

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

## Herramienta de simulación de redes hidráulicas genéricas

Autor: Álvaro López-Herrera Rodríguez

Tutor: J.M. López-Herrera Sánchez

Dpto. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica  
de Fluidos  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2021





Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

# Herramienta de simulación de redes hidráulicas genéricas

Autor:

Álvaro López-Herrera Rodríguez

Tutor:

J.M. López-Herrera Sánchez

Catedrático de Universidad

Dpto. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2021



Trabajo Fin de Grado: Herramienta de simulación de  
redes hidráulicas genéricas

Autor: Álvaro López-Herrera Rodríguez  
Tutor: J.M. López-Herrera Sánchez

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los  
siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:



# Agradecimientos

---

Con este trabajo se pone punto y aparte a una etapa de mi vida que han sido 4 años. Han sido 4 años maravillosos, llenos de recuerdos y que volvería a vivir una y mil veces si fuera posible. Ha sido un camino largo que es el culmen de toda mi educación, educación que no puedo estar más contento de haber recibido y que la agradezco a todas y cada una de las personas que han pasado por mi vida y me han ayudado a ser la persona que soy hoy. Al Colegio Portaceli en el que he estado 12 años de mi vida, en el todos y cada uno de los profesores y personas que me encontré me ayudó a ser un mejor estudiante y persona, a los profesores que he tenido en estos 4 años en la carrera y me han ayudado cada uno a estar un paso más cerca de llegar a ser ingeniero; a mis compañeros de la carrera que me han acompañado en este camino y entre los que nos hemos apoyado y ayudado los unos a los otros para poder llegar finalmente hasta aquí; a mis amigos ya que en la vida hay que saber desconectar y disfrutar también y sin ellos y su apoyo habría sido todo más difícil; a mis hermanos, que no podía no mencionarlos, y aunque a veces parece que en vez de ayudar molestan, no cambiaría nada de ellos y no puedo estar más feliz de tenerlos en mi vida; a mis abuelos que han sido unos referentes en mi vida y han sido y son parte fundamental de mi vida y educación; y por último, y más importante, a mis padres que les debo todo, sin ellos no sería la persona que soy hoy día. Ni sé si habría llegado hasta aquí, son los que han estado siempre en el día a día guiándome por donde debía ir, y, mención especial a mi padre y tutor de este trabajo, que sin ninguna duda sin él no podría haber acabado, y que siempre ha estado ahí si tenía cualquier duda durante la carrera en la asignatura que fuera. Este trabajo es un punto y aparte porque significa el final de una etapa, pero la vida es una continua progresión, y espero seguir formándome tanto como ingeniero como persona.

*Álvaro López-Herrera Rodríguez*  
*Sevilla, 2021*



# Resumen

---

Las situaciones transitorias son muy comunes en las instalaciones hidráulicas y pueden conllevar graves consecuencias en estas debido a las situaciones oscilatorias que se forman que pueden tener altos picos de presión y altas frecuencias. En este trabajo se ha desarrollado una herramienta de simulación de instalaciones hidráulicas para situaciones estacionarias y transitorias, que permite calcular presión, caudal y velocidad en un punto cualquiera y un instante cualquiera de la instalación hidráulica. Esta herramienta permitiría realizar el diseño de una instalación y comprobar su comportamiento ante determinadas situaciones. Las ecuaciones de flujos en conductos en el caso transitorio son ecuaciones hiperbólicas, por lo tanto han de ser resueltas por métodos numéricos como el método de las características, que es el más popular, o el método de diferencias finitas. Sin embargo, para la resolución de flujos transitorios la herramienta implementa el método de Godunov, el método se basa en un método de resolución del Problema de Riemann, divide los conductos en celdas y calcular los flujos en las interfaces de la celda. La implementación de condiciones de contorno, como válvulas, uniones de tuberías y depósitos, dentro del enfoque de Godunov es similar a la del enfoque del método de características. Se aplica la herramienta una serie de casos tanto estacionarios como transitorios.



# Abstract

---

Transient situations are very common in hydraulic installations and can have serious consequences in these due to the oscillatory situations that are formed, which can have high pressure peaks and high frequencies. In this work we have developed a simulation tool for hydraulic installations for stationary and transient situations, which allows to calculate pressure, flow and velocity at any point and at any time of the hydraulic installation. This tool would allow the design of an installation and check its behavior in certain situations. The equations of flow in conduits in the transient case are hyperbolic equations, therefore they have to be solved by numerical methods such as the method of characteristics, which is the most popular, or the finite difference method. However, for the resolution of transient flows the tool implements Godunov's method, the method is based on a method of solving the Riemann Problem, divide the ducts into cells and calculate the flows at the cell interfaces. The implementation of boundary conditions, such as valves, pipe joints and tanks, within the Godunov approach is similar to that of the method of characteristics approach. The tool is applied to a number of both stationary and transient cases.



# Índice

---

<i>Resumen</i>	III
<i>Abstract</i>	V
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Conceptos básicos	1
1.2 El fenómeno del golpe de ariete	2
1.2.1 Propagación de onda: cierre instantáneo	3
1.2.2 Estimación del valor de la sobrepresión	3
1.3 Causas de los transitorios y eventuales golpes de ariete	5
1.4 Accidentes e incidentes	6
1.5 Dispositivos de control para golpes de ariete	10
<b>2 Ecuaciones del flujo en conductos</b>	<b>13</b>
2.1 Ecuaciones en conductos	13
2.2 Formas alternativas de las ecuaciones	14
2.2.1 Ecuación de continuidad desarrollada	14
2.2.2 Ecuaciones simplificadas	16
2.2.3 Forma conservativa	17
2.2.4 Caso estacionario	18
2.2.5 Resumen	18
2.3 Factor de fricción de Darcy	19
2.4 Velocidad de onda	20
2.5 Fricción no estacionaria	20
2.6 Carácter matemático de las ecuaciones del golpe de ariete	22
Clasificación de las ecuaciones gobernantes	22
Condiciones iniciales	23
2.6.1 Ecuaciones diferenciales parciales	23
2.6.2 Invariantes de Riemann: Forma de las características	23
2.6.3 Ondas de choque, onda expansiva y discontinuidades de contacto	25
Onda de choque	26
Onda expansiva	26
Discontinuidad de contacto	26

<b>3</b>	<b>Métodos de resolución numérica</b>	<b>29</b>
3.1	Introducción	29
3.2	Método de las Características	30
3.3	Método implícito de diferencias finitas (IFDM)	36
3.3.1	Descripción del método	36
3.3.2	Acoplamiento de ecuaciones	38
3.4	Método de Godunov	39
3.4.1	Problema de Riemann	39
3.4.2	Los seis pasos de los algoritmos tipo Godunov	40
3.4.3	Restricciones de estabilidad	41
3.4.4	Método de Godunov aplicado a las ecuaciones del golpe de ariete	43
	Método de Godunov de primer orden	45
	Método de Godunov de segundo orden	46
3.5	Condiciones de contorno	47
3.5.1	Altura impuesta	47
3.5.2	Nodo de intersección	48
3.5.3	Velocidad impuesta	49
3.5.4	Chimenea de equilibrio	49
3.5.5	Turbina controlada por potencia	50
3.5.6	Otros	50
<b>4</b>	<b>Descripción de la herramienta</b>	<b>51</b>
4.1	Problemas estacionarios	51
4.1.1	Ejemplo: caso estacionario con 2 bombas y una turbina	52
4.2	Problemas transitorios	54
4.2.1	Ejemplo 1: cierre instantáneo con un solo depósito	55
4.2.2	Ejemplo 2: cierre instantáneo con dos depósitos	56
4.2.3	Ejemplo 3: Depósito con turbina a final de conducto (Central hidráulica)	59
4.2.4	Ejemplo 4: Central hidráulica con chimenea de equilibrio	60
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>65</b>
<b>Apéndice A</b>	<b>Código principal</b>	<b>67</b>
A.1	Programa general	67
A.2	Condiciones de contorno	75
	Caso -1: Valvula	78
	Caso 0: Nodo de intersección	78
	Caso 1: Altura impuesta	78
	Caso 2: Chimenea de equilibrio	79
	Caso 3: Calderín	79
	Caso 4: Turbina en nodo central	79
	Caso 5: Turbina en nodo final controlada por potencia	80
A.3	Programas auxiliares	80

---

A.3.1	Cálculo del factor de fricción	80
A.3.2	Ley de cierre temporal	80
	Cierre instantáneo en el instante inicial	80
	Cierre instantáneo en un instante introducido	81
A.3.3	Programas auxiliares para la resolución por el método de Godunov de segundo orden	81
	Cálculo de derivadas de matrices	81
	Cálculo del MINMOD	81
	Cálculo del flujo	82
	Cálculo del valor del flujo	82
	Cálculo del termino fuente (fricción)	82
A.4	Godunov de primer orden	83
	<i>Bibliografía</i>	85



# 1 Introducción

---

En este capítulo, se definen varios conceptos básicos relacionados con los flujos transitorios hidráulicos. Se explica en que consiste el fenómeno del golpe de ariete tomado de López-Herrera Sánchez (2018), se discute la propagación de ondas en una tubería, seguida de diferentes enfoques para el análisis de flujos transitorios hidráulicos. El capítulo concluye con una breve ilustración de estos fenómenos mostrando una serie de accidentes e incidentes causados por transitorios hidráulicos. En el siguiente capítulo se desarrollaran las ecuaciones básicas.

## 1.1 Conceptos básicos

En primer lugar, es necesario diferenciar entre flujo estacionario y no estacionario. El flujo se denomina estacionario si las condiciones del flujo, como la presión y la velocidad, en un punto son constantes con el tiempo. Si las condiciones cambian con el tiempo, el flujo se denomina no estacionario. Estrictamente hablando, los flujos turbulentos son siempre no estacionarios ya que las condiciones en un punto de estos flujos cambian continuamente. Sin embargo, estos flujos se consideran estacionarios si las condiciones medias temporales durante un período corto no cambian con el tiempo. Al referirnos a los flujos turbulentos estacionarios o no estacionarios en este documento, consideraremos las condiciones medias temporales para esta designación.

El concepto que va a ser de mayor interés en este trabajo va a ser el de flujo transitorio, que es el flujo de etapa intermedia, cuando las condiciones de flujo cambian de un estado estacionario a otro.

También es posible diferenciar entre flujo uniforme y no uniforme. Si la velocidad del flujo es constante con respecto a la distancia en un momento dado, el flujo es uniforme, mientras que si la velocidad varía con la distancia, el flujo se llama no uniforme.

Además, si las condiciones de flujo varían con el tiempo y se repiten después de un intervalo de tiempo fijo, el flujo se denomina flujo periódico o estacionario-oscilatorio.

Otro fenómeno que puede ocurrir en flujos es la separación de columnas, que sucede si la presión en el flujo cae a la presión de vapor del líquido, entonces se forman cavidades en el líquido y muchas veces la columna de líquido puede separarse en toda la sección transversal.

## 1.2 El fenómeno del golpe de ariete

Bajo el nombre de golpe de ariete se engloban los fenómenos de compresibilidad que se presentan en un líquido fluyendo por un conducto cuando se produce una brusca deceleración del mismo. Es la situación que se presenta cuando se produce un cierre brusco de una válvula. El fenómeno es esencialmente transitorio. Y su existencia y gravedad resulta de la comparación de los tiempos característicos del problema. En el movimiento de un fluido en el conducto hay que considerar:

- El tiempo de residencia  $t_r$  que mide el tiempo que tarda una partícula fluida en discurrir por el conducto de longitud  $L$  a una velocidad característica  $v_o$ ,  $t_r = L/v_o$ .
- El tiempo de ida y vuelta,  $t_{iv}$ , que mide el tiempo que tarda en llegar la información de un extremo al otro del conducto,  $t_{iv} = L/a$  siendo  $a$  la celeridad de las ondas. Es mucho menor que  $t_r$ .
- Y por último,  $t_o$  que es el tiempo característico de variación de las condiciones de contorno. Típicamente el tiempo empleado en el cierre de una válvula,  $t_c$ .

Obsérvese que si el tiempo de cierre de la válvula es mucho mayor que el de residencia  $t_c \gg t_r$ , la partícula fluida atraviesa el conducto sin apreciar cambios en las condiciones de contorno. En este caso en el análisis del movimiento fluido en el conducto se pueden despreciar las variaciones temporales de las condiciones de contorno (la inercia temporal) pasando a ser el tiempo un parámetro más del problema. Se trata de un análisis cuasi-estacionario.

En el caso de que el tiempo de cierre sea comparable con el tiempo de residencia, la partícula fluida debe adecuar su velocidad a los cambios de condiciones de contorno en su devenir por el conducto. El fenómeno es no-estacionario. Ahora bien, dado que la información de la modificación de las condiciones de contorno se traslada casi-instantáneamente a todo el fluido presente en el conducto todo él se adecuará a las condiciones cambiantes de velocidad al unísono, manteniéndose la condición de fluido incompresible (condición que se refleja en la característica de que el caudal es independiente de la posición  $Q \neq f(x)$ ).

El golpe de ariete se presenta cuando los tiempos de cierre  $t_c$  son mucho menores (o comparables) que  $t_{iv}$ . El caso más desfavorable sucede cuando  $t_c \ll t_{iv}$  y se denomina cierre instantáneo. En este caso el cierre es tan rápido que las partículas fluidas más alejadas de la válvula no se han apercibido de su cierre. Dado que el fluido más cercano a la válvula se ha frenado mientras que el más apartado aún mantiene su velocidad original, existe una variación espacial del caudal, es decir, el fluido se comporta compresiblemente. Este frenado brusco del fluido da lugar en los primeros estados del golpe de ariete a una sobrepresión que, viajando aguas arriba a la velocidad de las ondas  $a$ , va a su paso apercibiendo y frenando al fluido. La sobrepresión causa la dilatación de la tubería.

Si los tiempos de cierre son comparables a los de ida y vuelta los fenómenos de compresibilidad son más débiles. A continuación se describe el caso más desfavorable y se estima el valor de la sobrepresión.

### 1.2.1 Propagación de onda: cierre instantáneo

En la figura 1.1 se muestran las etapas que se presentan en el fluido del conducto tras un cierre instantáneo de una válvula. Por simplicidad se desprecian efectos viscosos del fluido y se considera el conducto de sección circular y dispuesto horizontalmente. En el proceso del golpe de ariete se pueden distinguir cuatro etapas siendo el detonante del fenómeno el cierre de la válvula. Este es el caso más práctico y sencillo para explicar este fenómeno.

- **Etapas 1:** Tras el cierre, en el instante  $t = 0$ , se crea una sobrepresión  $\Delta p$  en el seno del fluido que frena instantáneamente al mismo. Esta sobrepresión de frenado viaja aguas arriba a velocidad  $a$  en forma de frente de onda de compresión. Obsérvese que las regiones aún no transitadas por esta onda de compresión mantienen la velocidad adquirida por el fluido antes del cierre. Esta primera etapa transcurre entre el instante inicial de cierre y mientras que la onda de sobrepresión no alcanza la entrada del conducto,  $0 < t < t_{iv}$ .
- **Etapas 2:** Al final de la etapa 1, a la entrada del conducto hay una sobrepresión  $\Delta p$  que impulsa al fluido desde el conducto al depósito invirtiendo en sentido de flujo y relajando la sobrepresión. Se forma así una onda de expansión que viaja en dirección de la válvula y que otorga al fluido a su paso una velocidad,  $-v$ . Las regiones aún no alcanzadas por la onda de expansión mantiene la sobrepresión creada en la etapa anterior. Este proceso dura entre  $t_{iv} < t < 2t_{iv}$ .
- **Etapas 3:** Al final de la etapa 2 el fluido ha de frenarse en el entorno de la válvula para ello se establece una depresión  $-\Delta p$  en su entorno esta onda vuelve a viajar hacia el depósito frenando al fluido a su paso. Obsérvese que en este caso la sección del conducto tendería a disminuir. La etapa dura desde  $2t_{iv} < t < 3t_{iv}$ .
- **Etapas 4:** Al final de la etapa 3, todo el fluido en el conducto está en una situación de depresión. El gradiente de presiones en la entrada vuelve ser favorable a introducir fluido desde el depósito al conducto (velocidad  $v$  positiva). Esta onda de re-compresión viaja hacia la válvula dejando a su paso un fluido con velocidad positiva y ausente de depresiones. Esta etapa que transcurre en el periodo  $3t_{iv} < t < 4t_{iv}$ .

