la definición de los modelos de la aeronave considerada en el estudio (Airbus A320), se desarrollan en el capítulo 3. Además, en el capítulo 3 se plantea un ejemplo aleatorio de conflicto entre aeronaves y se resuelve manualmente. Para resolver el problema de optimización es necesario considerar una herramienta capaz de encontrar la solución a un problema de búsqueda del mínimo de una función multivariable sujeto a diferentes restricciones. La herramienta utilizada es la función *fmincon* del software comercial MATLAB, versión R2016b, realizándose los cálculos en un portátil MacBook Pro con un procesador Intel Core i5 y 8 GB de RAM. En el capítulo 4 se explica el uso de esta herramienta y se optimizan las resoluciones manuales planteadas en el capítulo 3 para un conflicto aleatorio. Por último, en el capítulo 5 se realiza un barrido de conflictos en el que se estudia el comportamiento óptimo de cada una de las trayectorias de evitación planteadas en el capítulo 3, además, se compara qué trayectoria es la mejor en cada caso y se plantea un mapa en el que, en función del escenario de conflicto se indica qué trayectoria de evitación es la óptima, teniendo en cuenta que no todas las trayectorias serán capaces de resolver todos los escenarios de conflicto debido a sus características. Las conclusiones y trabajos futuros del estudio realizado en todos estos capítulos se recoge en el capítulo 6.

2 Detección y resolución de conflictos

En primer lugar, es necesario tener claro el concepto de conflicto entre aeronaves: evento en el que se predice que dos o más aeronaves experimentarán una pérdida de las mínimas de separación.. El estudio de estas pérdidas de separación y métodos para resolverlas es conocido como CD&R ¹. El objetivo del CD&R es predecir la existencia de un conflicto, comunicar el conflicto a un operador humano y, en algunos casos, ayudar a su resolución. Los métodos para mantener la separación entre aeronaves en el sistema de gestión del tráfico aéreo actual han sido construidos a partir de una base de rutas estructuradas y procedimientos estudiados. El ser humano es un elemento esencial en este proceso debido a su capacidad para integrar información y emitir juicios. Sin embargo, debido a que pueden ocurrir fallos y errores operativos, los sistemas automatizados han comenzado a aparecer tanto en la cabina del piloto como en tierra para brindar apoyo a la toma de decisiones y servir como alerta de conflicto con otra aeronave. El procedimiento que describe el sistema CD&R se muestra en la figura 2.1.

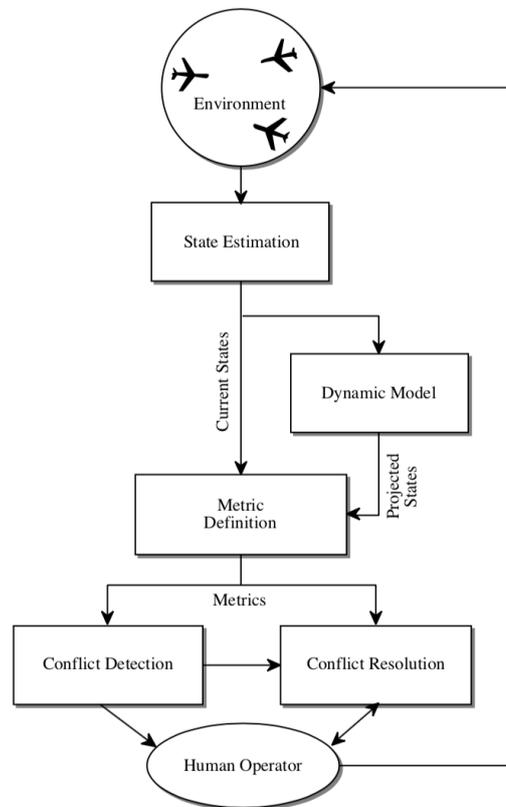


Figura 2.1 Proceso de detección y resolución de conflictos, extraído de [2].

¹ Conflict detection and resolution

Como se describe en la figura 2.1, es esencial disponer de un modelo que prediga las trayectorias en el futuro, que junto a las condiciones iniciales del escenario de vuelo sea capaz de definir el entorno en cualquier instante de tiempo para así detectar los conflictos con suficiente antelación y ser capaces de resolverlos. Una vez detectado el conflicto se procederá a su resolución con apoyo de un operador humano. En este TFG se desarrollará un modelo cinemático que, propagando la trayectoria contenida en el plan de vuelo, predice la posición de las aeronaves en cualquier instante de tiempo. Además, se estudiará cómo debe ser la resolución del conflicto según el escenario de vuelo inicial, primando la eficiencia de la trayectoria, con el objetivo de apoyar las decisiones del operador humano.

2.1 Detección de conflictos

Para detectar un conflicto, es necesario conocer si se infringen las distancias mínimas de separación entre dos o más aeronaves. Se consideran estas distancias mínimas de separación entre aeronaves porque no solo es necesario evitar colisiones, sino también posibles interferencias que pueden generar una en la otra, desde turbulencias aerodinámicas hasta problemas de navegación. Estos mínimos de separación, para los niveles de vuelo comprendidos entre $29000ft$ y $41000ft$ (se consideran estos niveles de vuelo por ser en los que se desarrollan los vuelos en crucero en la aviación comercial actual) consisten en lo siguiente:

- La distancia horizontal mínima, D_{AB} , entre aeronaves debe ser de 5nmi y será la que se seleccione para el estudio.
- La distancia vertical mínima, H_{AB} , entre aeronaves debe ser de 1000 ft.

Quedando de esta forma definido el espacio protegido de una aeronave como un cilindro de diámetro D_{AB} y altura H_{AB} , representado en las siguientes figuras para un escenario bidimensional (figura 2.2) y otro tridimensional (figura 2.3).

Las distancias $d_{AB}(t)$ y $h_{AB}(t)$ representan las distancias de separación, horizontal y vertical respectivamente, entre las aeronaves A y B en un instante de tiempo t .

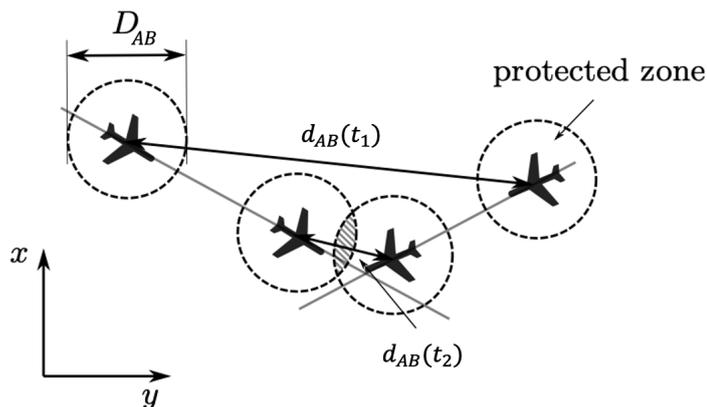


Figura 2.2 Conflicto de dos aeronaves bidimensional, vista cenital (las aeronaves vuelan a la misma altitud), extraído de [3].

En la figura 2.2 se observa que en el instante t_2 se están incumpliendo las distancias de separación mínimas entre aeronaves ya que $d_{AB}(t_2) < D_{AB}$

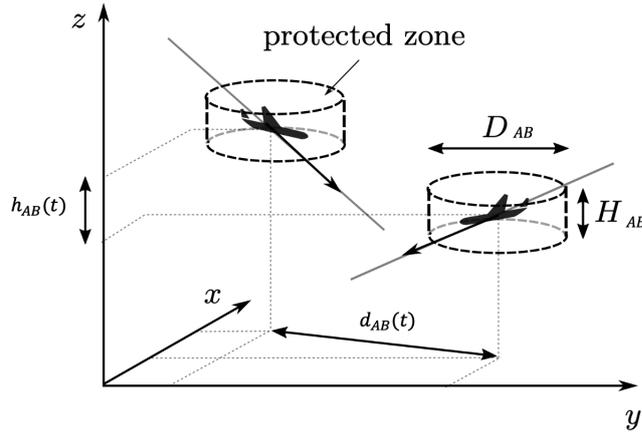


Figura 2.3 Conflicto de dos aeronaves tridimensional (las aeronaves vuelan a diferente altitud y su trayectoria tiene una componente vertical), extraído de [3].

Para conocer la existencia o no de un conflicto entre las aeronaves A y B, se establece el parámetro δ_{AB} , cuyo valor determina dicha existencia, realizando una comparación entre la separación real de las aeronaves y las distancias mínimas de separación requeridas, tanto verticales como horizontales. Se realiza un muestreo en cada segundo de forma que se estudia en cada instante la existencia o no de un conflicto entre las aeronaves A y B, obteniendo una función $\delta_{AB}(t)$.

$$\delta_{AB}(t) = \max\left(\frac{d_{AB}(t)}{D_{AB}}, \frac{h_{AB}(t)}{H_{AB}}\right)$$

Si el valor de δ_{AB} es inferior a la unidad, existe conflicto; mientras que si es superior, no lo habrá, como se puede observar en la figura 2.4.

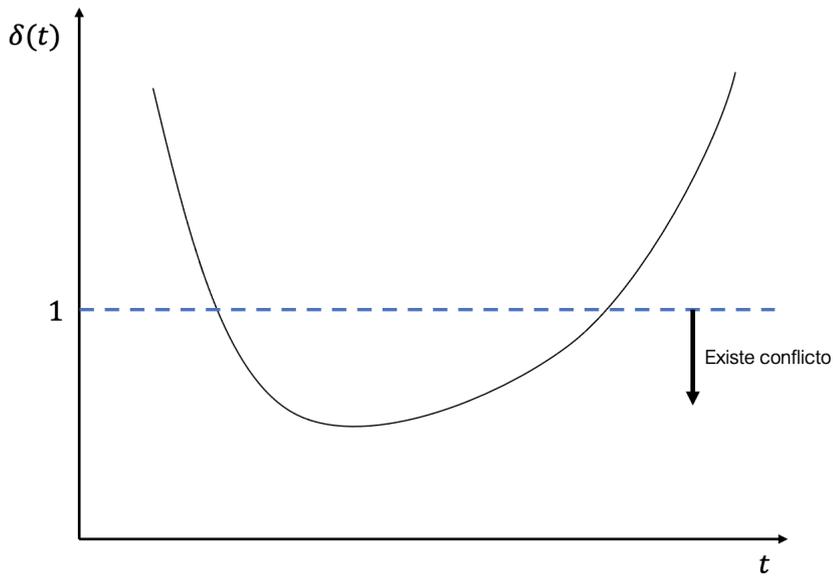


Figura 2.4 Existencia o no de conflicto mediante la expresión $\delta(t)$.

El caso de que la función $\delta_{AB}(t)$ sea nula en algún instante es especialmente preocupante ya que esto implicaría la colisión de las aeronaves A y B en dicho instante. Esto permite entender la importancia de

detectar los conflictos con la suficiente antelación como para resolverlos de forma adecuada y evitar por tanto situaciones de riesgo.

2.2 Resolución de conflictos

Cuando se considere necesario actuar sobre las trayectorias de las aeronaves, se puede iniciar la fase de resolución de conflictos. Tanto la detección de conflictos como la resolución de conflictos, o ambas, pueden automatizarse o pueden manejarse manualmente a través de procedimientos. En este marco, la detección de conflictos se puede considerar como el proceso de decidir cuándo se debe tomar acción, y la resolución de conflictos implica determinar cómo o qué acción debe tomarse. El tipo de acción que se requiere puede depender de lo temprano que la propia acción comienza. Esta interdependencia es un factor que hace que el desarrollo del sistema CD&R resulte desafiante e interesante, porque hay muchas soluciones de diseño factibles. Existen múltiples métodos para la resolución de conflictos, por ello se realizará una clasificación de los métodos en función de sus características. Se consideran seis factores determinantes que diferencian los modelos para representar las principales categorías:

1. **Propagación del estado** de la aeronave. La detección y resolución de conflictos depende de la capacidad del modelo para predecir el futuro. El modelado de las trayectorias implica el método por el cual los estados actuales de las aeronaves se proyectan hacia el futuro. En este TFG se van a modelar las trayectorias sin considerar incertidumbres, propagando un plan de vuelo.
2. **Dimensiones de la trayectoria** usada para resolver el conflicto. La trayectoria para la resolución del conflicto puede darse en el plano horizontal, en el plano vertical o en ambos. En este TFG, como se verá más adelante, solo se considerarán trayectorias en el plano horizontal o en el vertical, en ningún caso en ambos simultáneamente.
3. **Detección de conflictos.** Es importante establecer el umbral entre la existencia o no de un conflicto para determinar en qué momento debe empezar la resolución del mismo. Aunque algunos métodos no tienen un umbral explícito en este TFG se toma el umbral en las distancias mínimas de separación definidas en la sección 2.1.
4. **Resolución de conflictos.** En función de la solución que se le da al conflicto, se pueden distinguir cinco categorías.
 - Maniobra prescrita: Se fijan en función de un procedimiento definido, sin tener en cuenta la optimización y sin oportunidad de modificar la resolución. Los operadores tienen conocimiento para ordenarlas de forma inmediata, reduciendo el tiempo de reacción y su carga de trabajo.
 - Maniobras optimizadas: Incluyen un conjunto de medidas de costos para disminuir los mismos. Estas maniobras son el campo de estudio de este TFG. Requieren mayor carga de trabajo para el operador.
 - Maniobras de fuerza: Enfocan la aeronave como una partícula cargada, de forma que se generan fuerzas repulsivas entre aeronaves. Es un método complejo.
 - Resolución manual: El beneficio de una solución manual es que generalmente es más flexible en el sentido de que se basa en la intuición humana, utilizando información que puede no estar disponible para la automatización, como puede ser la información meteorológica.
 - No se actúa sobre las trayectorias para resolver el conflicto.
5. **Tipo de maniobra de resolución.** Las posibles maniobras incluyen giros, maniobras verticales y cambios de velocidad. En este TFG se trabajarán todas pero por separado, es decir, no se consideran combinaciones de las mismas en una misma resolución. Generalmente, proporcionar más dimensiones de maniobra permite una solución más eficiente para un conflicto. Sin embargo, impone gravámenes adicionales al operador en el sentido de que una maniobra debe ser controlada y monitorizada, por lo que posiblemente aumente el tiempo de respuesta y la carga de trabajo.
6. **Conflictos múltiples.** Los conflictos pueden darse entre dos o más aeronaves. En el caso en el que existan más de dos aeronaves en el mismo conflicto, la resolución se puede dar de forma global o por pares de aviones, barriando todas las posibles parejas. Este caso no se estudia en este TFG, considerándose solo el conflicto entre dos aeronaves aisladas del resto del espacio aéreo en el que vuelan.

Además de los seis factores utilizados para distinguir entre los enfoques de modelado, hay otras cuestiones que podrían tenerse en cuenta. Por ejemplo, cómo se gestiona la incertidumbre en el modelo.

3 Parametrización de trayectorias

En este capítulo se procede a parametrizar las trayectorias de las aeronaves en vuelo en crucero. En primer lugar, la trayectoria rectilínea a altitud constante para así ser capaz de predecir la posición en el futuro a partir de las condiciones iniciales de cada vuelo, y, por tanto, poder detectar los conflictos. En segundo lugar, se parametrizan diferentes trayectorias útiles en la evitación de conflictos entre aeronaves (cada trayectoria tendrá cambios en el plano vertical u horizontal, pero nunca en ambos simultáneamente).

Se comienza particularizando las ecuaciones de Mecánica del Vuelo para las maniobras consideradas en el TFG. Posteriormente, se procederá a estudiar una a una diferentes trayectorias, cada una con unos parámetros propios que las definen. Por su parte, las maniobras de evitación de conflictos consistirán en desviaciones sobre la ruta inicialmente establecida para la aeronave (trayectoria rectilínea), de tal forma que la aeronave diverge de la trayectoria rectilínea uniforme para después volver a ella, una vez superada la amenaza de conflicto, generándose unos cambios en los costes de la aeronave. Por último se incluye un ejemplo de conflicto y su resolución manual con cada una de las diferentes maniobras de evitación consideradas.

3.1 Ecuaciones del movimiento

Las hipótesis fundamentales consideradas para la formulación del problema son las siguientes:

- Se considera el movimiento del centro de masas del avión, tomando la aeronave como un cuerpo puntual de masa variable con 3 grados de libertad.
- Avión considerado cuerpo rígido.
- Avión simétrico respecto al fuselaje.
- Motor fijo respecto al avión.
- Tierra plana.
- Gravedad constante, g_0 , de valor 9.81 m/s^2 .
- Atmósfera en calma (no hay viento).
- Masa del avión constante y conocida, m_0 , ya que las trayectorias estudiadas tendrán corta duración y se desprecia la variación debida al consumo de combustible.
- El modelo propulsivo consiste en la dependencia del consumo con la altitud, la velocidad y el peso del avión.
- Ángulo de subida γ pequeño, es decir, $\gamma \ll 1$.

De esta forma, las ecuaciones que se van a usar son [4]:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= V \cos \chi \\ \frac{dy}{dt} &= V \sin \chi \\ \frac{dr}{dt} &= V \\ \frac{dh}{dt} &= V\gamma \\ \frac{dV}{dt}m_0 &= T - D - m_0g_0\gamma \\ L &= m_0g_0 \\ \frac{dm_F}{dt} &= c\end{aligned}$$

En estas ecuaciones, x e y representan las coordenadas cartesianas (x positivo hacia el norte e y positivo hacia el este), t el tiempo, V la velocidad aerodinámica verdadera de la aeronave, c el consumo de combustible, r la distancia recorrida por la aeronave, h la altitud de vuelo, γ el ángulo de subida (definido a partir de la horizontal y positivo en sentido contrario a la agujas del reloj), T el empuje de la aeronave, D la resistencia aerodinámica de la aeronave y χ el ángulo de rumbo de la aeronave, definido a partir del norte y positivo en sentido horario, como se puede observar en la figura 3.1. Dentro de estas expresiones se pueden identificar los siguientes términos:

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= V\gamma = ROCD \\ \frac{dV}{dt} &= a\end{aligned}$$

Las siglas *ROCD* quieren decir *Rate of Climb or Descent*, velocidad de ascenso o descenso y a hace relación a la aceleración o desaceleración de la aeronave, se utilizarán estos dos términos como parámetros para definir algunas de las trayectorias de evitación.

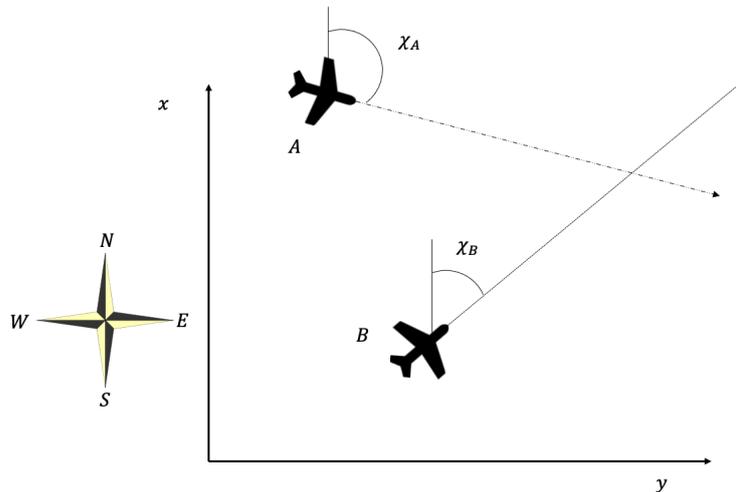


Figura 3.1 Escenario general de conflicto.

Para definir totalmente las ecuaciones del movimiento es necesario definir un modelo aerodinámico, otro de consumo de combustible y un modelo para el empuje aportado por la planta motora.

El modelo aerodinámico consiste en una polar parabólica de coeficientes constantes.

$$C_D = C_{D_0} + kC_L^2$$

De forma que la resistencia toma la siguiente expresión:

$$C_L = \frac{2m_0g_0}{\rho V^2 S_{ref}}$$

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S_{ref} \left(C_{D_0} + k \left(\frac{2m_0g_0}{\rho V^2 S_{ref}} \right)^2 \right)$$

Donde todas las magnitudes se miden en unidades del sistema internacional (S.I.).
Pudiéndose definir el empuje mediante las ecuaciones del movimiento como:

$$T = D + m_0g_0\gamma + m_0 \frac{dV}{dt} = D + m_0g_0 \frac{ROCD}{V} + m_0a$$

El modelo de consumo de combustible, extraído de [5], se define para un motor turbofan y consiste en un modelo del consumo específico, η , que junto al empuje de la aeronave, T , definirán el consumo de combustible, c .

$$\frac{dm_F}{dt} = c$$

$$c(h,V) = \eta(V)T(h,V)$$

El modelo tomado para el consumo específico se define de la siguiente forma:

$$\eta = C_{f1} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}} \right)$$

El consumo específico se mide en [kg/(min kN)]. En este caso la velocidad V se mide en nudos [kt]. C_{f1} y C_{f2} representan dos parámetros del modelo de consumo y cada modelo de avión posee los suyos.

Se puede comprobar la dependencia del consumo con la altitud de vuelo y la velocidad de vuelo. Depende de la velocidad a través del empuje y del consumo específico. Por otro lado, depende de la altitud de vuelo a través del empuje, que toma diferentes valores en función de la densidad, es por esto que será necesario considerar un modelo de atmósfera. El modelo de atmósfera que se va a considerar es la *International Standard Atmosphere (ISA)*, explicada en el Apéndice 1.

El modelo que define el empuje del motor (en Newtons [N]) consiste en lo siguiente (extraído de [5]):

- **Empuje máximo en subida**

$$(T_{maxclimb})_{ISA} = C_{Tc,1} \left(1 - \frac{h}{C_{Tc,2}} + C_{Tc,3}h^2 \right)$$

Donde $C_{Tc,1}$, $C_{Tc,2}$ y $C_{Tc,3}$ son constantes del modelo que dependen del tipo de avión y h es la altitud de vuelo medida en pies [ft].

- **Empuje máximo en crucero**

$$(T_{cruise})_{MAX} = C_{Tcr}(T_{maxclimb})_{ISA}$$

Donde C_{Tcr} es una constante del modelo que depende del tipo de avión.

- **Empuje mínimo en descenso**

$$T_{des,high} = C_{Tdes,high}(T_{maxclimb})_{ISA}$$

Donde $C_{Tdes,high}$ es una constante del modelo que depende del tipo de avión.

Para integrar estas ecuaciones será necesario conocer unas condiciones iniciales además de unas ligaduras de vuelo. Las condiciones iniciales y las ligaduras de cada segmento vienen dadas en la modelización de cada trayectoria. Lo cual se verá a continuación.

3.2 Trayectorias

Se van a realizar las siguientes hipótesis generales para la parametrización de las trayectorias:

- Se analizarán trayectorias rectilíneas o formadas por diferentes segmentos rectilíneos.
- Los cambios de velocidad, ROCD y rumbo se consideran instantáneos, despreciando las fases transitorias.
- El avión deberá tener los mismo parámetros de altitud, rumbo y velocidad al inicio y al final de la trayectoria. El objetivo de las trayectorias que se van a parametrizar será por tanto ir desde un punto inicial conocido (x_0, y_0, h_0) a un punto final (x_f, y_f, h_0) desconocido que se encuentra a una distancia del inicial, d y un ángulo de rumbo respecto al norte χ_0 .
 - Todas las trayectorias tendrán las siguientes condiciones de inicio:

$$x(0) = x_0 \quad y(0) = y_0 \quad h(0) = h_0 \quad r(0) = 0 \quad V(0) = V_0 \quad \chi(0) = \chi_0$$

Todas estas condiciones deben ser conocidas para realizar el estudio. La constante V_0 indica la velocidad de la aeronave en el punto inicial.

- Todas las trayectorias tendrán las siguientes condiciones en el instante final t_f :

$$x(t_f) = x_f \quad y(t_f) = y_f \quad h(t_f) = h_0 \quad V(t_f) = V_0 \quad \chi(t_f) = \chi_0$$

Como se ha explicado anteriormente, la velocidad, el rumbo y la altitud deben ser al final del análisis iguales a sus valores iniciales. La distancia recorrida r_f al llegar al punto final, (x_f, y_f, h_0) , dependerá de la trayectoria realizada.

Se procede a definir y parametrizar una a una trayectorias de evitación de conflictos. Para ello, se realiza una primera clasificación en función de los cambios de parámetros que definen las trayectorias (según [6]):

- Trayectoria rectilínea uniforme, define el vuelo de una aeronave en crucero.
- Trayectorias con cambios de rumbo, cambios en el plano horizontal mediante virajes.
- Trayectorias con cambios de altitud, cambios en el plano vertical mediante *pull up* y *push down* (virajes en el plano vertical).
- Trayectorias con cambios de velocidad mediante aceleraciones y frenadas.

3.2.1 Trayectoria rectilínea uniforme

La primera trayectoria que se va a analizar es la trayectoria rectilínea uniforme, representada en la figura 3.2. Es una trayectoria de un solo segmento y se considera que es la que llevan los aviones en vuelo de crucero previamente a la detección y resolución de un posible conflicto. Los aviones *A* y *B* siguen cada uno de ellos una trayectoria recta con velocidad, rumbo y altitud constantes. A partir de esto, y teniendo en cuenta las condiciones iniciales antes planteadas se pueden obtener las ecuaciones analíticas de la posición, $x(t)$ e $y(t)$; de la distancia recorrida $r(t)$, de la altitud de vuelo $h(t)$ y de la masa de combustible consumida $m_F(t)$ de cada avión.

Para un avión en trayectoria rectilínea uniforme se obtienen las siguientes expresiones:

$$x(t) = x_0 + V_0 t \cos \chi_0$$

$$y(t) = y_0 + V_0 t \sin \chi_0$$

$$r(t) = V_0 t$$

$$h(t) = h_0$$

$$m_F(t) = c_0 t$$

El tiempo de vuelo t_f vendrá definido por la llegada al punto final. Se conoce la velocidad de vuelo (V_0) y la distancia entre los puntos final e inicial (d), de esta forma:

$$t_f = \frac{d}{V_0} \quad r_f = d \quad x_f = x_0 + d \cos \chi_0 \quad y_f = y_0 + d \sin \chi_0 \quad m_{Ff} = c_0 \frac{d}{V_0}$$

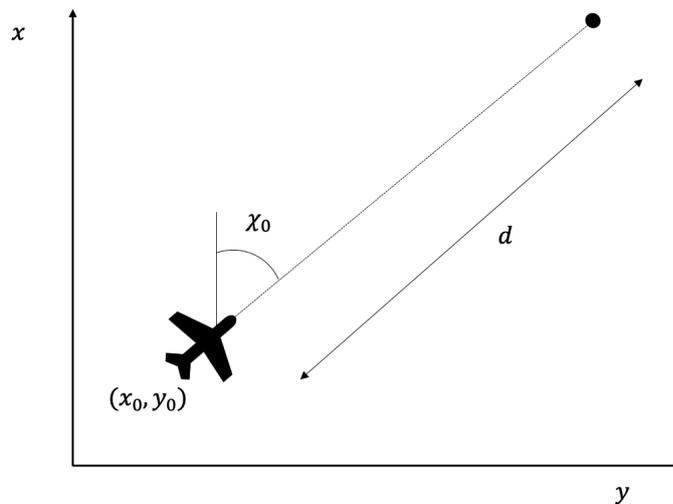


Figura 3.2 Trayectoria rectilínea, vista cenital..

3.2.2 Trayectorias con cambios de rumbo

En estas trayectorias, se producirán cambios de rumbo en ciertos instantes que alejarán a la aeronave de la trayectoria inicial. Para estas trayectorias se consideran las siguientes hipótesis (además de las ya consideradas al comienzo de esta sección):

- Se considera ángulo de rumbo, χ , constante a lo largo de cada uno de los segmentos de vuelo, pero diferente en cada segmento.
- Se supone la velocidad constante en todo el recorrido. La velocidad en cualquier tramo será la velocidad inicial V_0 .
- La altitud de vuelo de la aeronaves es constante durante el análisis e igual a la altitud inicial, h_0 , por lo que $\gamma = 0$ en todos los segmentos.

De esta forma las ecuaciones analíticas de la trayectoria de este avión quedarán definidas a trozos. En cada uno de los segmentos de la trayectoria, como se ha explicado en las hipótesis anteriores, se tienen unas determinadas condiciones de rumbo χ_i mientras que la altitud y la velocidad son constantes durante toda la trayectoria.

Desviación horizontal

También llamada cambio de rumbo en el documento. La trayectoria consiste en que el avión realiza un cambio de rumbo hacia un punto desviado de la trayectoria rectilínea inicial. Esta trayectoria es representada en la figura 3.3, donde se observan cuatro segmentos de vuelo, siendo los parámetros que definen la desviación los siguientes: $r_1, l_d, \Delta\chi_2$ y $\Delta\chi_3$. r_1 es la distancia recorrida hasta realizar el primer cambio de rumbo, l_d es la distancia de separación lateral respecto a la trayectoria inicial y los ángulos $\Delta\chi_2$ y $\Delta\chi_3$ definen los cambios de rumbo realizados. Se describen cada uno de los segmentos:

1. El primer segmento, hasta recorrer una distancia r_1 , se caracteriza porque el vuelo sigue las condiciones de vuelo iniciales: χ_0, V_0, h_0 .
2. En el segundo segmento, se realiza un cambio de rumbo tal que, $\chi_2 = \chi_0 + \Delta\chi_2$ hasta distanciarse lateralmente de la trayectoria inicial una distancia l_d mayor que cero y conocida, el vuelo se caracteriza por $\Delta\chi_2, V_0, h_0$.
3. En el tercer segmento, se vuelve a realizar un cambio de rumbo hasta volver a la trayectoria inicial, recorriendo una distancia r_3 desconocida, el vuelo se caracteriza por $\Delta\chi_3, V_0, h_0$, de forma que $\chi_3 = \chi_0 + \Delta\chi_2 + \Delta\chi_3$. Es imprescindible que $\Delta\chi_2$ y $\Delta\chi_3$ tengan signo contrario y además el valor absoluto del segundo debe ser mayor que el del primero, de otra manera la aeronave no vuelve nunca a la trayectoria inicial.

4. En el cuarto segmento, se vuelve de nuevo al rumbo inicial hasta alcanzar el punto final de la trayectoria, recorriendo una distancia r_4 desconocida. El vuelo se caracteriza porque se vuelven a tener las condiciones de vuelo iniciales χ_0, V_0, h_0 . Teniendo la ligadura $r_4 \geq 0$ cuyo cumplimiento impone condición sobre los valores de $l_d, \Delta\chi_2$ y $\Delta\chi_3$. Si r_4 fuese menor que cero la aeronave tendría que retroceder hacia el punto final, consumiendo mayor tiempo y combustible, este concepto se aplicará también a las siguientes trayectorias.

De forma análoga a la sección 3.2.1, teniendo en cuenta las condiciones iniciales y finales, obtenemos las ecuaciones analíticas de esta trayectoria.

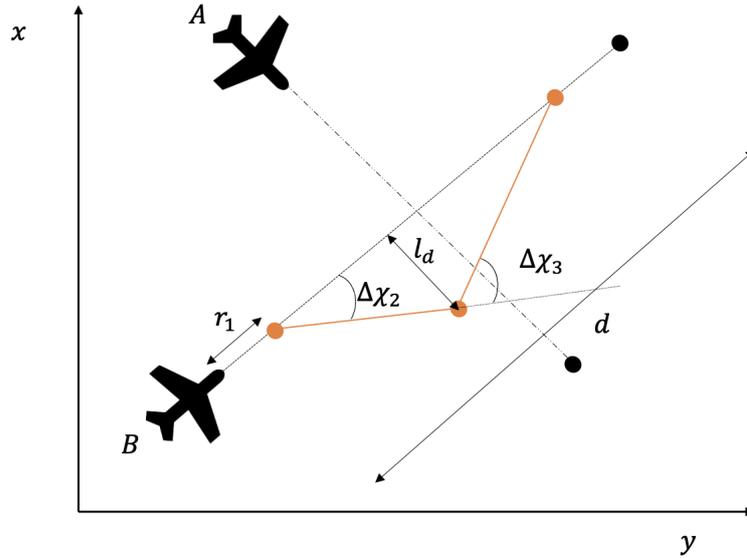


Figura 3.3 Trayectoria con desviación horizontal, vista cenital..

$$r(t) = V_0 t$$

Se obtienen los valores de r_2, r_3 y r_4 :

$$r_2 = \frac{l_d}{\text{sen}(|\Delta\chi_2|)}$$

$$r_3 = \frac{l_d}{\text{sen}(|\Delta\chi_3| - |\Delta\chi_2|)}$$

$$r_4 = d - r_1 - r_2 \cos(\Delta\chi_2) - r_3 \cos(\Delta\chi_3 - \Delta\chi_2) = d - r_1 - l_d \left(\frac{1}{\tan(|\Delta\chi_2|)} + \frac{1}{\tan(|\Delta\chi_3| - |\Delta\chi_2|)} \right)$$

Cumpléndose las siguientes ligaduras.

$$\begin{aligned} r_4 &\geq 0 \\ \frac{\Delta\chi_2}{|\Delta\chi_2|} + \frac{\Delta\chi_3}{|\Delta\chi_3|} &= 0 \\ |\Delta\chi_2| &\leq 90^\circ \\ |\Delta\chi_2| < |\Delta\chi_3| &\leq 90^\circ + |\Delta\chi_2| \\ l_d &\geq 0 \end{aligned}$$

De esta forma obtenemos los instantes en los que cambia el rumbo y el tiempo final de la trayectoria:

$$t_1 = r_1/V_0 \quad t_2 = r_2/V_0 + t_1 \quad t_3 = r_3/V_0 + t_2 \quad t_4 = r_4/V_0 + t_3$$

$$t_f = t_4$$

La posición y la masa de combustible en cualquier instante de tiempo toman los siguientes valores:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + V_0 t \cos \chi_0 & \text{si } t \leq t_1 \\ x_0 + r_1 \cos \chi_0 + V_0(t - t_1) \cos(\chi_0 + \Delta\chi_2) & \text{si } t_1 < t \leq t_2 \\ x_0 + r_1 \cos \chi_0 + r_2 \cos(\chi_0 + \Delta\chi_2) + V_0(t - t_2) \cos(\chi_0 + \Delta\chi_2 + \Delta\chi_3) & \text{si } t_2 < t \leq t_3 \\ x_0 + r_1 \cos \chi_0 + r_2 \cos(\chi_0 + \Delta\chi_2) + r_3 \cos(\chi_0 + \Delta\chi_2 + \Delta\chi_3) + V_0(t - t_3) \cos \chi_0 & \text{si } t > t_3 \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + V_0 t \sin \chi_0 & \text{si } t \leq t_1 \\ y_0 + r_1 \sin \chi_0 + V_0(t - t_1) \sin(\chi_0 + \Delta\chi_2) & \text{si } t_1 < t \leq t_2 \\ y_0 + r_1 \sin \chi_0 + r_2 \sin(\chi_0 + \Delta\chi_2) + V_0(t - t_2) \sin(\chi_0 + \Delta\chi_2 + \Delta\chi_3) & \text{si } t_2 < t \leq t_3 \\ y_0 + r_1 \sin \chi_0 + r_2 \sin(\chi_0 + \Delta\chi_2) + r_3 \sin(\chi_0 + \Delta\chi_2 + \Delta\chi_3) + V_0(t - t_3) \sin \chi_0 & \text{si } t > t_3 \end{cases}$$

$$h(t) = h_0$$

$$m_F(t) = c_0 t$$

Los valores que tomarán en el punto final las ecuaciones analíticas serán:

$$r_f = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = d + l_0 \left(\frac{1}{\sin(|\Delta\chi_2|)} + \frac{1}{\sin(|\Delta\chi_3| - |\Delta\chi_2|)} - \frac{1}{\tan(|\Delta\chi_2|)} - \frac{1}{\tan(|\Delta\chi_3| - |\Delta\chi_2|)} \right)$$

$$t_f = \frac{d}{V_0} + \frac{l_d}{V_0} \left(\frac{1}{\sin(|\Delta\chi_2|)} + \frac{1}{\sin(|\Delta\chi_3| - |\Delta\chi_2|)} - \frac{1}{\tan(|\Delta\chi_2|)} - \frac{1}{\tan(|\Delta\chi_3| - |\Delta\chi_2|)} \right)$$

$$m_F(t_f) = c_0 t_f = c_0 \left(\frac{d}{V_0} + \frac{l_d}{V_0} \left(\frac{1}{\sin(|\Delta\chi_2|)} + \frac{1}{\sin(|\Delta\chi_3| - |\Delta\chi_2|)} - \frac{1}{\tan(|\Delta\chi_2|)} - \frac{1}{\tan(|\Delta\chi_3| - |\Delta\chi_2|)} \right) \right)$$

Nótese que el parámetro r_1 no influye ni en el tiempo de vuelo ni en la cantidad de combustible consumida, solo influye a la hora de resolver satisfactoriamente el conflicto.