Al final de esta etapa 4, las condiciones presentes en el conducto coincide con las existentes en el instante inicial: un fluido discurriendo desde el depósito a la válvula que se encuentra cerrada. Ello implica que este fenómeno (en ausencia de efectos viscosos) se repite ad "infinitum" con un periodo  $T = 4t_{iv}$ . El punto más vulnerable desde el punto de vista estructural se localiza en la válvula donde durante la primera mitad del periodo se localiza una sobrepresión  $\Delta p$  pasando a una depresión de valor  $-\Delta p$  el resto del periodo.

### 1.2.2 Estimación del valor de la sobrepresión

En la figura 1.2 se muestra el entorno del frente de onda de compresión de la primera etapa; a la izquierda en un sistema de referencia absoluto y a la derecha con un sistema de referencia montado sobre la onda. Si aplicamos los principios de conservación de la masa y cantidad de movimiento en el volumen de control de la figura derecha

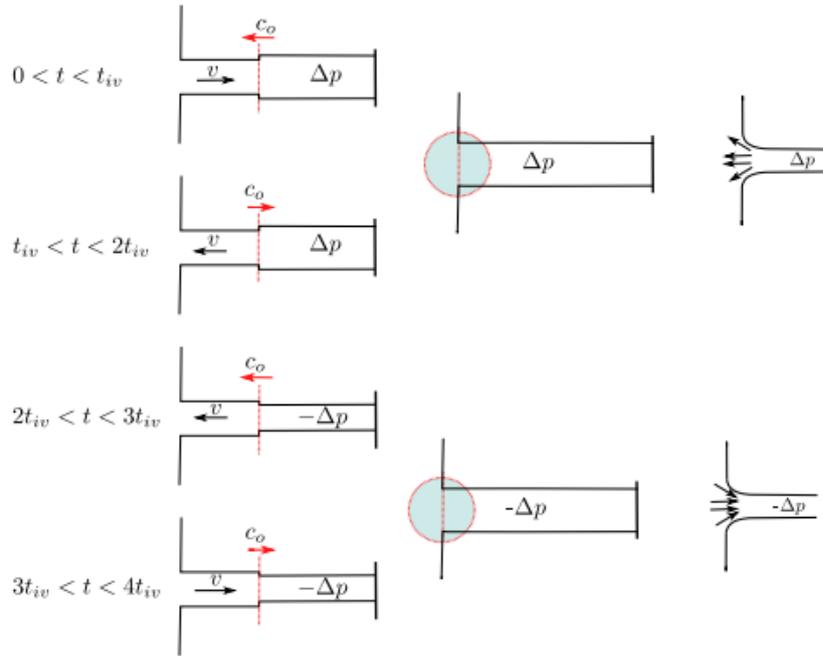


Figura 1.1 Etapas en el golpe de ariete en un cierre instantáneo..

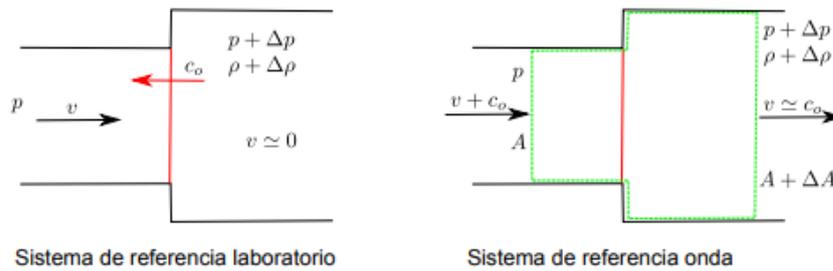


Figura 1.2 Análisis por medio de volúmenes de control en el entorno de la onda de compresión.

podremos estimar el valor de la sobrepresión. De la ecuación de continuidad en el volumen de control se encuentra que

$$\int_{\Sigma} \rho(v - v_c) \cdot nd\Sigma \Rightarrow \rho(v + a)A = a(A + \Delta A)(\rho + \Delta\rho) \tag{1.1}$$

$$\Rightarrow (v + a) = a\left(1 + \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta\rho}{\rho}\right)$$

mientras que de la aplicación de la conservación de la cantidad de movimiento resulta,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma} \rho v(v - v_c) \cdot nd\Sigma &= - \int_{\Sigma} pnd\Sigma \\
 \Rightarrow pA + \rho(v + a)^2 A &= (p + \Delta p)(A + \Delta A) + (\rho + \Delta \rho)a^2(A + \Delta A) \\
 \Rightarrow \rho(v + a)^2 A &= (p\Delta A + A\Delta p) + (\rho + \Delta \rho)a^2(A + \Delta A) \\
 \Rightarrow \frac{\Delta p}{\rho} + a^2\left(1 + \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta \rho}{\rho}\right) &= (v + a)^2
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde se ha tenido en cuenta que el salto de presiones es ostensible,  $\Delta p \gg p$ , mientras que el de área suele ser mucho mas pequeño  $\Delta A \ll A$ . La combinación ambas expresiones 1.1 y 1.2 permite encontrar una estimación de la sobrepresión,

$$\Delta p \sim \rho av(1 + v/a) \sim (v \ll a) \sim \rho av \tag{1.3}$$

### 1.3 Causas de los transitorios y eventuales golpes de ariete

Un transitorio se inicia siempre que se alteran las condiciones de dicho estado. Tal perturbación puede ser causada por cambios planificados o accidentales en la configuración del equipo de control de un sistema artificial o por cambios en la entrada o salida de un sistema natural.

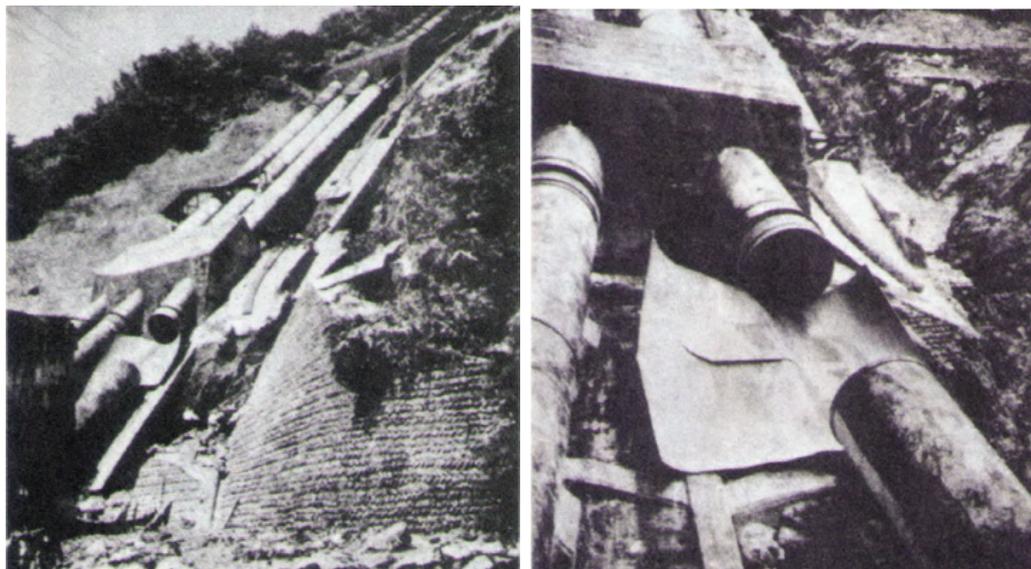
Las causas comunes de transitorios en los sistemas de ingeniería son:

- Apertura, cierre o "vibración" de válvulas en una tubería;
- Arrancar o detener las bombas en un sistema de bombeo;
- Arranque de una turbina hidráulica, aceptando o rechazando carga;
- Vibraciones de las paletas de un rodete o un impulsor;

Actualmente no se dispone de procedimientos de diseño de una red hidráulica completa que asegure una respuesta transitoria aceptable de todo el sistema. Si existen recomendaciones de diseño de elementos singulares que puedan formar parte de la misma. Por lo tanto, se emplea el siguiente enfoque de prueba y error.

Primero se seleccionan el diseño y los parámetros del sistema que se analiza para detectar transitorios causados por varias condiciones de operación posibles. Si la respuesta del sistema es inaceptable, por ejemplo, las presiones máxima y mínima no están dentro de los límites prescritos, entonces se cambia el diseño y/o los parámetros del sistema, o se añaden dispositivos de control y el sistema se analiza nuevamente. Este procedimiento se repite hasta que se obtiene la respuesta deseada. Para un sistema particular, varios dispositivos de control diferentes pueden ser adecuados para el control del transitorio. Si es posible, en algunos casos puede resultar económico modificar las condiciones de funcionamiento o la respuesta aceptable. Sin embargo, el objetivo final es tener un sistema económico general que arroje una respuesta aceptable.

El sistema está diseñado para las condiciones normales de funcionamiento que se esperan durante su vida útil. Y, de manera similar, es esencial que el sistema se opere



(a)

(b)

**Figura 1.3** Rotura de compuerta de la central hidroeléctrica de Oigawa, Japón..

estrictamente de acuerdo con las pautas de operación. El no hacerlo puede causar accidentes espectaculares y resultar en grandes daños a la propiedad y muchas veces en pérdida de vidas.

Si los datos de un sistema no se conocen con precisión, por ejemplo, velocidad de las ondas, factores de fricción, niveles de reservorio, etc., entonces el sistema debe analizarse para el rango esperado de varias variables. Esto generalmente se conoce como análisis de sensibilidad. Por ejemplo, dicho análisis puede realizarse variando la variable en  $\pm 10$ .

Durante la puesta en servicio de un sistema recién construido o después de que se hayan completado modificaciones importantes en un proyecto existente, el sistema debe probarse para detectar posibles condiciones de funcionamiento. Para evitar accidentes y averías, suele ser recomendable realizar las pruebas de forma progresiva. Por ejemplo, si hay cuatro equipos de bombeo en paralelo en una tubería, las pruebas de falla de energía deben comenzar con un equipo de bombeo y aumentar progresivamente a los cuatro.

## 1.4 Accidentes e incidentes

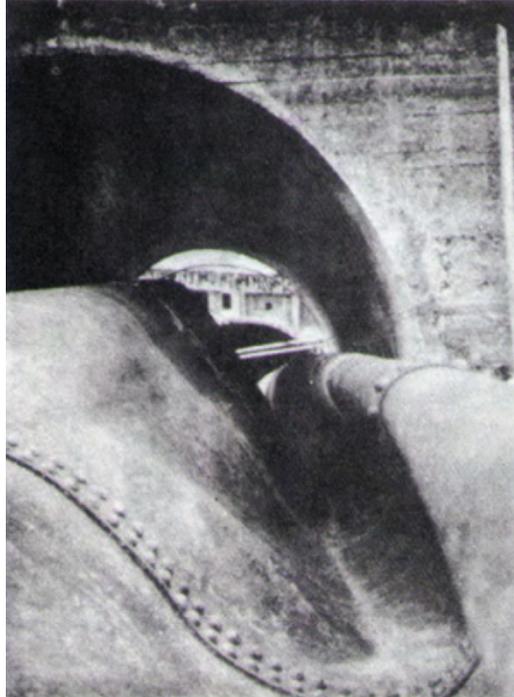
Los flujos transitorios y los golpes de arietes como se dice en la anterior sección son unas de las mayores causas de accidentes y fallos en tuberías y centrales hidráulicas. En esta sección se presentan una serie de fotos de fallos causados por transitorios. Las siguientes imágenes y casos son tomadas de Chaudhry (2014).

**Figura 1.3:** la rotura de la compuerta de la Central Eléctrica de Oigawa, Japón [Bonin, 1960] debido a presiones excesivas causadas por errores operativos y mal funcionamiento de los equipos, provocó la muerte de tres hombres y medio millón de dólares en daños.

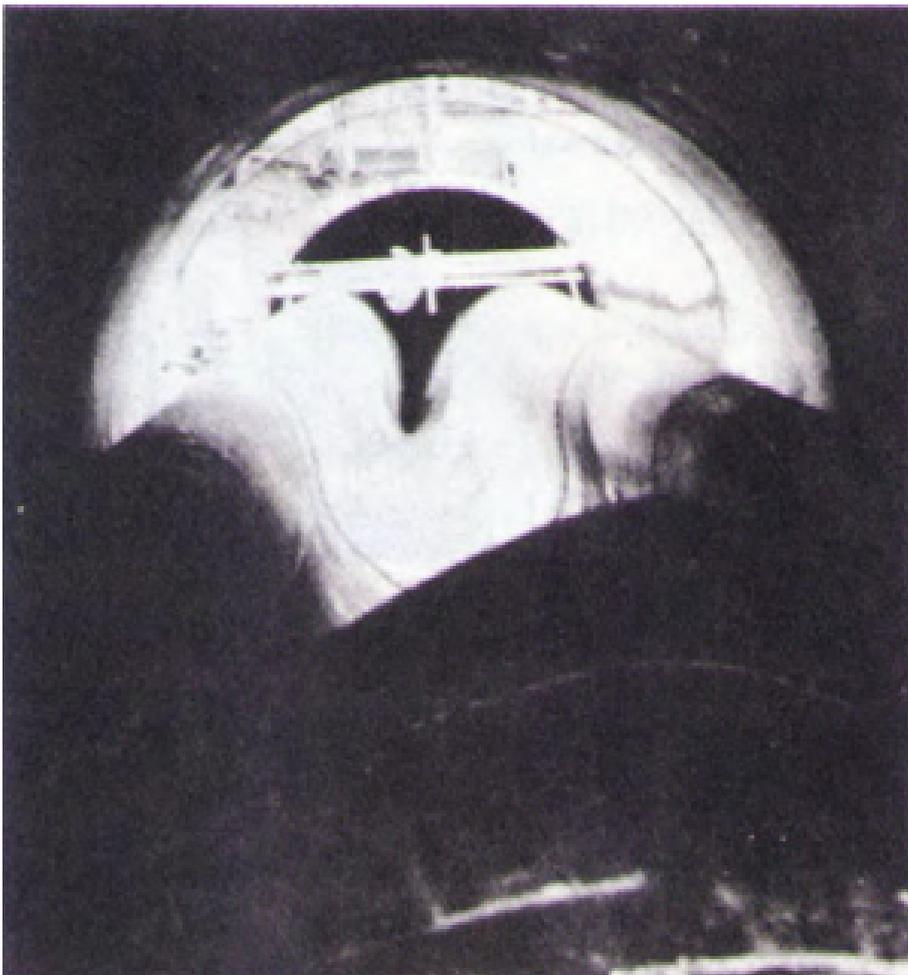
**Figura 1.4:** La compuerta colapsada de la central eléctrica de Oigawa debido al vacío aguas arriba de la sección de ruptura [Bonin, 1960]. El flujo incontrolado a



(a)



(b)