Desviación horizontal en paralelo

También llamada cambio de rumbo en paralelo en el documento. Esta trayectoria es similar a la anterior pero con dos cambios de rumbo intermedios antes de volver al rumbo inicial en lugar de uno, es decir, una desviación en paralelo ya que el tercer tramo de la trayectoria tendrá el mismo rumbo que el inicial y el final. Esta trayectoria está representada en la figura 3.4, donde se observan cinco tramos, los parámetros que describen la desviación son los siguientes: $r_1, l_d, r_3, \Delta\chi_2$ y $\Delta\chi_4$. r_1 es la distancia recorrida hasta realizar el primer cambio de rumbo, l_d es la distancia de separación lateral respecto a la trayectoria inicial, r_3 es la distancia que recorre la aeronave desplazada lateralmente y los ángulos $\Delta\chi_2$ y $\Delta\chi_4$ definen los cambios de rumbo realizados. Se describen cada uno de los segmentos:

1. El primer segmento, hasta recorrer una distancia r_1 , se caracteriza porque el vuelo sigue las mismas condiciones de vuelo que las iniciales: χ_0, V_0, h_0 .

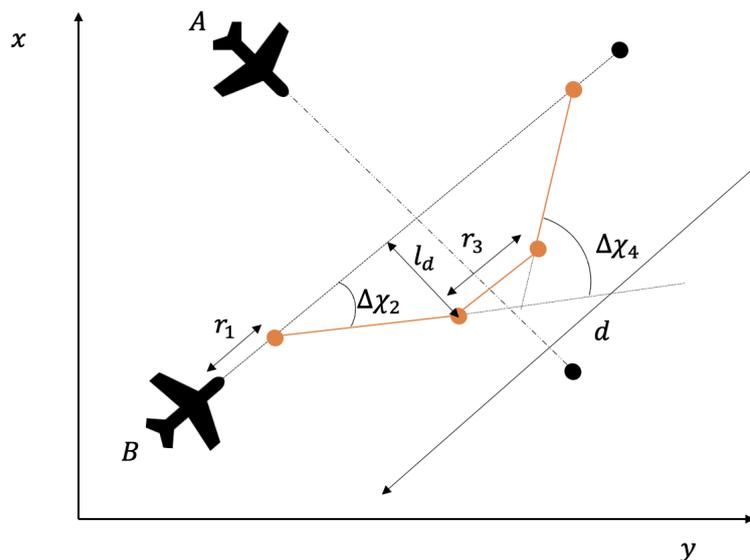


Figura 3.4 Trayectoria con desviación horizontal en paralelo, vista cenital.

2. En el segundo segmento, se realiza un cambio de rumbo tal que, $\chi_2 = \chi_0 + \Delta\chi_2$, hasta distanciarse lateralmente de la trayectoria inicial una distancia l_d mayor que cero y conocida, el vuelo se caracteriza por $\Delta\chi_2, V_0, h_0$.
3. En el tercer segmento, se vuelve al rumbo inicial hasta recorrer una distancia r_3 conocida, el vuelo se caracteriza por χ_0, V_0, h_0 .
4. En el cuarto segmento, se vuelve a realizar un cambio de rumbo hasta alcanzar la trayectoria inicial, de forma que $\chi_4 = \chi_0 + \Delta\chi_2 + \Delta\chi_4$, recorriendo una distancia r_4 desconocida, el vuelo se caracteriza por $\Delta\chi_4, V_0, h_0$. Es imprescindible que $\Delta\chi_2$ y $\Delta\chi_4$ tengan signo contrario, además el valor absoluto del segundo deberá ser mayor que el del primero, de otra forma en ningún momento se volvería a la trayectoria inicial.
5. En el quinto segmento se vuelve de nuevo al rumbo inicial hasta alcanzar el punto final de la trayectoria, recorriendo una distancia r_5 desconocida. El vuelo se caracteriza porque se vuelven a alcanzar las condiciones de vuelo iniciales χ_0, V_0, h_0 . Teniendo la ligadura $r_5 \geq 0$ cuyo cumplimiento impone condición sobre los valores de $l_d, r_3, \Delta\chi_2$ y $\Delta\chi_4$.

De forma análoga a la sección 3.2.1., teniendo en cuenta las condiciones iniciales y finales, obtenemos las ecuaciones analíticas.

$$r(t) = V_0 t$$

Se obtienen los valores de r_2, r_4 y r_5 :

$$r_2 = \frac{l_d}{\text{sen}(|\Delta\chi_2|)}$$

$$r_4 = \frac{l_d}{\text{sen}(|\Delta\chi_4| - |\Delta\chi_2|)}$$

$$r_5 = d - r_1 - r_2 \cos(\Delta\chi_2) - r_3 - r_4 \cos(\Delta\chi_4 - \Delta\chi_2) = d - r_1 - r_3 - l_d \left(\frac{1}{\tan(|\Delta\chi_2|)} + \frac{1}{\tan(|\Delta\chi_4| - |\Delta\chi_2|)} \right)$$

Cumpléndose las siguientes ligaduras.

$$r_5 \geq 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\chi_2}{|\Delta\chi_2|} + \frac{\Delta\chi_4}{|\Delta\chi_4|} &= 0 \\ |\Delta\chi_2| &\leq 90^\circ \\ |\Delta\chi_2| < |\Delta\chi_4| &\leq 90^\circ + |\Delta\chi_2| \\ l_d &\geq 0\end{aligned}$$

De esta forma obtenemos los instantes en los que cambia el rumbo y el tiempo final de la trayectoria:

$$t_1 = r_1/V_0 \quad t_2 = r_2/V_0 + t_1 \quad t_3 = r_3/V_0 + t_2 \quad t_4 = r_4/V_0 + t_3 \quad t_5 = r_5/V_0 + t_4$$

$$t_f = t_5$$

La posición y la masa de combustible en cualquier instante de tiempo toman los siguientes valores:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + V_0 t \cos \chi_0 & \text{si } t \leq t_1 \\ x_0 + r_1 \cos \chi_0 + V_0(t - t_1) \cos(\chi_0 + \Delta\chi_2) & \text{si } t_1 < t \leq t_2 \\ x_0 + r_1 \cos \chi_0 + r_2 \cos(\chi_0 + \Delta\chi_2) + V_0(t - t_2) \cos \chi_0 & \text{si } t_2 < t \leq t_3 \\ x_0 + r_1 \cos \chi_0 + r_2 \cos(\chi_0 + \Delta\chi_2) + r_3 \cos \chi_0 + V_0(t - t_3) \cos(\chi_0 + \Delta\chi_2 + \Delta\chi_4) & \text{si } t_3 < t \leq t_4 \\ x_0 + r_1 \cos \chi_0 + r_2 \cos(\chi_0 + \Delta\chi_2) + r_3 \cos \chi_0 + r_4 \cos(\chi_0 + \Delta\chi_2 + \Delta\chi_4) + V_0(t - t_4) \cos \chi_0 & \text{si } t > t_4 \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + V_0 t \sin \chi_0 & \text{si } t \leq t_1 \\ y_0 + r_1 \sin \chi_0 + V_0(t - t_1) \sin(\chi_0 + \Delta\chi_2) & \text{si } t_1 < t \leq t_2 \\ y_0 + r_1 \sin \chi_0 + r_2 \sin(\chi_0 + \Delta\chi_2) + V_0(t - t_2) \sin \chi_0 & \text{si } t_2 < t \leq t_3 \\ y_0 + r_1 \sin \chi_0 + r_2 \sin(\chi_0 + \Delta\chi_2) + r_3 \sin \chi_0 + V_0(t - t_3) \sin(\chi_0 + \Delta\chi_2 + \Delta\chi_4) & \text{si } t_3 < t \leq t_4 \\ y_0 + r_1 \sin \chi_0 + r_2 \sin(\chi_0 + \Delta\chi_2) + r_3 \sin \chi_0 + r_4 \sin(\chi_0 + \Delta\chi_2 + \Delta\chi_4) + V_0(t - t_4) \sin \chi_0 & \text{si } t > t_4 \end{cases}$$

$$h(t) = h_0$$

$$m_F(t) = c_0 t$$

Los valores que tomarán en el punto final las ecuaciones analíticas serán:

$$\begin{aligned}r_f &= r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = d + l_0 \left(\frac{1}{\sin(|\Delta\chi_2|)} + \frac{1}{\sin(|\Delta\chi_4| - |\Delta\chi_2|)} - \frac{1}{\tan(|\Delta\chi_2|)} - \frac{1}{\tan(|\Delta\chi_4| - |\Delta\chi_2|)} \right) \\ t_f &= \frac{d}{V_0} + \frac{l_d}{V_0} \left(\frac{1}{\sin(|\Delta\chi_2|)} + \frac{1}{\sin(|\Delta\chi_4| - |\Delta\chi_2|)} - \frac{1}{\tan(|\Delta\chi_2|)} - \frac{1}{\tan(|\Delta\chi_4| - |\Delta\chi_2|)} \right) \\ m_F(t_f) &= c_0 t_f = c_0 \left(\frac{d}{V_0} + \frac{l_d}{V_0} \left(\frac{1}{\sin(|\Delta\chi_2|)} + \frac{1}{\sin(|\Delta\chi_4| - |\Delta\chi_2|)} - \frac{1}{\tan(|\Delta\chi_2|)} - \frac{1}{\tan(|\Delta\chi_4| - |\Delta\chi_2|)} \right) \right)\end{aligned}$$

Cabe destacar que la trayectoria de cambio de rumbo estudiada previamente es un caso particular de esta trayectoria en la que $r_3 = 0$. Además los parámetros r_1 y r_3 no influyen ni en el tiempo de vuelo ni en la cantidad de combustible consumida, solo influirán a la hora de resolver satisfactoriamente el conflicto.

3.2.3 Trayectorias con cambios de altitud

Este tipo de trayectorias consisten en un cambio de altitud que aleja la trayectoria de la trayectoria rectilínea uniforme establecida para la altitud de vuelo inicial. Para este tipo de trayectorias es necesario considerar las siguientes hipótesis, (además de las ya consideradas al comienzo de esta sección):

- Se considera ángulo de rumbo, χ , constante en todos los tramos de la maniobra. El valor de este ángulo será por tanto el valor inicial: $\chi = \chi_0$.
- Los cambios de altitud deben cumplir las normas de navegación establecidas a la altitud de vuelo, por lo que, a las altitudes de crucero, que van a ser las estudiadas, los cambios de altitud deben ser múltiplos de 2000 ft.
- Se supone la velocidad constante en todo el recorrido. La velocidad en cualquier tramo será la velocidad inicial V_0 . Esta ligadura no es habitual en la navegación actual, lo común es mantener el número de Mach constante pero como los cambios de altura no van a ser superiores a 2000 ft ya que se busca el mínimo desvío de la trayectoria respecto a la trayectoria inicial, se puede suponer velocidad también constante. Esto es posible ya que para estos cambios de altitud en la troposfera la velocidad del sonido varía menos de un uno por ciento y en la estratosfera la temperatura es constante por lo que la velocidad del sonido no cambia.
- La altitud de vuelo de la aeronave no es constante en todos los segmentos, aunque sus valores inicial y final sí serán iguales, tomando el valor de h_0 .
- El $ROCD$ tomará un valor constante en los tramos de ascenso y descenso, siendo de signo contrario para volver a la altitud de vuelo inicial, de forma que γ tendrá también signo opuesto en ambos segmentos.

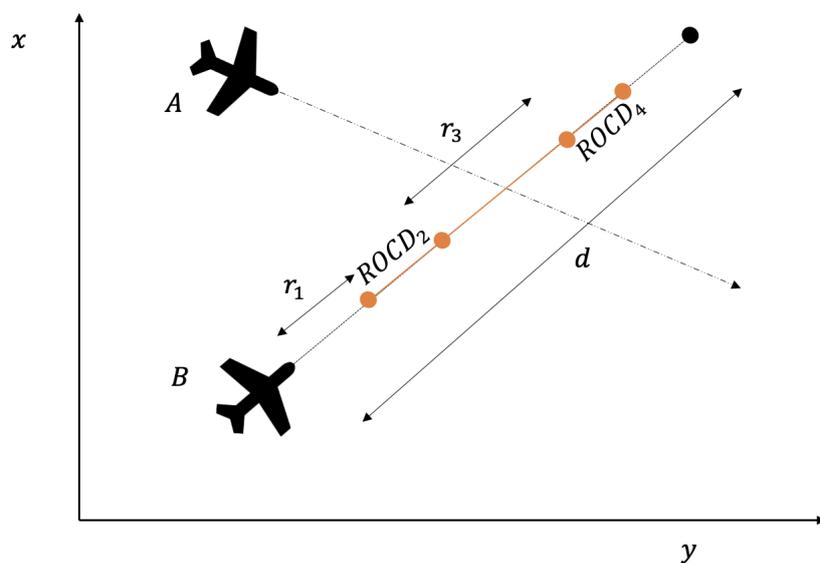


Figura 3.5 Trayectoria con cambio de altitud, vista cenital.

En concreto se modela una trayectoria con cambio temporal de la altitud de vuelo, esta trayectoria es la análoga a la trayectoria anterior, pero en el plano vertical en lugar de en el plano horizontal. Existen tres tramos horizontales, con un ascenso y un descenso intercalados entre ellos, cambiando la altitud del avión a lo largo de la trayectoria, como se puede observar en las figuras 3.5 y 3.6. Por tanto, al igual que en la trayectoria de desviación horizontal en paralelo, se tienen cinco tramos. Además de la hipótesis consideradas y las condiciones iniciales y finales, también son conocidos por ser parámetros de la maniobra las siguientes magnitudes que definen la desviación: $r_1, r_3, \Delta h_d, ROCD_2, ROCD_4$. r_1 es la distancia que se recorre hasta iniciar el cambio de altitud, r_3 la distancia recorrida a la altitud a la que se desvía la aeronave y $ROCD_2$ y

$ROCD_4$ definen las velocidades de ascenso y descenso que se tienen para alcanzar la altitud a la que se desvía la aeronave. Δh_d indica el incremento de altitud que se realiza en la desviación, se define como un parámetro discreto, que tomará el valor de 2000 ft si la desviación vertical es ascendente y -2000 ft si es descendente, para así cumplir con los niveles de vuelo establecidos por las normas de navegación y desviar la trayectoria lo mínimo posible.

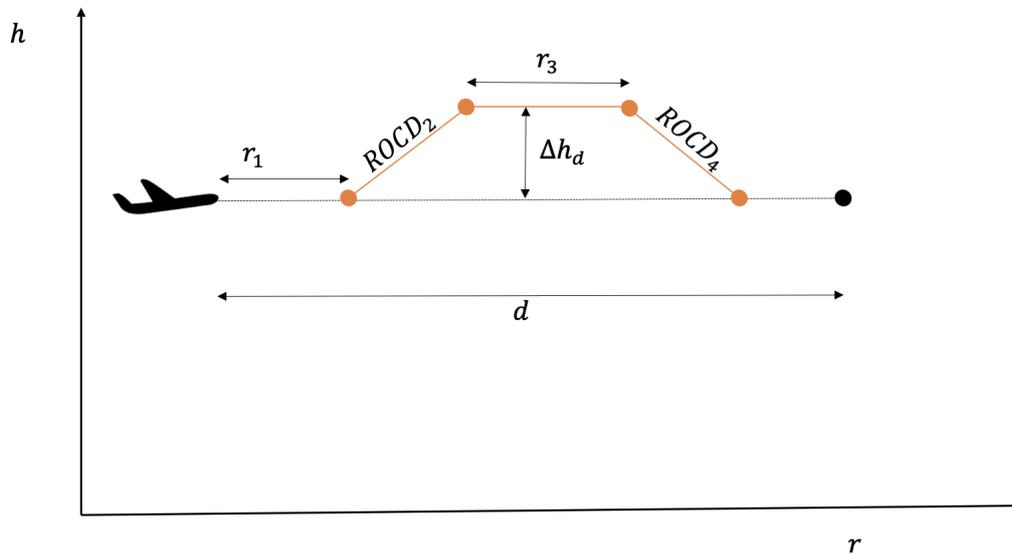


Figura 3.6 Trayectoria con cambio de altitud, perfil de altitud.

Los segmentos de vuelo son los siguientes

1. El primer segmento, hasta recorrer una distancia r_1 , se caracteriza porque el vuelo sigue las mismas condiciones de vuelo que las iniciales: χ_0, V_0, h_0 .
2. En el segundo segmento, se produce un cambio de altitud Δh_d , el vuelo se caracteriza por $\chi_0, V_0, ROCD_2$. $ROCD_2$ y Δh_d tendrán el mismo signo para asegurar la consistencia del problema.
3. En el tercer segmento, se recorre una distancia r_3 , el vuelo se caracteriza por $\chi_0, V_0, h_d = h_0 + \Delta h_d$.
4. En el cuarto segmento se vuelve a producir un cambio en la altitud de vuelo con valor Δh_d , volviendo a la altitud de vuelo inicial. El vuelo se caracteriza por $\chi_0, V_0, ROCD_4$. $ROCD_2$ y $ROCD_4$ deben tener signo contrario para que la aeronave vuelva a la trayectoria inicial, además sus valores deben cumplir las capacidades operacionales de la aeronave.
5. En el quinto segmento, se recorre una distancia r_5 hasta llegar al punto final, el vuelo se caracteriza por tener las mismas condiciones de vuelo que las iniciales: χ_0, V_0, h_0 . La distancia r_5 tiene que ser mayor o igual que cero, al igual que en los casos anteriores.

El tiempo de vuelo t_f vendrá definido por la llegada al punto final, pudiendo despejar este tanto de la expresión de la coordenada x como de la coordenada y . También podemos conocer la distancia recorrida a partir de las condiciones iniciales.

$$t_f = \frac{d}{V_0} \quad r_f = d$$

La altitud y la masa de combustible consumida serán las expresiones que quedarán definidas a trozos. Para ello es necesario conocer los instantes en los que se realizan los cambios de altitud

$$t_1 = r_1/V_0 \quad t_2 = \frac{\Delta h_d}{ROCD_2} + t_1 \quad t_3 = r_3/V_0 + t_2 \quad t_4 = \frac{-\Delta h_d}{ROCD_4} + t_3 \quad t_5 = t_f$$

El valor de la distancia recorrida en el tramo final tendrá que ser mayor o igual que cero.

$$r_5 = d - r_1 - r_3 - \frac{V_0 \Delta h_d}{ROCD_2} + \frac{V_0 \Delta h_d}{ROCD_4}$$

Cumpléndose las siguientes ligaduras.

$$\begin{aligned} r_5 &\geq 0 \\ \frac{ROCD_2}{|ROCD_2|} + \frac{ROCD_4}{|ROCD_4|} &= 0 \\ \frac{ROCD_2}{|ROCD_2|} &= \frac{\Delta h_d}{|\Delta h_d|} \\ ROCD_2, ROCD_4 &\in \left[\frac{T_{des,high} - \bar{D}}{m_0 g_0} V_0, \frac{T_{maxclimb} - \bar{D}}{m_0 g_0} V_0 \right] \end{aligned}$$

Donde el cálculo de la resistencia aerodinámica promedio, \bar{D} , en un segmento con variación de altitud se desarrolla en el Apendice 3.

Conocidos estos parámetros y ligaduras, se realiza la parametrización:

$$\begin{aligned} r(t) &= V_0 t \\ x(t) &= x_0 + V_0 t \cos \chi_0 \\ y(t) &= y_0 + V_0 t \sin \chi_0 \\ h(t) &= \begin{cases} h_0 & si \quad t \leq t_1 \\ h_0 + ROCD_2(t - t_1) & si \quad t_1 < t \leq t_2 \\ h_0 + \Delta h_d & si \quad t_2 < t \leq t_3 \\ h_0 + \Delta h_d + ROCD_4(t - t_3) & si \quad t_3 < t \leq t_4 \\ h_0 & si \quad t > t_4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$m_F(t) = \begin{cases} c_0 t & si \quad t \leq t_1 \\ c_0 t_1 + c_2(t - t_1) & si \quad t_1 < t \leq t_2 \\ c_0 t_1 + c_2(t_2 - t_1) + c_3(t - t_2) & si \quad t_2 < t \leq t_3 \\ c_0 t_1 + c_2(t_2 - t_1) + c_3(t_3 - t_2) + c_4(t - t_3) & si \quad t_3 < t \leq t_4 \\ c_0 t_1 + c_2(t_2 - t_1) + c_3(t_3 - t_2) + c_4(t_4 - t_3) + c_0(t - t_4) & si \quad t > t_4 \end{cases}$$

Los valores que tomarán en el punto final las ecuaciones analíticas serán:

$$t_f = \frac{d}{V_0}$$

$$r_f = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = d$$

$$m_F(t_f) = c_0(t_5 - t_4 + t_1) + c_2(t_2 - t_1) + c_3(t_3 - t_2) + c_4(t_4 - t_3)$$

$$= c_0 \left(\frac{d - r_3}{V_0} + \Delta h_d \left(\frac{1}{ROCD_4} - \frac{1}{ROCD_2} \right) \right) + c_2 \frac{\Delta h_d}{ROCD_2} + c_3 \frac{r_3}{V_0} + c_4 \frac{-\Delta h_d}{ROCD_4}$$

Los valores c_2 y c_4 serán los valores promedios de consumo en cada uno de los segmentos obtenidos según lo explicado en el Apéndice 2.

3.2.4 Trayectorias con cambios de velocidad

Este tipo de trayectorias consisten en un cambio de velocidad que adelanta o retrasa (en función de si se aumenta o disminuye la velocidad) la posición de la aeronave respecto a la trayectoria rectilínea uniforme inicial. Para este tipo de trayectorias es necesario considerar las siguientes hipótesis, (además de las ya consideradas al comienzo de esta sección):

- Se considera ángulo de rumbo, χ , constante en todos los tramos de la maniobra. El valor de este ángulo será por tanto el valor inicial: $\chi = \chi_0$.
- Se supone la altitud de vuelo constante en todo el recorrido e igual a la altitud inicial, h_0 , por lo que $\gamma = 0$ en todos los segmentos.
- La velocidad de vuelo no es constante en el recorrido, de hecho, no será constante a lo largo de algunos tramos (tramos de aceleración y desaceleración) pero sí será la misma al principio y al final de la trayectoria.

En concreto se modela una trayectoria con cambio temporal de la altitud de vuelo que consiste en una aceleración y una posterior desaceleración (o viceversa) uniformes, tomando las mismas valores constantes a_i . De esta forma la aeronave retrasa o adelanta su paso por un punto determinado para evitar así un posible conflicto. La trayectoria tendrá por tanto cinco tramos, tres de velocidad constante y dos aceleraciones lineales entre medias. Además de las hipótesis consideradas y las condiciones iniciales son conocidos los diferentes parámetros que definirán la desviación: r_1, r_3, a_2, a_4 y ΔV_d (observar las figuras 3.7 y 3.8). r_1 es la distancia que se recorre hasta iniciar el cambio de velocidad de vuelo, r_3 la distancia recorrida a la velocidad a la que se desvía la aeronave, ΔV_d indica el incremento de velocidad que se produce en la desviación y a_2 y a_4 definen las aceleraciones y las desaceleraciones correspondientes.

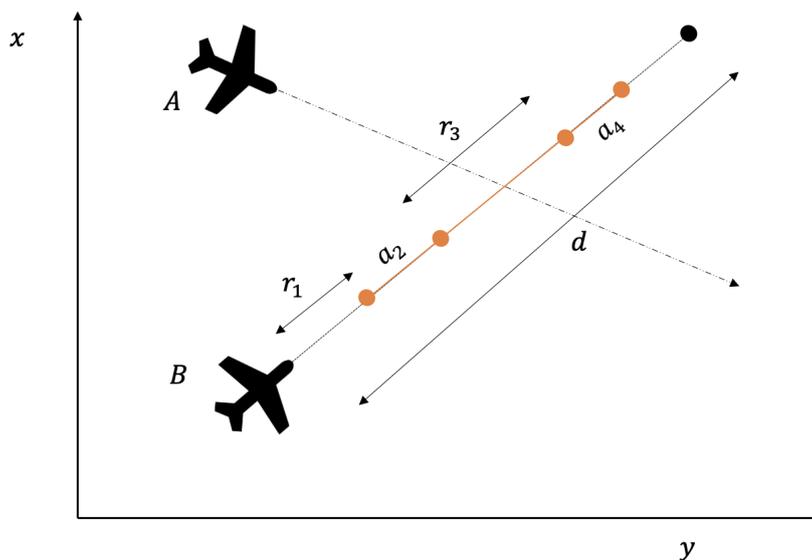


Figura 3.7 Trayectoria con cambio temporal de la velocidad de vuelo, vista cenital. [6].

Los segmentos de vuelo en esta trayectoria son los siguientes:

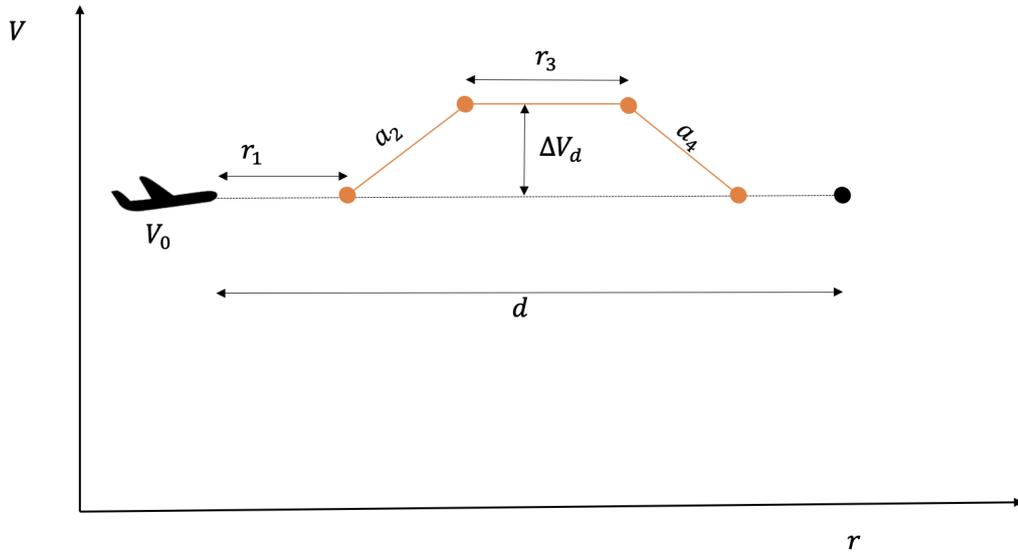


Figura 3.8 Trayectoria con cambio de velocidad, perfil de velocidades.

1. El primer segmento, hasta recorrer una distancia r_1 , se caracteriza porque el vuelo sigue las mismas condiciones de vuelo que las iniciales: χ_0, V_0, h_0 .
2. En el segundo segmento se cambia la velocidad de vuelo progresivamente hasta alcanzar un incremento de la velocidad ΔV_d , el vuelo se caracteriza por χ_0, h_0, a_2 . a_2 y ΔV_d tendrán el mismo signo para asegurar la consistencia del problema.
3. En el tercer segmento, se recorre una distancia r_3 , el vuelo se caracteriza por $\chi_0, V = V_0 + \Delta V_d, h_0$.
4. En el cuarto segmento se vuelve a la velocidad inicial, el vuelo se caracteriza por χ_0, h_0, a_4 . a_2 y a_4 deben tener signo contrario para que la aeronave vuelva a la trayectoria inicial, además, estos valores deben cumplir las capacidades operacionales de la aeronave.
5. En el quinto segmento, la aeronave recorre una distancia r_5 hasta llegar al punto final, el vuelo se caracteriza por tener las mismas las condiciones de vuelo que las iniciales: χ_0, V_0, h_0 . La distancia r_5 tiene que ser mayor o igual que cero, al igual que en los casos anteriores.

De esta forma, quedarán definidas a trozos las expresiones de la distancia recorrida, las coordenadas cartesianas (x, y) y la masa de combustible consumida. Para poder definir estas expresiones es necesario conocer los instantes en los que se realizan los cambios de condiciones de vuelo.

$$t_1 = r_1/V_0 \quad t_2 = t_1 + \frac{\Delta V_d}{a_2} \quad t_3 = t_2 + \frac{r_3}{V_0 + \Delta V_d} \quad t_4 = t_3 - \frac{\Delta V_d}{a_4}$$

Falta por calcular t_5 , igual al tiempo final t_f . Se puede calcular la distancia recorrida en cada instante como:

$$r(t) = \begin{cases} V_0 t & t \leq t_1 \\ r_1 + V_0(t - t_1) + \frac{1}{2}a_2(t - t_1)^2 & t_1 < t \leq t_2 \\ r_1 + V_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_2(t_2 - t_1)^2 + (V_0 + \Delta V_d)(t - t_2) & t_2 < t \leq t_3 \\ r_1 + V_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_2(t_2 - t_1)^2 + (V_0 + \Delta V_d)(t - t_2) + \frac{1}{2}a_4(t - t_3)^2 & t_3 < t \leq t_4 \\ r_1 + V_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_2(t_2 - t_1)^2 + (V_0 + \Delta V_d)(t_4 - t_2) + \frac{1}{2}a_4(t_4 - t_3)^2 + V_0(t - t_4) & t > t_4 \end{cases}$$

Para conocer $t_5 = t_f$, se sustituye t_f en la expresión de la distancia recorrida ya que se conoce la distancia total recorrida de la aeronave en el intervalo de estudio $r_f = d$.

$$r(t_f) = r_f = r_1 + V_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_2(t_2 - t_1)^2 + (V_0 + \Delta V_d)(t_4 - t_2) + \frac{1}{2}a_4(t_4 - t_3)^2 + V_0(t_f - t_4) = d$$

Obteniendo:

$$\begin{aligned} t_f &= t_4 + \frac{d - (r_1 + \frac{1}{2}a_2(t_2 - t_1)^2 + (V_0 + \Delta V_d)(t_4 - t_2) + \frac{1}{2}a_4(t_4 - t_3)^2)}{V_0} \\ &= \frac{d - r_3}{V_0} + \frac{r_3}{V_0 + \Delta V_d} - \frac{\Delta V_d^2}{2V_0} \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} \right) + \frac{\Delta V_d^2}{V_0 a_4} \\ r_5 &= d - r_1 - r_3 - V_0 \frac{\Delta V_d}{a_2} - \frac{1}{2} \Delta V_d^2 \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} \right) + \frac{\Delta V_d}{a_4} (V_0 + \Delta V_d) \end{aligned}$$

Cumpléndose las siguientes ligaduras.

$$\begin{aligned} r_5 &\geq 0 \\ \frac{a_2}{|a_2|} + \frac{a_4}{|a_4|} &= 0 \\ \frac{a_2}{|a_2|} &= \frac{\Delta V_d}{|\Delta V_d|} \\ a_2, a_4 &\in \left[\frac{T_{des,high} - \bar{D}(\Delta V_d)}{m_0}, \frac{T_{cruiseMAX} - \bar{D}(\Delta V_d)}{m_0} \right] \end{aligned}$$

Donde el cálculo de la resistencia aerodinámica promedio, \bar{D} , en un segmento con variación de velocidad se desarrolla en el Apéndice 3.