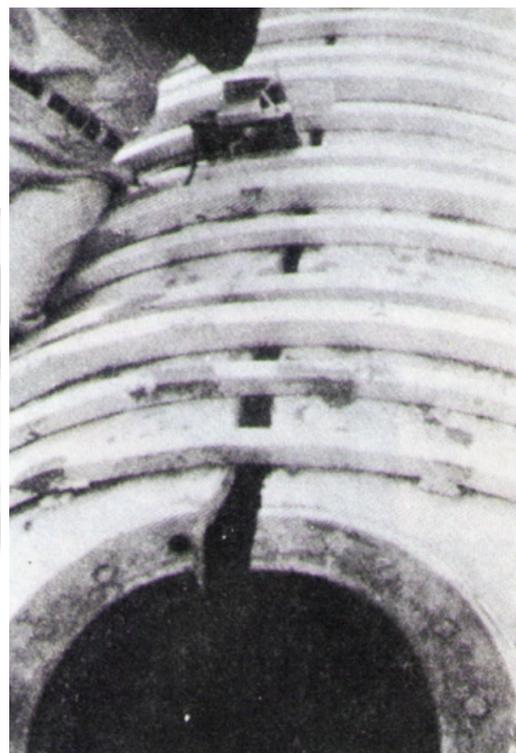


(c)

**Figura 1.4** Colapso de compuerta de la central hidroeléctrica de Oigawa, Japón..

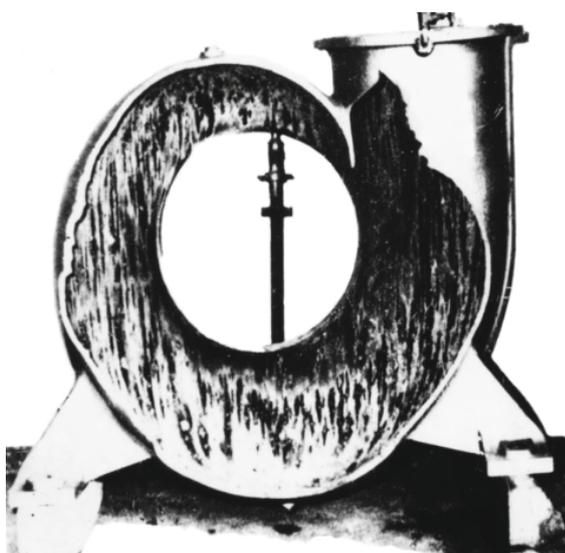


(a)



(b)

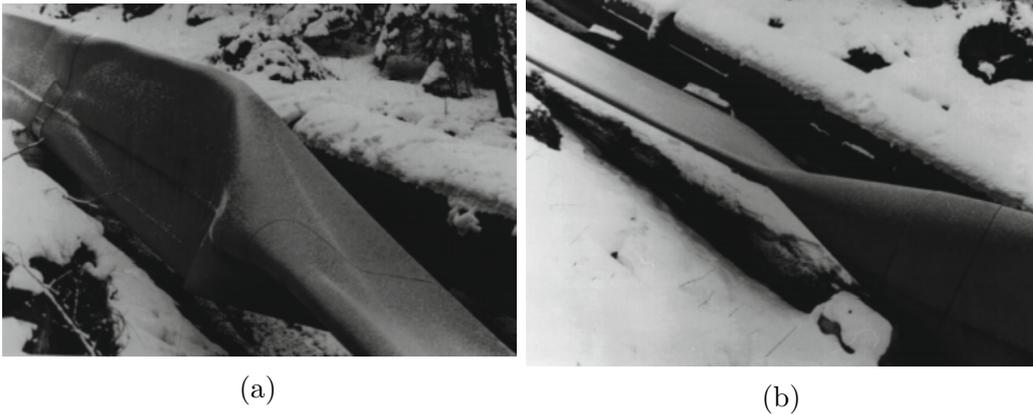
**Figura 1.5** Grieta en la válvula de entrada de la turbina de la central hidroeléctrica número 3 de Big Creek, EE. UU..



**Figura 1.6** Ruptura de carcasa de una bomba en la estación de bombeo de Azambuja, Portugal..

través de la sección de ruptura hizo que la línea de rasante hidráulica cayera por debajo de la compuerta, produciendo vacío.

**Figura 1.5:** la rotura de la válvula de entrada de la turbina de la central hidroeléctrica Big Creek No. 3 [Trenkle, 1979] EE. UU. La compuerta de la unidad 2 falló en la boca de acceso después del cierre de la válvula de cierre de la turbina en menos



**Figura 1.7** Compuerta colapsada de la Central Hidroeléctrica de Lütschinen durante el drenaje con el respiradero aguas arriba congelado, Suiza..



**Figura 1.8** Compuerta dañada de la Central Hidroeléctrica de Arequipa, Perú..

de 3 segundos. Esto sucedió mientras se daba servicio al operador hidráulico de la válvula; la unidad estaba en funcionamiento. La grieta tenía 3,7 m de largo y 76 mm en el punto más ancho.

**Figura 1.6:** la rotura de la carcasa de la bomba de la estación de bombeo de Azambuja, Portugal, debido a la unión de columnas de agua separadas después de la separación de la columna de agua, no previsto durante el diseño.

**Figura 1.7:** la compuerta colapsada de la Central Hidroeléctrica Lütschinen, Suiza, durante el drenaje con el respiradero congelado en el extremo aguas arriba.

**Figura 1.8:** Compuerta dañada de Central Hidroeléctrica Arequipa, Perú. Las



**Figura 1.9** Puerta del tubo de aspiración, Central Hidroeléctrica Ok Menga, Papúa Nueva Guinea..

fluctuaciones de presión provocadas por la obstrucción del sistema de control de la válvula esférica dieron como resultado la falla de los cordones de soldadura de la compuerta por fatiga.

**Figura 1.9:** Las puertas de acceso del tubo de aspiración de las dos unidades de Menga Ok Central Hidroeléctrica, Papúa Nueva Guinea, se separaron debido a un fallo de los tornillos causados por las altas presiones siguientes separación en columna, inundando la casa de máquinas. Se considera que el apriete insuficiente de las compuertas de ventanilla ha provocado un cierre rápido de la compuerta después del rechazo de la carga, lo que ha provocado la separación de la columna en el tubo de aspiración [Anónimo, 1991].

## 1.5 Dispositivos de control para golpes de ariete

Como se dice anteriormente en la actualidad no existe un método estandarizado para evitar los golpes de ariete sino que es necesario estudiar cada caso. Sin embargo existen una serie de dispositivos que se exponen en la tabla de la figura 1.10 obtenida de Bergant et al. (1991), que permite reducirlos y controlarlos.

Device	Additional Inertia	Controlled valve closure	Surge tank	Air chamber	One-way surge tank	Pressure relief valve	Bypass	Air valve	Rupture disk
Schematic									
Principle of operation	Lengthens rundown time	Regulates discharge	Energy accumulator	Energy accumulator	Provides flow	Relieves pressure	Maintains flow, controls reverse flow	Air admission and release	Relieves pressure
Pipeline system/ effectiveness	<2000 m	Always useful	Very low head systems	Long pipelines, medium to high head systems	Long pipe with high points	High head systems	Low head systems, long suction line	Long pipelines with high points	High head systems
Protection against	High pressures, column separation	High pressures	High pressures and column separation	High pressures and column separation	Column separation	High pressures	Column separation	Column separation	Very high pressures
Reliability	Excellent	Moderate	Excellent	Good	Moderate	Poor	Poor	Poor	Excellent
Auxiliary equipment/ maintenance	Larger electric motor	Hydraulic control system	None	Compressor or gas bottle	Checking tank level	Regular Maintenance	In-line valve	None	Removal of water
Restarting problems	None	Check hydraulic control system	None	Check air chamber pressure	Refilling of tank	None	Check in-line valve	Remove air from pipeline	Replace rupture disk
Frequency of application	Sometimes	Very often	Rarely	Very often	Rarely	Sometimes	Sometimes	Often	Sometimes
Cost	Fairly low	Low	High	Very high	Moderate	Moderate	Low	Low	Low

Figura 1.10 Dispositivos electrónicos de control de transitorios..



## 2 Ecuaciones del flujo en conductos

---

Las ecuaciones para la conservación de la masa y el momento describen el flujo transitorio en conductos cerrados. Estas ecuaciones generalmente se conocen como ecuaciones de continuidad y momento. Algunos autores llaman a una forma simplificada de esta última, la ecuación de movimiento o la ecuación dinámica. Estas ecuaciones son un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales, ya que la velocidad y la presión del flujo en el flujo transitorio son funciones del tiempo y de la distancia. También se van a particularizar estas ecuaciones para el caso estacionario.

### 2.1 Ecuaciones en conductos

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un fluido en un conducto son las ecuaciones de continuidad y la de cantidad de movimiento. Ambas parten del teorema de transporte de Reynolds que tiene la siguiente forma

$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{cv} \beta \rho dV + [\beta \rho A(V - W)]_{out} - [\beta \rho A(V - W)]_{in} \quad (2.1)$$

B es una propiedad extensiva (momento, energía) de un fluido, mientras que  $\beta$  es la correspondiente propiedad intensiva. Es decir,

$$\beta = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\Delta m}$$

La ecuación de continuidad tiene como propiedad extensiva (B) la masa (m), por tanto  $\beta = 1$ , mientras que para la de cantidad de movimiento  $B = mV$  y  $\beta = V$ , por tanto estas ecuaciones quedarían finalmente de una manera desarrollada como Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho AV) = 0 \quad (2.2)$$

Ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad (2.3)$$

Estas son las ecuaciones de partida, en el siguiente capítulo se desarrollan y expresan

estas expresiones de distintas formas, así como se establece como quedarían tanto el problema transitorio y el estacionario. Finalmente, se incorporan las ecuaciones necesarias para cerrar el problema.

## 2.2 Formas alternativas de las ecuaciones

Estas son las ecuaciones de partida, en el siguiente capítulo se desarrollan y expresan estas expresiones de distintas formas, así como se establece como quedarían tanto el problema transitorio y el estacionario. Finalmente, se incorporan las ecuaciones necesarias para cerrar el problema.

### 2.2.1 Ecuación de continuidad desarrollada

De la ecuación de continuidad que se puede ver en la expresión (2.2), desarrollando términos,

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} + \rho A \frac{\partial V}{\partial x} + \rho V \frac{\partial A}{\partial x} + AV \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

Reordenando términos, usando expresiones para las derivadas totales y dividiendo por  $\rho A$ , obtenemos

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

Típicamente las variables de interés son la presión  $p$  y la velocidad de flujo  $V$ . Para escribir esta ecuación en términos de estas variables, expresamos las derivadas de  $\rho$  y  $A$  en términos de  $p$  y  $V$  como sigue.

El módulo de elasticidad volumétrico de un fluido

$$K = \frac{dp}{d\rho/\rho} \quad (2.6)$$

Para un conducto circular de radio  $R$ ,

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi R \frac{dR}{dt} \quad (2.7)$$

En términos de deformación,  $\epsilon$ , esta ecuación debe ser escrita de la siguiente manera

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi R^2 \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \quad (2.8)$$

o

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = 2 \frac{d\epsilon}{dt} \quad (2.9)$$

Como se indicó anteriormente, asumimos que las paredes del conducto son linealmente elásticas, es decir, la tensión es proporcional a la deformación. Esto es cierto

para los materiales de pared de tubería más comunes, por ejemplo, metal, madera, cemento, etc. Luego,

$$\epsilon = \frac{\sigma_2 - \mu\sigma_1}{E} \quad (2.10)$$

donde  $\sigma_2$  = tensión circular,  $\sigma_1$  = tensión axial y  $\mu$  = relación de Poisson. Para simplificar la derivación, asumimos que el conducto tiene juntas de expansión en toda su longitud. Por lo tanto, el esfuerzo axial,  $\sigma_1 = 0$ . Por lo tanto, (2.9) se convierte en

$$\epsilon = \frac{\sigma_2}{E} \quad (2.11)$$

Ahora, la tensión del arco en un conducto de pared delgada

$$\sigma_2 = \frac{pD}{2e} \quad (2.12)$$

donde p es la presión interior; e el espesor de las paredes del conducto y D el diámetro del conducto. Tomando la derivada en el tiempo de la ecuación (2.11), obtenemos

$$\frac{d\sigma_2}{dt} = \frac{p}{2e} \frac{dD}{dt} + \frac{D}{2e} \frac{dp}{dt} \quad (2.13)$$

Usando las expresiones (2.10), (2.11) y (2.12), (2.13) se convierte en

$$E \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{pD}{2e} \frac{d\epsilon}{dt} + \frac{D}{2e} \frac{dp}{dt} \quad (2.14)$$

que se puede simplificar como

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\frac{D}{2e} \frac{dp}{dt}}{E - \frac{pD}{2e}} \quad (2.15)$$

De (2.10) y (2.15) tenemos que

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{\frac{D}{e} \frac{dp}{dt}}{E - \frac{pD}{2e}} \quad (2.16)$$

Sustituyendo (2.7) y (2.16) en (2.5) y simplificando, la ecuación resultante se convierte en

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \left( \frac{1}{K} + \frac{1}{\frac{eE}{D} - \frac{p}{2}} \right) \frac{dp}{dt} = 0 \quad (2.17)$$

Como  $p/2 \ll eE/D$  en la mayoría de las aplicaciones típicas de ingeniería, esta ecuación se puede escribir como

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{K} \left( 1 + \frac{1}{\frac{eE}{DK}} \right) \frac{dp}{dt} = 0 \quad (2.18)$$

Se define la velocidad de onda como:

$$a^2 = \frac{\frac{K}{\rho}}{1 - \frac{DK}{eE}} \quad (2.19)$$

Esta expresión para la velocidad de onda es para un conducto con juntas de expansión. Para otro tipo de condiciones, la expresión varía levemente. Sustituyendo las ecuaciones (2.19) y (2.18), la ecuación de continuidad queda de la siguiente forma,

$$\frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.20)$$

### 2.2.2 Ecuaciones simplificadas

Partimos de la ecuación de continuidad desarrollada (2.20) y de la ecuación de cantidad de movimiento (2.3). En la mayoría de aplicaciones de ingeniería, el término de aceleración convectiva,  $v(\partial p/\partial x)$  y  $V(\partial V/\partial x)$ , son pequeños comparados con otros términos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{fV|V|}{2D} &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Además es común en la ingeniería hidráulica calcular las presiones en la tubería en términos de la altura de presión,  $H$ , por encima de un cota especificada y usar el caudal,  $Q$ , como la segunda variable en lugar de la velocidad de flujo  $V$ . Ahora,  $Q = VA$  y la presión  $p$  se puede escribir como

$$p - p_a = \rho g H \quad (2.22)$$

En la derivación de las ecuaciones de gobierno asumimos que el fluido es ligeramente compresible y las paredes del conducto son ligeramente deformables. Por lo tanto, podemos prescindir de la variación espacial de  $\rho$  y el área de flujo  $A$  debido a los gradientes de presión interior. Sin embargo, la pequeña variación de  $\rho$  y  $A$  se tiene en cuenta indirectamente al considerar que la velocidad de onda  $a$  tiene un valor finito. Tenga en cuenta que si el fluido se considera incompresible y las paredes del conducto se suponen rígidas, entonces la velocidad de la onda se vuelve infinita y se siente instantáneamente un cambio de presión o velocidad en todo el sistema. Por lo tanto, con estos supuestos, se sigue de la ecuación (2.22) que  $\partial p/\partial t = \rho g(\partial H/\partial t)$  y  $\partial p/\partial x = \rho g(\partial H/\partial x)$ . Sustituyendo estas relaciones en (2.21) y (2.22), obtenemos

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\lambda Q|Q|}{2DA} - \sin \alpha \quad (2.24)$$

### 2.2.3 Forma conservativa

Las ecuaciones que gobiernan también se pueden expresar de una forma más conservativa haciendo el siguiente cambio de variables.

$$\begin{aligned}\rho A &= Q_1 \\ \rho AV &= Q_2\end{aligned}\quad (2.25)$$

Multiplicando la ecuación (2.2) por la velocidad  $V$  y (2.3) por  $A$  y sumando ambas expresiones tenemos,

$$\frac{\partial(\rho AV)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho AV^2 + pA) - p \frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{\rho \lambda P_m V^2}{8} - A \rho g z \quad (2.26)$$

Donde  $P_m$  es el perímetro mojado y en el caso de conductos con area constante  $\frac{\partial A}{\partial x} = 0$ , por tanto queda

$$\frac{\partial(\rho AV)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho AV^2 + pA) = -\frac{\rho \lambda P_m V^2}{8} - A \rho g z \quad (2.27)$$

Teniendo en cuenta que,

$$\begin{aligned}\rho A &= A(p) \rho(p) \simeq A(o) \rho_o \left(1 + \frac{p - p_o}{\rho_o a_o^2}\right) \left(1 + \frac{\partial A}{\partial p} \frac{p - p_o}{A_o}\right) \\ &= A(o) \rho_o \left(1 + (p - p_o) \left[\frac{1}{\rho_o a_o^2} + \frac{1}{A_o} \frac{\partial A}{\partial p}\right]\right) \\ &= A(o) \rho_o \left(1 + \frac{p - p_o}{\rho_o a^2}\right)\end{aligned}\quad (2.28)$$

De la ecuación (2.28) despejando  $pA$  tenemos la siguiente expresión.

$$pA = (p_o A_o) + a^2(\rho A - \rho_o A_o) \quad (2.29)$$

Realizando el cambio de variables de la expresión (2.25), para las ecuaciones (2.2) y (2.27), y haciendo uso de (2.29) tenemos las siguientes expresiones.