Completando la parametrización de forma que:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + V_0 t \cos \chi_0 & t \leq t_1 \\ x_0 + (r_1 + V_0(t - t_1) + \frac{1}{2}a_2(t - t_1)^2) \cos \chi_0 & t_1 < t \leq t_2 \\ x_0 + (r_1 + V_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_2(t_2 - t_1)^2 + (V_0 + \Delta V_d)(t - t_2)) \cos \chi_0 & t_2 < t \leq t_3 \\ x_0 + (r_1 + V_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_2(t_2 - t_1)^2 + (V_0 + \Delta V_d)(t - t_2) + \frac{1}{2}a_4(t - t_3)^2) \cos \chi_0 & t_3 < t \leq t_4 \\ x_0 + (r_1 + V_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_2(t_2 - t_1)^2 + (V_0 + \Delta V_d)(t_4 - t_2) + \frac{1}{2}a_4(t_4 - t_3)^2 + V_0(t - t_4)) \cos \chi_0 & t > t_4 \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + V_0 t \sin \chi_0 & t \leq t_1 \\ y_0 + (r_1 + V_0(t - t_1) + \frac{1}{2}a_2(t - t_1)^2) \sin \chi_0 & t_1 < t \leq t_2 \\ y_0 + (r_1 + V_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_2(t_2 - t_1)^2 + (V_0 + \Delta V_d)(t - t_2)) \sin \chi_0 & t_2 < t \leq t_3 \\ y_0 + (r_1 + V_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_2(t_2 - t_1)^2 + (V_0 + \Delta V_d)(t - t_2) + \frac{1}{2}a_4(t - t_3)^2) \sin \chi_0 & t_3 < t \leq t_4 \\ y_0 + (r_1 + V_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_2(t_2 - t_1)^2 + (V_0 + \Delta V_d)(t_4 - t_2) + \frac{1}{2}a_4(t_4 - t_3)^2 + V_0(t - t_4)) \sin \chi_0 & t > t_4 \end{cases}$$

$$m_F(t) = \begin{cases} c_0 t & \text{si } t \leq t_1 \\ c_0 t_1 + c_2(t - t_1) & \text{si } t_1 < t \leq t_2 \\ c_0 t_1 + c_2(t_2 - t_1) + c_3(t - t_2) & \text{si } t_2 < t \leq t_3 \\ c_0 t_1 + c_2(t_2 - t_1) + c_3(t_3 - t_2) + c_4(t - t_3) & \text{si } t_3 < t \leq t_4 \\ c_0 t_1 + c_2(t_2 - t_1) + c_3(t_3 - t_2) + c_4(t_4 - t_3) + c_0(t - t_4) & \text{si } t > t_4 \end{cases}$$

Los valores que tomarán en el punto final las ecuaciones analíticas serán:

$$t_f = \frac{d - r_3}{V_0} + \frac{r_3}{V_0 + \Delta V_d} - \frac{\Delta V_d^2}{2V_0} \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} \right) + \frac{\Delta V_d^2}{V_0 a_4}$$

$$r_f = d$$

$$m_F(t_f) = c_0(t_f - t_4 + t_1) + c_2(t_2 - t_1) + c_3(t_3 - t_2) + c_4(t_4 - t_3)$$

$$= \frac{c_0}{V_0} \left(d - r_3 - V_0 \frac{\Delta V_d}{a_2} - \frac{1}{2} \Delta V_d^2 \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} \right) + \frac{\Delta V_d}{a_4} (V_0 + \Delta V_d) \right) + c_2 \frac{\Delta V_d}{a_2} + c_3 \frac{r_3}{V_0 + \Delta V_d} - c_4 \frac{\Delta V_d}{a_4}$$

Los valores c_2 y c_4 serán los valores promedios de consumo en cada uno de los segmentos obtenidos según lo explicado en el Apéndice 2.

3.3 Ejemplos

En esta sección se presenta un escenario arbitrario de conflicto entre dos aeronaves, cuyas coordenadas iniciales de vuelo, distancia a recorrer, rumbo y velocidad de vuelo se muestran recogidas en la tabla 3.1. A la hora de elegir las condiciones iniciales de las aeronaves en el escenario, se ha tenido en cuenta que las cuatro maniobras de evitación puedan llevarse a cabo.

En un primer intento se realizó este mismo estudio para una distancia $d = 50$ nmi, la mitad que la escogida en este segundo intento, $d = 100$ nmi, y la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo no era capaz de resolver el conflicto. Esto aporta una primera idea de que la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo sólo se podrá realizar si las aeronaves se encuentran lejos del punto de conflicto ya que puede necesitar una gran distancia para llevar a cabo las aceleraciones y deceleraciones.

Tabla 3.1 Condiciones iniciales del escenario.

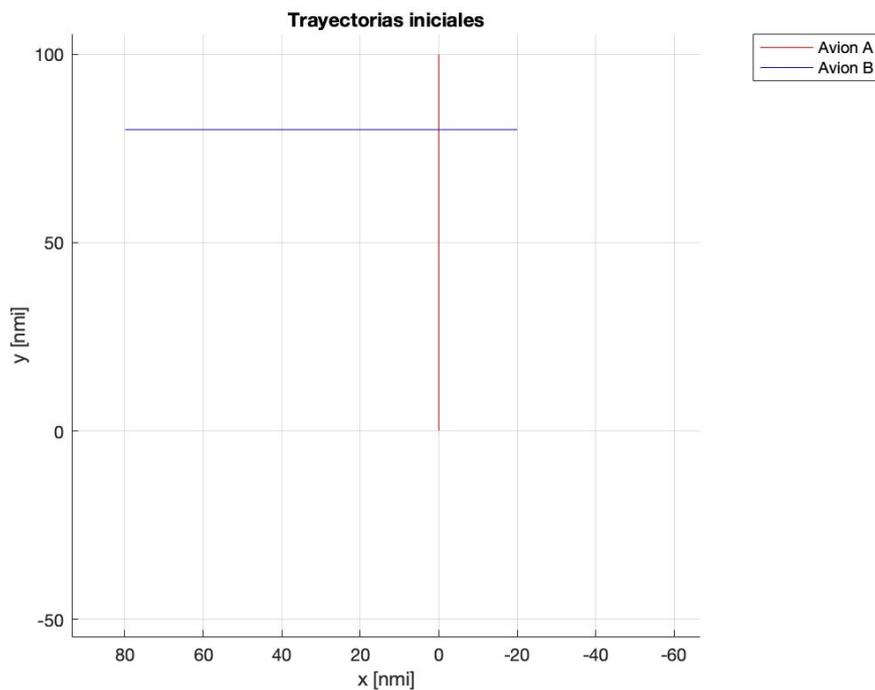
Condiciones iniciales				
Aeronave	Coordenadas iniciales, $[x_0, y_0]$ [nmi]	Rumbo, χ [°]	Distancia de vuelo, d [nmi]	Velocidad de vuelo [kt]
Avión A	[0, 0]	90°	100	451.63
Avión B	[80, 80]	180°	100	451.63

Ambas aeronaves son del modelo A320 de AIRBUS y vuelan a 34000 ft. En la siguiente tabla (3.2) se presentan los datos generales de la aeronave y los valores de los coeficientes que definen los modelos aerodinámicos, de consumo y de empuje de esta aeronave.

Tabla 3.2 Valores característicos del A320, extraídos de [5].

Datos generales	
m_0	64000 kg
S_{ref}	122.6 m ²
M	0.78
Modelo aerodinámico	
C_{D0}	0.26659e-01
k	0.38726e-01
Modelo de consumo	
C_{f1}	0.75882
C_{f2}	0.29385e+04
Modelo de empuje	
$C_{Tc,1}$	0.14231e6
$C_{Tc,2}$	0.51680e5
$C_{Tc,3}$	0.56809e-10
C_{Tr}	0.95
$C_{Tdes,high}$	0.13603

Como se puede comprobar en la siguiente vista cenital, ambas trayectorias se cruzan, pudiéndose producirse un conflicto si en algún instante de tiempo se incumplen las distancias mínimas de separación requeridas en la navegación (5 nmi en un plano horizontal y 1000 ft en vertical).

**Figura 3.9** Vista cenital de las trayectorias de dos aeronaves.

Si se representa la función $\delta(t)$, que indica la existencia o no de conflicto, se puede comprobar que existe un intervalo de tiempo (en torno a 50 segundos) en el cual se incumple la mínima distancia de separación, ya que $\delta(t)$ toma valores más pequeños que la unidad. Además en este caso en concreto se alcanzaría la colisión si no se reacciona de la forma adecuada ya que $\delta = 0$ para el instante $t = t_{colision} = 638$ s.

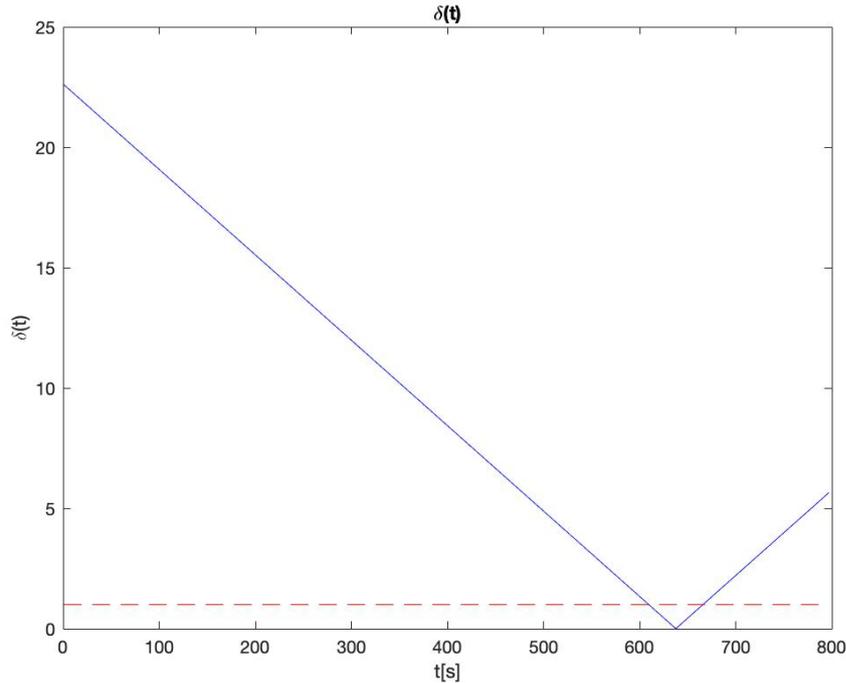


Figura 3.10 Detección de conflicto mediante la función $\delta(t)$.

Estudiando las distancias horizontal y vertical entre las aeronaves en cada instante, mediante un muestreo¹, se conoce el tramo de las trayectorias de las aeronaves A y B en los cuales se incumple la distancia mínima de separación, este segmento se muestra entre triángulos en el avión A y entre cuadrados en el avión B, representado en la siguiente figura 3.11.

A continuación se procede a resolver el conflicto de diferentes formas usando las trayectorias de evitación previamente definidas en esta sección, seleccionando manualmente los parámetros que las definen, sin considerar posibles óptimos. Una vez resueltas se podrá comprobar cómo ha cambiado el tiempo empleado en recorrer la distancia d , el combustible empleado en ello y el régimen del motor (desarrollado en el Apéndice 3) mediante los términos Δt , Δm_F y $\Delta \bar{T}$ respectivamente. $\Delta \bar{T}$ recoge cómo cambia el empuje en un segmento de vuelo respecto al empuje inicial que se tiene para el vuelo en crucero, durante el tiempo que dure dicho cambio. Este parámetro es nulo si el empuje de la aeronave no cambia. En todos los casos el único avión que cambiará la trayectoria será el avión B.

Es importante conocer los valores de empuje para este modelo de avión, sobre el cual se van a desarrollar los siguientes ejemplos a la altitud de 34000ft .

$$T_{maxclimb} = 5.8031e + 04N$$

$$T_{cruiseMAX} = 5.5129e + 04N$$

$$T_{des.high} = 7.8939e + 03N$$

De la misma forma es interesante conocer cuáles son los valores límites de las velocidades de ascenso y descenso ($ROCD_i$ [ft/min]) para la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo. Estos valores dependen de los valores de empuje correspondientes al empuje máximo en subida y al empuje mínimo en descenso y de la resistencia aerodinámica promedio en el segmento de vuelo correspondiente (Apéndice 3). Dado que la resistencia aerodinámica promedio es conocida al ser los cambios de altitud conocidos, se puede obtener el intervalo en el que se deben encontrar las velocidades de ascenso y descenso.

Para el caso en el que el desvío se produce aumentando el nivel de vuelo ($\Delta h_d=2000\text{ft}$):

$$ROCD_i \in [-2749.61, 902.65]$$

¹ El muestreo se realiza con un intervalo de un segundo.

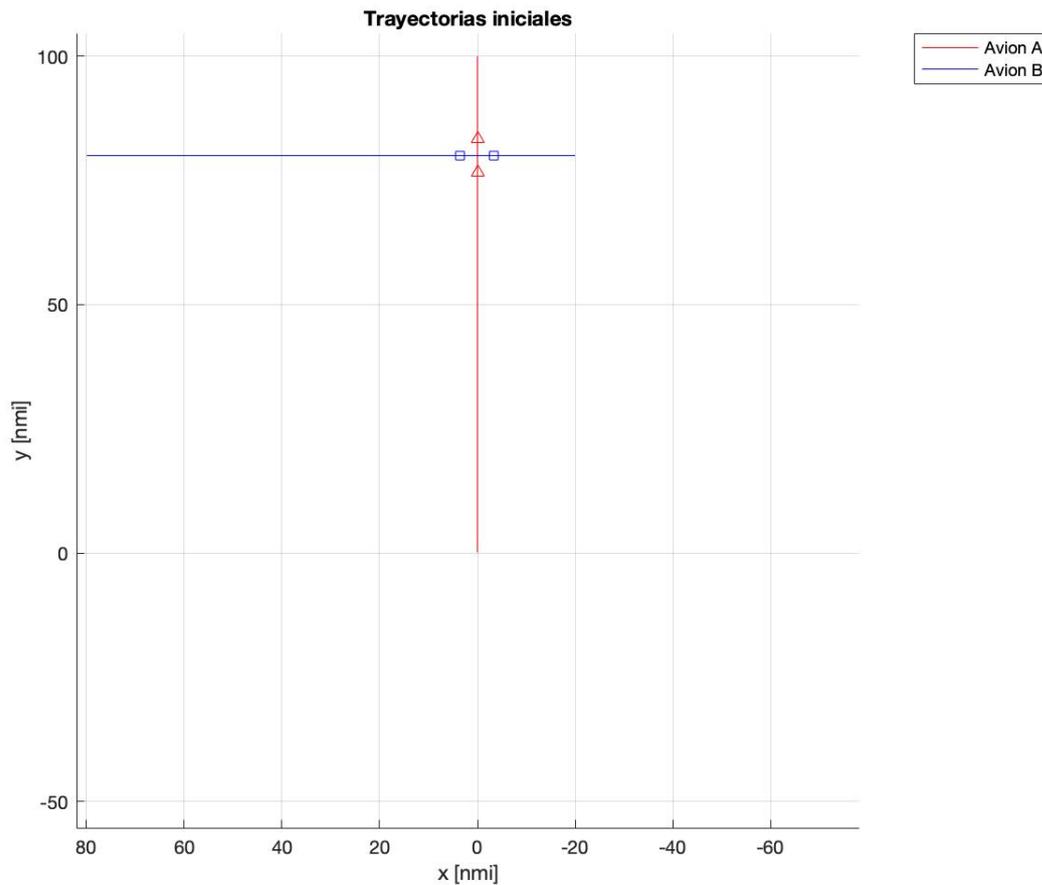


Figura 3.11 Existencia de conflicto, vista cenital.

Para el caso en el que el desvío se produce disminuyendo el nivel de vuelo ($\Delta h_d = -2000\text{ft}$):

$$ROCD_i \in [-2877.84, 774.23]$$

Se comprueba que conforme baja el nivel de vuelo aumenta la resistencia aerodinámica de la aeronave, disminuyendo los valores que puede tomar $ROCD_i$ para cumplir las capacidades operacionales de la aeronave.

Por último, de la misma forma que se ha calculado el intervalo de valores admisibles de $ROCD_i$ se puede calcular el intervalo de valores admisibles de aceleraciones y desaceleraciones (a_i [m/s^2]) para la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo, siendo el máximo empuje disponible el máximo en crucero. Sin embargo, en este caso la resistencia aerodinámica promedio depende de un parámetro continuo que define la desviación, ΔV_d (Apéndice 3), en el caso anterior dependía de un parámetro discreto (Δh_d que podía tomar los valores de ± 2000 ft y se han estudiado ambos casos). Por lo tanto el intervalo de aceleraciones y desaceleraciones admisibles dependerá del cambio de velocidad que se quiera realizar. Se realiza una estimación para el caso en el que $\Delta h_d = -40$ kt,

$$a_i(\Delta V_d = -40\text{kt}) \in [-0.058508g, 0.017203g]$$

3.3.1 Evitación mediante desviación horizontal

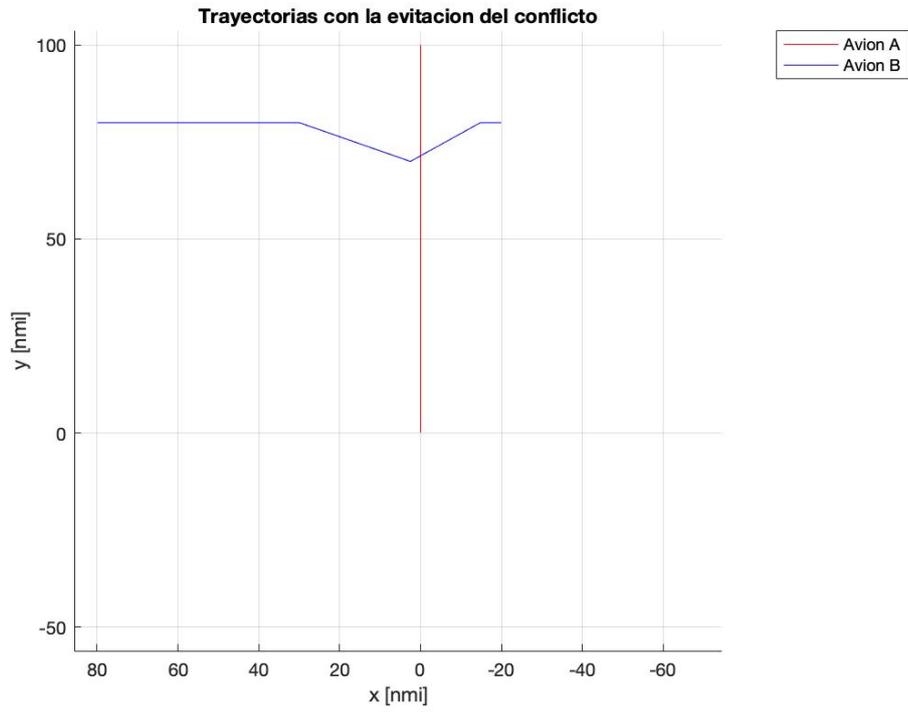


Figura 3.12 Evitación mediante desviación horizontal, vista cenital.

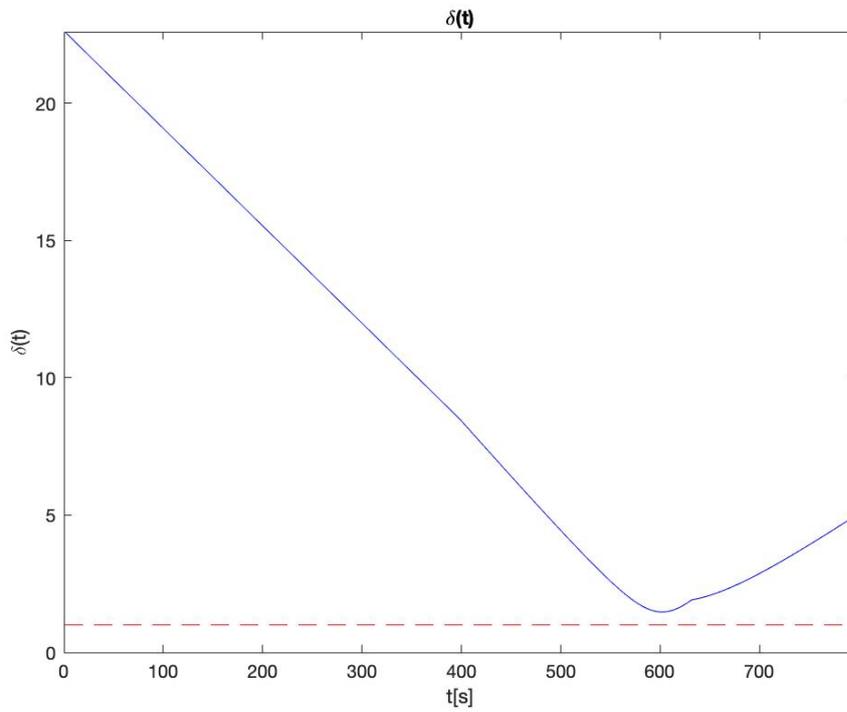


Figura 3.13 $\delta(t)$ tras la resolución mediante desviación horizontal.

Tabla 3.3 Parámetros de la trayectoria del avión 2: Desviación horizontal. Incrementos de tiempo, masa y cambio del régimen de motor.

r_1 [nmi]	l_d [nmi]	$\Delta\chi_2$ [°]	$\Delta\chi_3$ [°]	Δt [s]	Δm_F [kg]	$\Delta\bar{T}$ [s]
50	10	20°	-50°	35.4134	24.0170	0

Era de esperar que en esta maniobra $\Delta\bar{T} = 0$ ya que no se cambia el régimen del motor al no cambiar ni la velocidad ni la altitud de vuelo. Se puede comprobar en la figura 3.13 cómo la resolución ha sido exitosa ya que $\delta(t) > 1$ en todo instante, a cambio de aumentar el tiempo de vuelo y el combustible consumido.

3.3.2 Evitación mediante desviación horizontal en paralelo

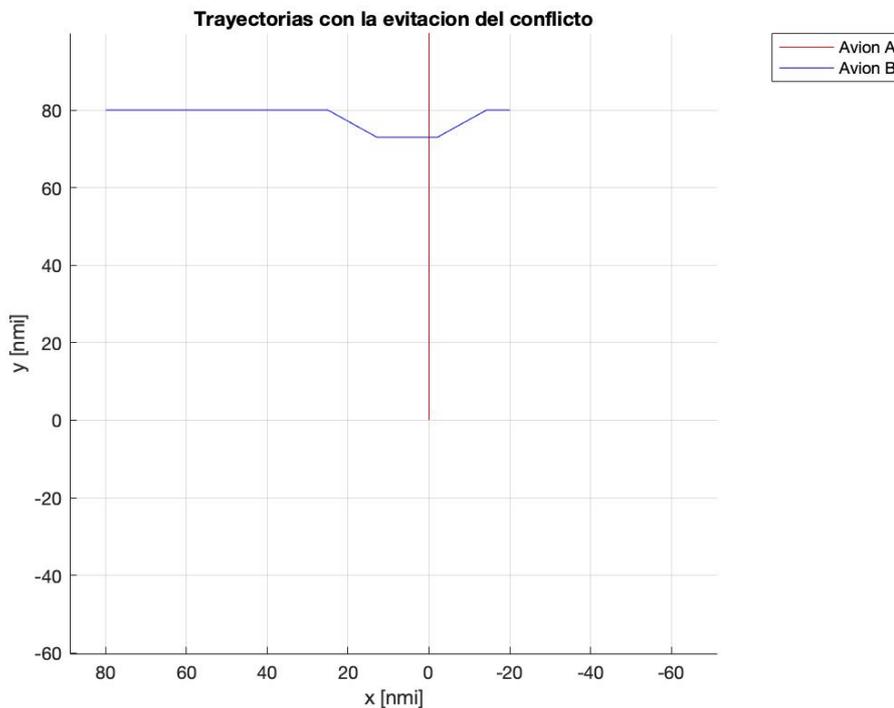


Figura 3.14 Evitación mediante desviación horizontal en paralelo, vista cenital.

Tabla 3.4 Parámetros de la trayectoria del avión 2: Desviación horizontal en paralelo. Incrementos de tiempo, masa y cambio del régimen de motor.

r_1 [nmi]	l_d [nmi]	$\Delta\chi_2$ [°]	r_3 [nmi]	$\Delta\chi_4$ [°]	Δt [s]	Δm_F [kg]	$\Delta\bar{T}$ [s]
55	7	30°	15	-60°	29.9017	20.2790	0

Al igual que en la maniobra anterior, en esta maniobra era de esperar que $\Delta\bar{T} = 0$ ya que no se cambia el régimen del motor. Se puede comprobar en la figura 3.15 cómo la resolución ha sido exitosa ya que $\delta(t) > 1$ en todo instante, además aumenta el tiempo de vuelo y el combustible consumido.

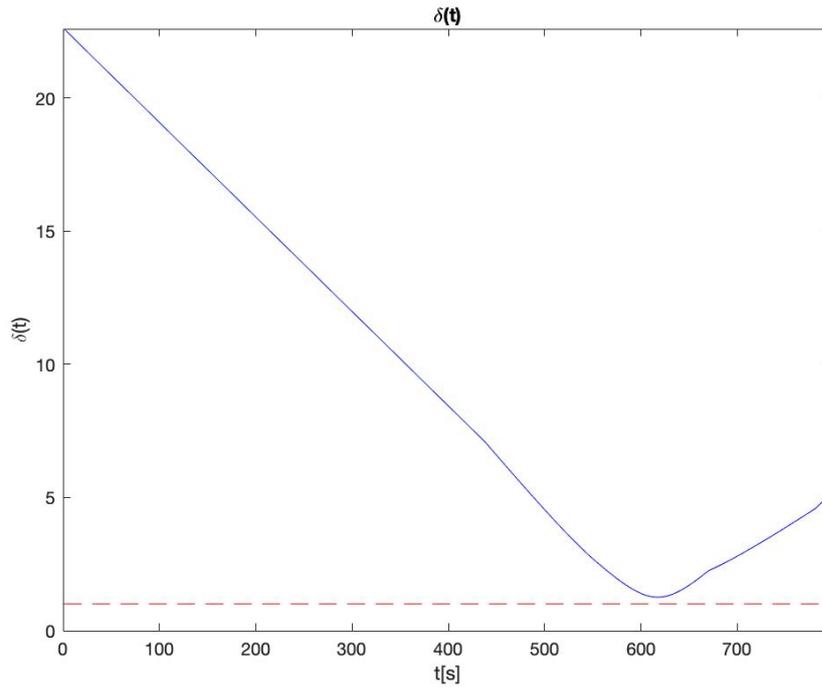


Figura 3.15 $\delta(t)$ tras la resolución mediante desviación horizontal en paralelo.

3.3.3 Evitación mediante cambio temporal de la altitud de vuelo

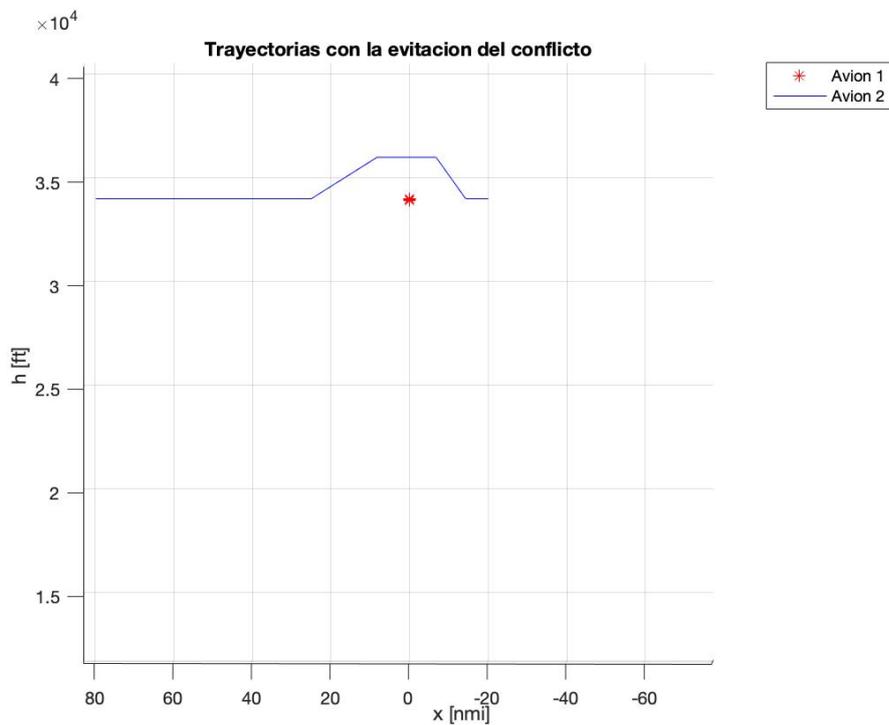


Figura 3.16 Evitación mediante cambio temporal de la altitud de vuelo, perfil de altitudes.

Tabla 3.5 Parámetros de la trayectoria del avión 2: Cambio temporal de la altitud de vuelo. Incrementos de tiempo, masa y cambio del régimen de motor.

r_1 [nmi]	Δh_d [ft]	$ROCD_2$ [ft/min]	r_3 [nmi]	$ROCD_4$ [ft/min]	Δt [s]	Δm_F [kg]	$\Delta \bar{T}$ [s]
55	2000	900	15	-2000	0	-5.2405	73.7790

Los valores de $ROCD_2$ y $ROCD_4$ se han seleccionado de tal forma que son compatibles con las capacidades operacionales de la aeronave. $ROCD_4$ es tal que el empuje nunca es menor que el empuje mínimo $T_{des,high}$ y $ROCD_2$ es tal que el empuje nunca supera el valor de empuje máximo en subida $T_{maxclimb}$.

En este caso, no es necesario emplear más tiempo en alcanzar el punto final situado a una distancia d ya que la velocidad es constante, no hay desviación horizontal de la trayectoria y la desviación vertical al cambiar solo un nivel de vuelo es de 2000 ft. Por otro lado, el aumento de masa de combustible consumida es menor que en los casos anteriores (de hecho se produce un ahorro de combustible) ya que el tiempo de vuelo no aumenta y el exceso de consumo en el segmento de subida se compensa en el segmento de descenso y el ahorro al aumentar el nivel de vuelo. Esto indica que la altitud óptima de vuelo se encuentra en un nivel de vuelo superior al actual. Se puede empezar a observar, de forma previa a la optimización, que a la altitud de estudio ($h=34000$ ft) los aumentos de altitud son más beneficiosos que las reducciones de altitud en cuanto al consumo de combustible. Sin embargo, para realizar esta maniobra se realizan cambios en régimen del motor considerables, como se puede observar en el parámetro $\Delta \bar{T}$ ya que en los segmentos 2,3 y 4 el régimen del motor es distinto al establecido en crucero previamente a la detección del conflicto. La resolución ha sido exitosa ya que $\delta(t) > 1$ en todo instante como se puede observar en la figura 3.17.

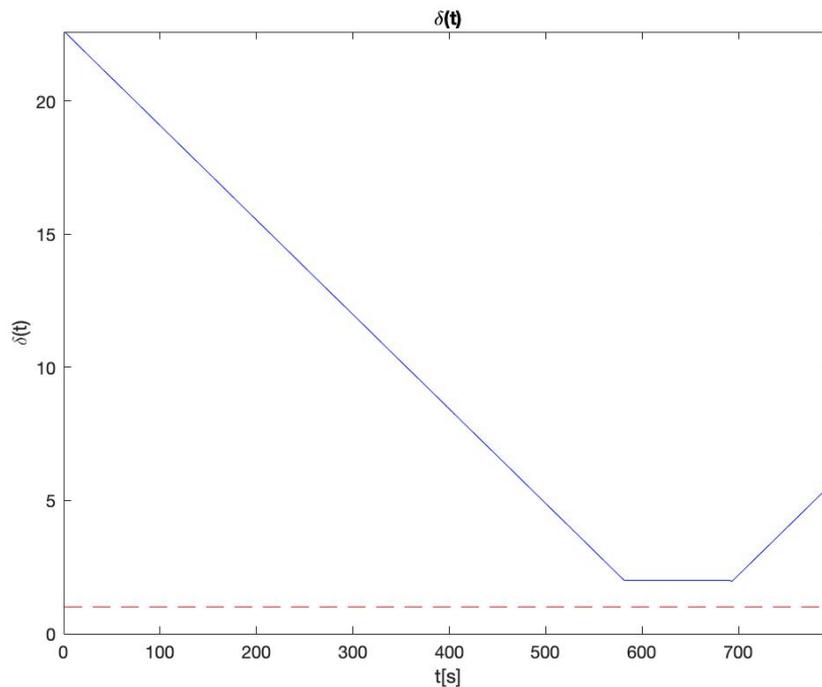


Figura 3.17 $\delta(t)$ tras la resolución mediante cambio temporal de la altitud de vuelo.

3.3.4 Evitación mediante cambio temporal de la velocidad

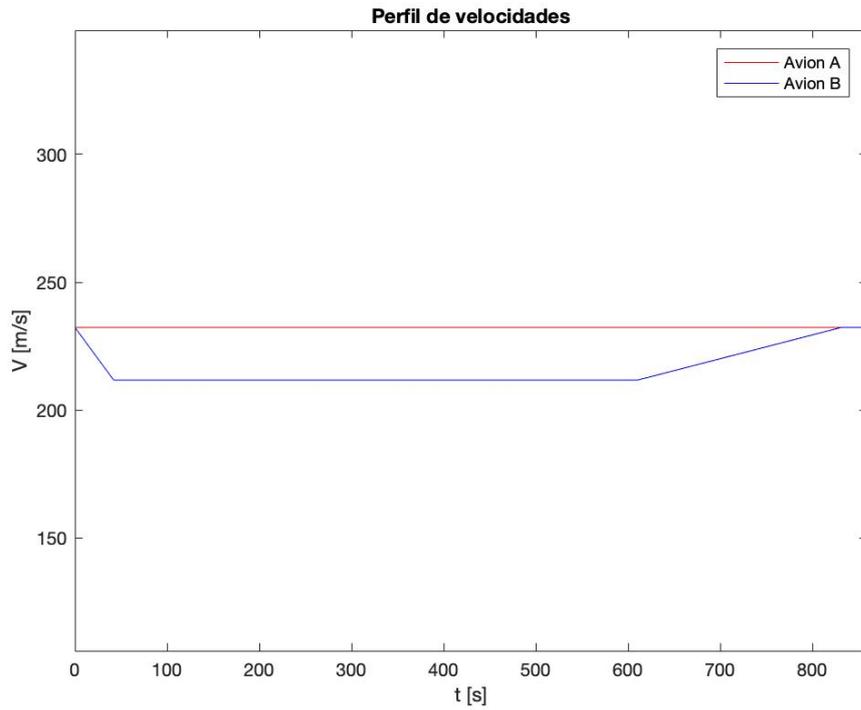


Figura 3.18 Evitación mediante cambio temporal de la velocidad de vuelo, perfil de velocidades.