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} + \frac{\partial Q_2}{\partial x} = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q_2^2}{Q_1} + pA \right) = -\frac{\rho \lambda P_m}{8} \left( \frac{Q_2}{Q_1} \right)^2 - A \rho g z \quad (2.31)$$

con

$$pA = (p_o A_o) + a^2(Q_1 - Q_1^0) \quad (2.32)$$

$Q_1^0$  es un valor de referencia.

**2.2.4 Caso estacionario**

En este trabajo también se ha desarrollado una herramienta de resolución de flujos estacionarios en sistemas de tuberías y conductos complejos, por ello se desarrollaran las ecuaciones para flujos estacionarios unidimensionales, en conductos de sección constante y circular.

Partiendo de las ecuaciones de cantidad de movimiento y de continuidad simplificadas (2.41) y (2.42), al ser un caso estacionario ninguna variable varía con el tiempo porque es un flujo estacionario por tanto las ecuaciones que gobiernan quedan

$$\frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.33)$$

$$gA \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda Q |Q|}{2DA} = 0 \quad (2.34)$$

De las que se deduce que el caudal permanece constante en un conducto, y se puede deducir la altura en los nudos con la siguiente expresión,

$$H_j = H_i - \xi \quad (2.35)$$

donde el subíndice j indica el nodo final y el subíndice i el nodo inicial. Siendo  $\xi$  las pérdidas cuya expresión es la siguiente

$$\xi = \frac{\lambda L Q |Q|}{2gDA^2} \quad (2.36)$$

Además la expresión (2.35) puede escribirse de una manera más global para el caso de que haya algún elemento que aporte una altura, como una bomba por ejemplo, la expresión sería

$$H_j = H_i + H_{ij} - \xi \quad (2.37)$$

Siendo  $H_{ij}$  la altura que aporta una bomba entre los nodos i y j. Para resolver el problema de los caudales se aplica la ley de Kirchhoff a cada nodo.

$$\sum_{entra} Q = \sum_{sale} Q \quad (2.38)$$

**2.2.5 Resumen**

En resumen, para resolver el problema del flujo hay que resolver:

**Flujo estacionario**

$$\sum_{entra} Q = \sum_{sale} Q \quad (2.39)$$

$$H_j = H_i + H_{ij} - \xi \quad (2.40)$$

donde la variable  $H$  representa la altura total de la partícula fluida:

$$H = \frac{p - p_a}{\rho g} + \frac{V^2}{\rho g} + z$$

**Flujo transitorio**

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\lambda Q |Q|}{2DA} - \sin \alpha \quad (2.42)$$

donde la variable  $H$  representa ahora la altura de presión:

$$H = \frac{p - p_a}{\rho g}$$

Para terminar de resolver el sistema harían falta unas condiciones de contorno y una ecuación de estado.

## 2.3 Factor de fricción de Darcy

Hasta el momento se ha hablado del factor de fricción de Darcy-Weisbach que se representa tanto por la letra  $f$  como por  $\lambda$  pero no se ha indicado como se calcularía. Este es un parámetro adimensional que se utiliza en dinámica de fluidos para calcular la pérdida de carga en una tubería debido a la fricción. El cálculo del factor de fricción y la influencia de dos parámetros (número de Reynolds,  $Re$  y rugosidad relativa,  $\epsilon$ ) depende del régimen de flujo.

Para flujos laminares  $Re < 2300$ , el factor de fricción se calcula como

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (2.43)$$

Mientras que para el cálculo de este en régimen turbulento el valor es más incierto y existe una serie de formas de hacerlo. Se van a considerar dos maneras que son las que se han implementado.

Ecuación de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \right) \quad (2.44)$$

Ecuación de Swamee-Jain:

$$\lambda = \frac{0.25}{\left[ \log_{10} \left( \frac{k/D}{3.7} + \frac{5.79}{Re^{0.9}} \right) \right]^2} \quad (2.45)$$

## 2.4 Velocidad de onda

Anteriormente se han desarrollado previamente las ecuaciones que gobiernan y también se ha mencionado que únicamente con estas ecuaciones el problema no estaría cerrado, sino que también harían falta unas ecuaciones de estado que se han escrito en la sección anterior y se ha mostrado que estas dependen de la velocidad de onda. En esta sección se deriva una expresión para la velocidad de la onda que además del módulo volumétrico de elasticidad y densidad de masa del fluido, depende también de las propiedades elásticas del conducto, así como de las limitaciones externas. Las propiedades elásticas incluyen el tamaño del conducto, el grosor de la pared y el material de la pared; y las limitaciones externas incluyen el tipo de soportes y la libertad de movimiento del conducto en la dirección longitudinal. El módulo de elasticidad volumétrico de un fluido depende de su temperatura, presión y cantidad de gases arrastrados. Pearsall (1965) mostró que la velocidad de la onda cambia alrededor de un 1 por ciento por cada 5°C. La compresibilidad del fluido aumenta con la presencia de gases libres, y se ha demostrado [Pearsall (1965)] que 1 parte de aire en 10,000 partes de agua en volumen reduce la velocidad de la onda en aproximadamente un 50 por ciento.

La presencia de sólidos en líquidos tiene una influencia menos drástica en la velocidad de la onda, a menos que sean comprimibles. Estudios de laboratorio [Weyler et al. (1971)] y pruebas de prototipos [Pearsall (1965)], muestran que los gases disueltos tienden a salir de la solución cuando la presión se reduce, incluso cuando permanece por encima de la presión del vapor del líquido. Esto resulta en una disminución significativa de la velocidad de la onda.

Por lo tanto, la velocidad de onda de una onda de presión positiva puede ser mayor que la de una onda negativa. Se necesitan más pruebas de prototipos para cuantificar la reducción en la velocidad de la onda debido a la reducción de la presión.

Halliwell [1963] presentó la siguiente expresión general para la velocidad de onda

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho[1 + (K/E)\psi]}} \quad (2.46)$$

donde  $\psi$  es un parámetro adimensional que depende de las propiedades elásticas del conducto;  $E$  = módulo de elasticidad de Young de las paredes del conducto; y  $K$  y  $\rho$  son el módulo volumétrico de elasticidad y densidad del fluido, respectivamente.

## 2.5 Fricción no estacionaria

En la derivación de las ecuaciones que gobiernan, asumimos que las fórmulas de fricción constante se pueden usar para calcular las pérdidas de carga del estado transitorio. Aunque esta aproximación produce resultados satisfactorios para calcular el primer pico de presiones transitorias, las oscilaciones de presión calculadas muestran una disipación muy lenta en comparación con la medida en los experimentos de laboratorio o la medida durante las pruebas de campo en proyectos reales. Esto no presenta serias limitaciones para determinar las presiones máximas o mínimas en instalaciones típicas u operaciones típicas. Sin embargo, los resultados calculados no son confiables para múltiples operaciones, como el arranque de las bombas después

de un corte de energía, la aceptación de la carga en las turbinas después del rechazo de la carga, o para el arranque o parada secuencial de turbo-maquinaria, etc.

Se han propuesto varios métodos para tener en cuenta los efectos de fricción inestable en los cálculos de flujo transitorio. Estos métodos pueden clasificarse en tres categorías: métodos cuasi-bidimensionales, integrales de convolución y basados en aceleración instantánea.

El termino de la fricción en la ecuación de cantidad de movimiento puede ser dividido en estacionario y no estacionario,

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + J_e + J_{ne} = 0 \quad (2.47)$$

donde  $J_s$  y  $J_u$  son los términos de fricción estacionaria y no estacionaria. El termino de fricción estacionaria puede ser expresado por la expresión de Darcy-Weisbach como se vió en el apartado anterior.

$$J_e = \frac{fV|V|}{2gD} \quad (2.48)$$

Uno de los modelos más recientes y simples para expresar el término de la fricción no estacionaria fue propuesto por Golia (1990). Esto fue posteriormente mejorado por Brunone et al. (1991) quien propone la relación siguiente

$$J_u = \frac{k_3}{g} \left( \frac{\partial V}{\partial t} - a \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (2.49)$$

donde  $\partial V/\partial t$  es la aceleración temporal local,  $\partial V/\partial x$  es la aceleración convectiva local y  $k_3$  es el coeficiente de fricción no estacionario. Al aplicar la Ec. (2.49). Este modelo de fricción no estacionaria se revela inestable y deficiente en determinadas condiciones. Se ha formulado la siguiente expresión modificada que solventa estas ineficiencias

$$J_u = \frac{k_3}{g} \left( \frac{\partial V}{\partial t} - a \operatorname{sign}(V) \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| \right) \quad (2.50)$$

Vardy and Brown (1996) sugieren que un valor constante de  $k_3$  basado en las condiciones iniciales debería ser lo suficientemente preciso para fines prácticos. Estudios anteriores han utilizado un modelo de  $k_3$  constante con buenos resultados. Como regla general, los resultados fueron mejores para los flujos iniciales que tenían números de Reynolds más altos. Vítkovský et al. (2000) proponen una alternativa al uso de un modelo de fricción inestable constante  $k_3$ , que es variar  $k_3$  a lo largo del evento transitorio dadas las condiciones de flujo local. Vardy and Brown (1996) demostraron que  $k_3$  varía considerablemente con el número de Reynolds y proponen la siguiente expresión,

$$k_3 = 2\sqrt{C^*} \quad (2.51)$$

donde  $C^*$  es un coeficiente de desintegración relacionado con el número de Reynolds con la siguiente expresión

$$\begin{aligned} C^* &= 7.41/Re^\kappa \\ \kappa &= \log_{10} \left( \frac{14.3}{Re^{0.05}} \right) \end{aligned} \quad (2.52)$$

## 2.6 Carácter matemático de las ecuaciones del golpe de ariete

En esta sección, discutimos varios parámetros de las ecuaciones que gobiernan y si el carácter de las mismas son hiperbólicas, parabólicas o elípticas. Cada tipo de estas ecuaciones describe un proceso o fenómeno físico particular. Por ejemplo, la propagación de ondas en un fluido se describe mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas. Además, una vez que conocemos el tipo de ecuaciones que gobiernan, se pueden seleccionar métodos numéricos adecuados para su solución.

Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento describen flujos transitorios en conductos cerrados. En estas ecuaciones, la distancia  $x$  y el tiempo  $t$  son dos variables independientes y la presión  $p$  y la velocidad del flujo  $V$  son dos variables dependientes. Las otras variables,  $a$ ,  $\rho$ ,  $f$  y  $D$ , son los parámetros del sistema y generalmente no varían con el tiempo; sin embargo, pueden ser funciones de  $x$ .

Aunque la velocidad de la onda  $a$  depende de las características del conducto y de las propiedades del fluido, las pruebas de laboratorio muestran que se reduce significativamente por una reducción de la presión, incluso cuando la presión permanece por encima de la presión del vapor del líquido.

### Clasificación de las ecuaciones gobernantes

Las ecuaciones (2.20) y (2.3) son un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. Ahora determinaremos el tipo de estas ecuaciones, haremos algunas observaciones cualitativas para su solución y discutiremos los métodos para integrarlas numéricamente. Estas ecuaciones pueden escribirse en forma de matriz.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} P \\ V \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} V & \rho a^2 \\ \frac{1}{\rho} & V \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} P \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \sin \theta - \frac{fV|V|}{D} \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

o

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{E} \quad (2.54)$$

donde

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} p \\ V \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} V & \rho a^2 \\ \frac{1}{\rho} & V \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Los autovalores,  $\lambda$ , de la matriz  $\mathbf{B}$  determinan el tipo de conjunto de ecuaciones diferenciales parciales. La ecuación característica de la matriz  $\mathbf{B}$  es

$$(V - \lambda)^2 = a^2 \quad (2.56)$$

Dado que ambos valores propios son reales y distintos, ec. (2.20) y (2.3) son un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas. Este tipo de ecuaciones describe la propagación de ondas en un fluido.

### Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales son necesarias para calcular las condiciones transitorias. En su mayoría, las condiciones iniciales corresponden a los flujos iniciales de estado estacionario. En esta sección, discutimos cómo especificar las condiciones de flujo inicial que son compatibles con las ecuaciones de flujo transitorio.

Las expresiones (2.20) y (2.3) describen un flujo no estacionario y no uniforme de un fluido ligeramente compresible en un conducto elástico. El flujo estacionario puede considerarse un caso especial en el que la variación en el tiempo de la velocidad del flujo y de la presión son ambas cero.

Si las condiciones iniciales corresponden a un flujo estacionario y todos los términos de las ecuaciones que gobiernan deben incluirse en el análisis, entonces las condiciones iniciales deben determinarse a partir de las simplificadas para flujos estacionarios. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones de ingeniería, varios términos de las ecuaciones que gobiernan son pequeños en comparación con los otros términos y pueden pasarse por alto. Esto simplifica considerablemente el análisis sin afectar significativamente la precisión de los resultados calculados. Estas ecuaciones simplificadas se derivan en la siguiente sección.

#### 2.6.1 Ecuaciones diferenciales parciales

Nuestras ecuaciones de partida son dos ecuaciones de diferencias parciales que son aquellas que tienen una forma como la siguiente expresión.

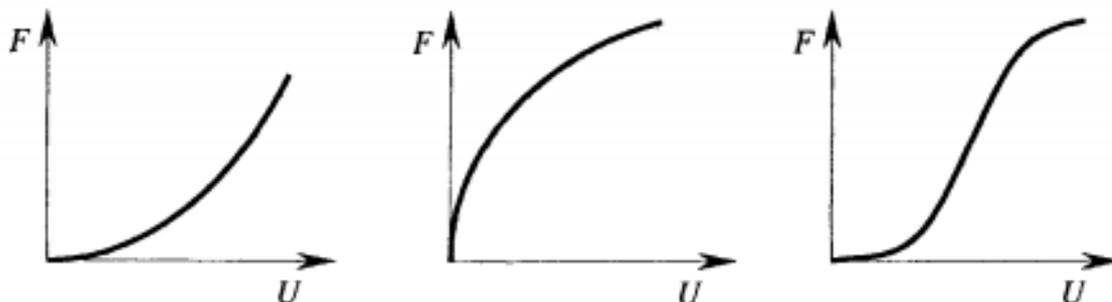
$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S \quad (2.57)$$

Donde  $U$  es una variable escalar,  $F$  es una función dada de  $U$ ,  $S$  se conoce como termino fuente y  $t$  y  $x$  son las coordenadas temporales y espaciales respectivamente, en el caso unidimensional. El termino fuente puede ser función de  $t$ ,  $x$ ,  $U$ , por separado o conjuntamente. Si el termino fuente incorpora la derivada  $\partial U/\partial x$ , se le llama hiperbólico.

Se pueden encontrar ejemplos de muchas formas diferentes de la función de flujo  $F(U)$ .  $F(U)$  puede tener naturaleza convexa, cóncava o no convexa. Se dice que la función de flujo es convexa si su derivada de segundo orden con respecto a  $U$  es positiva para todos los valores de  $U$ . Se dice que es cóncava si su derivada de segundo orden es negativa para todos los valores de  $U$ . Se dice que ser no convexa si el signo de la derivada de segundo orden cambia dependiendo del valor de  $U$ . La figura 2.1 muestra ejemplos de funciones de flujo convexas, cóncavas y no convexas.

#### 2.6.2 Invariantes de Riemann: Forma de las características

En este apartado se describen, basandonos en el desarrollo que se encuentra en Guinot (2003), las invariantes de Riemann y se explica en que consisten las características. Considerando la ecuación (2.57) de una ley conservativa, sin tener en cuenta el



**Figura 2.1** Ejemplos de funciones de flujo: convexo (izquierda), cóncavo (centro), no convexo (derecha)..

termino fuente. Suponiendo que tanto  $U$  como  $F$  son continuos en el espacio y el tiempo y que  $F$  depende solo de  $U$ , la ecuación (2.57) se puede reescribir como

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (2.58)$$

Se conoce a la ecuación (2.58) como la forma característica de la ecuación (2.57). La ecuación (2.58) tiene una interpretación física que posteriormente centraremos para nuestro caso de fluidos en conductos transitorios. Para un observador moviéndose a velocidad  $\lambda$ , la derivada de  $U$  con respecto al tiempo, también conocida como derivada total, es dada por

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.59)$$

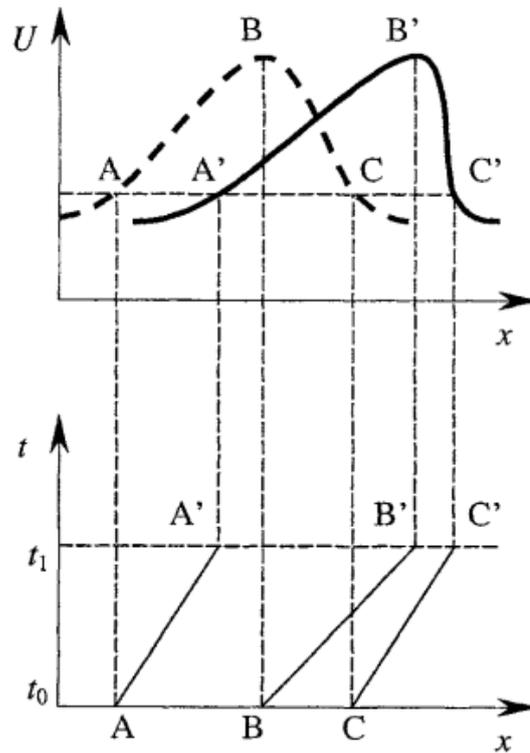
A lo largo de  $\lambda = \frac{dx}{dt}$ . Si  $\lambda = \frac{dF}{dU}$ , la derivada total es igual que el lado izquierdo de la ecuación (2.58). Por lo tanto,

$$\frac{DU}{Dt} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dU} \quad (2.60)$$

La trayectoria  $\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dU}$  se la conoce como línea característica y  $\frac{dF}{dU}$  es la velocidad de onda. La ecuación (2.60) quiere decir que la variable  $U$  permanece constante a lo largo de una trayectoria moviéndose a velocidad  $\frac{dF}{dU}$ .  $U$  se conoce entonces como invariante de Riemann.

La ecuación (2.60) permite calcular la solución de la ecuación (2.57) gráficamente cuando las condiciones iniciales en  $U$  sean suficientemente conocidas y si la expresión de  $F$  no es demasiado compleja. Suponga que el perfil inicial de  $U$  se conoce en todos los puntos en un momento inicial  $t_o$ . Este perfil inicial se denotará con  $U_o(x)$ . El propósito es determinar la solución en un momento posterior  $t_1$ . Esto se puede hacer gráficamente usando la representación de la ecuación (2.60) en el plano  $x$ - $t$ , como se ilustra en la Figura 2.2.

La gráfica de arriba de la figura 2.2 representa el perfil inicial en el instante  $t_o$  (línea discontinua) y el perfil final en el instante  $t_1$  (línea continua). La gráfica de abajo representa las líneas características en el plano  $x$ - $t$ .  $U_A$  denota el valor de  $U$  en el punto dado  $A$  en el instante  $t_o$ . Entre  $t_o$  y  $t_1$ , una partícula inicialmente en  $A$  viaja a lo largo de la característica a una velocidad  $\lambda_A = \frac{dF}{dU_A}$ .

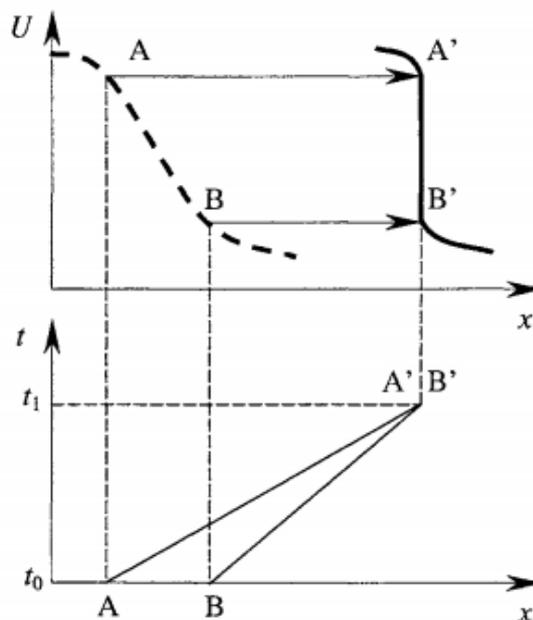


**Figura 2.2** Determinación gráfica de la solución de un problema de valor inicial utilizando el plano  $x-t$  para una ley de conservación escalar. Perfil inicial (arriba, línea discontinua), características en el espacio de fase (abajo) y perfil final (arriba, línea continua)..

La velocidad de onda que depende directamente de  $U$  es constante a lo largo de la característica y la característica es una línea recta en el espacio de fase. Aplicar el mismo método a otros puntos (los puntos  $B$  y  $C$  en la figura) permite determinar el perfil final. El método es aplicable siempre que el perfil sea continuo. La invariancia de  $U$  a lo largo de la línea característica también significa que los valores mínimo y máximo de  $U$  se conservan a lo largo del tiempo. Por lo tanto, las variaciones del perfil inicial se conservan en el final, aunque la forma puede verse alterada debido a las diferentes velocidades de propagación asociadas a los diferentes valores de  $U$ . Sin embargo, dependiendo de la función de flujo  $F$  y la distribución inicial de  $U$ , el perfil puede volverse discontinuo después de algún tiempo. Esto ocurre típicamente cuando  $F$  es una función no lineal de  $U$ . En el caso de un perfil discontinuo, la derivada espacial pierde sentido y el principio de invariancia de  $U$  a lo largo de la característica ya no es aplicable.

### 2.6.3 Ondas de choque, onda expansiva y discontinuidades de contacto

Cuando  $F$  es una función no lineal de  $U$ , la pendiente  $dF/dU$  de la línea característica (a lo largo de la cual  $U$  es constante) varía con  $U$ . En consecuencia, las diversas partes del perfil  $U(x, t)$  viajan a diferentes velocidades, conduciendo a una alteración de la forma original del perfil (mostrado en la Fig. 2.2).



**Figura 2.3** Formación de una onda de choque en el espacio físico (arriba) y el espacio de fase (abajo). Perfil inicial (línea discontinua) y perfil final (línea continua)..

### Onda de choque

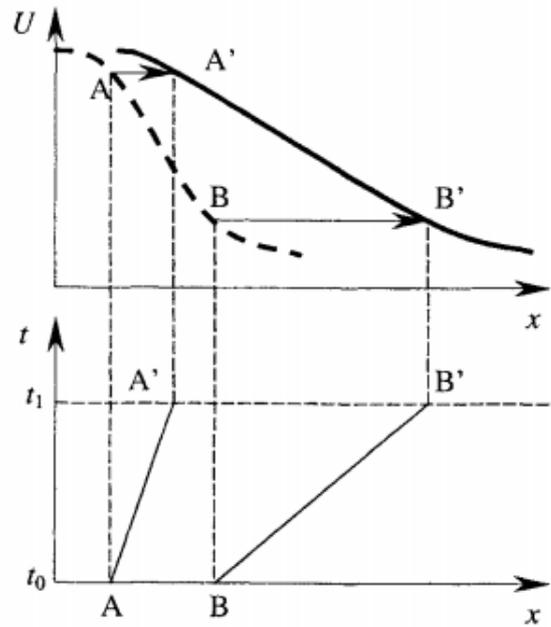
Una onda de choque aparece cuando un punto del perfil (punto  $A$  en la figura 2.3) viaja más rápido que el de delante (punto  $B$  en la figura 2.3). Los perfiles se vuelven más empinados a medida que pasa el tiempo. Después de cierto tiempo, las trayectorias en el espacio de fase se cruzan. El punto  $A$  alcanza el punto  $B$  y  $U$  toma dos (o más) valores en el mismo punto. El perfil se vuelve discontinuo y permanece así en momentos posteriores. Este perfil discontinuo, donde la velocidad de la onda es mayor en la cola que en el frente, se llama onda de choque. Cabe señalar que la velocidad de propagación del choque es diferente a la de las velocidades de las olas en el frente y en la cola.

### Onda expansiva

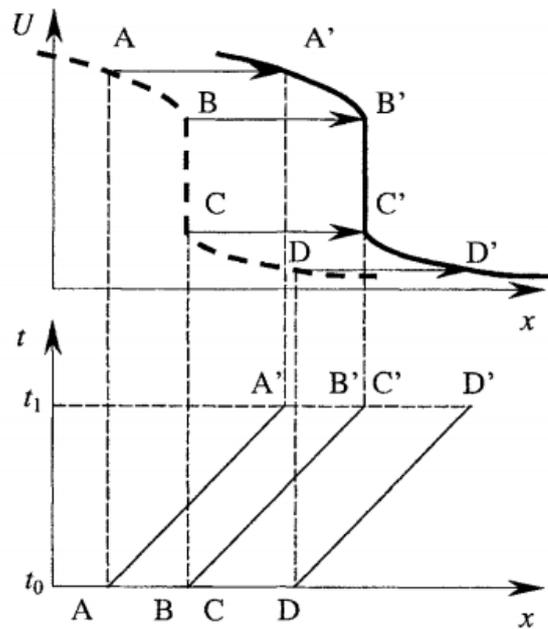
Por el contrario, pueden ocurrir situaciones en las que la parte delantera del perfil se desplaza más rápido que la cola. En este caso, el perfil se suaviza a medida que pasa el tiempo (Figura 2.4). Una onda expansiva del tipo que se muestra en la Figura 2.4 también se denomina onda de rarefacción.

### Discontinuidad de contacto

Si la función de flujo es lineal (es decir,  $F = \lambda U$  con  $\lambda$  constante), todas las ondas viajan con la misma velocidad  $\lambda$ , independientemente del valor de  $U$ . Si el perfil es inicialmente suave y continuo, lo seguirá siendo sin ninguna alteración de la forma. Si inicialmente es discontinuo, lo seguirá siendo en momentos posteriores. Una discontinuidad en el perfil  $U$ , en cada lado del cual la velocidad de la onda es la misma, se llama discontinuidad de contacto. La figura 2.5 ilustra el caso en el que el perfil inicial es continuo entre los puntos  $A$  y  $B$ , y entre  $C$  y  $D$ , y discontinuo en  $B$  (o  $C$ ).  $B$  y  $C$  tienen la misma abscisa, pero  $U_B$  y  $U_C$  son diferentes, de ahí la discontinuidad del perfil.



**Figura 2.4** Formación de una onda de rarefacción en el espacio físico (arriba) y en el espacio de fase (abajo). Perfil inicial (línea discontinua) y perfil final (línea continua)..



**Figura 2.5** Propagación de una discontinuidad de contacto. Bocetos en el espacio físico (arriba) y en el espacio de fase (abajo)..

En el próximo capítulo se verán una serie de métodos para la resolución de las ecuaciones del golpe de ariete, uno de los métodos que se analiza aunque no se implementará es el método de las características y en el se particularizará la teoría de los invariantes de Riemann a nuestro caso.



# 3 Métodos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas no lineales

---

En este capítulo se desarrollan distintos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas no lineales. En lo que respecta al método de la características se seguirá la descripción de Chaudhry (2014).

## 3.1 Introducción

Como se demostró anteriormente, las ecuaciones de cantidad de movimiento y continuidad son ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas cuasi-lineales. No se dispone de una solución de forma cerrada de estas ecuaciones. Sin embargo, al descuidar o linealizar los términos no lineales se han desarrollado métodos. Estos métodos son aproximados y no se pueden utilizar para analizar grandes sistemas o sistemas con condiciones de contorno complejas.

Los siguientes métodos, adecuados para análisis informáticos, están disponibles para integrar numéricamente las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas no lineales:

- Método de las características
- Método de diferencias finitas
- Método de elementos finitos
- Método espectral
- Método de integral de límites
- Método de Godunov

El método de características se ha vuelto popular y se usa ampliamente para la solución de problemas transitorios hidráulicos unidimensionales, especialmente si la velocidad de la onda es constante. Este método ha demostrado ser superior a otros métodos en varios aspectos, como la simulación correcta de frentes de onda

pronunciados, la ilustración de la propagación de ondas, la facilidad de programación y la eficiencia de cómputos.

Los métodos de diferencias finitas pueden clasificarse en dos categorías: explícitas e implícitas. Ambas categorías tienen varios esquemas. Los métodos implícitos suelen tener la ventaja de que permiten pasos de tiempo más largos. Sin embargo, si se utiliza un intervalo de tiempo demasiado grande, la precisión del esquema se ve afectada negativamente y pueden producirse oscilaciones numéricas en algunos casos que pueden producir resultados totalmente incorrectos. El método de los elementos finitos no ofrece ninguna ventaja significativa para la solución de problemas unidimensionales. El método espectral no es adecuado para condiciones de frontera no periódicas y el método de integral límite, no maneja de manera eficiente los problemas dependientes del tiempo en comparación con los otros métodos disponibles, especialmente si hay choques o se forman perforaciones. Ninguno de estos métodos se analiza con más detalle en el presente documento.

Los métodos en los que se va a centrar este trabajo van a ser el método de diferencias implícitas y el método de Godunov de primer y segundo orden. Estos van a ser analizados en este capítulo, el método de Godunov de segundo ha sido implementado en la herramienta, el método de Godunov de primer orden ha sido programado pero no se ha implementado en la herramienta, y el método de diferencias implícitas se ha intentado implementar pero no está lo suficientemente documentado. El método de las características también se mostrará aquí porque como se acaba de decir es el más popular y común, además para las condiciones de contorno se usan las características.