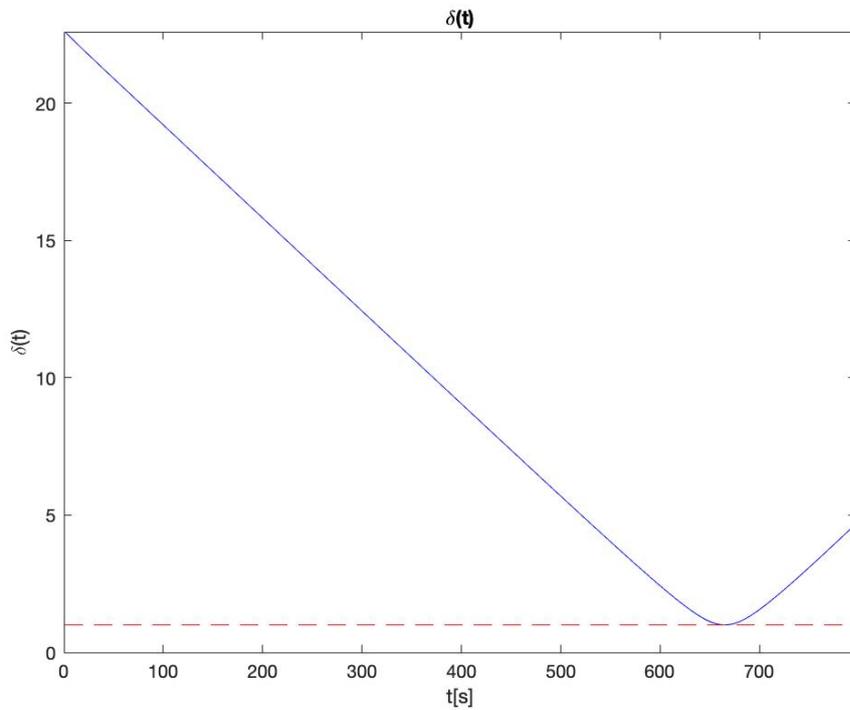


Figura 3.19 $\delta(t)$ tras la resolución mediante cambio temporal de la velocidad de vuelo.

Tabla 3.6 Parámetros de la trayectoria del avión 2: Cambio temporal de la velocidad de vuelo. Incrementos de tiempo, masa y cambio del régimen de motor.

r_1 [nmi]	ΔV_d [kt]	a_2 [m/s ²]	r_3 [nmi]	a_4 [m/s ²]	Δt [s]	Δm_F [kg]	$\Delta \bar{T}$ [s]
0	-40	-0.05g	65	0.095g	61.9832	0.6745	92.3867

Los valores de a_2 y a_4 se han seleccionado de tal forma que son compatibles con las capacidades operacionales de la aeronave. a_2 es tal que el empuje nunca es menor que el empuje mínimo $T_{des,high}$ y a_4 es tal que el empuje nunca supera el valor de empuje máximo en crucero $T_{cruiseMAX}$.

En esta última trayectoria, se observa que es necesario empezar la maniobra de evitación lo antes posible para conseguir resolver el conflicto de forma exitosa, es decir, r_1 pequeño o nulo. En este caso se ha optado por frenar la aeronave, aumenta de forma considerable el tiempo de vuelo, mientras que no aumenta a penas el consumo de combustible. Los cambios en el régimen de motor en un principio parecen mayores a los que se dan en las maniobras de cambio temporal de la altitud de vuelo. La resolución ha sido exitosa ya que $\delta(t) > 1$ en todo instante como se puede observar en la figura 3.19.

Ha sido muy complicado encontrar una solución al conflicto a través de esta última maniobra, incluso yendo a los límites de los parámetros que definen las desviación.

Como se ha comprobado, usar una maniobra u otra para evitar el conflicto conlleva unos beneficios y unas desventajas, para obtener una maniobra óptima será necesario buscar una solución de compromiso entre los tres parámetros estudiados: Δt , Δm_F y $\Delta \bar{T}$ mediante una función objetivo que represente los costes. Además algunas maniobras requieren una detección con mayor antelación ya que aumentan la distancia de separación entre las aeronaves más lentamente.

4 Optimización de las maniobras de resolución

En este capítulo se desarrolla la metodología que se ha llevado a cabo para optimizar las maniobras de evitación. Para realizar dicha optimización se ha utilizado la función *fmincon* del software MATLAB, capaz de buscar el óptimo de un problema multivariable no lineal sujeto a diferentes restricciones. Además, se explica cómo se ha planteado el problema numérico, el cálculo de la función objetivo y cómo se han resuelto los principales problemas surgidos en la implementación. Se resuelve de forma óptima el ejemplo planteado en el capítulo anterior con cada una de las trayectorias de evitación.

4.1 Función *fmincon*

El solucionador *fmincon* busca el óptimo de una función multivariable no lineal $f(u)$ sujeta a restricciones [7]. En este caso el vector u recoge los parámetros que definen la desviación, que dependerán de la maniobra de resolución.

$$\min_u f(u) \text{ tal que } \begin{cases} s(u) \leq 0 \\ seq(u) = 0 \\ A \cdot u \leq b \\ Aeq \cdot u = beq \\ lb \leq u \leq ub \end{cases}$$

Los términos $s(u)$ y $seq(u)$ representan restricciones no lineales de las variables del problema, mientras que A, b, Aeq y beq representan las restricciones lineales del problema. Por último, lb y ub delimitan respectivamente los extremos inferior y superior de los intervalos de los posibles valores que pueden tomar las diferentes variables del problema (región admisible). En caso de que alguna variable del problema no esté limitada inferior o superiormente, el optimizador admite introducir $-Inf$ o Inf respectivamente.

Se pueden distinguir varios tipos de algoritmos para la resolución de problemas de optimización:

- Métodos de orden cero: Utilizan los valores que toma la función para buscar el mínimo del problema.
- Métodos de orden uno: Utilizan los valores que toma la función y su derivada primera para encontrar el mínimo del problema.
- Métodos de orden dos: Utilizan los valores que toma la función, su derivada primera y su derivada segunda para encontrar el mínimo del problema.
- Métodos SQP o de programación cuadrática secuencial. Son métodos que utilizan los valores que toma la función y la derivada primera, e intentan aproximar la derivada segunda a partir de éstas.

En la optimización restringida, el objetivo general es transformar el problema en un subproblema más sencillo que, a continuación, se puede resolver y utilizar como base de un proceso iterativo. Una característica de una clase grande de métodos tempranos es la traducción del problema restringido a un problema básico sin restricciones mediante el uso de una función de penalización para las restricciones que están cerca o más allá del límite de restricción (en el caso de *fmincon* la función de penalización depende de $s(u)$ y $seq(u)$). De este modo, el problema restringido se resuelve utilizando una secuencia de optimizaciones no restringidas parametrizadas, que en el límite (de la secuencia) convergen en el problema restringido. [8]

El optimizador *fmincon* dispone de una amplia variedad de opciones para alcanzar el valor óptimo, una de estas opciones es el tipo de algoritmo empleado. En este caso se va a emplear el algoritmo conocido como *Active-set*, que pertenece al grupo de métodos de programación cuadrática secuencial. Este algoritmo en cada iteración aproxima localmente la función f no lineal a una función q cuadrática, y las restricciones no lineales a restricciones lineales. Además se han ajustado el resto de opciones del optimizador (tolerancias, número máximo de iteraciones...) con la intención de asegurar la llegada del mismo a los puntos óptimos.

4.2 Planteamiento del problema numérico

Una vez elegida y explicada la herramienta numérica de resolución, es necesario definir las restricciones del problema en estudio y escoger una función objetivo $f(u)$ que recoja los costes que se están considerando en este análisis.

4.2.1 Función objetivo

Por un lado, la función objetivo debe representar la eficiencia de un segmento de vuelo en la actualidad. Se han tomado los mismos parámetros que los usados la sección 3.3 para estudiar el ejemplo de conflicto planteado:

- Incremento del tiempo de vuelo Δt medido en segundos.
- Incremento de la masa de combustible Δm_F medido en kilogramos.
- Cambio de régimen del motor $\Delta \bar{T}$. Los cambios en el régimen del motor pueden acortar su periodo de vida y aumentar la necesidad de mantenimiento. Desarrollado en el Apéndice 3 y medido en segundos.

Por lo que, de esta forma, la función objetivo tomará la siguiente estructura:

$$f(u) = w_1 \cdot \Delta t + w_2 \cdot \Delta m_F + w_3 \cdot \Delta \bar{T}$$

Donde w_1, w_2 y w_3 representan los pesos que tendrá cada término en la función objetivo. Existen más términos que representan la eficiencia de una maniobra de evitación, como podría ser la carga de trabajo de la tripulación pero dada la dificultad de cuantificarlos, se ha limitado el estudio a estos tres términos.

Los pesos w_1 y w_2 tomarán valor unidad ya que aproximadamente una aeronave consume en torno a un kilogramo de combustible por segundo. Esta relación queda por tanto justificada.

El peso correspondiente al término asociado al empuje en la función objetivo, w_3 , es totalmente desconocido y no se dispone de una orientación, como sí ocurre para los pesos anteriores, por tanto, se procederá a realizar un análisis sobre su posible valor en la sección 4.4.

4.2.2 Restricciones en cada una de las trayectorias de evitación

Por otro lado, las restricciones del problema consistirán en el cumplimiento de la ligaduras que se han planteado en el capítulo anterior para cada una de las trayectorias de evitación, por ello se definirán trayectoria por trayectoria.

- Evitación mediante desviación horizontal:

En esta maniobra los parámetros que la definen son: $r_1, l_d, \Delta \chi_2$ y $\Delta \chi_3$. Teniendo que cumplir las siguientes ligaduras o restricciones no lineales entre ellos (quedando definidos los términos $s(u)$ y $seq(u)$ de la función *fmincon*):

$$\frac{\Delta\chi_2}{|\Delta\chi_2|} + \frac{\Delta\chi_3}{|\Delta\chi_3|} = 0$$

$$|\Delta\chi_2| < |\Delta\chi_3|$$

Además, la distancia recorrida en el último segmento r_4 debe cumplir $r_4 \geq 0$ y se tiene que conseguir resolver el conflicto, es decir, $\delta_{min} > 1$.

Por otro lado, los parámetros deben situarse en los siguientes intervalos (quedando definidos los vectores lb y ub del optimizador):

$$-90^\circ \leq \Delta\chi_2 \leq 90^\circ$$

$$-|\Delta\chi_2| - 90^\circ \leq \Delta\chi_3 \leq 90^\circ + |\Delta\chi_2|$$

$$0 \leq r_1 \leq d$$

$$l_d \geq 0$$

- Evitación mediante desviación horizontal en paralelo:

En esta maniobra los parámetros que la definen son: $r_1, l_d, \Delta\chi_2, r_3$ y $\Delta\chi_4$. Teniendo que cumplir las siguientes ligaduras o restricciones no lineales entre ellos (quedando definidos los términos $s(u)$ y $seq(u)$ de la función $fmincon$):

$$\frac{\Delta\chi_2}{|\Delta\chi_2|} + \frac{\Delta\chi_4}{|\Delta\chi_4|} = 0$$

$$|\Delta\chi_2| < |\Delta\chi_4|$$

Además, la distancia recorrida en el último segmento r_5 debe cumplir $r_5 \geq 0$ y se tiene que conseguir resolver el conflicto, es decir, $\delta_{min} > 1$.

Por otro lado, los parámetros deben situarse en los siguientes intervalos (quedando definidos los vectores lb y ub del optimizador):

$$-90^\circ \leq \Delta\chi_2 \leq 90^\circ$$

$$-|\Delta\chi_2| - 90^\circ \leq \Delta\chi_4 \leq 90^\circ + |\Delta\chi_2|$$

$$0 \leq r_1, r_3 \leq d$$

$$l_d \geq 0$$

- Evitación mediante cambio temporal de la altitud de vuelo:

En esta maniobra los parámetros que la definen son: $r_1, ROCD_2, \Delta h_d, r_3$ y $ROCD_4$. Teniendo que cumplir las siguientes ligaduras o restricciones no lineales entre ellos (quedando definidos los términos $s(u)$ y $seq(u)$ de la función $fmincon$):

$$\frac{ROCD_2}{|ROCD_2|} + \frac{ROCD_4}{|ROCD_4|} = 0$$

$$\frac{ROCD_2}{|ROCD_2|} = \frac{\Delta h_d}{|\Delta h_d|}$$

$$T_{max} \leq T_{maxclimb}$$

$$T_{min} \geq T_{des,high}$$

Donde T_{max} y T_{min} son los valores de empuje máximo y mínimo respectivamente requeridos en la maniobra ya que el empuje cambia al cambiar de altitud mediante la densidad del modelo de atmósfera y mediante la pendiente de subida y bajada. Por tanto, estos valores determinarán la selección de $ROCD_2$ y $ROCD_4$.

Además, la distancia recorrida en el último segmento r_5 debe cumplir $r_5 \geq 0$ y se tiene que conseguir resolver el conflicto, es decir, $\delta_{min} > 1$.

Por otro lado, los parámetros deben situarse en los siguientes intervalos (quedando definidos los vectores lb y ub del optimizador):

$$0 \leq r_1, r_3 \leq d$$

Por último, Δh_d debe ser un múltiplo de $2000ft$ para cumplir con las normas de navegación, desde el punto de vista de la optimización, este parámetro tomará los valores de $2000ft$ o $-2000ft$ por lo que se resolverá la optimización para ambas posibilidades.

- Evitación mediante cambio temporal de la velocidad:

En esta maniobra los parámetros que la definen son: $r_1, a_2, \Delta V_d, r_3$ y a_4 . Teniendo que cumplir las siguientes ligaduras o restricciones no lineales entre ellos (quedando definidos los términos $s(u)$ y $seq(u)$ de la función $fmincon$):

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{|a_2|} + \frac{a_4}{|a_4|} &= 0 \\ \frac{a_2}{|a_2|} &= \frac{\Delta V_d}{|\Delta V_d|} \\ T_{max} &\leq T_{maxCRUISE} \\ T_{min} &\geq T_{des,high} \end{aligned}$$

Donde T_{max} y T_{min} son los valores de empuje máximo y mínimo respectivamente requeridos en la maniobra ya que el empuje cambia al cambiar la velocidad y mediante la aceleración o desaceleración. Por tanto, estos valores determinarán la selección de a_2 y a_4 .

Además, la distancia recorrida en el último segmento r_5 debe cumplir $r_5 \geq 0$ y se tiene que conseguir resolver el conflicto, es decir, $\delta_{min} > 1$.

Por otro lado, los parámetros deben situarse en los siguientes intervalos (quedando definidos los vectores lb y ub del optimizador):

$$0 \leq r_1, r_3 \leq d$$

ΔV_d , al igual que a_2 y a_4 viene determinado por las limitaciones de empuje.

4.2.3 Adimensionalización de parámetros

Uno de los problemas que puede surgir a la hora de la implementación del código es la gran diferencia entre los órdenes de magnitud de las restricciones y de las variables. Mientras que la restricción que implica el cumplimiento de la distancia mínima de separación es de orden unidad, los valores de los empujes son de orden de las decenas de millar; por otro lado, mientras que los parámetros r_1 y r_3 de la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo son del orden de las decenas, el orden de $ROCD$ es de las unidades de millar. Esto ocurre en numerosas ocasiones en las restricciones no lineales $s(u)$ y en los propios parámetros de la trayectoria que representan las variables del problema (vector u). Es por esto que se ha tomado la decisión de adimensionalizar una serie de parámetros y variables con el objetivo de facilitar al optimizador la búsqueda de los valores óptimos. Como ley general se adimensionalizarán las magnitudes de distancias con la distancia de vuelo de la aeronave que realiza la maniobra, los ángulos con el valor de 90° y los valores de $ROCD$ y a con los correspondientes al mínimo y máximo empuje en cada caso. Se pasa a definir estas adimensionalizaciones trayectoria a trayectoria:

- Evitación mediante desviación horizontal:

En las variables del problema:

- r_1 y l_d se adimensionalizan con d .
- $\Delta\chi_2$ y $\Delta\chi_3$ se adimensionalizan con 90° .

En las restricciones no lineales $s(x)$:

- r_4 se adimensionaliza con d .

- Evitación mediante desviación horizontal en paralelo:

En las variables del problema:

- r_1, r_3 y l_d se adimensionalizan con d .
- $\Delta\chi_2$ y $\Delta\chi_4$ se adimensionalizan con 90° .

En las restricciones no lineales $s(x)$:

- r_5 se adimensionaliza con d .

- Evitación mediante cambio temporal de la altitud de vuelo:

En las variables del problema:

- r_1 y r_3 se adimensionalizan con d .
- $ROCD_2$ y $ROCD_4$ se adimensionalizan con los valores correspondientes al empuje mínimo y máximo a la altitud y velocidad de vuelo, según sean de ascenso o descenso. El que corresponda a un descenso (menor que cero), se adimensionalizará con $\frac{T_{des,high}-D}{m_0g_0}V_0$, mientras que el de ascenso (mayor que cero), se adimensionalizará con $\frac{T_{maxclimb}-D}{m_0g_0}V_0$.

En las restricciones no lineales $s(x)$:

- r_5 se adimensionaliza con d .
- Los valores máximos y mínimos de empuje a lo largo de la trayectoria se adimensionalizarán con $T_{maxclimb}$ y $T_{des,high}$ respectivamente.

La desviación vertical Δh_d no se adimensionaliza porque al modelarse como un parámetro discreto no se incluye en el vector u que recoge las variables del problema de optimización.

- Evitación mediante cambio temporal de la velocidad:

En las variables del problema:

- r_1 y r_3 se adimensionalizan con d .
- a_2 y a_4 se adimensionalizan con los valores correspondientes al empuje mínimo y máximo a la altitud y velocidad de vuelo, según sean de aceleración o desaceleración. El que corresponda a un descenso de la velocidad (menor que cero), se adimensionalizará con $\frac{T_{des,high}-D}{m_0}$, mientras que el de aceleración (mayor que cero), se adimensionalizará con $\frac{T_{maxCRUISE}-D}{m_0}$.
- ΔV_d se adimensionaliza con la velocidad inicial de la aeronave antes de iniciar la maniobra de resolución, V_0 .

En las restricciones no lineales $s(x)$:

- r_5 se adimensionaliza con d .
- Los valores máximos y mínimos de empuje a lo largo de la trayectoria se adimensionalizarán con $T_{maxCRUISE}$ y $T_{des,high}$ respectivamente.

La restricción correspondiente al cumplimiento de la mínima distancia de separación no tiene por qué adimensionalizarse ya que es de orden unidad.

4.2.4 Generación de las condiciones iniciales

A la hora de generar las condiciones iniciales del optimizador *fmincon* es importante asegurarse que se alcanza el mínimo absoluto de la función objetivo. Se puede dar la situación en la cual *fmincon* alcance un mínimo que no sea el mínimo absoluto de la función objetivo porque pertenezca a un valle diferente al del mínimo absoluto, esta situación se puede observar en la siguiente representación, figura 4.1.

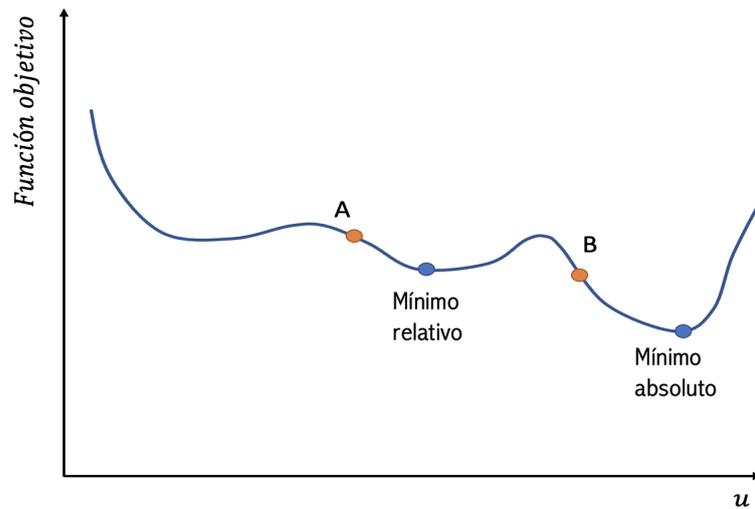


Figura 4.1 Tipos de mínimos en la función objetivo.

La función objetivo puede estar formada por uno o más valles (en esta representación existen tres valles). Si la condición inicial pertenece a un valle concreto, el optimizador no será capaz de salir de este valle para estudiar los valores de otro valle ya que la pendiente de la función es positiva en ambos sentidos y, por tanto, los valores de la función cada vez mayores. Esta situación se da si la condición inicial se sitúa en el punto A, *fmincon* alcanzará el mínimo relativo que se observa en la figura 4.1 pero nunca alcanzará el mínimo absoluto, no saldrá del valle central de la función. Para alcanzar el mínimo absoluto se debe dar una condición inicial en el valle de dicho mínimo, como puede ser el punto B.

Analizando este comportamiento se ha optado por resolver el optimizador *fmincon* para veinte condiciones iniciales diferentes en cada una de la trayectorias y así tener mayores probabilidades de alcanzar el mínimo absoluto de la función en caso de que existan varios mínimos relativos.

Hay que generar las condiciones iniciales de forma que la trayectoria con dichas condiciones iniciales resuelva el conflicto, aunque no sea de forma óptima, o al menos esté cerca de resolverlo, para que así el optimizador tenga más posibilidades de obtener la solución correcta. Para ello se establece un parámetro que define la distancia hasta el primer instante en el que se incumplen los mínimos de separación, R_{c1} . Mediante este parámetro se definen las condiciones iniciales del parámetro r_1 para todas las maniobras.

- Desviación horizontal

- r_1 : Se obtiene adelantando el cambio de rumbo a la distancia R_{c1} un número aleatorio de millas.
- l_d : Se generan valores aleatorios mayores que D_{AB} y menores que $2 \cdot D_{AB}$.
- $\Delta\chi_2$: Se generan valores aleatorios en el intervalo $[-90^\circ 90^\circ]$.
- $\Delta\chi_3$: Se generan valores aleatorios en el intervalo $[-90^\circ 90^\circ]$ pero siempre cumpliendo las ligaduras correspondientes (en valor absoluto mayor que $\Delta\chi_2$, signo contrario e intervalo de valores admisibles).

- Desviación horizontal en paralelo

- r_1 : Se obtiene adelantando el cambio de rumbo a la distancia R_{c1} un número aleatorio de millas.
- l_d : Se generan valores aleatorios mayores que D_{AB} y menores que $2 \cdot D_{AB}$.
- $\Delta\chi_2$: Se generan valores aleatorios en el intervalo $[-90^\circ 90^\circ]$.
- $\Delta\chi_4$: Se generan valores aleatorios en el intervalo $[-90^\circ 90^\circ]$ pero siempre cumpliendo las ligaduras correspondientes (en valor absoluto mayor que $\Delta\chi_2$, signo contrario e intervalo de valores admisibles).
- r_3 : Toma valores aleatorios entre 0 y la distancia que recorrería la aeronave sin desvíos, d .

- Cambio temporal de la altitud de vuelo
 - r_1 : Se obtiene adelantando el cambio de altitud a la distancia Rc_1 un número aleatorio de millas.
 - $ROCD_2$ y $ROCD_4$: Se generan valores aleatorios pero siempre cumpliendo la ley de empuje y las ligaduras correspondientes (ambos deben tener signo contrario).
 - r_3 : Toma valores aleatorios entre 0 y la distancia que recorre la aeronave, d .
- Cambio temporal de la velocidad de vuelo
 - r_1 : Se obtiene adelantando el cambio de velocidad a la distancia Rc_1 . Como esta maniobra requiere mayor antelación para que se resuelva con éxito se toma como r_1 la multiplicación del término Rc_1 por un factor aleatorio entre 0 y 0.5, para adelantar el inicio del cambio de velocidad.
 - a_2 y a_4 : Se generan valores aleatorios pero siempre cumpliendo la ley de empuje y las ligaduras correspondientes (ambos deben tener signo contrario).
 - r_3 : Toma valores aleatorios entre 0 y la distancia que recorre la aeronave, d .

Para la generación de valores aleatorios en un intervalo definido se ha utilizado la función *randi* de MATLAB.

4.3 Ejemplos

En esta sección se procede a presentar los resultados obtenidos de la optimización del problema para los ejemplos de conflictos y evitaciones presentados en el capítulo anterior. Además, se presenta la diferencia entre la resolución optimizada y sin optimizar (resuelta en la sección 3.3) para demostrar los beneficios que esto conlleva. A la hora de realizar la optimización se ha tomado como valor del peso w_3 para la función objetivo el obtenido en la sección 4.4 ($w_3=0.55$), en la que se realiza un estudio sobre posibles valores que puede tomar este peso.

4.3.1 Evitación mediante desviación horizontal

Tabla 4.1 Parámetros de la trayectoria optimizada del avión 2: Desviación horizontal.

Trayectoria	r_1 [nmi]	l_d [nmi]	$\Delta\chi_2$ [deg]	$\Delta\chi_3$ [deg]
Manual	50	10	20°	-50°
Optimizada	4.9571	6.7749	5.4007°	-21.5634°

Tabla 4.2 Resultados de la trayectoria optimizada del avión 2: Desviación horizontal.

Trayectoria	Δt [s]	Δm_F [kg]	$\Delta \bar{T}$ [s]
Manual	35.4134	24.0170	0
Optimizada	10.2146	6.9274	0

Como era esperado se produce un ahorro tanto en el tiempo de vuelo como en el consumo de combustible. Ambas variables disminuyen en la misma proporción ya que en esta maniobra el consumo de combustible depende únicamente del tiempo de vuelo.

4.3.2 Evitación mediante desviación horizontal en paralelo

Tabla 4.3 Parámetros de la trayectoria optimizada del avión 2: Desviación horizontal en paralelo.

Trayectoria	r_1 [nmi]	l_d [nmi]	$\Delta\chi_2$ [deg]	r_3 [nmi]	$\Delta\chi_4$ [deg]
Manual	55	7	30°	15	-60°
Optimizada	0.0733	6.7724	5.0712°	0.3196	-21.2854°

Tabla 4.4 Resultados de la trayectoria optimizada del avión 2: Desviación horizontal en paralelo.

Trayectoria	Δt [s]	Δm_F [kg]	$\Delta \bar{T}$ [s]
Manual	29.9017	20.2790	0
Optimizada	10.0804	6.8364	0

Se observa en este caso que el valor que toma el parámetro r_3 es pequeño. Se están considerando cambios de rumbo instantáneos, sin embargo, si se piensa en la distancia que necesitan las aeronaves para realizar dichos cambios de rumbo sin salir de su envolvente de vuelo, el valor de r_3 se puede considerar despreciable. Este comportamiento da indicios de que la maniobra de desviación horizontal en paralelo en ocasiones puede converger a la maniobra de desviación horizontal. Este comportamiento se analizará profundamente en el capítulo 5 cuando se realice la optimización para diferentes escenarios de conflictos y no solo uno, como ocurre en este capítulo. Al igual que en la maniobra anterior, ambas variables disminuyen en la misma proporción.

4.3.3 Evitación mediante cambio temporal de la altitud de vuelo

Tabla 4.5 Parámetros de la trayectoria optimizada del avión 2: Cambio temporal de la altitud de vuelo.

Trayectoria	r_1 [nmi]	Δh_d [ft]	$ROCD_2$ [ft/min]	r_3 [nmi]	$ROCD_4$ [ft/min]
Manual	55	2000	900	15	-2000
Optimizada	0	2000	159.3	0	-2749.6

Tabla 4.6 Resultados de la trayectoria optimizada del avión 2: Cambio temporal de la altitud de vuelo.

Trayectoria	Δt [s]	Δm_F [kg]	$\Delta \bar{T}$ [s]
Manual	0	-5.2405	73.7790
Optimizada	0	-9.8122	58.2629

En esta maniobra la optimización muestra preferencia por resolver la maniobra de cambio de altitud ascendiendo y no descendiendo, esto ocurre porque la altitud óptima de crucero se encuentra por encima de la altitud de vuelo establecida. Además se observa la preferencia por ascender lentamente, mientras que el descenso se produce de forma brusca, tomando el valor mínimo de empuje asumibles por la aeronave en descenso. Esto aporta unas pinceladas del comportamiento general de la optimización en este problema.

4.3.4 Evitación mediante cambio temporal de la velocidad

Tabla 4.7 Parámetros de la trayectoria optimizada del avión 2: Cambio temporal de la velocidad de vuelo.

Trayectoria	r_1 [nmi]	ΔV [kt]	a_2 [m/s ²]	r_3 [nmi]	a_4 [m/s ²]
Manual	0	-40	-0.05g	65	0.095g
Optimizada	0	-64.4105	-0.0570g	0	0.0044g

Tabla 4.8 Resultados de la trayectoria optimizada del avión 2: Cambio temporal de la velocidad de vuelo.

Trayectoria	Δt [s]	Δm_F [kg]	$\Delta \bar{T}$ [s]
Manual	61.9832	0.6745	92.2867
Optimizada	58.6608	1.5508	49.1671

En la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo se observa que se ha optado por frenar la aeronave, en el capítulo 5 habrá que analizar si este comportamiento es general o depende del escenario de conflicto.

Analizando globalmente las soluciones obtenidas mediante la optimización se pueden sacar varias conclusiones. En primer lugar, queda claro que la optimización supone grandes beneficios ya que los términos de la función objetivo estudiados reducen sus valores en la mayoría de los casos de forma considerable. Por otro lado, se observa que uno de los términos que más mejora es el asociado al cambio de régimen de motor, $\Delta\bar{T}$, por lo que una mala planificación de la trayectoria puede suponer grandes costes adicionales, siendo la optimización la única herramienta capaz de resolver este problema.

4.4 Análisis del peso del término asociado al empuje en la función objetivo

Dado que se desconoce una relación entre el término asociado al empuje (w_3) y el resto de términos de la función objetivo es necesario realizar un estudio sobre su relación. Para este análisis se estudiará cómo varían los términos de la función objetivo y los parámetros de resolución de la trayectoria de evitación con el peso w_3 .

Dado que los cambios de régimen de motor ocurren únicamente en las maniobras de cambio temporal de la altitud de vuelo y cambio temporal de la velocidad de vuelo el estudio se limita a estos casos. Para el estudio se realiza un barrido preliminar de pesos que pertenezcan al intervalo $w_3 \in [0,10]$, de forma que se pueda apreciar dónde es más importante afinar el mallado. Se observa que a partir de $w_3=1$ no existen cambios en los valores de los términos de la función objetivo, de esta forma se decide realizar un primer disparo para valores de $w_3 \in [0,1]$ (cuyos resultados se muestran a continuación) y seguir estudiando dónde es más necesario afinar el mallado. En la tabla 4.9 se muestra la evolución de los términos de la función objetivo al cambiar el valor del peso w_3 para una maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo. De la misma forma, en la tabla 4.10 se muestra la información equivalente para una maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo.

Tabla 4.9 Primer disparo: Evolución de la función objetivo y sus términos con el peso del término asociado al empuje w_3 para la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo.

w_3	Maniobra en subida: $\Delta h_d = 2000ft$				Maniobra en bajada: $\Delta h_d = -2000ft$			
	Función objetivo	Δt	Δm_F	$\Delta\bar{T}$	Función objetivo	Δt	Δm_F	$\Delta\bar{T}$
0	-17.0443	0	-17.0443	91.1984	2.6447	0	2.6447	73.1266
0.1500	-3.3646	0	-17.0443	91.1984	13.6137	0	2.6447	73.1266
0.3000	8.7844	0	-12.9194	72.3460	24.5827	0	2.6447	73.1266
0.4500	16.3251	0	-9.7878	58.0286	35.5517	0	2.6447	73.1266
0.6000	25.0279	0	-9.7886	58.0275	46.5207	0	2.6447	73.1265
0.7500	33.7320	0	-9.7886	58.0274	56.7628	0	9.5093	63.0047
0.9000	42.4361	0	-9.7886	58.0274	65.8185	0	10.7169	61.2240

Tabla 4.10 Primer disparo: Evolución de la función objetivo y sus términos con el peso del término asociado al empuje w_3 para la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo.

w_3	Función objetivo	Δt	Δm_F	$\Delta\bar{T}$
0	-54.8212	-69.5467	14.7255	165.3183
0.1500	-30.8412	-66.4196	13.3279	148.3368
0.3000	11.8699	-57.2547	10.6516	115.7776
0.4500	4.9082	-57.0952	10.8398	113.6969
0.6000	21.9302	-57.0925	10.8645	113.5971
0.7500	38.9658	-57.0939	10.8619	113.5971
0.9000	56.0004	-57.0908	10.8731	113.5757

Es destacable que en ciertos valores de peso w_3 se producen cambios bruscos del término $\Delta\bar{T}$, esto se

puede deber a que al cambiar la función objetivo, el mínimo absoluto puede cambiar de valle de un caso a otro, como se ha comentado en la sección 4.2.4. Aún así la función objetivo no sufre cambios bruscos, las variaciones son continuas.

4.4.1 Estudio para cambio temporal de la altitud de vuelo

En primer lugar, es necesario conocer cómo evoluciona la función objetivo y cada uno de sus términos al cambiar el valor del peso w_3 (tabla 4.11 y figuras 4.2 y 4.3). El estudio se ha realizado en el caso en el que el desvío de la trayectoria inicial se produce aumenta el nivel de vuelo (subida) y en el caso en el que disminuye el nivel de vuelo (bajada).

Es notable, tanto para el caso de subida como para el de bajada, que conforme aumenta el peso w_3 , mejorar el término asociado al empuje implica penalizar el ahorro de combustible, Δm_F , esta relación se estudiará más adelante y será decisiva a la hora de la elección del peso w_3 . Además, conforme aumenta w_3 , disminuye $\Delta \bar{T}$, algo que era previsible, sin embargo el aumento del peso w_3 hace que la función objetivo aumente aunque disminuya $\Delta \bar{T}$. En segundo lugar, es de interés conocer cómo cambian las maniobras de resolución con el peso w_3 (figuras 4.4 y 4.5).

En el caso de subida, se puede apreciar como el optimizador tiende a aplanar la solución (desciende $ROCD_2$). Realiza el ascenso más lentamente y no recorre distancia a la altitud de vuelo desplazado, comenzando el descenso en el momento que se alcanza $\Delta h_d = 2000ft$. Sin embargo el descenso es ligeramente más brusco al aumentar w_3 . En el caso de bajada, la solución solo sufre un cambio, en los primeros pesos estudiados únicamente retrasa o adelanta el inicio de la maniobra (cambia r_1), sin embargo a partir de $w_3 = 0.725$ el optimizador opta por aplanar la maniobra (desciende $ROCD_2$) iniciándola desde el principio y descendiendo y ascendiendo lo más lento posible, sin recorrer distancia en el nivel de vuelo al que se desplaza ($r_3 = 0$).