## 3.2 Método de las Características

En este método se aplica la teoría de los invariantes de Riemann a las ecuaciones que gobiernan la dinámica de fluidos. Para facilitar la discusión, reescribamos la forma simplificada las ecuaciones de cantidad de movimiento y continuidad derivadas en el último capítulo como

$$L_1 = \frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + RQ|Q| = 0 \quad (3.1)$$

$$L_2 = a^2 \frac{\partial Q}{\partial x} + gA \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (3.2)$$

donde  $R = f/(2DA)$ . Se va a considerar una combinación lineal de las ecuaciones (3.1) y (3.2),  $L = L_1 + \lambda L_2$ , donde  $\lambda$  es un coeficiente desconocido. Multiplicando  $\lambda$  por la ecuación (3.2), añadiendo la ecuación (3.1) y reordenando términos de la ecuación resultante, obtenemos

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda a^2 \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \lambda gA \left( \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + RQ|Q| = 0 \quad (3.3)$$

Si  $H = H(x,t)$  y  $Q = Q(x,t)$ , entonces la derivada total es

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (3.4)$$

y

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (3.5)$$

definiendo el coeficiente desconocido  $\lambda$  como

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{dx}{dt} = \lambda a^2 \quad (3.6)$$

es decir,

$$\lambda = \pm \frac{1}{a} \quad (3.7)$$

Usando las ecuaciones (3.4) y (3.5), la ecuación (3.3) se puede escribir

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{gA}{a} \frac{dH}{dt} + RQ|Q| = 0 \quad (3.8)$$

si

$$\frac{dx}{dt} = a \quad (3.9)$$

y

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{gA}{a} \frac{dH}{dt} + RQ|Q| = 0 \quad (3.10)$$

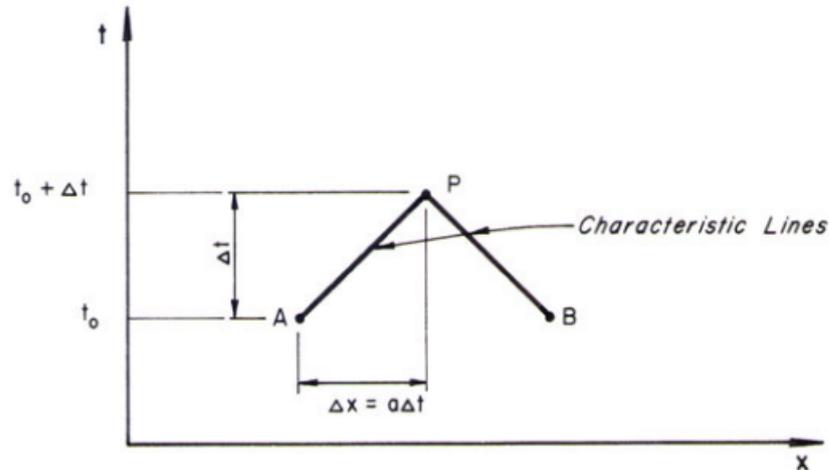
si

$$\frac{dx}{dt} = -a \quad (3.11)$$

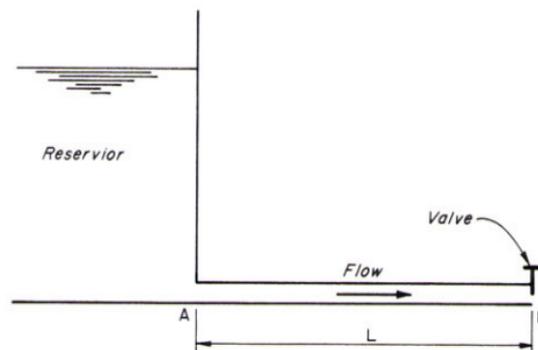
Las ecuaciones (3.8) y (3.10) se denominan ecuaciones de compatibilidad. Tenga en cuenta que la ecuación (3.8) es válida si la ecuación (3.9) se satisface y que la ecuación (3.10) es válida si la ecuación (3.11) se satisface. En otras palabras, imponiendo las relaciones dadas por las ecuaciones (3.9) y (3.11), hemos eliminado la variable independiente  $x$ , y hemos convertido las ecuaciones diferenciales parciales, ecuaciones (3.1) y (3.2), en ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable independiente  $t$ . Sin embargo, hemos pagado un precio por esta simplificación: las ecuaciones (3.1) y (3.2) son válidas en todas partes en el plano  $x$ - $t$ ; sin embargo, (3.8) es válida solo a lo largo de la línea recta.

En el plano  $x$ - $t$ , las ecuaciones 3.9 y 3.11 representan dos líneas rectas que tienen pendientes  $\pm a$ , estas son las líneas características.

Antes de presentar un procedimiento para resolver las ecuaciones 3.8 y 3.10, analicemos primero el significado físico de las líneas características en el plano  $x$ - $t$ . Para facilitar la discusión, consideremos el sistema de tuberías que se muestra en la Fig. 3.2. El sistema de tuberías tiene un depósito de carga constante en el extremo superior (en  $x = 0$ ) y una válvula en el extremo aguas abajo (en  $x = L$ ), y las condiciones transitorias se producen al cerrar la válvula. Las ecuaciones de compatibilidad (ecuaciones 3.8 y 3.10) son válidas a lo largo de la longitud de la tubería (es decir, para  $0 < x < L$ ) y se requieren condiciones de contorno especiales en los extremos, es decir, en  $x = 0$  y en  $x = L$  (Figura 3.3).



**Figura 3.1** Líneas características en el plano x-t..



**Figura 3.2** Sistema de tuberías..

Supongamos que el flujo es estacionario en el momento  $t = 0$  cuando la válvula se cierra instantáneamente. Esto reduce el flujo en la válvula a cero, lo que aumenta la presión en la válvula. Debido al aumento de presión, una onda de presión positiva (la presión es más alta detrás del frente de onda que en el frente) viaja en dirección contracorriente. La línea BC es la trayectoria de esta onda en el plano x-t, como se muestra en la figura 3.4.

De esta figura se desprende claramente que las condiciones en la Región I dependen únicamente de las condiciones iniciales porque el límite aguas arriba permanece sin cambios, mientras que en la Región II dependen de las condiciones impuestas por el límite aguas abajo. Así, la línea característica BC separa las dos regiones con diferentes soluciones. Si las excitaciones se imponen simultáneamente en los puntos A y B, entonces la región influenciada por las condiciones iniciales es como se muestra en la figura 3.5; la línea característica AC separa las regiones influenciadas por el límite aguas arriba y por las condiciones iniciales, y la línea BC separa las regiones influenciadas por el límite aguas abajo y por las condiciones iniciales. En otras palabras, las líneas características en el plano x-t representan las trayectorias de viaje de las perturbaciones iniciadas en varios lugares del sistema.

Analicemos ahora cómo calcular las presiones y descargas transitorias. Supongamos

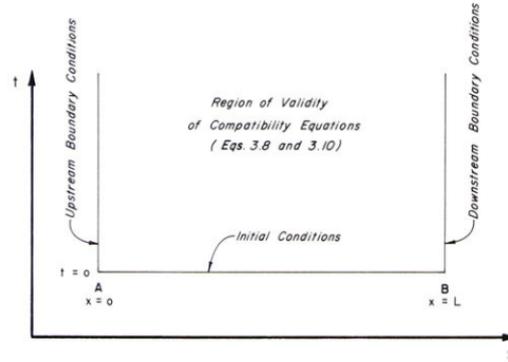


Figura 3.3 Regiones de validez para una sola tubería..

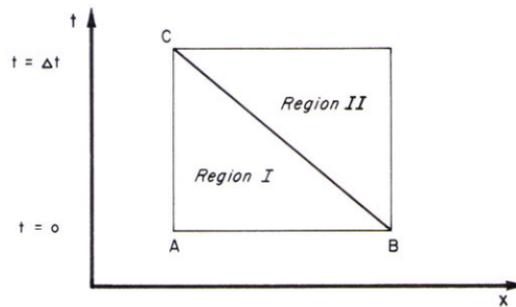


Figura 3.4 Excitación en el extremo aguas abajo..

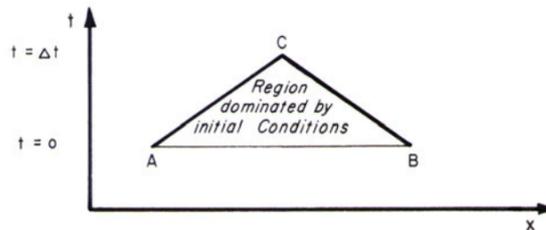


Figura 3.5 Excitación en los extremos aguas arriba y aguas abajo..

que se conocen la altura,  $H$ , y la descarga,  $Q$  en el tiempo  $t = t_0$ . Estos pueden ser conocidos inicialmente (es decir, en  $t = 0$ , estas son condiciones iniciales) o se calcularon durante el paso de tiempo anterior. Queremos calcular los valores desconocidos de  $H$  y  $Q$  en el tiempo  $t = t_0 + \Delta t$ . Con referencia a la figura 3.1, digamos que conocemos los valores de  $Q$  y  $H$  en los puntos  $A$  y  $B$  y queremos determinar sus valores en el punto  $P$ . Esto se puede hacer resolviendo las ecuaciones (3.8) y (3.10) de la siguiente manera: Al multiplicar el lado izquierdo de la ecuación (3.8) por  $dt$  e integrando, obtenemos

$$\int_P^A dQ + \frac{gA}{a} \int_P^A dH + R \int_P^A Q|Q|dt = 0 \tag{3.12}$$

Usaremos los subíndices  $A$  y  $P$  para indicar ubicaciones en el plano  $x-t$ ; por ejemplo,  $Q_P$  es la descarga en el punto  $P$ . Dado que la expresión (3.8) es válida solo a lo largo de la línea característica  $AP$ , hemos utilizado los límites para la integración de  $A$  a

P. Podemos evaluar fácilmente los dos primeros términos integrales de la ecuación (3.12). Sin embargo, no podemos hacerlo para el tercer término, que representa las pérdidas por fricción, porque no conocemos explícitamente la variación de  $Q$  con respecto a  $t$ . Al usar una aproximación de primer orden, podemos evaluar la integral del tercer término como

$$\begin{aligned} R \int_P^A Q|Q|dt &\simeq RQ_A|Q_A|(t_P - t_A) \\ &= RQ_A|Q_A|\Delta t \end{aligned} \quad (3.13)$$

En otras palabras,  $Q$  permanece constante de A a P para la evaluación de este término. Por tanto, la ecuación (3.12) se convierte en

$$Q_P - Q_A + \frac{gA}{a}(H_P - H_A) + R\Delta t Q_A|Q_A| = 0 \quad (3.14)$$

Tenga en cuenta que la ecuación (3.14) es exacta excepto por la aproximación del término de fricción. Esta aproximación de primer orden generalmente produce resultados satisfactorios para aplicaciones de ingeniería típicas. Sin embargo, la aproximación de primer orden puede producir resultados inestables si el término de fricción se vuelve grande. Para evitar esto, podemos usar un intervalo computacional  $\Delta t$  más corto o usar una aproximación de orden superior o un procedimiento iterativo para evaluar el término de fricción. Por ejemplo, una aproximación de segundo orden de la integral del tercer término de la ecuación (3.12) es

$$R \int_P^A Q|Q|dt = 0.5R\Delta t[Q_A|Q_A| + Q_P|Q_P|] \quad (3.15)$$

Esto se conoce comúnmente como la regla trapezoidal. Otras dos aproximaciones para el término de fricción son

$$R \int_P^A Q|Q|dt = R\Delta t \frac{Q_A + Q_P}{2} \left| \frac{Q_A + Q_P}{2} \right| \quad (3.16)$$

$$R \int_P^A Q|Q|dt = R\Delta t|Q_A|Q_P \quad (3.17)$$

Dado que se desconoce el valor de  $Q_P$ , se puede utilizar un procedimiento iterativo para las aproximaciones de las ecuaciones (3.15) y (3.16). La aproximación de la ecuación (3.17), sin embargo, da como resultado una ecuación lineal similar a la ecuación (3.14) que pueden resolverse directamente [Wylie, 1983]. Al proceder de manera similar, podemos escribir la ecuación (3.10) como

$$Q_P - Q_B - \frac{gA}{a}(H_P - H_A) + R\Delta t Q_B|Q_B| = 0 \quad (3.18)$$

Combinando las variables conocidas juntas, la ecuación (3.14) puede ser escrita como

$$Q_P = C_p - C_a H_P \quad (3.19)$$

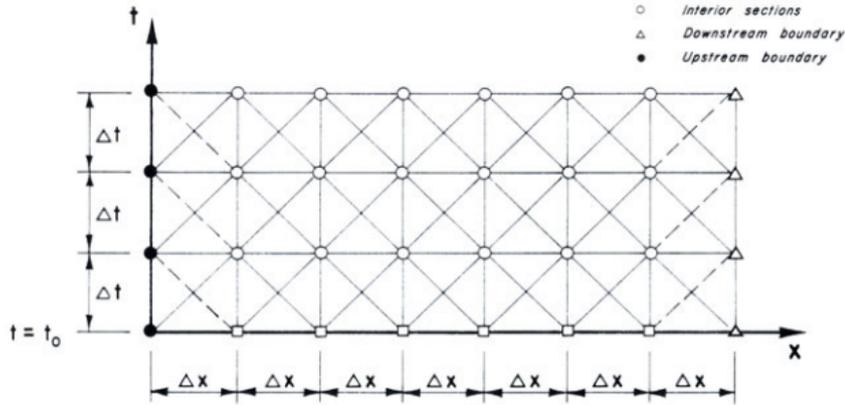


Figura 3.6 Red característica.

$$Q_P = C_n + C_a H_P \tag{3.20}$$

donde

$$C_p = Q_A + \frac{gA}{a} H_A - R\Delta t Q_A |Q_A| \tag{3.21}$$

$$C_n = Q_B - \frac{gA}{a} H_B - R\Delta t Q_B |Q_B| \tag{3.22}$$

y

$$C_a = \frac{gA}{a} \tag{3.23}$$

Tenga en cuenta que la ecuación (3.19) es válida a lo largo de la línea característica positiva AP y (3.20), a lo largo de la línea característica negativa BP (Fig. 3.1). Los valores de  $C_p$  y  $C_n$  se conocen y son constantes para cada paso de tiempo, aunque pueden variar de un intervalo de tiempo a otro, y  $C_a$  es una constante que depende de las propiedades del conducto. Nos referiremos a la ecuación (3.19) como la ecuación característica positiva y la ecuación (3.20) como la ecuación característica negativa. En estas ecuaciones tenemos dos incógnitas, a saber,  $H_P$  y  $Q_P$ . Los valores de estas incógnitas se pueden determinar resolviendo simultáneamente estas dos ecuaciones, es decir,

$$Q_P = 0.5(C_p + C_n) \tag{3.24}$$

Ahora, el valor de  $H_P$  puede determinarse a partir de la ecuación (3.19) o (3.20). Por lo tanto, al usar las ecuaciones (3.19) y (3.24), se pueden determinar  $Q_P$  y  $H_P$  en todos los puntos interiores en el instante  $t + \Delta t$  (es decir, el final del paso de tiempo) (ver Fig. 3.6). Sin embargo, para cerrar el problema se necesitarán unas condiciones de contorno especiales para determinar las condiciones en los límites en el instante para  $t + \Delta t$ .

Para ilustrar el uso de las ecuaciones anteriores, consideremos la tubería de la figura 3.2. La tubería se divide en n tramos (Fig. 3.6), cada uno de los cuales tiene una longitud  $\Delta x$ . Los extremos de estos tramos se denominan secciones, nodos o

puntos de cuadrícula. Las secciones finales de cada tubería se denominan límites, y las secciones que excluyen los límites se denominan secciones interiores, nodos interiores o puntos interiores de la cuadrícula.

Primero se calculan las condiciones de estado estacionario en  $t = t_0$  en todos los puntos de la cuadrícula. Luego, para determinar las condiciones en  $t = t_0 + \Delta t$ , las ecuaciones (3.19) y (3.24) se utilizan para los nodos interiores, y se utilizan condiciones de contorno especiales para los nodos finales. Un vistazo más profundo a la figura 3.6 muestra que las condiciones en los límites en  $t = t_0 + \delta t$  deben conocerse para calcular las condiciones en  $t = t_0 + 2\Delta t$  en los nodos interiores adyacentes a los límites. Ahora el caudal y la altura en el instante  $t = t_0 + \Delta t$  se conocen en todos los nodos,  $Q_P$  y  $H_P$  en  $t = t_0 + 2\Delta t$  se calculan siguiendo el procedimiento que se acaba de describir. De esta manera, los cálculos proceden paso a paso hasta que se determinan las condiciones transitorias durante el tiempo requerido.