Tabla 4.11 Segundo disparo: Evolución de la función objetivo y sus términos con el peso del término asociado al empuje w_3 para la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo.

w_3	Maniobra en subida: $\Delta h_d = 2000ft$				Maniobra en bajada: $\Delta h_d = -2000ft$			
	Función objetivo	Δt	Δm_F	$\Delta \bar{T}$	Función objetivo	Δt	Δm_F	$\Delta \bar{T}$
0	-17.0443	0	-17.0443	91.1984	2.6447	0	2.6447	73.1266
0.0500	-12.4844	0	-17.0443	91.1984	6.3010	0	2.6447	73.1266
0.1000	-7.9245	0	-17.0443	91.1984	9.9574	0	2.6447	73.1266
0.1250	-5.6446	0	-17.0443	91.1984	11.7855	0	2.6447	73.1266
0.1500	-3.3646	0	-17.0443	91.1984	13.6137	0	2.6447	73.1265
0.1750	-1.0846	0	-17.0443	91.1984	15.4419	0	2.6447	73.1265
0.2000	1.1953	0	-17.0443	91.1984	17.2701	0	2.6448	73.1265
0.2250	3.4233	0	-15.1729	82.6499	19.0982	0	2.6448	73.1265
0.2500	5.4171	0	-13.6231	76.1609	20.9264	0	2.6448	73.1265
0.2750	6.1713	0	-9.7886	58.0361	22.7546	0	2.6448	73.1264
0.3000	7.6196	0	-9.7886	58.0274	24.5827	0	2.6448	73.1264
0.3500	10.5210	0	-9.7886	58.0274	28.2391	0	2.6448	73.1264
0.4250	14.8730	0	-9.7886	58.0274	33.7236	0	2.6448	73.1264
0.5000	19.2251	0	-9.7886	58.0274	39.2080	0	2.6449	73.1264
0.5750	23.5772	0	-9.7886	58.0274	44.6925	0	2.6449	73.1263
0.6500	27.9292	0	-9.7886	58.0274	50.1770	0	2.6449	73.1263
0.7250	32.2813	0	-9.7886	58.0274	55.1047	0	10.7143	61.2282
0.8000	36.6333	0	-9.7886	58.0274	59.6960	0	10.7175	61.2231
0.8750	40.9854	0	-9.7886	58.0274	64.2877	0	10.7177	61.2228
0.9500	45.3374	0	-9.7886	58.0274	68.8793	0	10.7179	61.2225
1.0000	48.2388	0	-9.7886	58.0274	71.9404	0	10.7180	61.2224

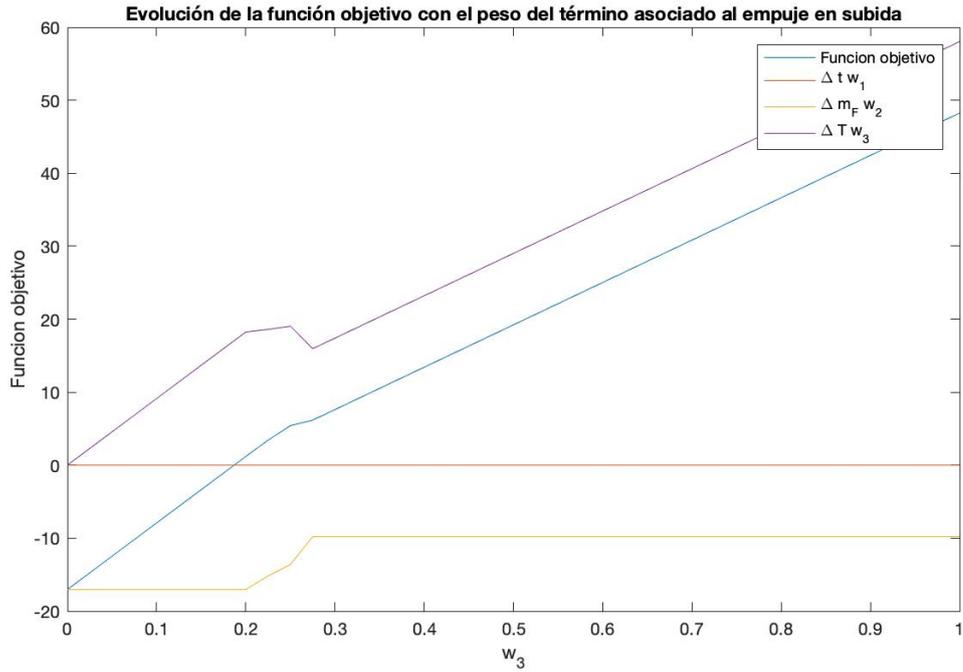


Figura 4.2 Evolución de la función objetivo con el peso del término asociado al empuje w_3 para la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo en subida.

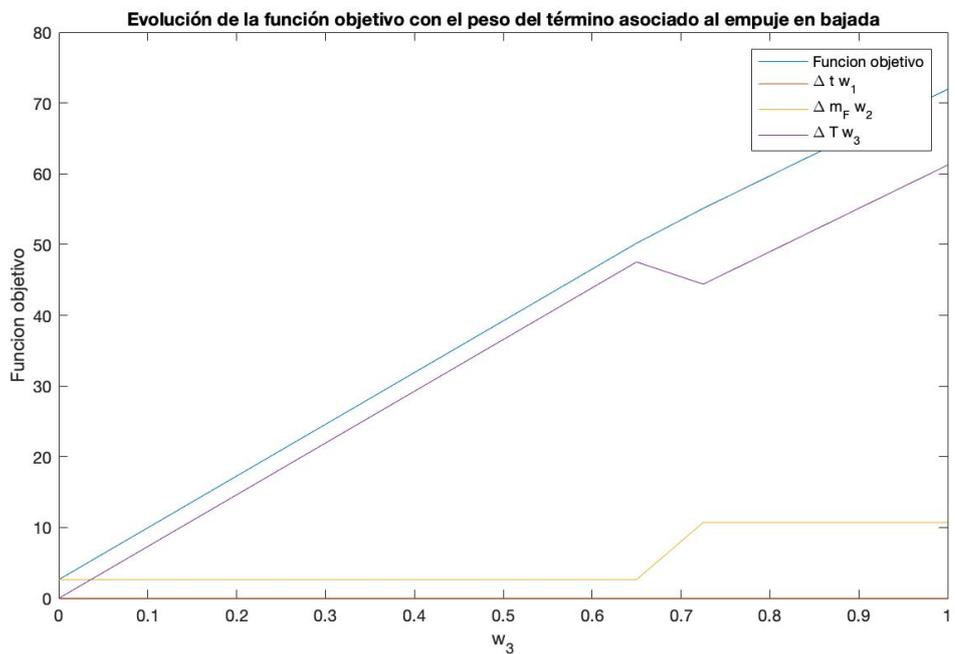


Figura 4.3 Evolución de la función objetivo con el peso del término asociado al empuje w_3 para la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo en bajada.

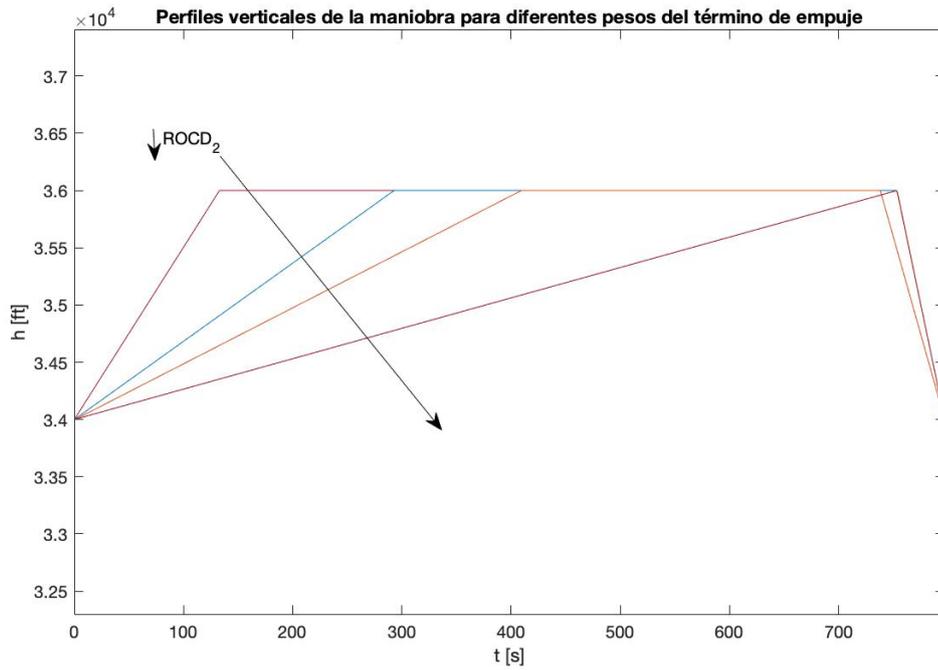


Figura 4.4 Evolución de la maniobra de resolución con el peso del término asociado al empuje w_3 para la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo en subida.

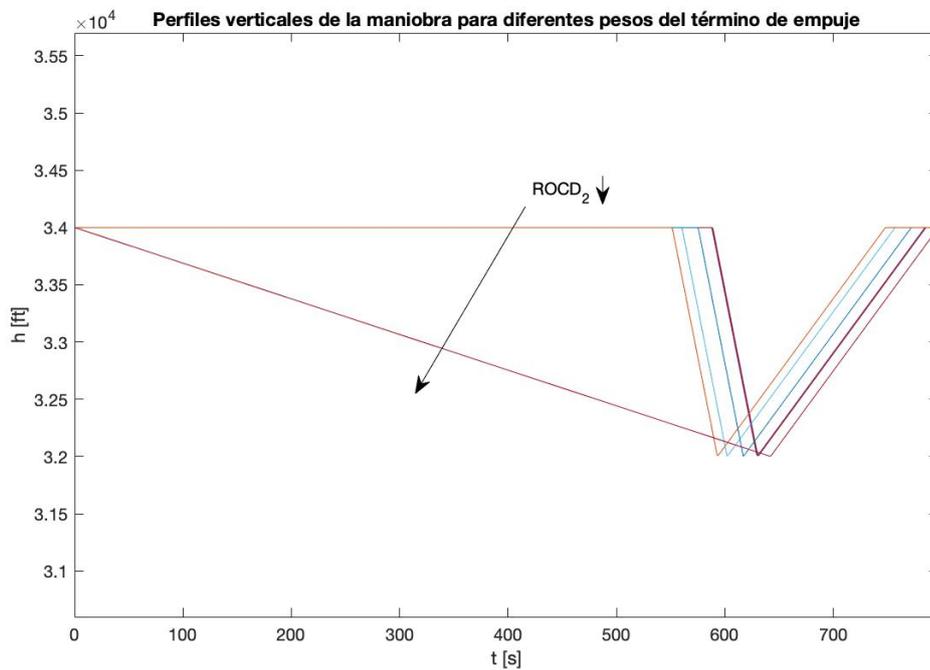


Figura 4.5 Evolución de la maniobra de resolución con el peso del término asociado al empuje w_3 para la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo en bajada.

Por último, para seleccionar el peso que se vaya a tomar de aquí en adelante es interesante representar la evolución del término asociado al empuje frente al resto de términos de la función objetivo, es decir, tiempo de vuelo y masa de combustible, tanto para la resolución en subida como en bajada (figuras 4.6 y 4.7

respectivamente). El conjunto de tiempo de vuelo y masa de combustible multiplicados respectivamente por sus pesos se denota como DOC .

$$DOC = w_1 \cdot \Delta t + w_2 \cdot \Delta m_F$$

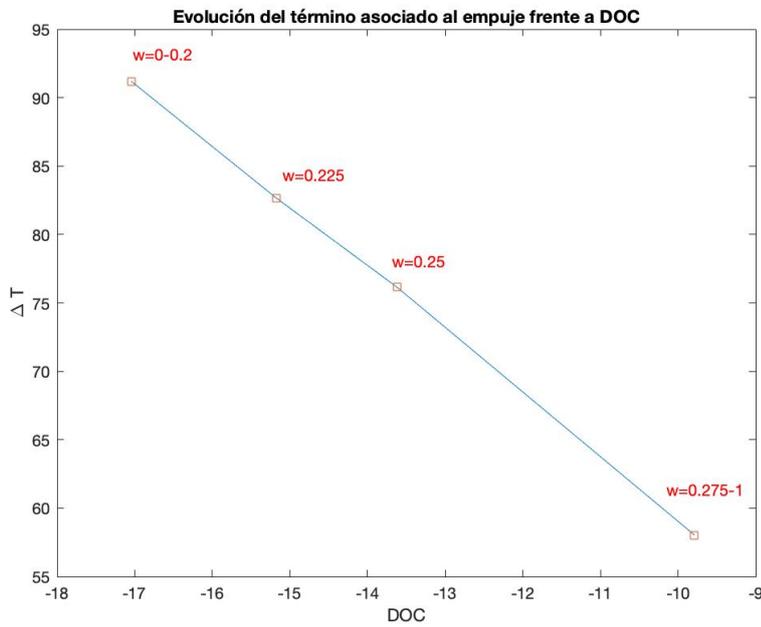


Figura 4.6 Evolución del término $\Delta \bar{T}$ con w_3 frente a DOC para una maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo aumentando la misma.

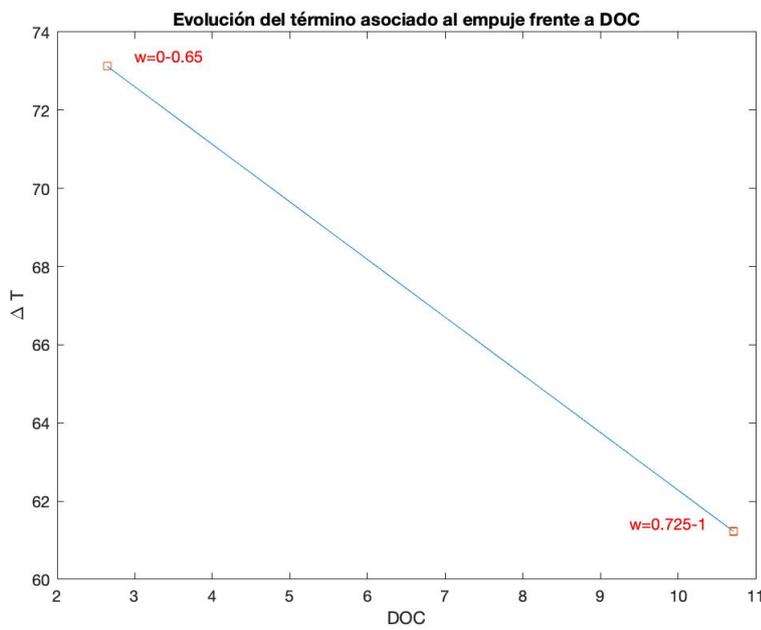


Figura 4.7 Evolución del término $\Delta \bar{T}$ con w_3 frente a DOC para una maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo disminuyendo la misma.

En esta representación se puede observar que una mejora del término $\Delta\bar{T}$ implica una pérdida en el resto de términos de la función objetivo.

4.4.2 Estudio para cambio temporal de la velocidad de vuelo

Para este caso se realiza un estudio idéntico al realizado para el cambio temporal de la altitud de vuelo, obteniéndose unos resultados similares. En primer lugar, es necesario conocer cómo evoluciona la función objetivo y cada uno de sus términos al cambiar el valor del peso w_3 . El comportamiento es análogo al del cambio temporal de la altitud de vuelo, como se puede observar en la tabla 4.12 y en la figura 4.8. Al aumentar el peso w_3 disminuye $\Delta\bar{T}$, aumenta el valor de la función objetivo y aumenta el incremento de tiempo de la maniobra de evitación respecto a la original (este término era constante en el caso anterior ya que la velocidad de vuelo se mantenía constante). La disminución de $\Delta\bar{T}$ suaviza las aceleraciones y desaceleraciones, por lo que la masa de combustible consumida disminuye conforme aumenta w_3 muy levemente.

En segundo lugar, es de interés conocer cómo cambian las maniobras de resolución con el peso w_3 (figura 4.9). Cabe destacar que al aumentar el peso w_3 se observa lo siguiente:

- Para este escenario de conflicto en concreto la maniobra opta por frenar la aeronave para cualquier valor del peso w_3 . Queda pendiente para el capítulo 5 observar si este comportamiento se extiende a todo el barrido de escenarios de conflictos o no.
- Aceleración más suave, es decir, $|a_4|$ toma valores menores.
- Disminución de la distancia r_3 recorrida con velocidad $V = V_0 + \Delta V_d$, llegando a ser nula en la mayoría de casos.

Tabla 4.12 Segundo disparo: Evolución de la función objetivo y sus términos con el peso del término asociado al empuje w_3 para la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo.

w_3	Función objetivo	Δt	Δm_F	$\Delta\bar{T}$
0	58.5559	56.4287	2.1272	97.3428
0.0500	62.0280	56.9667	2.0658	59.9116
0.1000	64.9043	57.5504	1.8317	55.2224
0.1250	66.2574	57.9005	1.7274	53.0361
0.1500	67.5600	58.2622	1.6366	51.0749
0.1750	68.8115	58.6567	1.5506	49.1669
0.2000	70.0407	58.6568	1.5506	49.1667
0.2250	71.2698	58.6568	1.5506	49.1665
0.2500	72.4990	58.6569	1.5505	49.1663
0.2750	73.7281	58.6569	1.5505	49.1662
0.3000	74.9573	58.6569	1.5505	49.1661
0.3500	77.4156	58.6569	1.5505	49.1660
0.4250	81.1030	58.6570	1.5505	49.1658
0.5000	84.7903	58.6570	1.5505	49.1656
0.5750	88.4778	58.6570	1.5505	49.1656
0.6500	92.1651	58.6571	1.5505	49.1654
0.7250	95.8525	58.6570	1.5505	49.1655
0.8000	99.5396	58.6572	1.5505	49.1649
0.8750	103.2273	58.6571	1.5505	49.1654
0.9500	106.9147	58.6571	1.5505	49.1654
1.0000	109.3729	58.6571	1.5505	49.1654

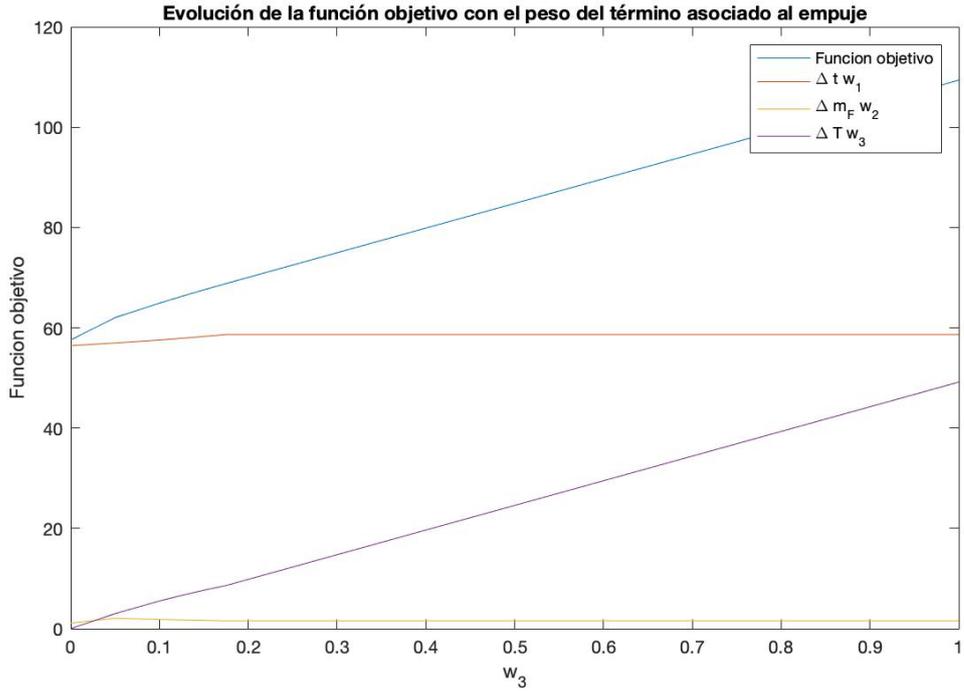


Figura 4.8 Evolución de la función objetivo con el peso del término asociado al empuje w_3 para la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo.

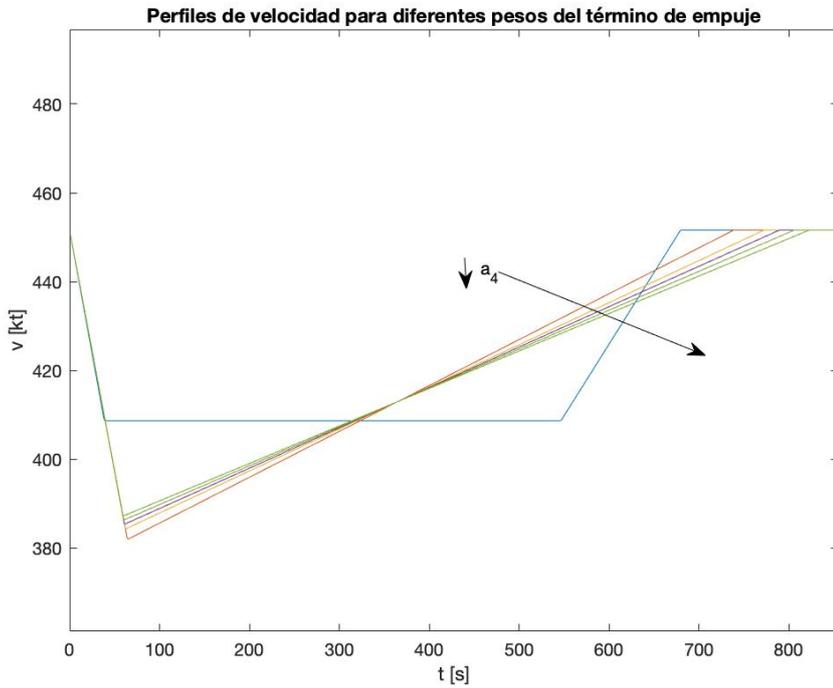


Figura 4.9 Evolución de la maniobra de resolución con el peso del término asociado al empuje w_3 para la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo.

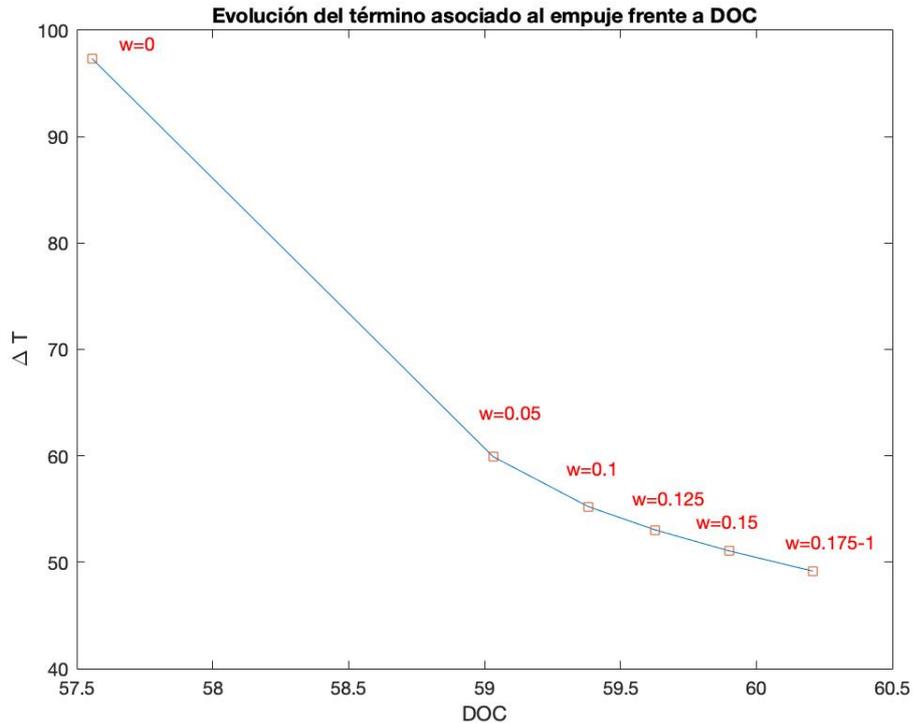


Figura 4.10 Evolución del término $\Delta\bar{T}$ con w_3 frente a DOC para una maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo.

Por último, en la figura 4.10, se vuelve a representar la evolución del término asociado al empuje frente al resto de términos de la función objetivo, es decir, tiempo de vuelo y masa de combustible (DOC).

Tras haber realizado estos estudios, ha quedado claro que conforme aumenta w_3 disminuye $\Delta\bar{T}$ y aumenta DOC , es por ello que se debe buscar una solución de compromiso que no penalice excesivamente la importancia de DOC y de la misma manera sea capaz de demostrar la importancia del término $\Delta\bar{T}$ en la función objetivo. Este valor de w_3 podría ser cercano a 0.2, sin embargo, tras realizar unos primeros barridos de escenarios de conflictos se ha observado que este valor de peso no penaliza lo suficiente el cambio de régimen del motor en la función objetivo, de esta forma se ha optado por tomar $w_3 = 0.55$. Este comportamiento aporta una primera idea de que la resolución del problema planteado dependerá mucho de cómo se modele la función objetivo y el modelo de avión.

5 Barrido de situaciones de tráfico

En este capítulo se procede a realizar un barrido de posibles situaciones de tráfico para estudiar cómo evoluciona la función objetivo del problema en función de las condiciones iniciales del escenario de conflicto entre las para cada una de las trayectorias de evitación. Además, con estos resultados, se obtendrá qué maniobra es la óptima en cada caso. Para ello se realiza un mallado en dos dimensiones, mediante dos parámetros que caracterizarán las condiciones iniciales del escenario del conflicto. Una vez obtenida la maniobra óptima en cada región del barrido, se dispondrá de un mapa que servirá de orientación para resolver un conflicto de la forma más eficiente posible según las condiciones iniciales del escenario de conflicto, este mapa apoyará la decisión del operador humano que dirige la resolución del conflicto. Las aeronaves que se consideran en este barrido vuelan a la misma velocidad y altitud, además, al igual que en los capítulos anteriores se considera el modelo AIRBUS A320.

5.1 Mallado

Para realizar el barrido de posibles conflictos se realiza un mallado bidimensional que tiene como variables el ángulo que forman las trayectorias de las dos aeronaves en cuestión, β , y la distancia de las aeronaves al punto del conflicto, R . Con estos dos parámetros del mallado se puede definir totalmente el escenario previo al conflicto de las dos aeronaves (para determinar los parámetros del barrido se ha consultado [9]).

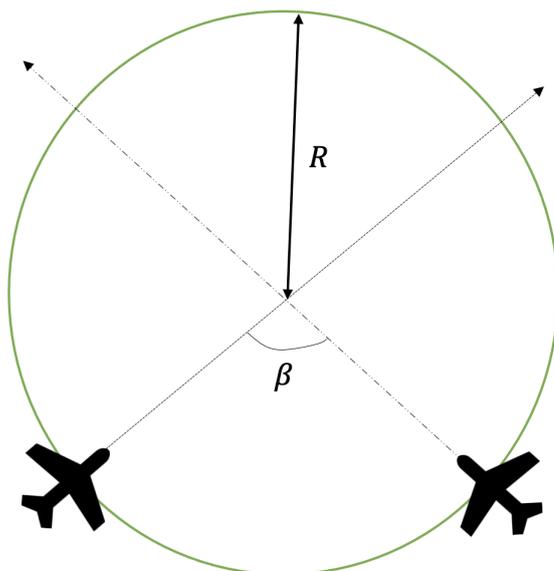


Figura 5.1 Representación de los parámetros que definen el barrido.

Hay que destacar que estos parámetros deben cumplir ciertas condiciones para que no exista conflicto entre las aeronaves en la situación inicial, antes de poder realizar cualquier cambio en la trayectoria de alguna de ellas. Por eso se analiza cómo de pequeño puede ser el ángulo β en función de la distancia al conflicto R (figura 5.2).

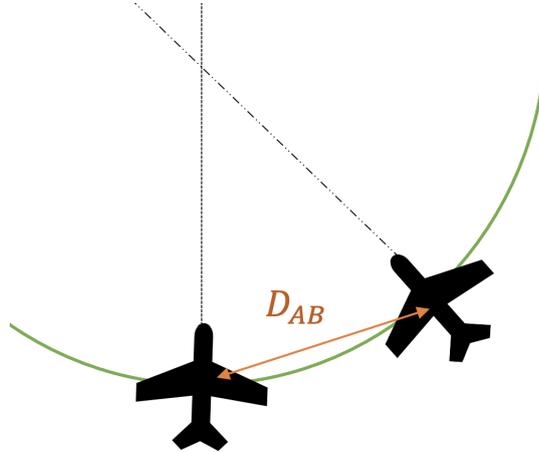


Figura 5.2 Situación límite para mantener las distancias mínimas de separación en la condición inicial.

Como se puede ver en la figura 5.2, se debe estudiar el triángulo isósceles que forman ambas aeronaves con el punto del conflicto. La distancia mínima que separa ambas aeronaves deberá ser al menos la mínima distancia de separación D_{AB} , obteniendo la siguiente imposición:

$$2 \cdot R \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \geq D_{AB}$$

$$\beta_{min} = \beta_{min}(R) = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{D_{AB}}{2R}\right)$$

Los límites del parámetro R se establecen de tal forma que se empieza a estudiar para una distancia de $R = 2 \cdot D_{AB}$ y se termina para $R = 20 \cdot D_{AB}$. Por lo tanto, el ángulo β definirá la región del espacio bidimensional en la que se realizará el barrido. Además se puede reconocer la simetría del problema, por lo que el barrido se puede limitar a la mitad, de forma que $\beta \in [\beta_{min}, 180^\circ]$. En la figura 5.3 se muestra la zona en la que se realiza el estudio mediante los parámetros R y β . En el mallado se estudiarán 2500 escenarios al usar 50 diferentes valores de R y otros 50 de β . El coste operativo aumenta con lo fino que sea el mallado pero hay que asegurar que las fronteras entre las diferentes maniobras de resolución de conflictos sean nítidas.

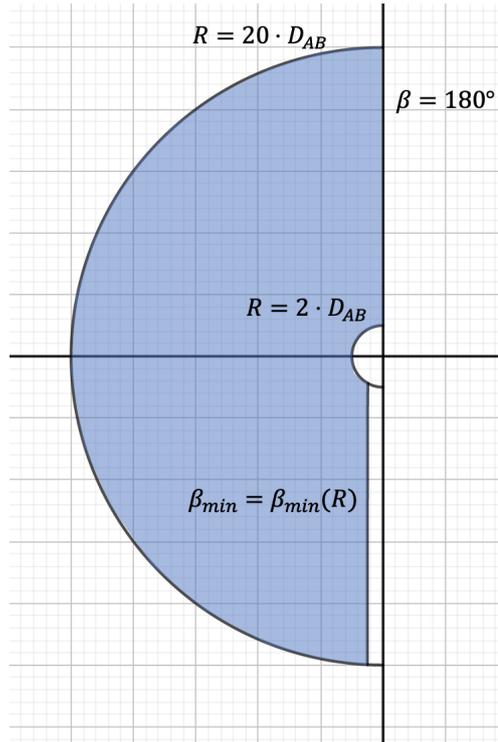


Figura 5.3 Región del espacio en la que se realiza el barrido.

Al utilizar estos parámetros para definir la geometría del conflicto, es necesario definir cómo se establecen las posiciones iniciales de las aeronaves en coordenadas cartesianas (x_0, y_0) y la distancia que deben recorrer ambas aeronaves (d). Se considera una aeronave siempre en la misma posición y la otra cambiará su posición inicial en función de los parámetros β y R .

Aeronave A: siempre se sitúa inicialmente en el punto $[x_0 = 0, y_0 = 0]$ con rumbo oeste-este ($\chi_A = 90^\circ$).

Aeronave B: su posición inicial queda definida por:

$$x_0 = R \cdot \sin(\beta)$$

$$y_0 = R(1 - \cos(\beta))$$

Su rumbo será $\chi_B = \chi_A + \beta$.

Además las distancias que tienen recorrer las aeronaves entre los puntos inicial y final de sus correspondientes trayectorias queda definida por $d = 2 \cdot R$.

5.2 Resolución del conflicto con cada una de las maniobras de desviación

En este apartado, se presentan los valores de la función objetivo en la región de barrido para cada una de las maniobras de resolución. Se muestra una representación en tres dimensiones de la superficie y una representación en dos dimensiones mediante curvas de nivel.

5.2.1 Resolución mediante desviación horizontal

Para la maniobra de desviación horizontal se observa una clara tendencia descendente conforme aumentan R y β . Por otro lado, la maniobra es capaz de resolver el conflicto en todo el barrido por lo que se postula como una maniobra muy versátil. Es también destacable la existencia de un pico para valores pequeños de R y β , conforme aumenta β para un mismo valor de R . Aumenta la función objetivo y al alcanzar un determinado valor de β decrece bruscamente, es conveniente analizar este comportamiento.

La aeronave B se acerca a la aeronave A por la izquierda, por lo que si ambas aeronaves están muy cerca la aeronave B no tendrá más remedio que desviarse a la izquierda y volver a su trayectoria una vez superada la amenaza de conflicto. Cuanto mayor es el valor de β más lejos se tendrá que desviar hacia la izquierda, hasta

alcanzar un determinado valor de β que le permitirá desviarse a la derecha, produciéndose este descenso brusco en el valor de la función objetivo.

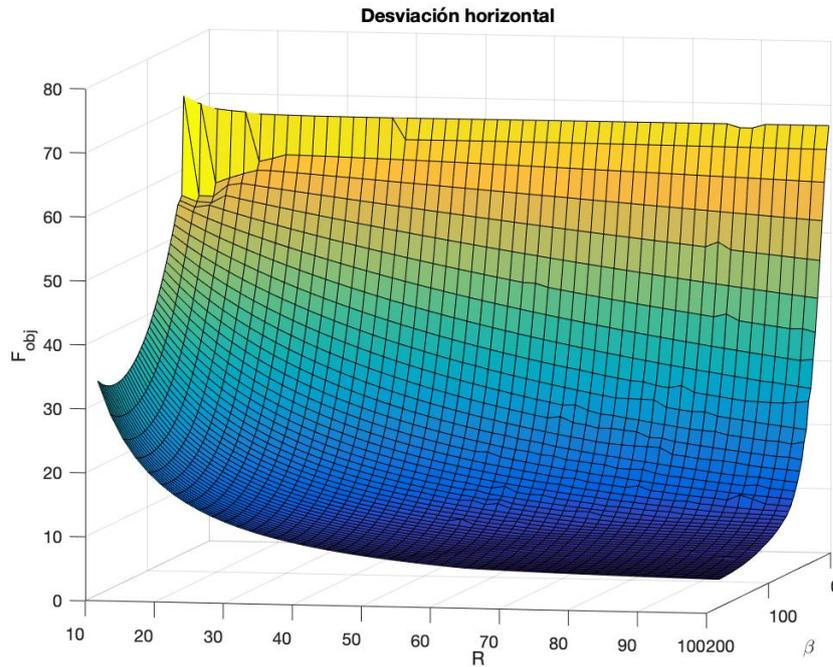


Figura 5.4 Valores de la función objetivo para una resolución mediante desviación horizontal, 3D.

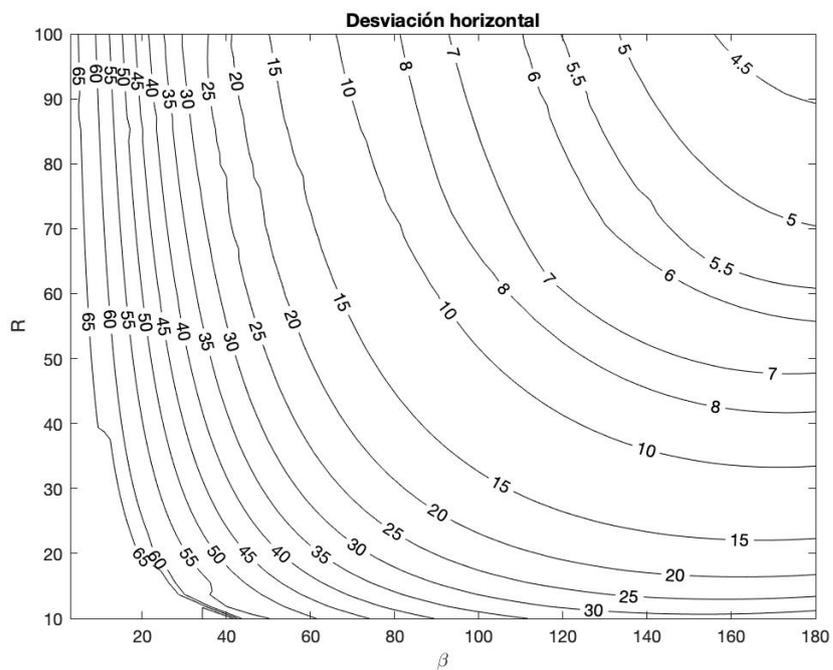


Figura 5.5 Valores de la función objetivo para una resolución mediante desviación horizontal.

En la figura 5.5 se puede apreciar que para grandes valores de β y de R la función objetivo toma valores menores que 10, lo que postula esta trayectoria como una buena opción en dicha zona del barrido.

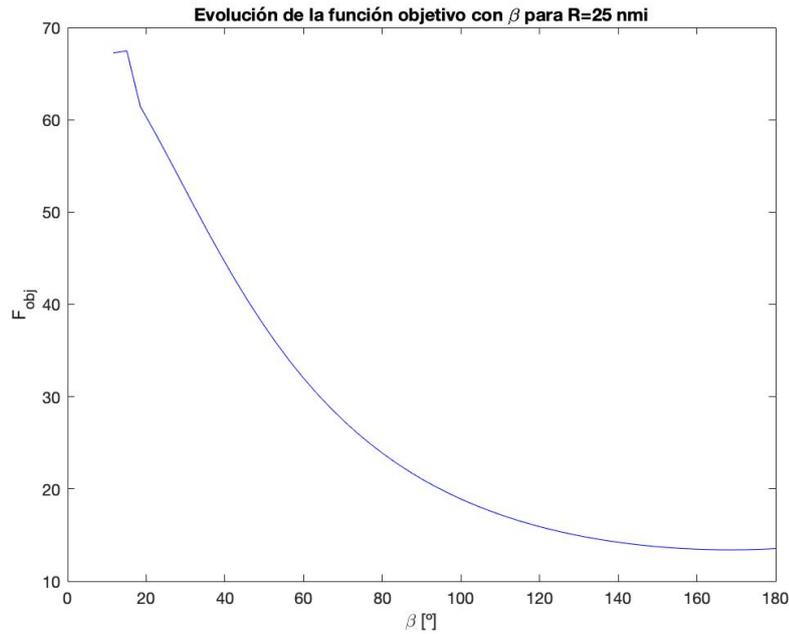


Figura 5.6 Evolución de la función objetivo con β para R constante para la maniobra de desviación horizontal.

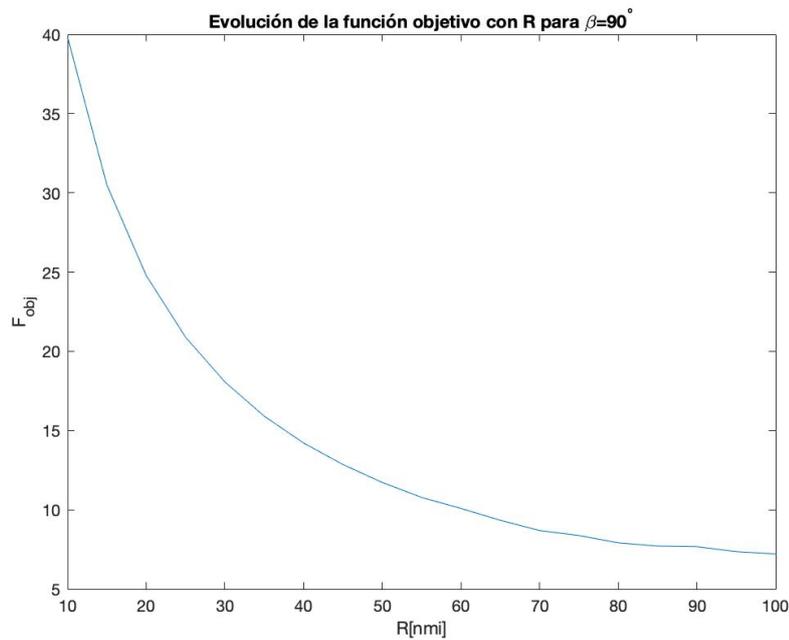


Figura 5.7 Evolución de la función objetivo con R para β constante para la maniobra de desviación horizontal.

Para explicar el comportamiento descendente de la función objetivo con el aumento de los parámetros del barrido se procede a representar la trayectoria de resolución para diferentes valores de β y un valor de R constante y para diferentes valores de R y un valor de β constante (figuras 5.6 y 5.7). Este estudio se realizará de la misma forma para el resto de trayectorias en las siguientes secciones. En las figuras 5.9 y 5.8 se observa que conforme aumentan los valores de R y β disminuye el parámetro $\Delta\chi_2$ de la resolución del conflicto y de la misma forma $\Delta\chi_4$, lo que disminuye la función objetivo, según lo estudiado en la sección 3.2.2. El descenso del parámetro $\Delta\chi_2$ con R corresponde a la resolución con mayor antelación del conflicto mientras

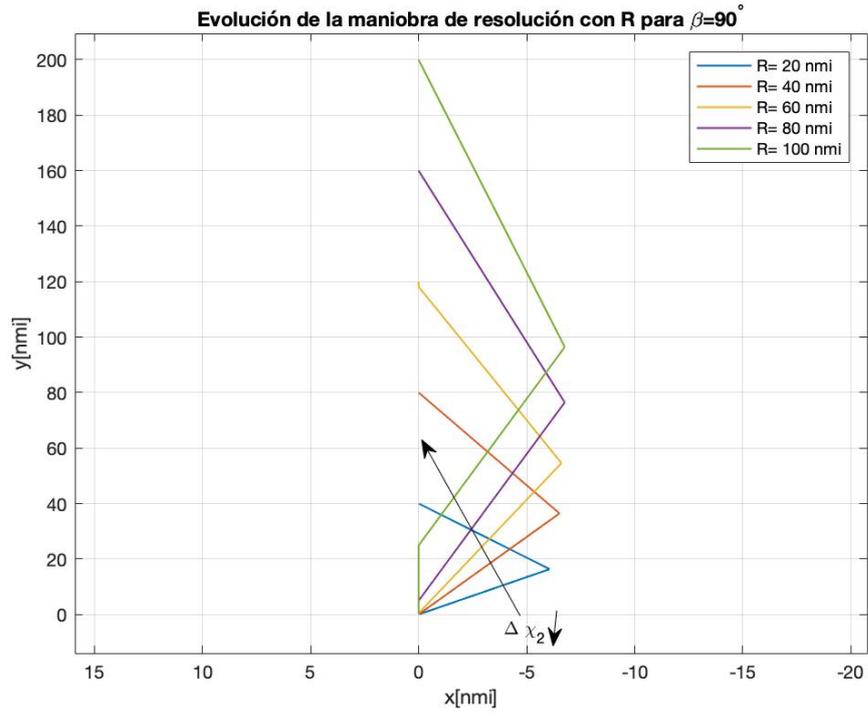


Figura 5.8 Resolución de la maniobra de desviación horizontal para $\beta = 90^\circ$ y diferentes valores de R .

que la disminución con β está asociada a la posición relativa de las aeronaves. Se observa en la figura 5.9 que para un escenario en el que las aeronaves se encuentran frontalmente ($\beta = 180^\circ$) la desviación lateral de la trayectoria (l_d) debe ser D_{AB} (5 nmi), mínima distancia de separación que deben tener las aeronaves, disminuyendo este parámetro conforme aumenta β (lo que justifica el descenso de la función objetivo con β) y sin experimentar aparentemente cambio con R . Además, en ambas figuras se observa cómo el optimizador tiende a resolver los conflictos lo antes posible, es decir r_1 pequeño o nulo, para que los cambios de rumbo sean todo lo pequeños que se pueda.

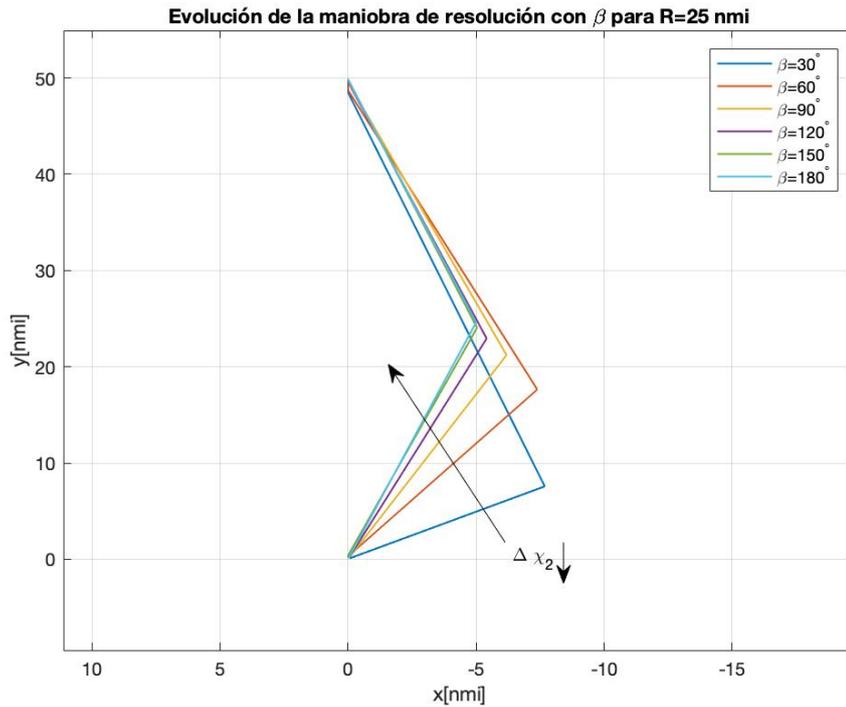


Figura 5.9 Resolución de la maniobra de cambio de rumbo para $R = 25$ nmi y diferentes valores de β . Nótese que los puntos inicial y final no coinciden con los de cada uno de los escenarios estudiados, sino que se han superpuesto todas las trayectorias con mismos puntos inicial y final para que se puedan observar mejor los cambios en la maniobra de resolución. Esto se realiza de la misma forma en las siguientes figuras que representan los cambios de la maniobra de resolución.

5.2.2 Resolución mediante desviación horizontal en paralelo

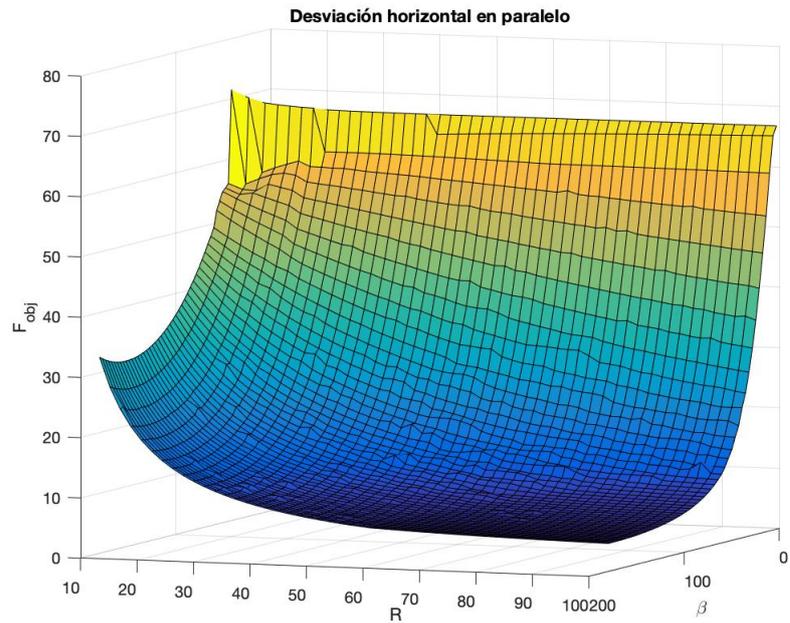


Figura 5.10 Valores de la función objetivo para una resolución mediante desviación horizontal en paralelo, 3D.

Si se observa el comportamiento de esta maniobra en las figuras 5.10 y 5.11 se aprecia que es idéntico al de la maniobra de desviación horizontal, por lo que se llega a pensar que esta maniobra converge a la otra. La rugosidad de la solución es mayor, esto se debe a que aumenta el número de variables del problema respecto al caso anterior y esto dificulta la tarea del optimizador.

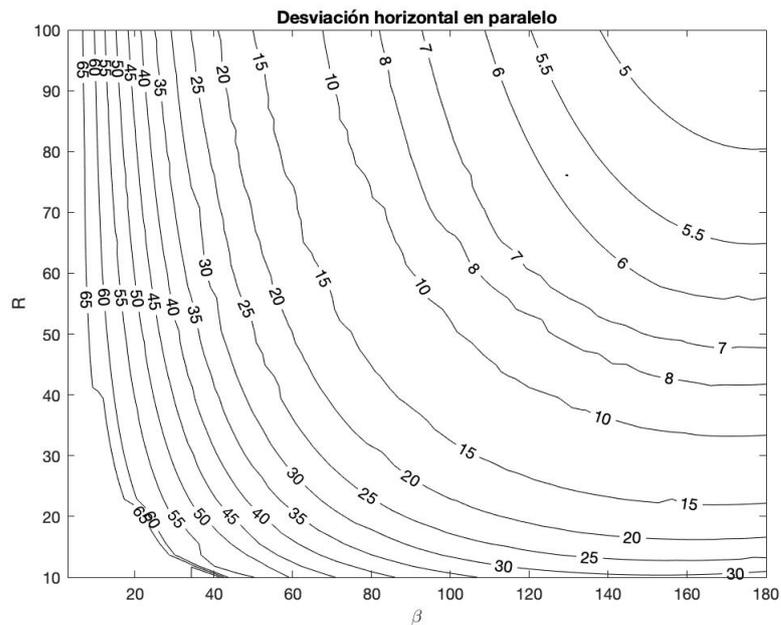


Figura 5.11 Valores de la función objetivo para una resolución mediante desviación horizontal en paralelo.

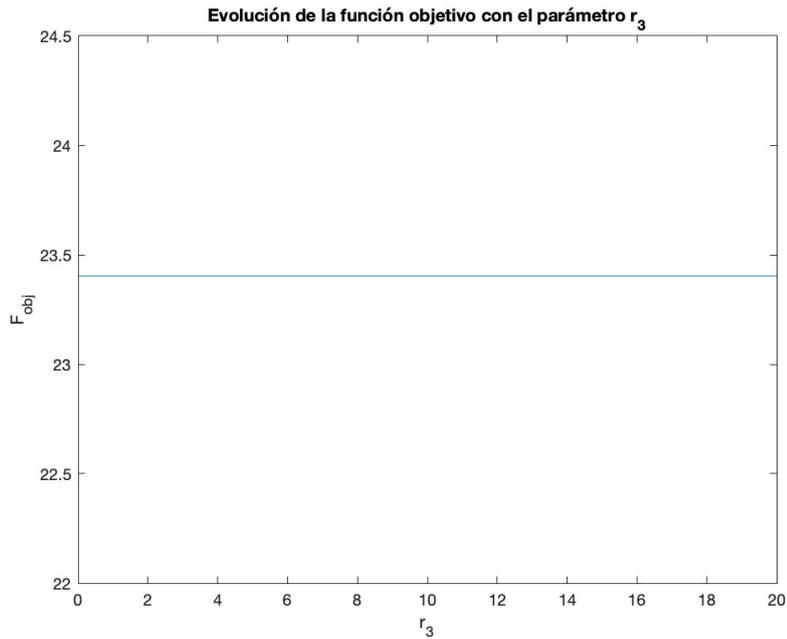


Figura 5.12 Independencia de la función objetivo con el parámetro r_3 .

Para estudiar este fenómeno se procede a analizar cómo influye en la función objetivo el parámetro r_3 , el único que distingue esta maniobra de la de cambio de rumbo (se realiza para el ejemplo aleatorio de escenario que se ha planteado en los capítulos 3 y 4).

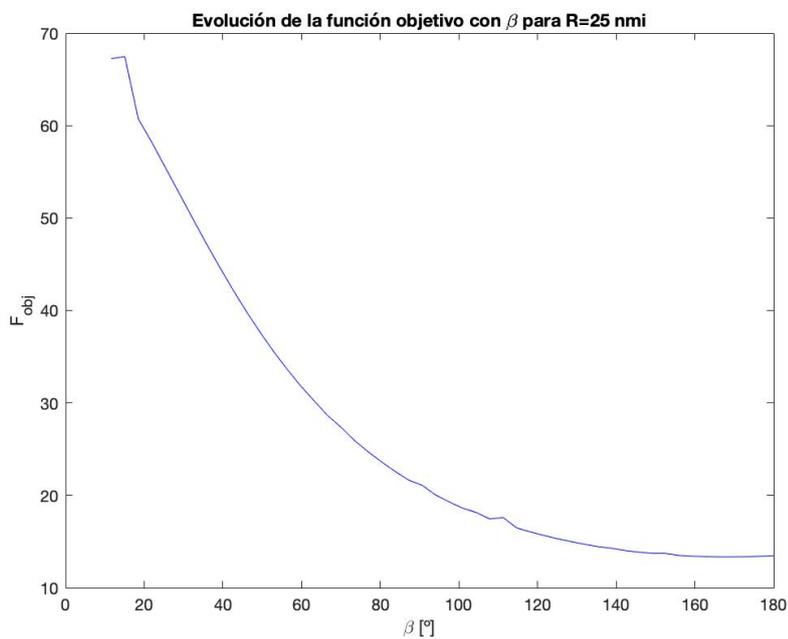


Figura 5.13 Evolución de la función objetivo con β para R constante para la maniobra de desviación horizontal en paralelo.

Como era de esperar, el parámetro r_3 no influye en la función objetivo, de acuerdo con las expresiones de m_F y t_f desarrolladas en la sección 3.2.2. Es por esto que el parámetro r_3 tomará como valor cualquiera que permita la resolución del conflicto y cumpla con las ligaduras entre los parámetros que definen la desviación.

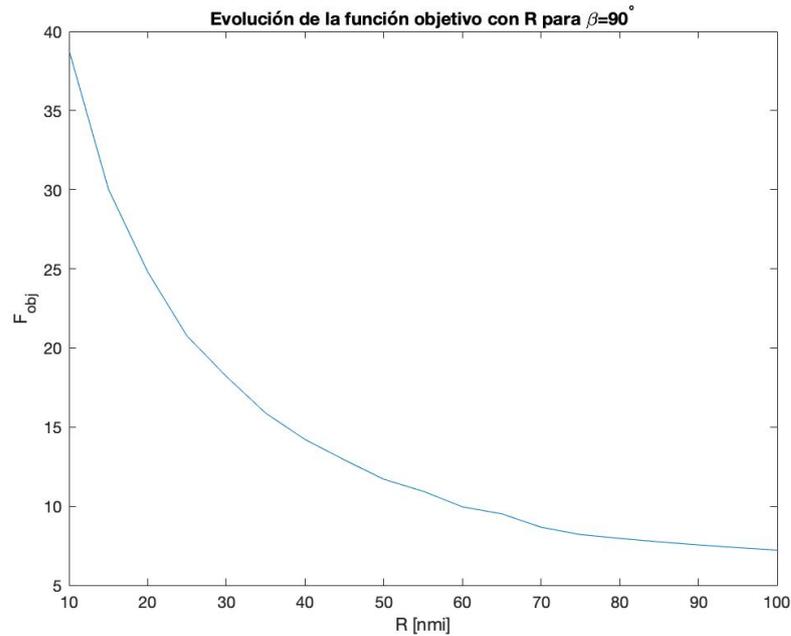


Figura 5.14 Evolución de la función objetivo con R para β constante para la maniobra de desviación horizontal en paralelo.

Para solventar esta independencia, tras resolver las maniobras en el barrido se realiza otra optimización minimizando r_3 con las variables r_1 y r_3 con la restricción de que el conflicto se siga resolviendo correctamente ($\Delta\chi_2$ y $\Delta\chi_4$ no cambiarán, por lo que no cambiará la función objetivo). De esta manera, conseguimos reducir la desviación a la menor extensión posible. Tras realizar este estudio se ha obtenido que los valores de r_3 son menores que 1.5 nmi (en torno a 10 segundos a dicho Mach y altitud) en todo momento, lo que corrobora la convergencia de esta maniobra a la maniobra de desviación horizontal. En este trabajo se considera como umbral 1.5 nmi ya que es un valor despreciable si se considerasen los periodos transitorios de los virajes que se deben realizar para los cambios de rumbo ya que en este estudio se han considerado los virajes como instantáneos. Si se analizan el resto de figuras (5.13, 5.14, 5.15 y 5.16) se observa que el comportamiento es análogo al de la maniobra anterior, teniendo un valor de r_3 algo mayor que cero únicamente para valores pequeños de β . Es por esto que estas dos maniobras (cambio de rumbo y cambio de rumbo en paralelo) se tratarán como una única a la hora de diseñar el mapa de maniobras óptimas.

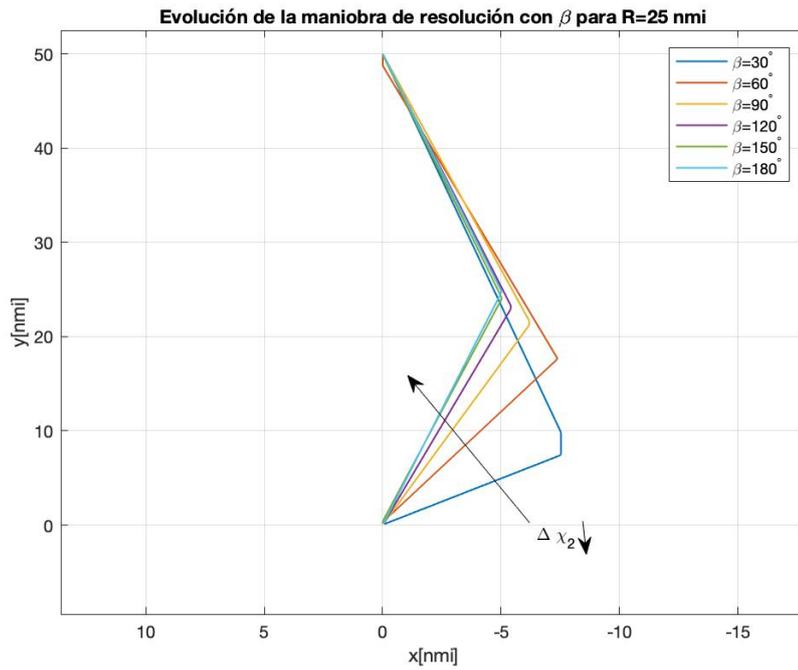


Figura 5.15 Resolución de la maniobra de desviación horizontal en paralelo para $R = 25$ nmi y diferentes valores de β .

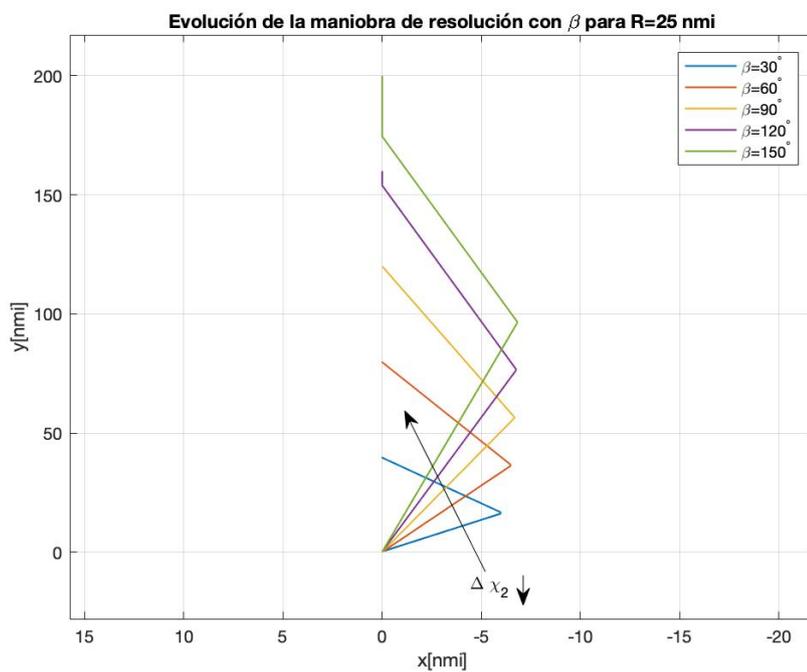


Figura 5.16 Resolución de la maniobra de desviación horizontal en paralelo para $\beta = 90^\circ$ y diferentes valores de R .

5.2.3 Resolución mediante cambio temporal de la altitud de vuelo

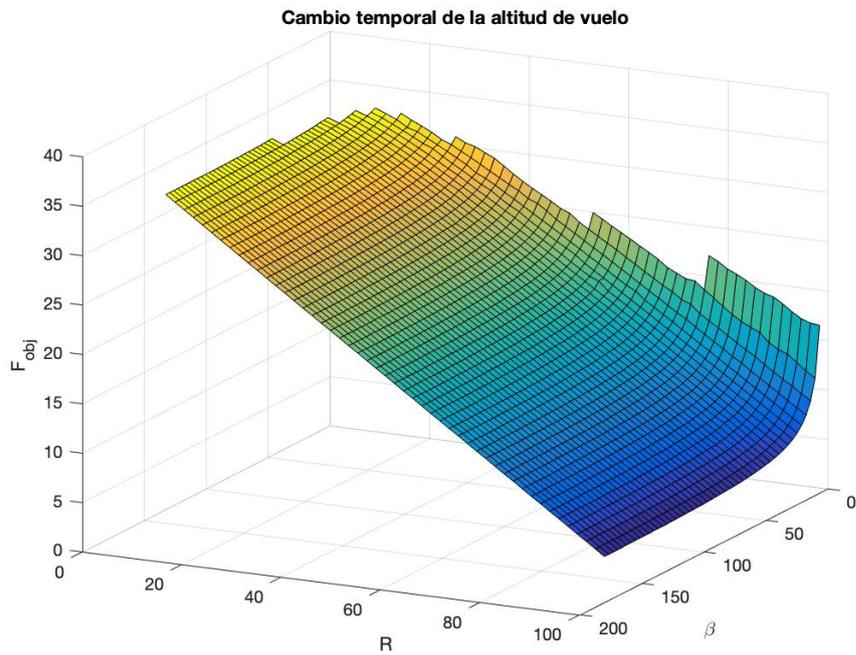


Figura 5.17 Valores de la función objetivo para una resolución mediante cambio temporal de la altitud de vuelo, 3D.

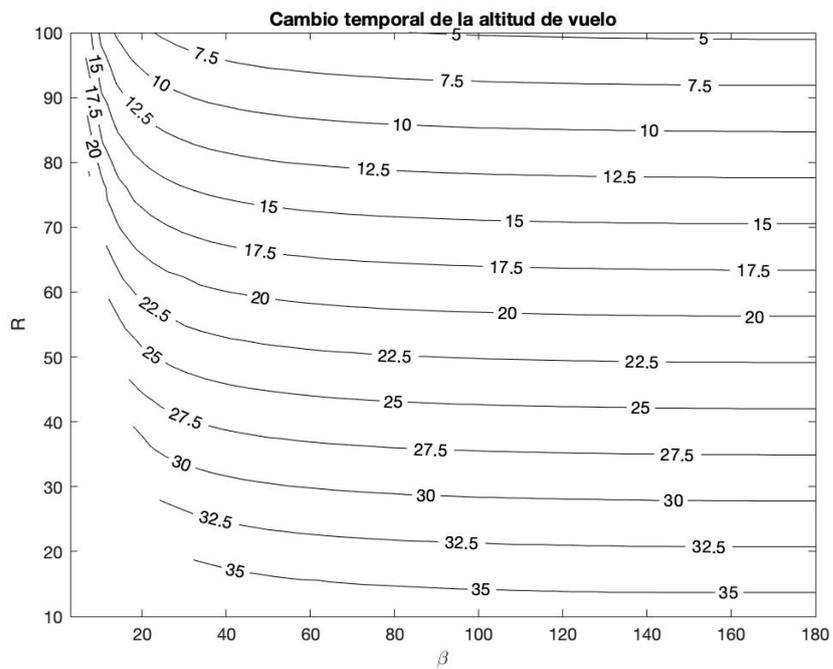


Figura 5.18 Valores de la función objetivo para una resolución mediante cambio temporal de la altitud de vuelo.

En esta trayectoria, lo primero que se observa (figuras 5.21 y 5.22), en consecuencia con lo obtenido en la sección 4.3, es que el optimizador opta siempre por realizar el cambio de altitud hacia una altitud superior, esto se debe a la influencia de la altitud en la función objetivo. Por tanto, estas son las soluciones óptimas para un conflicto a una altitud de vuelo de 34000ft , pudiendo cambiar los resultados y la toma de esta decisión si el conflicto se produce a una altitud diferente. Queda pendiente para estudios posteriores comprobar la influencia de la altitud de vuelo en la resolución óptima de esta trayectoria.

En las figuras 5.17 y 5.18, se observa que para los valores más pequeños de β del estudio, es decir, los valores de β_{min} correspondientes a cada valor de R , la trayectoria no encuentra solución, ya que no es capaz de evitar la intromisión en la zona protegida de la otra aeronave. Esta maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo no es capaz de evitar el conflicto para valores de β y R muy pequeños.

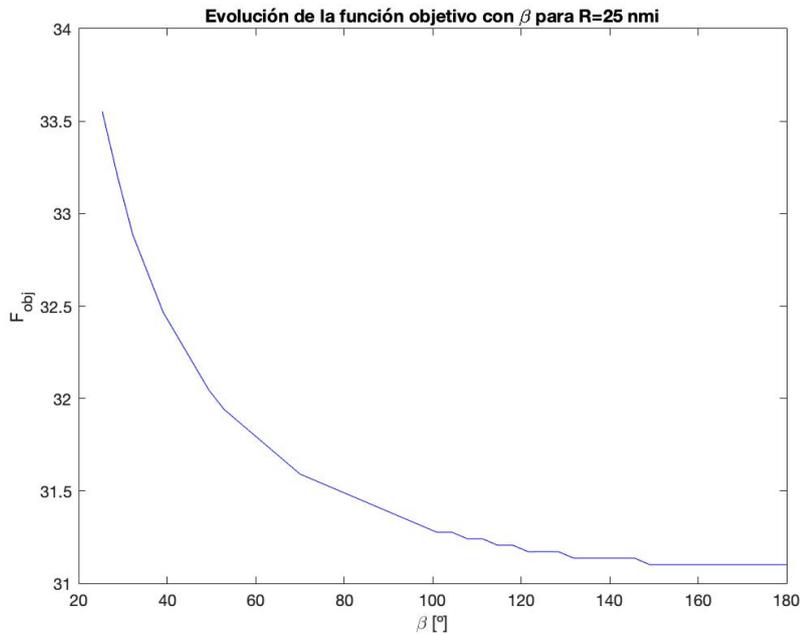


Figura 5.19 Evolución de la función objetivo con β para R constante para la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo.

Por otro lado, en las figuras 5.19 y 5.20 se observa que los valores de la función objetivo disminuyen conforme aumenta R . Además su comportamiento con β se mantiene casi constante, exceptuando valores pequeños de β , en los que aumenta el valor de la función objetivo conforme disminuye dicho parámetro del barrido. Se tiene este comportamiento porque para β pequeño más cerca se encuentran las aeronaves, por lo que deberán evitar el conflicto con más rapidez, es decir, superar mil pies de desnivel (positivo o negativo) más rápido para así no entrar en la zona protegida de la otra aeronave.

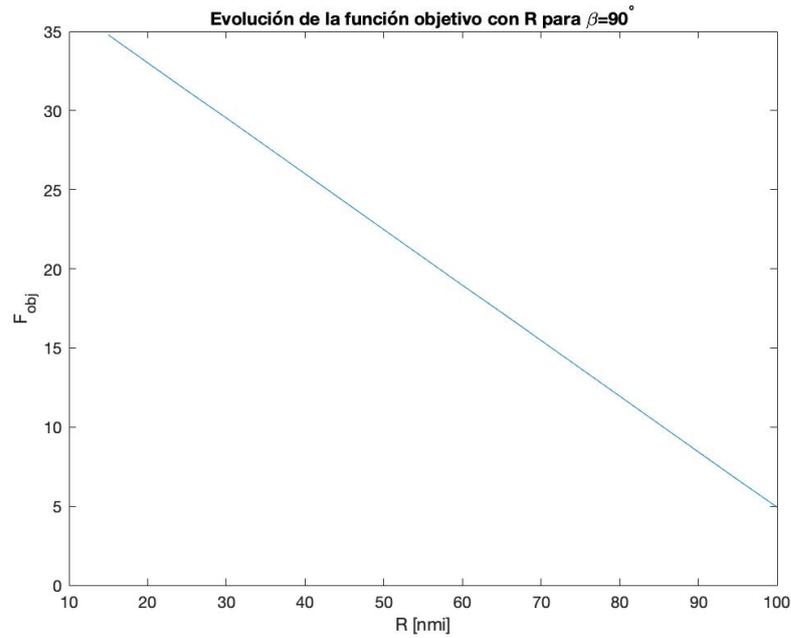


Figura 5.20 Evolución de la función objetivo con R para β constante para la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo.