### 3.3 Método implícito de diferencias finitas (IFDM)

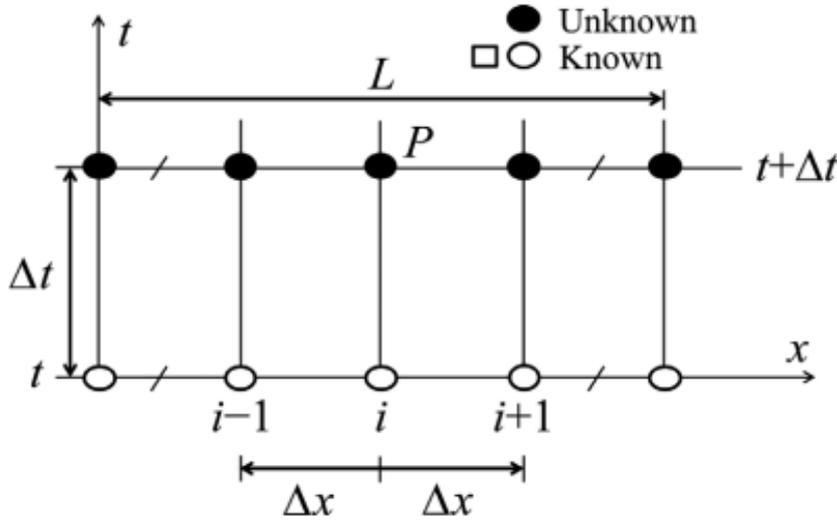
Existe poca literatura sobre la simulación del golpe de ariete utilizando métodos de diferencias finitas de tipo implícito, donde la solución de las ecuaciones básicas de flujo transitorio requiere resolver un sistema de ecuaciones. Esto puede deberse a dos razones: la implementación de IFDM tiene un cierto nivel de complejidad porque es necesario resolver un conjunto acoplado de ecuaciones (lineales o no lineales). Las condiciones de contorno en el contexto IFDM son difíciles de manejar porque requiere agregar puntos de cuadrícula ficticios ubicados más allá de los límites de la tubería, siendo también necesario establecer sistemas adicionales de ecuaciones que permitan resolver el flujo y la presión en cada nodo límite de la red.

En general, IFDM es incondicionalmente estable y se utiliza para resolver el flujo transitorio en aquellos casos en los que es necesario adoptar pasos de tiempo mayores ( $\Delta t$ ) sin tener en cuenta las limitaciones dadas por el número de Courant ( $C_n$ ). Sin embargo, IFDM no está exento de dispersión y atenuación numérica incluso cuando el flujo transitorio se resuelve en una red de tuberías muy simple. Otros autores propusieron resolver las ecuaciones del golpe de ariete en un sistema de red utilizando el método de diferencia central implícita para permitir grandes pasos de tiempo, donde las ecuaciones en diferencias no lineales resultantes se organizan en una matriz dispersa y se resuelven usando el procedimiento de Newton-Raphson. El método centrado implícito da una solución que es marginalmente estable, donde se pueden usar incrementos de tiempo en la solución. Los programas informáticos implícitos son algo más difíciles de escribir y depurar, ya que la solución simultánea oculta cualquier fuente de error en la programación. Por todo ello, finalmente no se ha podido implementar en la herramienta de simulación pese a que se ha intentado.

#### 3.3.1 Descripción del método

La descripción de este método se basa en Twyman Q. (2018). Para este método se parte de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento de la siguiente manera,

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a}{c} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3.25)$$



**Figura 3.7** Cuadrícula de espacio-tiempo para IFDM..

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + ac \frac{\partial H}{\partial x} + RQ|Q| = 0 \quad (3.26)$$

Donde  $c = gA/a$ .

Según la Figura 3.7, se han calculado las variables de estado en el tiempo  $t$ , siendo necesario calcular nuevos valores en el tiempo  $t = t + \Delta t$ . Para lograr este propósito, las derivadas parciales en las ecuaciones (3.25) y (3.26) pueden aproximarse por diferencias finitas, como sigue:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{(H_{i+1}^{t+\Delta t} + H_{i+1}^t) - (H_i^{t+\Delta t} + H_i^t)}{2\Delta x} \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{(H_{i+1}^{t+\Delta t} + H_{i+1}^t) - (H_i^{t+\Delta t} + H_i^t)}{2\Delta t} \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(Q_{i+1}^{t+\Delta t} + Q_{i+1}^t) - (Q_i^{t+\Delta t} + Q_i^t)}{2\Delta x} \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{(Q_{i+1}^{t+\Delta t} + Q_i^{t+\Delta t}) - (Q_{i+1}^t + Q_i^t)}{2\Delta t} \quad (3.30)$$

Por otro lado:

$$RQ|Q| = \frac{R}{4}(Q_i^t + Q_{i+1}^t)|(Q_i^t + Q_{i+1}^t| \quad (3.31)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.27-3.31) en las ecuaciones (3.25) y (3.26),

$$d_1 Q_i^{t+\Delta t} + d_2 Q_{i+1}^{t+\Delta t} - d_3 H_i^{t+\Delta t} + d_2 H_{i+1}^{t+\Delta t} + d_4 = 0 \quad (3.32)$$

$$-c_1 Q_i^{t+\Delta t} + c_1 Q_{i+1}^{t+\Delta t} + c_2 H_i^{t+\Delta t} + c_3 H_{i+1}^{t+\Delta t} + c_4 = 0 \quad (3.33)$$

Donde los coeficientes son:

$$d_1 = 2(1 - \theta_1) - \frac{\theta_2 \Delta t (Q_i^t + Q_{i+1}^t)}{A \Delta x} + \frac{f_{av} \Delta t \varepsilon |Q_i^t + Q_{i+1}^t|}{4DA} \quad (3.34)$$

$$d_2 = 2\theta_1 + \frac{\theta_2 \Delta t (Q_i^t + Q_{i+1}^t)}{A \Delta x} + \frac{f_{av} \Delta t \varepsilon |Q_i^t + Q_{i+1}^t|}{4DA} \quad (3.35)$$

$$d_3 = \frac{(2\theta_2)gA\Delta t}{\Delta x} \quad (3.36)$$

$$d'_4 = \frac{2(1 - \theta_2)gA\Delta t (H_{i+1}^t - H_i^t)}{\Delta x} - 2[\theta_1 Q_{i+1}^t + (1 - \theta_1)Q_i^t] \quad (3.37)$$

$$d_4 = d'_4 + \frac{\Delta t}{A \Delta x} (Q_{i+1}^t)[(1 - \theta_2)Q_{i+1}^t - (1 - \theta_2)Q_i^t]$$

$$c_1 = \frac{a^2 \theta_2}{\Delta x} \quad (3.38)$$

$$c_2 = \frac{(1 - \theta_1)gA}{\Delta t} - \frac{g\theta_2(Q_i^t + Q_{i+1}^t)}{2\Delta x} \quad (3.39)$$

$$c_3 = \frac{gA\theta_1}{\Delta t} + \frac{g\theta_2(Q_i^t + Q_{i+1}^t)}{2\Delta t} \quad (3.40)$$

$$c'_4 = \left( \frac{-gA}{\Delta t} \right) [\theta_1 H_{i+1}^t + (1 - \theta_1)H_i^t]$$

$$c''_4 = c'_4 + \frac{g}{2\Delta x} (Q_i^t + Q_{i+1}^t)[(1 - \theta_2)H_{i+1}^t - (1 - \theta_2)H_i^t] \quad (3.41)$$

$$c_4 = c''_4 + \frac{a^2}{\Delta x} [(1 - \theta_2)Q_{i+1}^t - (1 - \theta_2)Q_i^t]$$

Donde  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son coeficientes de ponderación,  $\varepsilon =$  constante de linealización y  $f_{av}$  corresponde a un valor medio  $\left( \frac{f_i^t + f_{i+1}^t}{2} \right)$ .

### 3.3.2 Acoplamiento de ecuaciones

Las ecuaciones (3.34-3.41), junto a unas condiciones de contorno se pueden usar para construir un sistema de bandas diagonales de dimensiones  $2X(N + 1)$  - ver ecuación (3.42), que se puede convertir eficientemente en un sistema tri-diagonal. La ecuación (3.42) muestra el sistema de ecuaciones para una tubería dividida en  $N$  tramos, donde la primera y la última fila corresponden al valor de la condición de contorno  $H_P^{t+\Delta t}$  de cada nodo límite. Las filas restantes se generan a partir de la aplicación de las ecuaciones (3.32) y (3.33) en cada tramo de tubería. Todos los coeficientes tienen un superíndice que identifica el número de alcance (por ejemplo, en  $c_1^2$  el superíndice 2 indica que  $c_1$  se calcula utilizando los datos de alcance 2. Esta indicación es relevante porque las variables de estado pueden variar de un alcance a otro. Por ello, la matriz no siempre será simétrica aunque su estructura tenga forma de bandas. Cada sistema

de ecuaciones tendrá un tamaño diferente según el número de tramos asignados a cada tubería. Una vez desconectada la red, genera un sistema de ecuaciones lineales para cada tubería de la red. El cálculo de las variables de estado se realiza en cada tubería independientemente del resto. El algoritmo funciona de la siguiente manera para cada tubería del sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1^1 & d_2^1 & -d_3^1 & d_3^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1^1 & c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1^2 & d_2^2 & -d_3^2 & d_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1^2 & c_2^2 & c_2^2 & c_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_1^3 & d_2^3 & -d_3^3 & d_3^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1^3 & c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1^N & d_2^N & -d_3^N & d_3^N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1^N & c_1^N & c_2^N & c_3^N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ H_1 \\ Q_2 \\ H_2 \\ Q_3 \\ H_3 \\ \dots \\ \dots \\ Q_N \\ H_N \\ Q_{N+1} \\ H_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{P1} \\ -d_4^1 \\ -c_4^1 \\ -d_4^2 \\ -c_4^2 \\ -d_4^3 \\ -c_4^3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ -d_4^N \\ -c_4^N \\ H_{PN+1} \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

a)  $t = t + \Delta t$  Para cada nodo interno i:

- Calcular  $H_i^{t+\Delta t}$  y  $Q_i^{t+\Delta t}$  para  $i = 2$  a  $N$  utilizando las ecuaciones (3.32-3.41) organizadas de acuerdo la forma matricial.
- Calcular  $H_P^{t+\Delta t}$ .
- Resolver el sistema de ecuaciones (3.42) y reasignar términos haciendo  $H_i^t = H_i^{t+\Delta t}$  y  $Q_i^t = Q_i^{t+\Delta t}$  para  $i = 1$  a  $N + 1$ .

b) Vuelta a a) hasta completar la simulación.

### 3.4 Método de Godunov

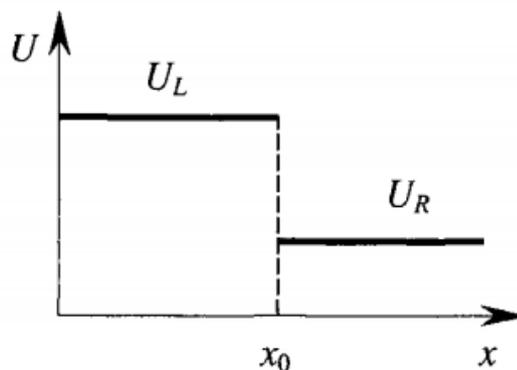
En primer lugar antes de hablar del método de Godunov es necesario introducir el problema de Riemann. La descripción de este método se basa en Guinot (2003).

#### 3.4.1 Problema de Riemann

El problema de Riemann (RP) es una característica esencial de los esquemas tipo Godunov, ya que se usa directamente en el procedimiento de solución.

El problema de Riemann es un problema de valor inicial, es decir, un problema planteado suponiendo que el espacio se extiende indefinidamente en direcciones tanto positivas como negativas. Consiste en encontrar la solución (evolutiva en el tiempo) del problema inicial constante por partes.

$$U(x, t = 0) = \begin{cases} U_L, & \text{para } x \leq x_o \\ U_R, & \text{para } x \geq x_o \end{cases} \quad (3.43)$$



**Figura 3.8** Esquema de definición del problema de Riemann..

donde  $U_L$  y  $U_R$ , llamados estados izquierdo y derecho del problema de Riemann respectivamente, son valores constantes conocidos.  $x_o$  es la ubicación de la discontinuidad inicial (Figura 3.8).

Tenga en cuenta que muchas publicaciones caracterizan el problema de Riemann utilizando el signo de desigualdad  $<$  en lugar de  $\leq$  en la primera ecuación de (3.43). Aquí se prefiere la desigualdad  $\leq$  porque asegura la definición del perfil inicial  $U(x, t_0)$  en todos los puntos del dominio (incluido  $x = x_o$ ). Por el contrario, el uso del signo  $<$  en la primera ecuación (3.43) excluye implícitamente el punto  $x_o$  de la definición de la condición inicial, lo que puede dar lugar a complicaciones extras en determinadas circunstancias. Considere, por ejemplo, el caso donde no hay movimiento para todo  $U$ . Entonces, el perfil permanece sin cambios en todo momento. Si el perfil inicial no está definido para  $x = x_o$ , la solución permanecerá indefinida en  $x = x_o$  para todos los tiempos. Sin embargo, el cálculo de  $U$  en tiempos posteriores a  $x = x_o$  es una característica esencial de los esquemas tipo Godunov. Por eso a continuación se prefiere usar la notación (3.43) porque asegura la definición de la condición inicial en todos los puntos del dominio computacional.

La situación de no equilibrio inducida por la diferencia entre  $U_L$  y  $U_R$  hace que el perfil inicial evolucione en el tiempo. Aparece una onda (choque o discontinuidad de contacto) y se repite en el espacio de fase. La solución en un tiempo  $t > t_o$  consiste en una región perturbada que separa los dos estados  $U_L$  y  $U_R$ . El perfil en esta región depende de  $U_L$  y  $U_R$ . Resolver el RP significa encontrar la distribución  $U(x, t)$  en todos los puntos del espacio (incluida la región perturbada) de los estados (conocidos) izquierdo y derecho del RP.

### 3.4.2 Los seis pasos de los algoritmos tipo Godunov

La filosofía subyacente de los esquemas tipo Godunov consiste en resolver ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas sobre volúmenes, mientras se trata de variables esencialmente discontinuas. Un flujo continuo se considera un caso particular de flujo discontinuo. Este enfoque presenta varias ventajas: (i) los perfiles continuos y discontinuos son tratados exactamente de la misma manera, sin necesidad de tratamientos particulares de choques y discontinuidades de contacto, y (ii) se respeta el carácter conservador de las ecuaciones diferenciales parciales a resolver.