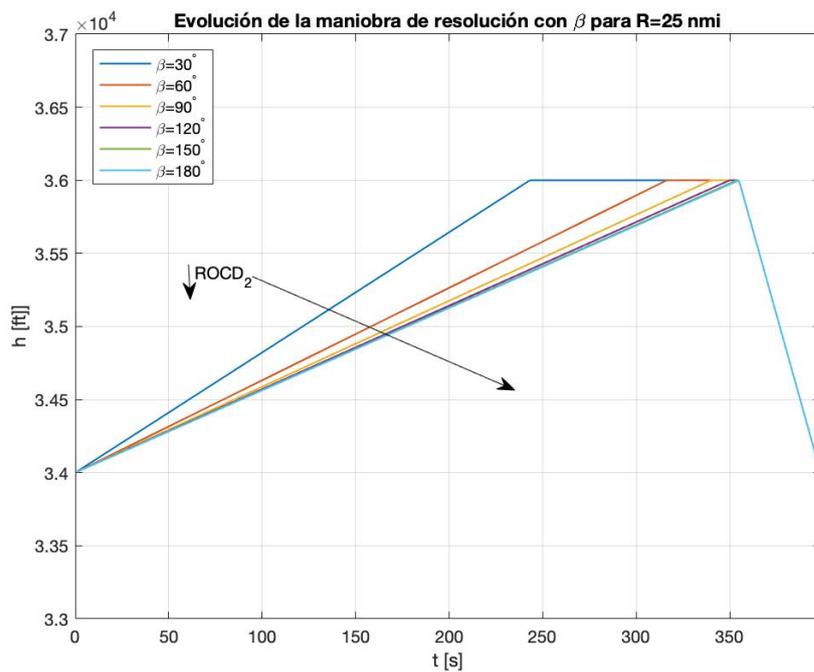


Figura 5.21 Resolución de la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo para $R = 25$ nmi y diferentes valores de β .

Analizando más en detalle las figuras 5.21 y 5.22 se observa que conforme aumentan β y R , además de disminuir la función objetivo, disminuye el valor de $ROCD_2$ (causa por la que disminuye la función objetivo). Este descenso es más pronunciado al aumentar R ya que el conflicto se empieza a resolver con mayor previsión, siendo la fase de ascenso más larga y suave conforme aumenta R . El comportamiento con β es similar pero con menos variaciones, siendo la mayor variación para valores de β pequeños, al igual que

ocurría con la función objetivo. Tras observar estas figuras y las figuras 5.19 y 5.20 queda totalmente definido el comportamiento del problema con los parámetros del barrido y la clara relación entre $ROCD_2$ ($ROCD$ en el tramo de ascenso) y la función objetivo. Por último, se observa que el parámetro r_3 es nulo o toma valores muy pequeños en la mayoría del barrido, comportándose como era esperado tras haber realizado el estudio de pesos para la maniobra de cambio de altitud en la sección 4.4 y haber elegido el valor de $w_3 = 0.55$. Este parámetro toma únicamente valores grandes para valores pequeños de β , $\beta < 50^\circ$.

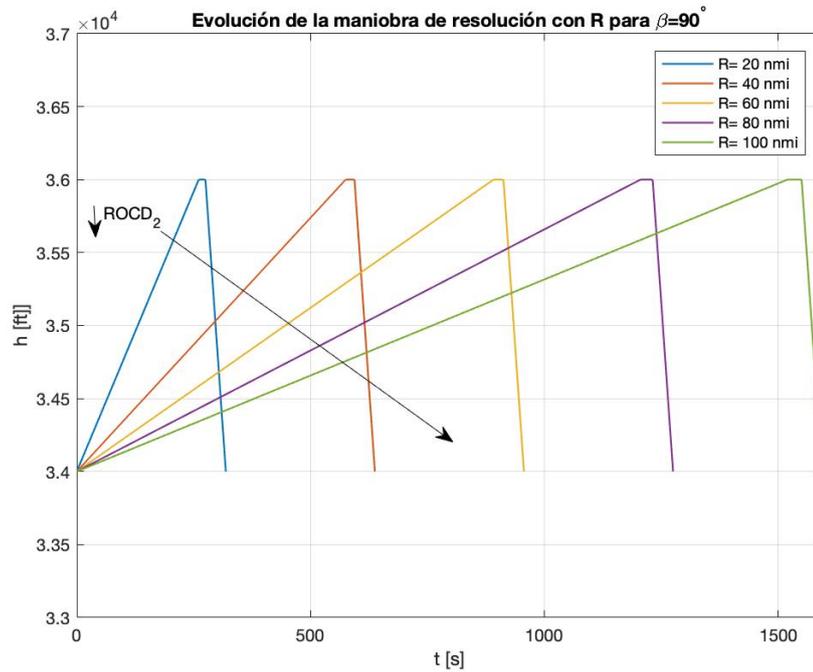


Figura 5.22 Resolución de la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo para $\beta = 90^\circ$ y diferentes valores de R .

5.2.4 Resolución mediante cambio temporal de la velocidad de vuelo

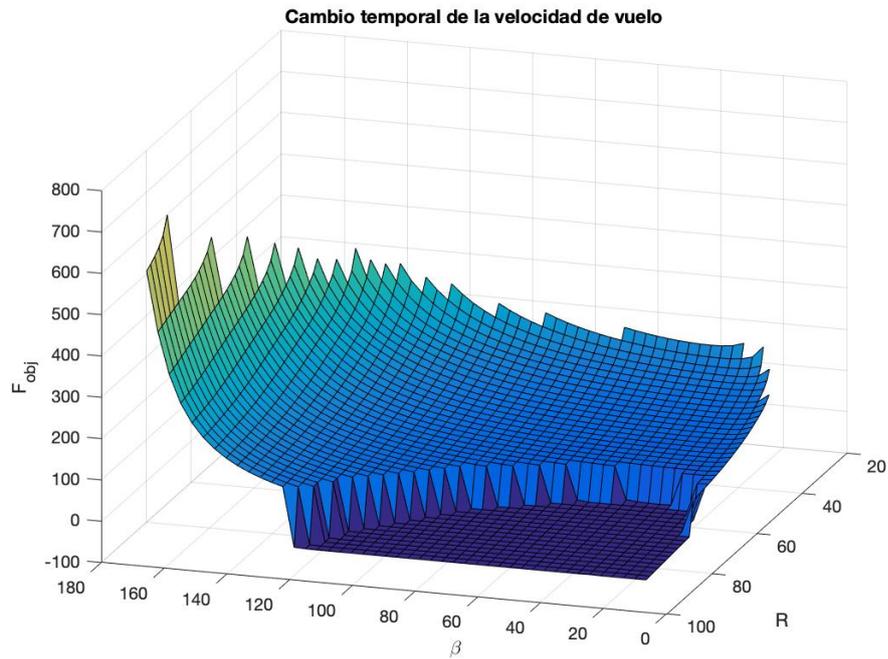


Figura 5.23 Valores de la función objetivo para una resolución mediante cambio temporal de la velocidad de vuelo, 3D. Nótese que en esta representación, para una mejor visualización, se gira la figura, teniendo los ejes β y R cambiados respecto a las representaciones anteriores..

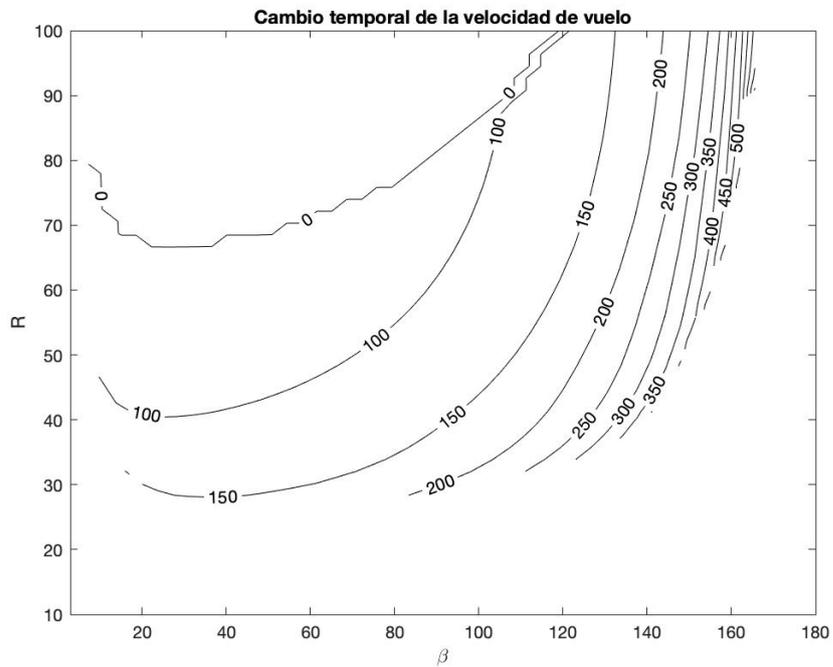


Figura 5.24 Valores de la función objetivo para una resolución mediante cambio temporal de la velocidad de vuelo.

En primer lugar, se observa que las variaciones de la función objetivo son mucho mayores en este caso que en los anteriores, llegando a tomar valores negativos en algunos casos y de varias centenas en otros. Además, en la figura 5.24 se observa que la maniobra no resuelve el conflicto en gran parte del barrido realizado, en concreto para valores de R pequeños, algo que era esperado tal y como se planteó en la sección 3.3, al ser una maniobra que aumenta lentamente la distancia de separación entre aeronaves. Por otro lado, tampoco resuelve el conflicto para valores de β cercanos a 180° , algo lógico ya que en esta maniobra el avión sigue la misma trayectoria, solo que cambia su velocidad, si las aeronaves tienen la misma dirección pero sentido contrario el conflicto seguirá existiendo. Se observa una clara tendencia descendente conforme aumenta R y disminuye β , ver las figuras 5.26 y 5.27.

En segundo lugar, se observa que existe una zona en la que la tendencia descendente con R y β cambia bruscamente, este cambio se debe a que a partir de esa zona del barrido el optimizador opta por aumentar la velocidad del avión en lugar de disminuirla. Al frenar la aeronave aumenta el tiempo de vuelo, aumentando también la masa de combustible gastada (aunque disminuya el consumo de combustible por unidad de tiempo), de esta forma la función objetivo aumenta considerablemente. Además, cuanto más fuerte ha de ser la frenada más aumenta la función objetivo ya que aumenta el cambio del régimen de motor, es por esto que la maniobra es rentable únicamente para grandes valores de R que permiten actuar a tiempo para no tener que cambiar bruscamente el régimen de motor. Al acelerar la aeronave, el cambio en el régimen de motor se mantiene, sin embargo se acorta el tiempo de vuelo, lo que provoca que la función objetivo tome valores negativos en dicha región del barrido. Si se observa la figura 5.25 se vuelve a notar que cuanto mayor es R , más óptima es la trayectoria. A priori y comparando los valores de la función objetivo con las de las maniobras de evitación anteriores, se espera que esta maniobra sea la mejor únicamente cuando se puede realizar una aceleración.

El comportamiento descrito anteriormente se puede observar en las figuras 5.28 y 5.29. Conforme aumenta R y disminuye β la maniobra pasa de resolver el conflicto frenando a acelerando, este cambio no es brusco sino progresivo, según cambian los parámetros con estas tendencias, aumenta ΔV_d . Se observa también que cuando el conflicto se resuelve frenando la aeronave, la frenada es mucho más brusca que la aceleración, ya que en la elección de estos parámetros de la trayectoria influye la ley de empuje. En la figura 5.29 no se muestran resultados para $R = 20$ nmi ya que el conflicto no se puede resolver, en acorde con lo dicho anteriormente.

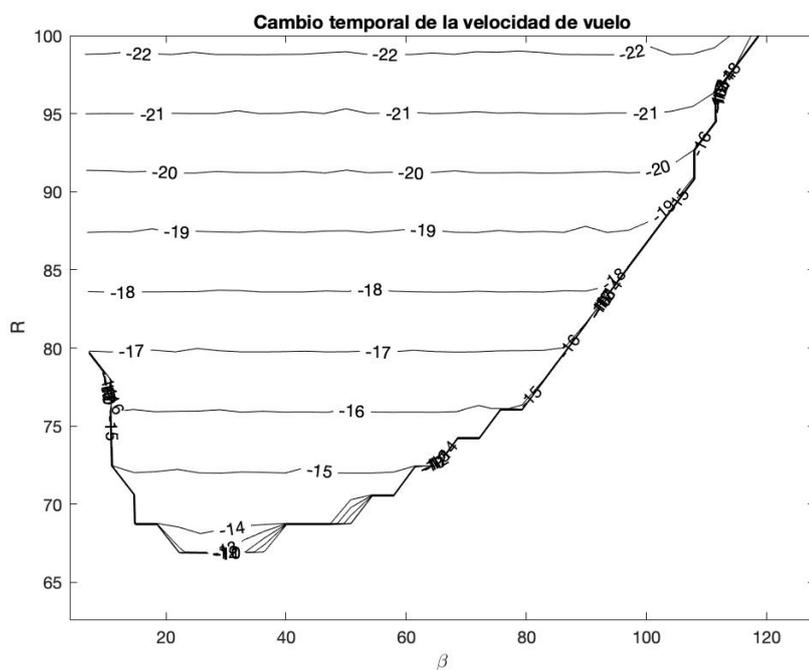


Figura 5.25 Valores de la función objetivo para una resolución mediante cambio temporal de la velocidad de vuelo, zoom en la zona en la que se realiza aceleración..

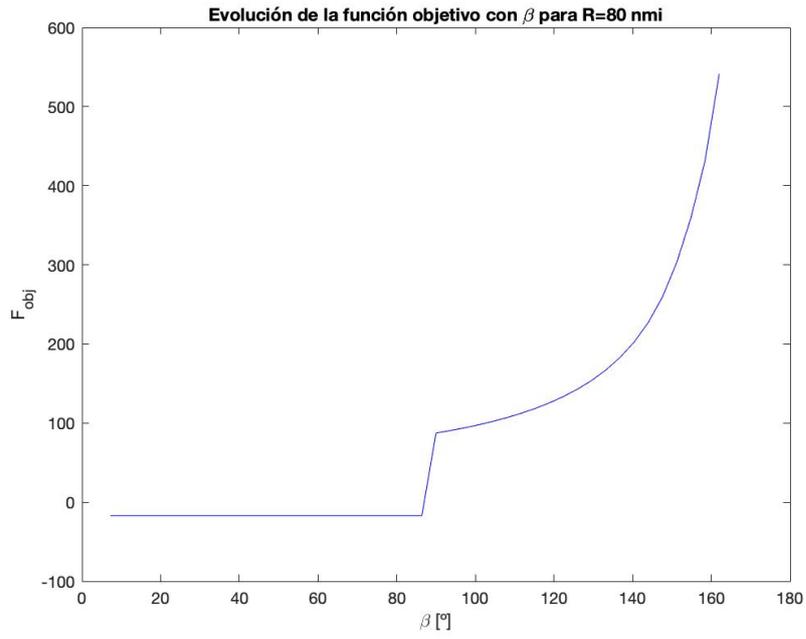


Figura 5.26 Evolución de la función objetivo con β para R constante para la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo.

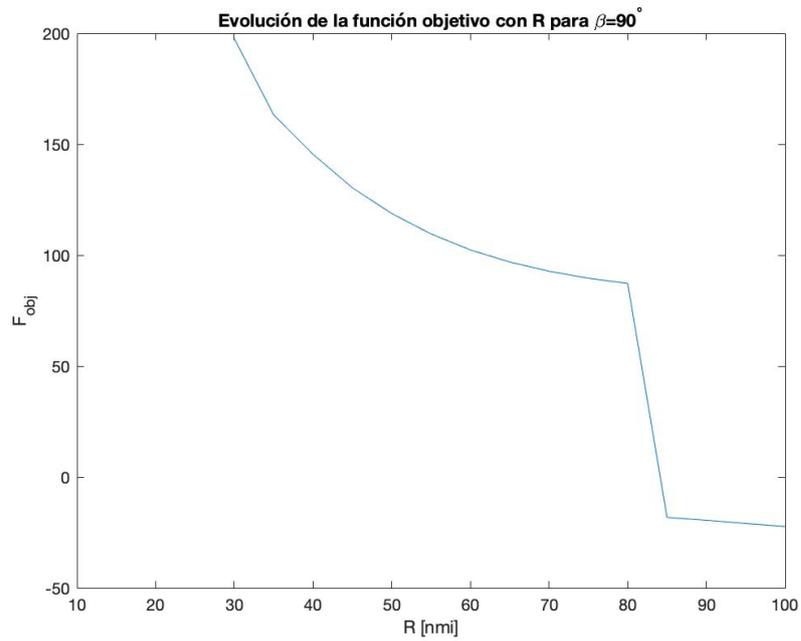


Figura 5.27 Evolución de la función objetivo con R para β constante para la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo.

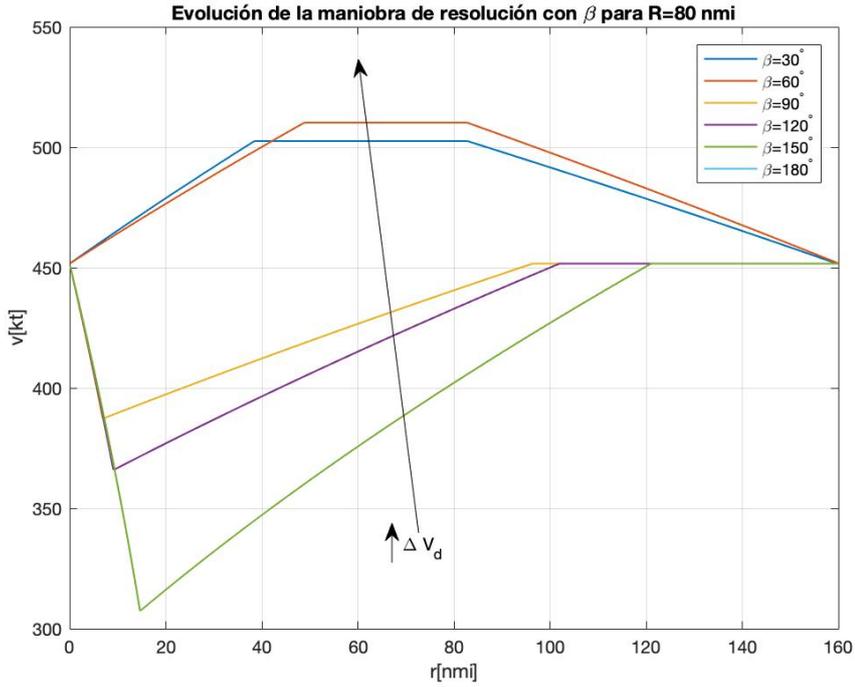


Figura 5.28 Resolución de la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo para $R = 25$ nmi y diferentes valores de β .

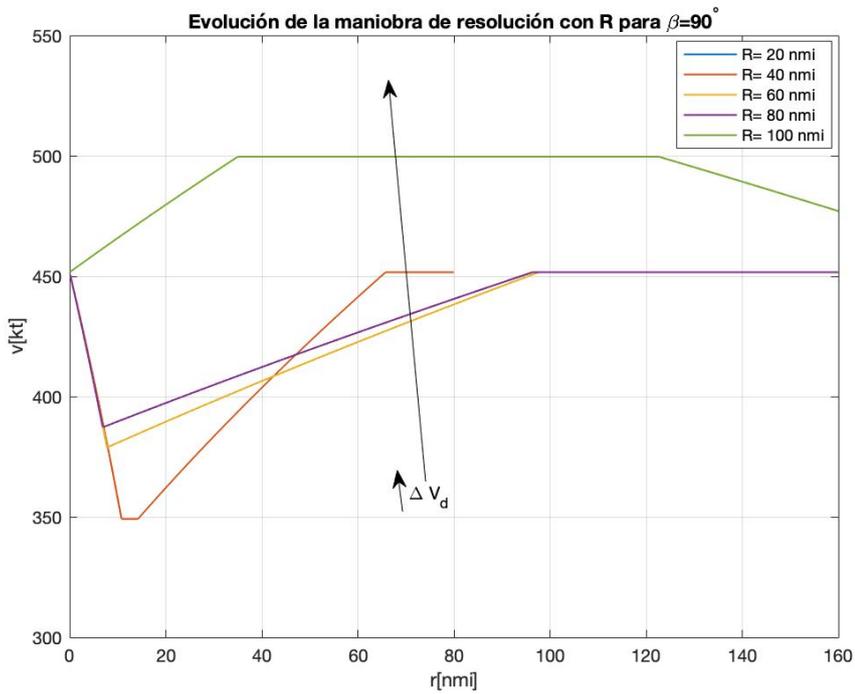


Figura 5.29 Resolución de la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo para $\beta = 90^\circ$ y diferentes valores de R .

5.3 Cálculo de la maniobra óptima en cada región del barrido

Si se comparan las maniobras de resolución entre ellas y se selecciona la que es más eficiente en cada escenario (menor valor de la función objetivo) se llega a las figuras 5.30 y 5.31, donde se observan diferentes zonas distinguidas por cambios bruscos en sus fronteras, lo que representa que en función del escenario de conflicto (definido por R y β) la maniobra más eficiente de resolución de conflicto cambia.

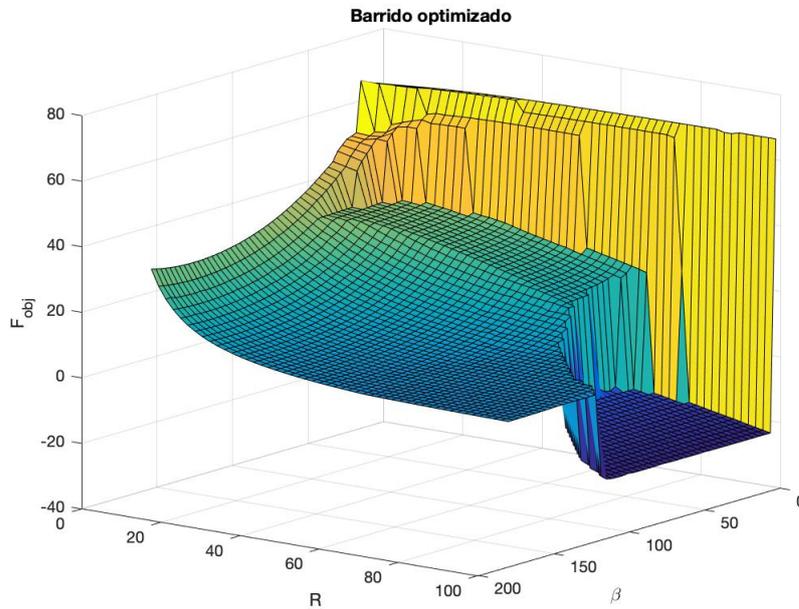


Figura 5.30 Valores de la función objetivo para la maniobra óptima en cada zona del barrido, 3D.

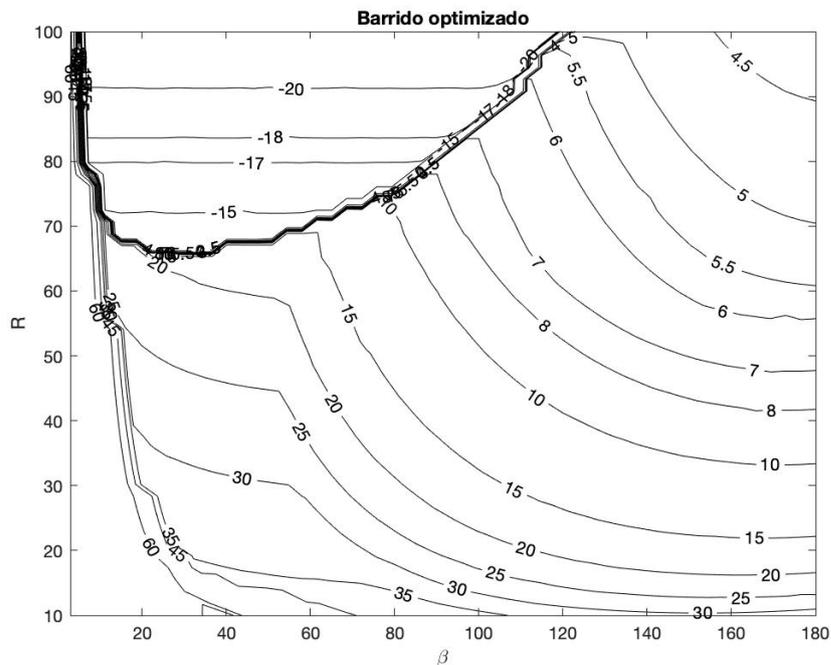


Figura 5.31 Valores de la función objetivo para la maniobra óptima en cada zona del barrido.

En la figura 5.32 se representa la maniobra óptima para cada escenario de conflicto estudiado en el barrido (representación discreta), obteniéndose los siguientes resultados:

- Para los escenarios en los que $\beta = \beta_{min}$ la resolución se debe realizar necesariamente con una maniobra de desviación horizontal (representada en rojo en la figura 5.32). Conforme disminuye R , aumenta el número de valores de $\beta > \beta_{min}$ para los cuales el conflicto se tiene que seguir resolviendo necesariamente mediante esta trayectoria.
- De la misma forma, para los valores más pequeños de R ($R < 15$ nmi) la resolución del conflicto ha de realizarse necesariamente mediante una maniobra de desviación horizontal.
- Existe una zona (representada en verde en la figura 5.32) para valores grandes de R en la que la trayectoria óptima de evitación es la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo. Como era previsible esta maniobra es óptima siempre y cuando se resuelva mediante una aceleración de la aeronave que genera valores negativos de la función objetivo.
- Existe otra zona (representada en negro en la figura 5.32) en la que la maniobra óptima es la que resuelve el conflicto mediante cambio temporal de la altitud de vuelo. Cabe recordar que esta maniobra se resolvía siempre de forma ascendente. Además existe una pequeña zona para R en torno a 100 nmi y β en torno a 130° en la que esta maniobra es la más eficiente. Sin embargo, toma valores muy similares a la maniobra de desviación horizontal que bordea esa zona, por lo que para evitar confusiones se podría optar por resolver esa zona mediante la maniobra de cambio de rumbo. Aún así da una idea sobre qué ocurrirá para escenarios con mayores valores de R que los estudiados.
- El resto del mapa de conflictos se resuelve siempre mediante desviaciones horizontales de la trayectoria, siendo esta la maniobra que aporta mejor eficiencia para grandes valores de β .

Cabe destacar que el conflicto es evitable en todos los escenarios estudiados en el barrido.

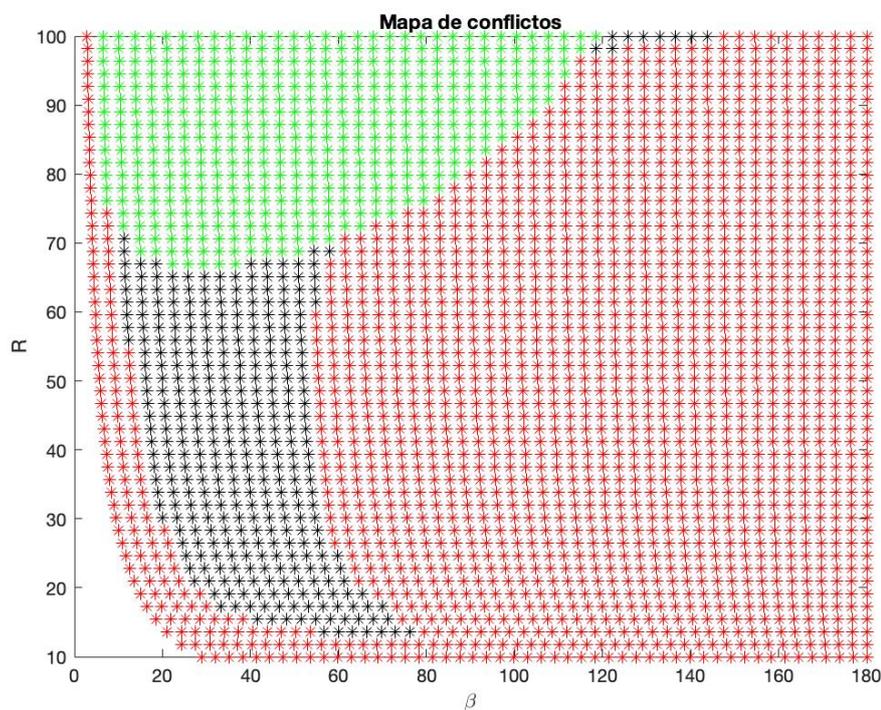


Figura 5.32 Mapa que representa las maniobras más eficientes en función del escenario de conflicto.

Si se identifican las zonas en las que es óptima cada maniobra de evitación mediante el mapa de conflictos discreto anterior, se llega a la siguiente imagen:

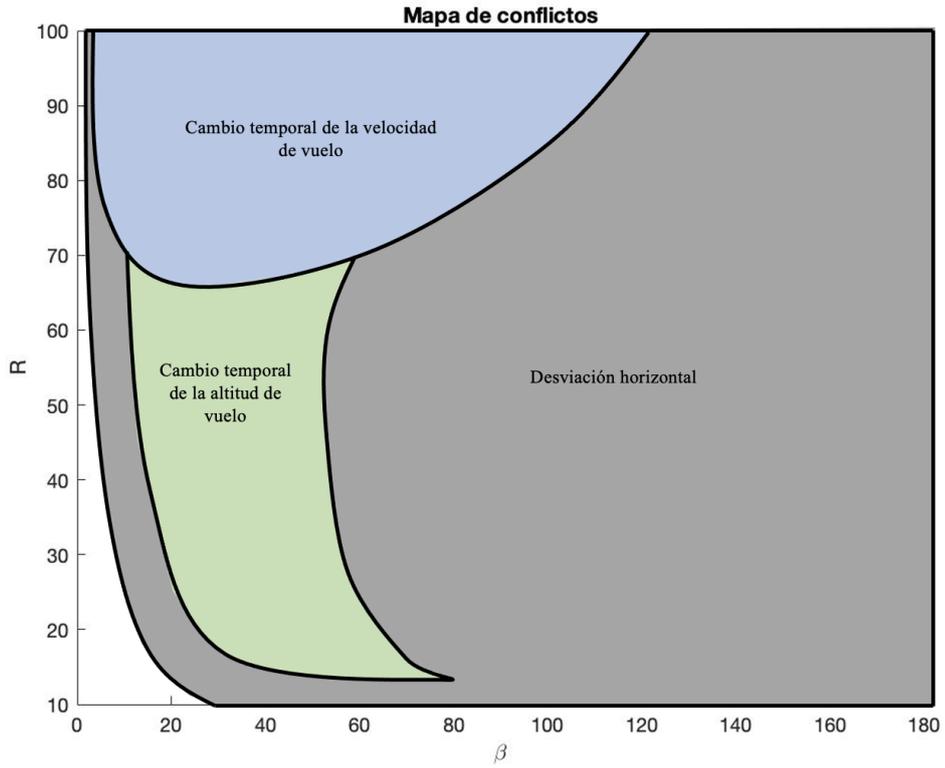


Figura 5.33 Mapa de resolución de conflictos.

6 Conclusiones y futuras mejoras

En este último capítulo se presentan las conclusiones del estudio realizado en los capítulos anteriores, analizando el comportamiento del modelo desarrollado en cada uno de los escenarios de conflicto estudiados.

A lo largo de este documento se han analizado cuatro maniobras diferentes de evitación de conflictos entre aeronaves, descomponiéndolas en distintos segmentos de vuelo, obteniéndose expresiones analíticas en función de los parámetros de la trayectoria, en particular para el consumo de combustible y para el tiempo de vuelo.

Posteriormente, se ha formulado un problema de optimización a fin de obtener la resolución con el menor impacto en el vuelo mediante el incremento en el tiempo de vuelo, el incremento de la masa de combustible consumida y el cambio del régimen del motor.

Por último, se ha estudiado una serie de escenarios de conflictos, en los que las dos aeronaves son del mismo modelo (AIRBUS A320), vuelan a la misma velocidad y altitud y se encuentran a la misma distancia del punto de conflicto. El ángulo que forman las trayectorias de ambas aeronaves y la distancia de las mismas al punto de conflicto han sido los parámetros elegidos para realizar este estudio. Las principales ideas obtenidas en el estudio se disponen a continuación:

En primer lugar, es destacable que todas las maniobras de resolución tienen eficiencias muy diferentes en función del escenario de conflicto en el que se plantean, siendo la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo la que más varía su eficiencia. De la misma forma, no todas las trayectorias son capaces de resolver todos los escenarios estudiados en el barrido. Mientras que las desviaciones horizontales son más versátiles y capaces de aumentar la distancia de separación entre aeronaves más rápido, lo que les permite resolver la totalidad de los escenarios, la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo necesita mucha más previsión para ser capaz de resolver el conflicto (no resuelve los escenarios en los que R es pequeño, tampoco aquellos en los que las aeronaves se acercan frontalmente, β cercano a 180°). La maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo es capaz de resolver la mayoría de los escenarios de conflicto planteados, siendo incapaz únicamente para escenarios en los que β y R toman valores pequeños, por lo que su versatilidad se encuentra entre las de las dos anteriores.

En segundo lugar, es destacable que se ha realizado el estudio para cuatro maniobras de evitación diferentes. Sin embargo se ha llegado a la conclusión de que la maniobra de desviación horizontal en paralelo acaba comportándose como la maniobra de desviación horizontal.

Por último, se ha obtenido que la maniobra de desviación horizontal es la más eficiente en la mayoría de escenarios considerados en el barrido, siendo la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo adecuada para valores aproximados de $\beta < 80^\circ$ y la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo eficiente para $R > 70$ nmi y $\beta < 120^\circ$ aproximadamente, como se representó en la figura 5.32.

Respecto a las futuras mejoras, por un lado hay ciertos aspectos que se pueden mejorar sobre el estudio ya realizado y por otro lado se puede seguir trabajando en aspectos que han quedado pendientes en este estudio.

Por un lado, los modelos utilizados (consumo, aerodinámico y de empuje) son sencillos, por lo que sería recomendable hacer uso de modelos más realistas que aporten mayor firmeza a los resultados finales. De la misma forma, se ha comprobado que un buen modelado de la función objetivo es imprescindible si se quieren obtener unos resultados precisos, por lo que cuanto mejor detalle dicha función los costes de vuelo de las aeronaves, más realista será la solución al problema planteado. Hay que intentar modelar mejor el peso asociado al término del empuje en la función objetivo, por ejemplo, intentando buscar un coste económico

de operar el motor fuera de su régimen nominal, de modo que pueda compararse, entre otros, con el coste de combustible. Por otro lado, se ha llegado a la conclusión de que el comportamiento de la resolución mediante cambio temporal de la altitud de vuelo depende considerablemente de la altitud a la que vuelan las aeronaves. En este análisis se ha considerado que ambas aeronaves vuelan a 34000 ft, por lo que sería interesante estudiar las situaciones de tráfico a otras altitudes de vuelo para observar su influencia en la resolución del conflicto.

Queda pendiente para futuros estudios incluir en el análisis el efecto del viento, los tramos de los virajes que hasta ahora han sido considerados instantáneos, la incertidumbre del modelo (tanto de la posición de la aeronaves como del viento si es que se incluye), la consideración de conflictos múltiples... Además se puede realizar un estudio en el que se desvíen ambas aeronaves de la trayectoria inicial. Una vez se realicen mejoras como las anteriores mencionadas se podrá desarrollar una herramienta que proponga automáticamente al controlador la mejor maniobra de evitación de conflictos en función del escenario de conflicto que se tenga.

Índice de Figuras

1.1	Tasa de sucesos de Navegación Aérea por categoría (2016-17) [1]	1
2.1	Proceso de detección y resolución de conflictos, extraído de [2]	3
2.2	Conflicto de dos aeronaves bidimensional, vista cenital (las aeronaves vuelan a la misma altitud), extraído de [3]	4
2.3	Conflicto de dos aeronaves tridimensional (las aeronaves vuelan a diferente altitud y su trayectoria tiene una componente vertical), extraído de [3]	5
2.4	Existencia o no de conflicto mediante la expresión $\delta(t)$	5
3.1	Escenario general de conflicto	10
3.2	Trayectoria rectilínea, vista cenital.	13
3.3	Trayectoria con desviación horizontal, vista cenital.	14
3.4	Trayectoria con desviación horizontal en paralelo, vista cenital	16
3.5	Trayectoria con cambio de altitud, vista cenital	18
3.6	Trayectoria con cambio de altitud, perfil de altitud	19
3.7	Trayectoria con cambio temporal de la velocidad de vuelo, vista cenital. [6]	21
3.8	Trayectoria con cambio de velocidad, perfil de velocidades	22
3.9	Vista cenital de las trayectorias de dos aeronaves	25
3.10	Detección de conflicto mediante la función $\delta(t)$	26
3.11	Existencia de conflicto, vista cenital	27
3.12	Evitación mediante desviación horizontal, vista cenital	28
3.13	$\delta(t)$ tras la resolución mediante desviación horizontal	28
3.14	Evitación mediante desviación horizontal en paralelo, vista cenital	29
3.15	$\delta(t)$ tras la resolución mediante desviación horizontal en paralelo	30
3.16	Evitación mediante cambio temporal de la altitud de vuelo, perfil de altitudes	30
3.17	$\delta(t)$ tras la resolución mediante cambio temporal de la altitud de vuelo	31
3.18	Evitación mediante cambio temporal de la velocidad de vuelo, perfil de velocidades	32
3.19	$\delta(t)$ tras la resolución mediante cambio temporal de la velocidad de vuelo	32
4.1	Tipos de mínimos en la función objetivo	40
4.2	Evolución de la función objetivo con el peso del término asociado al empuje w_3 para la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo en subida	45
4.3	Evolución de la función objetivo con el peso del término asociado al empuje w_3 para la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo en bajada	45
4.4	Evolución de la maniobra de resolución con el peso del término asociado al empuje w_3 para la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo en subida	46
4.5	Evolución de la maniobra de resolución con el peso del término asociado al empuje w_3 para la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo en bajada	46
4.6	Evolución del término $\Delta\bar{T}$ con w_3 frente a DOC para una maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo aumentando la misma	47

4.7	Evolución del término $\Delta\bar{T}$ con w_3 frente a DOC para una maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo disminuyendo la misma	47
4.8	Evolución de la función objetivo con el peso del término asociado al empuje w_3 para la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo	49
4.9	Evolución de la maniobra de resolución con el peso del término asociado al empuje w_3 para la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo	49
4.10	Evolución del término $\Delta\bar{T}$ con w_3 frente a DOC para una maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo	50
5.1	Representación de los parámetros que definen el barrido	51
5.2	Situación límite para mantener las distancias mínimas de separación en la condición inicial	52
5.3	Región del espacio en la que se realiza el barrido	53
5.4	Valores de la función objetivo para una resolución mediante desviación horizontal, 3D	54
5.5	Valores de la función objetivo para una resolución mediante desviación horizontal	54
5.6	Evolución de la función objetivo con β para R constante para la maniobra de desviación horizontal	55
5.7	Evolución de la función objetivo con R para β constante para la maniobra de desviación horizontal	55
5.8	Resolución de la maniobra de desviación horizontal para $\beta = 90^\circ$ y diferentes valores de R	56
5.9	Resolución de la maniobra de cambio de rumbo para $R = 25$ nmi y diferentes valores de β . Nótese que los puntos inicial y final no coinciden con los de cada uno de los escenarios estudiados, sino que se han superpuesto todas las trayectorias con mismos puntos inicial y final para que se puedan observar mejor los cambios en la maniobra de resolución. Esto se realiza de la misma forma en las siguientes figuras que representan los cambios de la maniobra de resolución	57
5.10	Valores de la función objetivo para una resolución mediante desviación horizontal en paralelo, 3D	58
5.11	Valores de la función objetivo para una resolución mediante desviación horizontal en paralelo	58
5.12	Independencia de la función objetivo con el parámetro r_3	59
5.13	Evolución de la función objetivo con β para R constante para la maniobra de desviación horizontal en paralelo	59
5.14	Evolución de la función objetivo con R para β constante para la maniobra de desviación horizontal en paralelo	60
5.15	Resolución de la maniobra de desviación horizontal en paralelo para $R = 25$ nmi y diferentes valores de β	61
5.16	Resolución de la maniobra de desviación horizontal en paralelo para $\beta = 90^\circ$ y diferentes valores de R	61
5.17	Valores de la función objetivo para una resolución mediante cambio temporal de la altitud de vuelo, 3D	62
5.18	Valores de la función objetivo para una resolución mediante cambio temporal de la altitud de vuelo	62
5.19	Evolución de la función objetivo con β para R constante para la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo	63
5.20	Evolución de la función objetivo con R para β constante para la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo	64
5.21	Resolución de la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo para $R = 25$ nmi y diferentes valores de β	64
5.22	Resolución de la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo para $\beta = 90^\circ$ y diferentes valores de R	65
5.23	Valores de la función objetivo para una resolución mediante cambio temporal de la velocidad de vuelo, 3D. Nótese que en esta representación, para una mejor visualización, se gira la figura, teniendo los ejes β y R cambiados respecto a las representaciones anteriores.	66

5.24	Valores de la función objetivo para una resolución mediante cambio temporal de la velocidad de vuelo	66
5.25	Valores de la función objetivo para una resolución mediante cambio temporal de la velocidad de vuelo, zoom en la zona en la que se realiza aceleración.	67
5.26	Evolución de la función objetivo con β para R constante para la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo	68
5.27	Evolución de la función objetivo con R para β constante para la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo	68
5.28	Resolución de la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo para $R = 25$ nmi y diferentes valores de β	69
5.29	Resolución de la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo para $\beta = 90^\circ$ y diferentes valores de R	69
5.30	Valores de la función objetivo para la maniobra óptima en cada zona del barrido, 3D	70
5.31	Valores de la función objetivo para la maniobra óptima en cada zona del barrido	70
5.32	Mapa que representa las maniobras más eficientes en función del escenario de conflicto	71
5.33	Mapa de resolución de conflictos	72
1	Evolución de las magnitudes en la atmósfera estándar internacional, ISA	83

Índice de Tablas

3.1	Condiciones iniciales del escenario	24
3.2	Valores característicos del A320, extraídos de [5]	25
3.3	Parámetros de la trayectoria del avión 2: Desviación horizontal. Incrementos de tiempo, masa y cambio del régimen de motor	29
3.4	Parámetros de la trayectoria del avión 2: Desviación horizontal en paralelo. Incrementos de tiempo, masa y cambio del régimen de motor	29
3.5	Parámetros de la trayectoria del avión 2: Cambio temporal de la altitud de vuelo. Incrementos de tiempo, masa y cambio del régimen de motor	31
3.6	Parámetros de la trayectoria del avión 2: Cambio temporal de la velocidad de vuelo. Incrementos de tiempo, masa y cambio del régimen de motor	33
4.1	Parámetros de la trayectoria optimizada del avión 2: Desviación horizontal	41
4.2	Resultados de la trayectoria optimizada del avión 2: Desviación horizontal	41
4.3	Parámetros de la trayectoria optimizada del avión 2: Desviación horizontal en paralelo	41
4.4	Resultados de la trayectoria optimizada del avión 2: Desviación horizontal en paralelo	42
4.5	Parámetros de la trayectoria optimizada del avión 2: Cambio temporal de la altitud de vuelo	42
4.6	Resultados de la trayectoria optimizada del avión 2: Cambio temporal de la altitud de vuelo	42
4.7	Parámetros de la trayectoria optimizada del avión 2: Cambio temporal de la velocidad de vuelo	42
4.8	Resultados de la trayectoria optimizada del avión 2: Cambio temporal de la velocidad de vuelo	42
4.9	Primer disparo: Evolución de la función objetivo y sus términos con el peso del término asociado al empuje w_3 para la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo	43
4.10	Primer disparo: Evolución de la función objetivo y sus términos con el peso del término asociado al empuje w_3 para la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo	43
4.11	Segundo disparo: Evolución de la función objetivo y sus términos con el peso del término asociado al empuje w_3 para la maniobra de cambio temporal de la altitud de vuelo	44
4.12	Segundo disparo: Evolución de la función objetivo y sus términos con el peso del término asociado al empuje w_3 para la maniobra de cambio temporal de la velocidad de vuelo	48

Bibliografía

- [1] AESA. Memoria anual ceanita 2017. *Ministerio de Fomento*, 2017.
- [2] James K. Kuchar and Lee C. Yang. A review of conflict detection and resolution modeling methods. *IEEE*, 2000.
- [3] Eulalia Hernández Romero. *Probabilistic Aircraft Conflict Detection and Resolution under the Effects of Weather Uncertainty*. Dpto. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos, Universidad de Sevilla, July, 2020.
- [4] Damián Rivas Rivas. *Mecánica del Vuelo I*. Universidad de Sevilla, 2012.
- [5] Eurocontrol Experimental Centre. User manual for the base of aircraft data 3.13. *Eurocontrol*, 2004.
- [6] H. Erzberger, Todd A. Lauderdale, and Yung-Cheng Chu. Automated conflict resolution, arrival management and weather avoidance for atm. *Institution of mechanical engineers*, 2011.
- [7] MathWorks. Función fmincon. <https://es.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html>. Online; access 13 de Abril 2021.
- [8] MathWorks. Algoritmos de optimización no lineales restringidos. <https://es.mathworks.com/help/optim/ug/constrained-nonlinear-optimization-algorithms.html#brnox01>. Online; access 13 de Abril 2021.
- [9] Eulalia Hernández-Romero, Alfonso Valenzuela, and Damián Rivas. A probabilistic approach to measure aircraft conflict severity considering wind forecast uncertainty. *Aerospace Science and Technology*, 2019.

Apéndice 1: International Standard Atmosphere, (ISA)

El modelo de atmósfera proporciona la temperatura, la presión y la densidad del aire en función de la altitud. Este modelo distingue diferentes comportamientos para la troposfera y para la estratosfera [4].

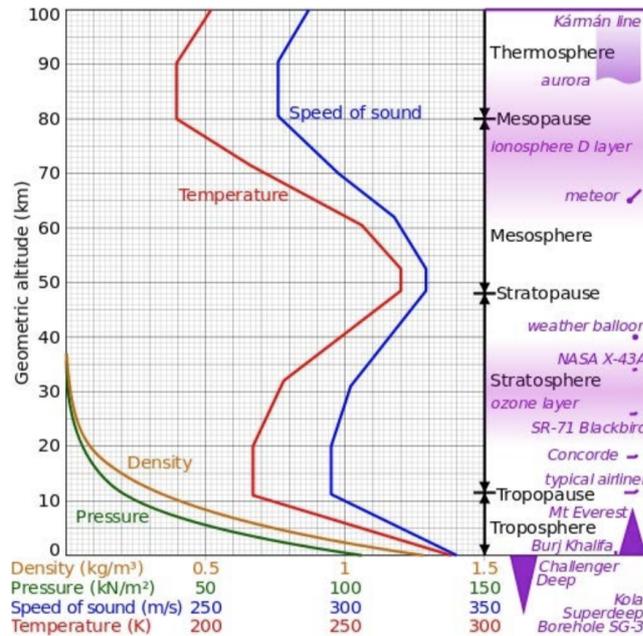


Figura 1 Evolución de las magnitudes en la atmósfera estándar internacional, ISA.

- En la troposfera, $0 < h < h_{11}$, desde la superficie terrestre hasta la tropopausa, donde la altitud de la tropopausa es $h_{11} = 11000m$:

$$\Theta = \Theta_0 - \alpha_T h$$

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\alpha_T h}{\Theta_0} \right)^{\frac{g_0}{R_a \alpha_T}}$$

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\alpha_T h}{\Theta_0} \right)^{\frac{g_0}{R_a \alpha_T} - 1}$$

Donde $\Theta_0 = 288.15K$, $p_0 = 1.01325 \cdot 10^5 N/m^2$, $\rho_0 = 1.225 kg/m^3$, $\alpha_T = 6.5 \cdot 10^{-3} K/m$ y $R_a = 287.05 J/(kgK)$ es la constante del aire.

- En la estratosfera, $h > h_{11}$:

$$\Theta = \Theta_{11}$$

$$p = p_{11} \exp\left(-\frac{g_0(h-h_{11})}{R_a \Theta_{11}}\right)$$

$$\rho = \rho_{11} \exp\left(-\frac{g_0(h-h_{11})}{R_a \Theta_{11}}\right)$$

Donde $\Theta_{11} = 216.65K$, $p_{11} = 0.22632 \cdot 10^5 N/m^2$ y $\rho_{11} = 0.3639 kg/m^3$.

Con esto, queda totalmente definido el modelo propulsivo de la aeronave que va a realizar las siguientes trayectorias. La velocidad puede venir dada a partir del número de Mach, magnitud adimensional que relaciona la velocidad de la aeronave con la velocidad del sonido en el medio en el que vuela la aeronave.

$$M = \frac{V}{a_s(h)} = \frac{V}{\sqrt{\gamma R_a \Theta}}$$

Apéndice 2: Consumos promedios en segmentos con variación de consumo

En los segmentos de vuelo en los que el consumo cambia con el tiempo, en lugar de integrar el consumo a lo largo del segmento, se ha optado por utilizar un consumo promedio en todo el segmento.

$$\int_{t_0}^{t_1} \bar{c} \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} c(t) \cdot dt$$

De forma que el consumo promedio se puede despejar como:

$$\bar{c} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} c(t) \cdot dt}{t_1 - t_0}$$

siendo c el consumo en cada instante y t_0 y t_1 los instantes iniciales y finales del segmento respectivamente. Si se desarrolla este concepto para segmentos con velocidad o altitud variable, aplicando la definición de consumo que se ha dado en la sección 3.1 se pueden realizar los siguientes razonamientos.

- **Segmentos con cambio de la altitud de vuelo**

Tomando la relación entre la altitud y el tiempo dada por

$$\frac{dh}{dt} = ROCD$$

e introduciendo esto en la expresión que define el consumo promedio;

$$\int_{h_0}^{h_0+\Delta h} \bar{c} \cdot dh = \int_{h_0}^{h_0+\Delta h} c \cdot dh$$

$$\bar{c} = \frac{\int_{h_0}^{h_0+\Delta h} c \cdot dh}{\Delta h}$$

Para desarrollar la integral del numerador es importante tener en cuenta el modelo de atmósfera.

$$\int_{h_0}^{h_0+\Delta h} c \cdot dh = \int_{h_0}^{h_0+\Delta h} C_{f1} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}}\right) \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S_{ref} \left(C_{D0} + k \left(\frac{2m_0 g_0}{\rho V^2 S_{ref}}\right)^2\right) + m_0 g_0 \frac{ROCD}{V}\right) dh$$

$$\rho(h) = \begin{cases} \rho_0 \left(1 - \frac{\alpha_T h}{\Theta_0}\right)^{\frac{g_0}{R_a \alpha_T} - 1} & \text{si } h \leq h_{11} \\ \rho_{11} \exp\left(-\frac{g_0(h-h_{11})}{R_a \Theta_{11}}\right) & \text{si } h > h_{11} \end{cases}$$

Por lo que la integral se tendrá que dividir en dos si la aeronave vuela en la troposfera y en la estratosfera en el segmento de cambio de altitud. Con este razonamiento se pueden distinguir distintas integrales:

1. La aeronave vuela siempre en la troposfera. Es decir $h_0 + \Delta h \leq h_{11}$ y $h_0 \leq h_{11}$.

$$\bar{c} = \frac{\int_{h_0}^{h_0+\Delta h} c \cdot dh}{\Delta h} = \frac{C_{f1}}{\Delta h} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}} \right) \cdot \left(\frac{ROCDm_0g_0\Delta h}{V} + \frac{V^2S_{ref}C_{D_0}\rho_0R_a\Theta_0}{2g_0} \left(\left(1 - \frac{\alpha_t h_0}{\Theta_0} \right)^{\frac{g_0}{R_a\alpha_t}} - \left(1 - \frac{\alpha_t (h_0 + \Delta h)}{\Theta_0} \right)^{\frac{g_0}{R_a\alpha_t}} \right) + \frac{2m_0^2g_0^2k\Theta_0R_a}{V^2S_{ref}\rho_0(2\alpha_tR_a - g_0)} \left(\left(1 - \frac{\alpha_t h_0}{\Theta_0} \right)^{2 - \frac{g_0}{R_a\alpha_t}} - \left(1 - \frac{\alpha_t (h_0 + \Delta h)}{\Theta_0} \right)^{2 - \frac{g_0}{R_a\alpha_t}} \right) \right)$$

2. La aeronave vuelva parte del segmento en la troposfera y otra parte en la estratosfera. Solo se cumple una de las siguientes condiciones:

- $h_0 \leq h_{11}$ pero $h_0 + \Delta h > h_{11}$ si el segmento es de altitud ascendente, necesariamente $\Delta h > 0$.

$$\int_{h_0}^{h_0+\Delta h} c \cdot dh = \int_{h_0}^{h_{11}} c \cdot dh + \int_{h_{11}}^{h_0+\Delta h} c \cdot dh$$

Donde la densidad tomará el modelo de la troposfera en la primera integral y el de la estratosfera en la segunda.

$$\bar{c} = \frac{C_{f1}}{\Delta h} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}} \right) \cdot \left[\left(\frac{ROCDm_0g_0\Delta h}{V} + \frac{V^2S_{ref}C_{D_0}\rho_0R_a\Theta_0}{2g_0} \left(\left(1 - \frac{\alpha_t h_0}{\Theta_0} \right)^{\frac{g_0}{R_a\alpha_t}} - \left(1 - \frac{\alpha_t h_{11}}{\Theta_0} \right)^{\frac{g_0}{R_a\alpha_t}} \right) + \frac{2m_0^2g_0^2k\Theta_0R_a}{V^2S_{ref}\rho_0(2\alpha_tR_a - g_0)} \left(\left(1 - \frac{\alpha_t h_0}{\Theta_0} \right)^{2 - \frac{g_0}{R_a\alpha_t}} - \left(1 - \frac{\alpha_t h_{11}}{\Theta_0} \right)^{2 - \frac{g_0}{R_a\alpha_t}} \right) \right) + \left(\frac{V^2S_{ref}C_{D_0}\rho_{11}R_a\Theta_{11}}{2g_0} \left(1 - e^{-\frac{g}{R_a\Theta_{11}}(h_0+\Delta h-h_{11})} \right) + \frac{2m_0^2g_0k\Theta_{11}R_a}{V^2S_{ref}\rho_{11}} \left(e^{-\frac{g_0}{R_a\Theta_{11}}(h_0+\Delta h-h_{11})} - 1 \right) \right) \right]$$

- $h_0 + \Delta h \leq h_{11}$ pero $h_0 > h_{11}$ si el segmento es de altitud descendente, necesariamente $\Delta h < 0$.

$$\int_{h_0}^{h_0+\Delta h} c \cdot dh = \int_{h_0}^{h_{11}} c \cdot dh + \int_{h_{11}}^{h_0+\Delta h} c \cdot dh$$

Donde la densidad tomará el modelo de la estratosfera en la primera integral y el de la troposfera en la segunda.

$$\bar{c} = \frac{C_{f1}}{\Delta h} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}} \right) \cdot \left[\left(\frac{V^2S_{ref}C_{D_0}\rho_{11}R_a\Theta_{11}}{2g_0} \left(e^{-\frac{g_0}{R_a\Theta_{11}}(h_0-h_{11})} - 1 \right) + \frac{2m_0^2g_0k\Theta_{11}R_a}{V^2S_{ref}\rho_{11}} \left(1 - e^{-\frac{g_0}{R_a\Theta_{11}}(h_0-h_{11})} \right) \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{ROCDm_0g_0\Delta h}{V} + \frac{V^2S_{ref}C_{D_0}\rho_0R_a\Theta_0}{2g_0} \left(\left(1 - \frac{\alpha_\tau h_{11}}{\Theta_0} \right)^{\frac{g_0}{R_a\alpha_\tau}} - \left(1 - \frac{\alpha_\tau(h_0 + \Delta h)}{\Theta_0} \right)^{\frac{g_0}{R_a\alpha_\tau}} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{2m_0^2g_0^2k\Theta_0R_a}{V^2S_{ref}\rho_0(2\alpha_\tau R_a - g)} \left(\left(1 - \frac{\alpha_\tau h_{11}}{\Theta_0} \right)^{2 - \frac{g_0}{R_a\alpha_\tau}} - \left(1 - \frac{\alpha_\tau(h_0 + \Delta h)}{\Theta_0} \right)^{2 - \frac{g_0}{R_a\alpha_\tau}} \right) \right)
 \end{aligned}$$

3. La aeronave vuela siempre en la estratosfera. Es decir $h_0 + \Delta h > h_{11}$ y $h_0 > h_{11}$.

$$\bar{c} = \frac{\int_{h_0}^{h_0 + \Delta h} c \cdot dh}{\Delta h} = \frac{C_{f1}}{\Delta h} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{ROCDm_0g_0\Delta h}{V} + \frac{V^2S_{ref}C_{D_0}\rho_{11}R_a\Theta_{11}}{2g_0} \left(e^{-\frac{g_0}{R_a\Theta_{11}}(h_0 - h_{11})} - e^{-\frac{g_0}{R_a\Theta_{11}}(h_0 + \Delta h - h_{11})} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{2m_0^2g_0k\Theta_{11}R_a}{V^2S_{ref}\rho_{11}} \left(e^{\frac{g_0}{R_a\Theta_{11}}(h_0 + \Delta h - h_{11})} - e^{\frac{g_0}{R_a\Theta_{11}}(h_0 - h_{11})} \right) \right)
 \end{aligned}$$

• **Segmentos con cambio de la velocidad de vuelo**

Tomando la relación entre la velocidad y el tiempo dada por

$$\frac{dV}{dt} = a$$

e introduciendo esto en la expresión que define el consumo promedio:

$$\int_{V_0}^{V_0 + \Delta V} \bar{c} \cdot dV = \int_{V_0}^{V_0 + \Delta V} c \cdot dV$$

$$\bar{c} = \frac{\int_{V_0}^{V_0 + \Delta V} c \cdot dV}{\Delta V}$$

Desarrollando la integral del numerador:

$$\int_{V_0}^{V_0 + \Delta V} c \cdot dV = \int_{V_0}^{V_0 + \Delta V} C_{f1} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}} \right) \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S_{ref} \left(C_{D_0} + k \left(\frac{2m_0g_0}{\rho V^2 S_{ref}} \right)^2 \right) + m_0 a \right) dV$$

$$\bar{c} = \frac{C_{f1}}{24\Delta V C_{f2}} \left(12 \frac{4km_0^2g_0^2}{\rho S_{ref}} \left(\ln \frac{V_0 + \Delta V}{V_0} - C_{f2} \left(\frac{1}{V_0 + \Delta V} - \frac{1}{V_0} \right) \right) \right)$$

$$+ \rho S_{ref} C_{D_0} (3((\Delta V + V_0)^4 - V_0^4) + 4((\Delta V + V_0)^3 - V_0^3) C_{f2}) + 12am_0((\Delta V + V_0)^2 - V_0^2 + 2C_{f2}\Delta V)$$

Apéndice 3:

Cálculo del parámetro de variación de empuje

El cambio de régimen del motor de una aeronave tiene bastante peso a la hora de realizar una maniobra de evitación de conflicto u otra, es por ello que resulta de vital importancia definir un parámetro que mida dicho cambio a lo largo de una trayectoria. No es de agrado el cambio del régimen del motor ya que acorta su periodo de vida. Se define el parámetro $\Delta\bar{T}$ de la siguiente forma:

$$\Delta\bar{T} = \int_0^{t_1} \frac{|\bar{T}_i - T_0|}{T_0} \cdot dt \quad [s]$$

Donde \bar{T}_i hace referencia al empuje promedio en cada segmento de vuelo (se ha optado por utilizar un consumo promedio en todo el segmento en lugar de integrar en el segmento) y T_0 hace referencia al empuje en crucero a la altitud de vuelo inicial de la trayectoria, es decir $T_0 = D$, por lo que este parámetro será nulo para vuelo en crucero con las mismas condiciones de vuelo que las iniciales.

Al igual que en el Apéndice 2, es necesario estudiar el cálculo de este parámetro para las maniobras en las que existe cambio temporal de la altitud de vuelo o de la velocidad de vuelo (nunca ambos fenómenos de forma simultánea), donde se encuentran los únicos segmentos en los que el empuje es diferente de la resistencia aerodinámica.

$$T = D + m_0 g_0 \frac{ROCD}{V} + m_0 a$$

Para calcular el empuje promedio en cada segmento es importante identificar cuáles de los términos anteriores tiene valor variable. El único término que no es constante es la resistencia aerodinámica ya que no se tiene cambio de altitud y de velocidad simultáneamente, que implicaría la variación del término asociado al *ROCD*. Se procede por tanto a promediar este término de la misma forma que se hizo en el Apéndice 2 con el consumo:

$$\int_0^{t_1} \bar{D} \cdot dt = \int_0^{t_1} D \cdot dt$$

$$\bar{D} = \frac{\int_0^{t_1} D \cdot dt}{t_1 - t_0}$$

- **Segmentos con cambio de la altitud de vuelo** Se tiene la siguiente expresión del empuje:

$$T = D(h) + m_0 g_0 \frac{ROCD}{V}$$

Como se puede comprobar, la resistencia no toma un valor constante debido a los cambios de densidad, por lo que se tomará un valor promedio de la misma, al igual que se hizo con el consumo.

$$\int_{h_0}^{h_0+\Delta h} \bar{D} \cdot dh = \int_{h_0}^{h_0+\Delta h} D \cdot dh$$

$$\bar{D} = \frac{\int_{h_0}^{h_0+\Delta h} \frac{1}{2} \rho(h) V^2 S_{ref} \left(C_{D_0} + k \left(\frac{2m_0 g_0}{\rho(h) V^2 S_{ref}} \right)^2 \right) \cdot dh}{\Delta h}$$

Donde habrá que tener en cuenta el modelo de atmósfera:

$$\rho(h) = \begin{cases} \rho_0 \left(1 - \frac{\alpha_T h}{\Theta_0} \right)^{\frac{g_0}{R_a \alpha_T} - 1} & \text{si } h \leq h_{11} \\ \rho_{11} \exp \left(-\frac{g_0 (h - h_{11})}{R_a \Theta_{11}} \right) & \text{si } h > h_{11} \end{cases}$$

De forma que el empuje quede como

$$\bar{T}_i = \bar{D} + m_0 g_0 \frac{ROCD}{V}$$

Si se distingue, al igual que en Apéndice 2, entre segmentos en la troposfera, en la estratosfera o en ambas, se obtienen los valores del empuje correspondientes en cada caso.

1. La aeronave vuela siempre en la troposfera. Es decir $h_0 + \Delta h \leq h_{11}$ y $h_0 \leq h_{11}$.

$$\begin{aligned} \bar{T}_i = m_0 g_0 \frac{ROCD}{V} + \frac{1}{\Delta h} & \left(\rho_0 V^2 S_{ref} C_{D_0} \frac{R_a \Theta_0}{2g_0} \left(\left(1 - \frac{\alpha_T h_0}{\Theta_0} \right)^{\frac{g_0}{R_a \alpha_T}} - \left(1 - \frac{\alpha_T (h_0 + \Delta h)}{\Theta_0} \right)^{\frac{g_0}{R_a \alpha_T}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{2m_0^2 g_0^2 k \Theta_0 R_a}{V^2 S \rho_0 (2\alpha_T R_a - g_0)} \left(\left(1 - \frac{\alpha_T h_0}{\Theta_0} \right)^{2 - \frac{g_0}{R_a \alpha_T}} - \left(1 - \frac{\alpha_T (h_0 + \Delta h)}{\Theta_0} \right)^{2 - \frac{g_0}{R_a \alpha_T}} \right) \right) \end{aligned}$$

2. La aeronave vuelva parte del segmento en la troposfera y otra parte en la estratosfera. Solo se cumple una de las siguientes condiciones:

- $h_0 \leq h_{11}$ pero $h_0 + \Delta h > h_{11}$ si el segmento es de altitud ascendente, necesariamente $\Delta h > 0$.

$$\begin{aligned} \bar{T}_i = m_0 g_0 \frac{ROCD}{V} + \frac{1}{\Delta h} & \left(\rho_0 V^2 S_{ref} C_{D_0} \frac{R_a \Theta_0}{2g_0} \left(\left(1 - \frac{\alpha_T h_0}{\Theta_0} \right)^{\frac{g_0}{R_a \alpha_T}} - \left(1 - \frac{\alpha_T h_{11}}{\Theta_0} \right)^{\frac{g_0}{R_a \alpha_T}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{2m_0^2 g_0^2 k \Theta_0 R_a}{V^2 S \rho_0 (2\alpha_T R_a - g_0)} \left(\left(1 - \frac{\alpha_T h_0}{\Theta_0} \right)^{2 - \frac{g_0}{R_a \alpha_T}} - \left(1 - \frac{\alpha_T h_{11}}{\Theta_0} \right)^{2 - \frac{g_0}{R_a \alpha_T}} \right) \right) \\ & + \frac{1}{\Delta h} \left(\rho_{11} V^2 S_{ref} C_{D_0} \frac{R_a \Theta_{11}}{2g_0} \left(1 - e^{-\frac{g_0}{R_a \Theta_{11}} (h_0 + \Delta h - h_{11})} \right) + \frac{2km_0^2 g_0 R_a \Theta_{11}}{\rho_{11} V^2 S_{ref}} \left(e^{\frac{g_0}{R_a \Theta_{11}} (h_0 + \Delta h - h_{11})} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

- $h_0 + \Delta h \leq h_{11}$ pero $h_0 > h_{11}$ si el segmento es de altitud descendente, necesariamente $\Delta h < 0$.

$$\begin{aligned} \bar{T}_i = m_0 g_0 \frac{ROCD}{V} + \frac{1}{\Delta h} & \left(\rho_0 V^2 S_{ref} C_{D_0} \frac{R_a \Theta_0}{2g_0} \left(\left(1 - \frac{\alpha_T h_{11}}{\Theta_0} \right)^{\frac{g_0}{R_a \alpha_T}} - \left(1 - \frac{\alpha_T (h_0 + \Delta h)}{\Theta_0} \right)^{\frac{g_0}{R_a \alpha_T}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{2m_0^2 g_0^2 k \Theta_0 R_a}{V^2 S \rho_0 (2\alpha_T R_a - g_0)} \left(\left(1 - \frac{\alpha_T h_{11}}{\Theta_0} \right)^{2 - \frac{g_0}{R_a \alpha_T}} - \left(1 - \frac{\alpha_T (h_0 + \Delta h)}{\Theta_0} \right)^{2 - \frac{g_0}{R_a \alpha_T}} \right) \right) \\ & + \frac{1}{\Delta h} \left(\rho_{11} V^2 S_{ref} C_{D_0} \frac{R_a \Theta_{11}}{2g_0} \left(e^{\frac{-g_0}{R_a \Theta_{11}} (h_0 - h_{11})} - 1 \right) + \frac{2km_0^2 g_0 R_a \Theta_{11}}{\rho_{11} V^2 S_{ref}} \left(1 - e^{\frac{g_0}{R_a \Theta_{11}} (h_0 - h_{11})} \right) \right) \end{aligned}$$

3. La aeronave vuela siempre en la estratosfera. Es decir $h_0 + \Delta h > h_{11}$ y $h_0 > h_{11}$.

$$\begin{aligned} \bar{T}_i = m_0 g_0 \frac{ROCD}{V} + \frac{1}{\Delta h} \left(\rho_{11} V^2 S_{ref} C_{D_0} \frac{R_a \Theta_{11}}{2g_0} \left(e^{\frac{-g_0}{R_a \Theta_{11}}(h_0 - h_{11})} - e^{\frac{-g_0}{R_a \Theta_{11}}(h_0 + \Delta h - h_{11})} \right) \right. \\ \left. + \frac{2km_0^2 g_0 R_a \Theta_{11}}{\rho_{11} V^2 S_{ref}} \left(e^{\frac{g_0}{R_a \Theta_{11}}(h_0 + \Delta h - h_{11})} - e^{\frac{g_0}{R_a \Theta_{11}}(h_0 - h_{11})} \right) \right) \end{aligned}$$

• **Segmentos con cambio de la velocidad de vuelo** Se tiene la siguiente expresión del empuje:

$$T = D(V) + m_0 a$$

Como se puede comprobar, la resistencia no toma un valor constante debido al cambio de velocidad, por lo que se tomará un valor promedio de la misma, al igual que se hizo con el consumo.

$$\begin{aligned} \int_{V_0}^{V_0 + \Delta V} \bar{D} \cdot dV = \int_{V_0}^{V_0 + \Delta V} D \cdot dV \\ \bar{D} = \frac{\int_{V_0}^{V_0 + \Delta V} \frac{1}{2} \rho V^2 S_{ref} \left(C_{D_0} + k \left(\frac{2m_0 g_0}{\rho V^2 S_{ref}} \right)^2 \right) \cdot dV}{\Delta V} \end{aligned}$$

De forma que el empuje quede como

$$\begin{aligned} \bar{T}_i = \bar{D} + m_0 a \\ \bar{T}_i = \frac{1}{\Delta V} \left(\frac{1}{6} \rho S_{ref} C_{D_0} ((V_0 + \Delta V)^3 - V_0^3) + \frac{2km_0^2 g_0^2}{\rho S_{ref}} \left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V_0 + \Delta V} \right) \right) + m_0 a \end{aligned}$$