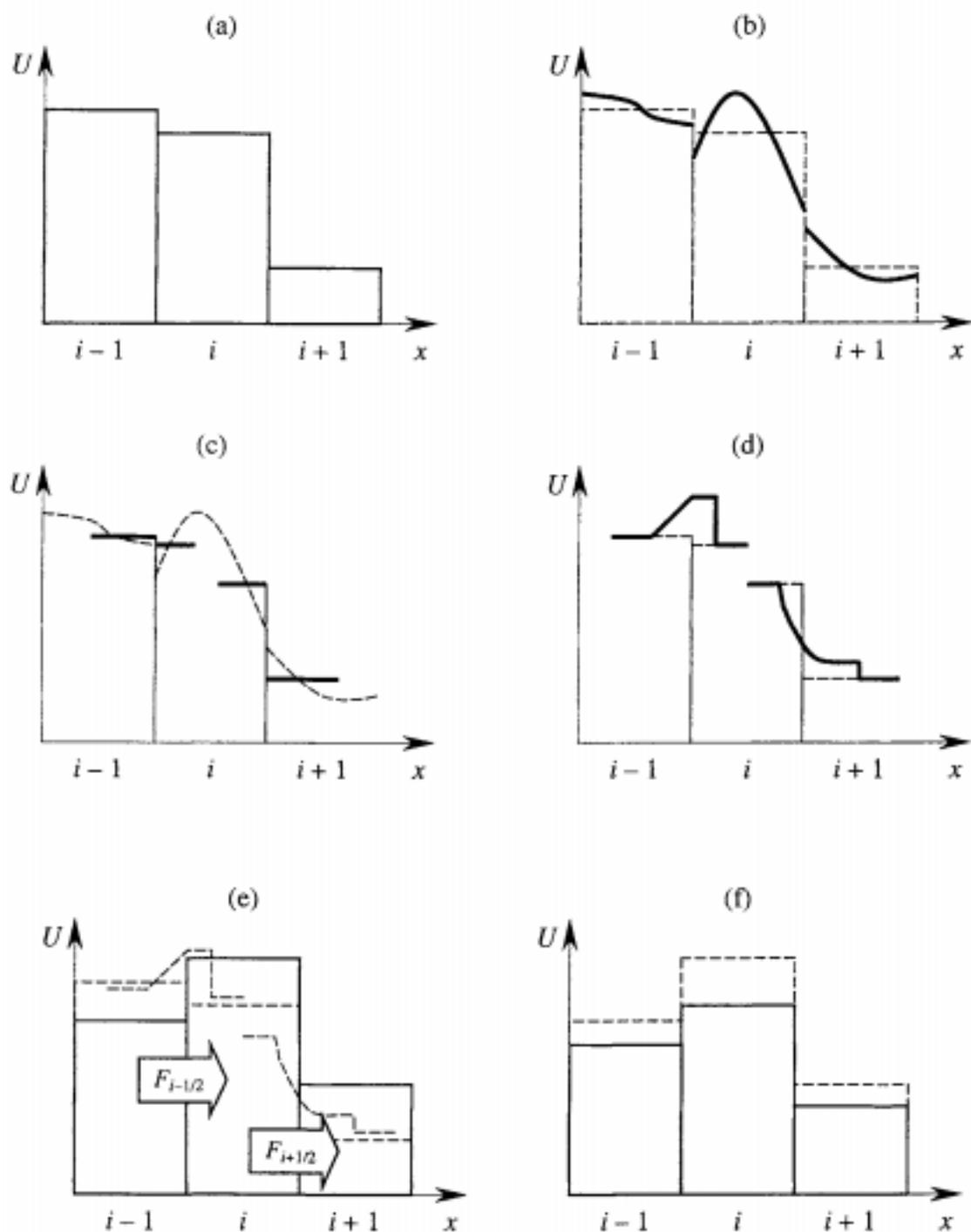
Por lo general, la solución de un sistema hiperbólico mediante algoritmos tipo Godunov comprende seis pasos (ver Figura 3.1):

1. Discretización del espacio en volúmenes finitos o celdas computacionales (Figura 3.9a). La solución  $U$  de la PDE se busca en cada celda al final del paso de tiempo. La variable numérica para el cálculo es el valor promedio de la variable de flujo  $U$  sobre las celdas computacionales. La solución se encuentra equilibrando los flujos a través de las interfaces entre las celdas computacionales. Estos flujos se calculan utilizando una estimación de  $U$  en las interfaces de la celda. La estimación de  $U$  se obtiene resolviendo problemas de Riemann en las interfaces.
2. Definición de los problemas de Riemann en las fronteras de las celdas. A partir del valor medio de la variable sobre una celda y las vecinas, es posible “adivinar”, o reconstruir, su distribución dentro de la celda. (Figura 3.9b). El esquema original diseñado por Godunov (1959) utilizó la reconstrucción más simple posible: la variable se asumió constante, igual a su valor promedio sobre la celda. Para aumentar la precisión del método, se pueden suponer reconstrucciones más complejas (por ejemplo, lineales, parabólicas, discontinuas, etc.) que conducen a la definición de problemas de Riemann generalizados (GRP) en las interfaces de la celda.
3. Un GRP rara vez admite una solución analítica. Por lo tanto, el tercer paso consiste en transformar los GRP en las fronteras de la celda en Problemas de Riemann Equivalentes (ERP) (Figura 3.9c). Un ERP es un problema de Riemann que da la misma solución promedio que el GRP en un punto dado durante un intervalo de tiempo específico.
4. Solución de los ERP (Figura 3.9d) y cálculo de los flujos relacionados. El valor del flujo  $F$  en la frontera entre dos celdas computacionales se calcula utilizando el valor de la solución  $U$  del ERP en esta frontera.
5. Cálculo del valor de  $U$  en el siguiente paso de tiempo a través del balance de flujo sobre las celdas (Figura 3.9e) utilizando los flujos calculados durante el paso 4).
6. Incorporación del efecto de los términos fuente, si los hubiere (Figura 3.9F).

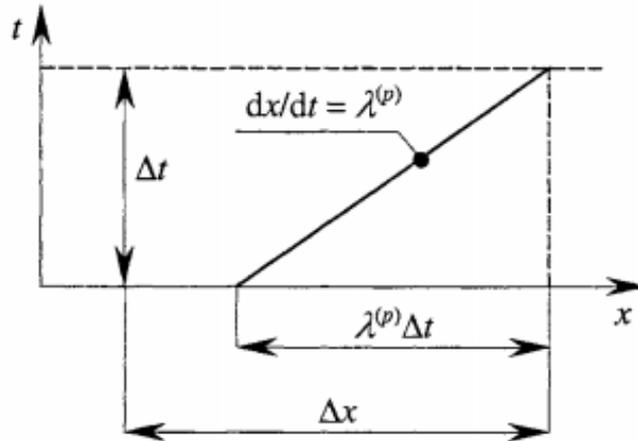
### 3.4.3 Restricciones de estabilidad

Al igual que otros métodos numéricos, los esquemas tipo Godunov se pueden clasificar en esquemas explícitos e implícitos. Los esquemas explícitos de tipo Godunov utilizan los valores del nivel de tiempo actual para calcular los flujos entre las celdas computacionales y avanzar al siguiente paso de tiempo. En los esquemas implícitos de tipo Godunov, el cálculo de los flujos (y por lo tanto del nivel de tiempo desconocido) involucra las variables de flujo en el nivel de tiempo desconocido. Como esquemas clásicos, la mayoría de los esquemas de Godunov explícitos están sujetos a una restricción de estabilidad relacionada con el número de Courant. La solución se obtiene resolviendo un conjunto de ecuaciones algebraicas que involucran los valores desconocidos en el dominio computacional.

El número de Courant expresa la proporción de una celda a través de la cual viaja una onda dada durante un paso de tiempo (Figura 3.10). La comunidad de dinámica de fluidos computacional se refiere a menudo como el número CFL, de las iniciales de Courant, Friedrichs y Lewy, quienes señalaron el papel esencial de este número en la



**Figura 3.9** Principio de los esquemas tipo Godunov, (a) discretización del espacio en las celdas o volúmenes, (b) reconstrucción del perfil dentro de las celdas, que determina los problemas de Riemann generalizados, (c) conversión de los GRP en ERP, (d) solución de los ERP y cálculo de las variables en las interfaces de celda, (e) balance de masa, (f) incorporación del término fuente.



**Figura 3.10** Interpretación gráfica del número de Courant para la onda  $p$ .

discretización. Para configuraciones unidimensionales (digamos, en la dirección  $x$ ), el número de Courant  $Cr_i^{(p)}$  asociado con la onda  $p$ -ésima en la celda  $i$  viene dado por

$$Cr_i^{(p)} = \frac{\lambda^{(p)} \Delta t}{\Delta x_i} \quad (3.44)$$

La mayoría de los esquemas explícitos imponen que el valor absoluto del número de Courant para todas las ondas en todas las celdas computacionales debe ser menor que un cierto valor  $Cr_{Max}$  (generalmente, 1) para que la solución numérica sea estable.

$$Max [Cr_i^{(p)}] \leq Cr_{Max} \quad (3.45)$$

Una interpretación física de esto es que en todas las celdas, todas las ondas deben cubrir menos que el ancho (o una fracción o un múltiplo del ancho) de la celda dentro de un paso de tiempo. En otras palabras, el dominio de dependencia de la interfaz en el momento  $t$  no debe ser más ancho que las celdas a las que pertenece la interfaz. Los esquemas implícitos generalmente no tienen una restricción de estabilidad, excepto cuando el sistema de leyes de conservación para ser resuelto es fuertemente no lineal. Los efectos no lineales pueden conducir a la inestabilidad incluso para un esquema implícito, si el esquema no es lo suficientemente disipativo para evitar que ocurran oscilaciones en los perfiles calculados. Aunque garantizan la estabilidad, los esquemas implícitos pueden conducir a soluciones numéricas que no son lo suficientemente precisas. Este suele ser el caso cuando el paso de tiempo computacional (y por lo tanto el número de Courant) es demasiado grande. En tales situaciones la amortiguación numérica puede afectar significativamente la precisión de la solución numérica.

#### 3.4.4 Método de Godunov aplicado a las ecuaciones del golpe de ariete

En esta sección se desarrolla el método de Godunov para nuestro caso que es el que hemos implementado y simulado [Zhao and Ghidaoui (2004)]. En primer lugar hay que hacer una serie de consideraciones, la solución en un volumen finito basada en Riemann de las ecuaciones del golpe de ariete en el  $i$ -ésimo volumen de control implica los siguientes pasos: (1) las ecuaciones gobernantes se reescriben en forma de

volumen de control; (2) los flujos en una superficie de control se aproximan usando la solución exacta del problema de Riemann; y (3) una integración de tiempo para hacer avanzar la solución de  $n$  a  $n + 1$ . El paso de integración de tiempo es analítico en ausencia de fricción, pero aproximado cuando hay fricción. Las ecuaciones se pueden reescribir en forma de matriz de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = s \quad (3.46)$$

$$\text{donde } u = \begin{pmatrix} H \\ V \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} V & a^2/g \\ g & V \end{pmatrix}; \text{ y } S = \begin{pmatrix} 0 \\ J \end{pmatrix}.$$

Utilizando el enfoque desarrollado por Toro (1997) para sistemas hiperbólicos en forma no conservativa, la ecuación (3.46) se puede aproximar de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = s(u) \quad (3.47)$$

donde  $f(u) = \bar{A}u$ ;  $\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{V} & a^2/g \\ g & \bar{V} \end{pmatrix}$ ; y  $\bar{V}$  = valor medio de  $V$  especificado posteriormente en esta sección. Si  $\bar{V} = 0$ , estaríamos ante el clásico caso del golpe de ariete donde se desprecia el termino convectivo.

La formulación del método de Godunov para flujos de masa y cantidad de movimiento  $f_{i+1/2}$  para todo  $i$  y  $t \in [t^n, t^{n+1}]$  requiere la solución exacta del siguiente problema de Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} &= 0 \\ u^n(x) &= \begin{cases} U_L^n, & \text{para } x < x_{i+1/2} \\ U_R^n, & \text{para } x > x_{i+1/2} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde  $U_L^n$  = valor medio de  $u$  a la izquierda de la interfase  $i + 1/2$  en  $n$ ; y  $U_R^n$  = valor medio de  $u$  a la derecha de la interfase  $i + 1/2$  en  $n$ . Tanto el método de primer orden como el de segundo para estimar  $U_L^n$  y  $U_R^n$  son dados en esta sección.

Para resolver la ecuación (3.48) partimos de que  $f(u) = \bar{A}u$ ,  $\bar{A}$  es considerado contante, con autovalores  $\lambda_1 = \bar{V} - a$  y  $\lambda_2 = \bar{V} + a$ . La condición de Rankine-Hugoniot a través de cada onda de velocidad  $\bar{\lambda}_i$  ( $i=1, 2$ ) es

$$\Delta f = \bar{A} \Delta u = \bar{\lambda}_i \Delta u \quad (3.49)$$

que da las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \frac{a}{g}(V_{i+1/2} - V_L^n) + (H_{i+1/2} - H_L^n) &= 0 \\ \frac{a}{g}(V_{i+1/2} - V_R^n) - (H_{i+1/2} - H_R^n) &= 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

dando,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i+1/2} &= \begin{pmatrix} H_{i+1/2} \\ V_{i+1/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (H_L^n + H_R^n) + \frac{a}{g}(V_L^n - V_R^n) \\ (V_L^n + V_R^n) + \frac{a}{g}(H_L^n - H_R^n) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{B}\mathbf{U}_L^n + \mathbf{C}\mathbf{U}_R^n \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde  $\mathbf{B} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & a/g \\ g/a & 1 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{C} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -a/g \\ -g/a & 1 \end{pmatrix}$ . Usando la ecuación (3.51), los flujos de masa y cantidad de movimiento en  $i + 1/2$  para todos los nodos internos y para  $t \in [t^n, t^{n+1}]$  son como sigue:

$$\mathbf{f}_{i+1/2} = \bar{\mathbf{A}}_{i+1/2} \mathbf{u}_{i+1/2} = \bar{\mathbf{A}}_{i+1/2} \mathbf{B}\mathbf{U}_L^n + \bar{\mathbf{A}}_{i+1/2} \mathbf{C}\mathbf{U}_R^n \quad (3.52)$$

La evaluación del lado derecho de la ecuación (3.52) requiere que  $\bar{\mathbf{A}}_{i+1/2}$ ,  $\mathbf{U}_L^n$  y  $\mathbf{U}_R^n$  sean aproximados. Para estimar  $\bar{\mathbf{A}}_{i+1/2}$ , es necesario aproximar la entrada asociada con los términos advectivos,  $\bar{V}_{i+1/2}$ . Establecer  $\bar{V} = 0$  equivale a despreciar los términos advectivos de las ecuaciones gobernantes. De hecho, el esquema actual se puede convertir en el problema clásico del golpe de ariete, donde los términos advectivos están ausentes, simplemente introduciendo  $\bar{V} = 0$  en la ecuación (3.52). En general, Toro (1997) sugirió que se utilice una media aritmética para evaluar los términos advectivos, es decir,  $\bar{V}_{i+1/2} = 0.5(V_i^n + V_{i+1}^n)$ . Otra opción es utilizar la solución del problema de Riemann para evaluar  $\bar{V}_{i+1/2}$ . Sin embargo, según Zhao and Ghidaoui (2004), como era de esperar, los cálculos muestran que las tres aproximaciones conducen a resultados indistinguibles para problemas típicos de golpe de ariete donde el número de Mach es a menudo pequeño. Como resultado, los términos convectivos se desprecian en la implementación del método. Sin embargo, por razones de generalidad, los términos advectivos se mantienen durante el resto de la derivación. Las aproximaciones de primer y segundo orden para  $\mathbf{U}_L^n$  y  $\mathbf{U}_R^n$  se consideran a continuación.

### Método de Godunov de primer orden

La evaluación explícita de las ecuaciones (3.51) y (3.52) requiere que  $\mathbf{U}_L^n$  y  $\mathbf{U}_R^n$  se escriben en términos de valores nodales conocidos. La aproximación de Godunov de primer orden viene dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_L^n &= \mathbf{U}_i^n \\ \mathbf{U}_R^n &= \mathbf{U}_{i+1}^n \end{aligned} \quad (3.53)$$

Introduciendo la ecuación (3.53) en (3.52) completa la formulación del método de Godunov de primer orden para los términos de flujo en todos los nodos internos. Los flujos de masa y cantidad de movimiento en  $i + 1/2$  para todos los nodos internos y para  $t \in [t^n, t^{n+1}]$  son entonces:

$$\mathbf{f}_{i+1/2} = \bar{\mathbf{A}}_{i+1/2} \mathbf{B}\mathbf{U}_i^n + \bar{\mathbf{A}}_{i+1/2} \mathbf{C}\mathbf{U}_{i+1}^n \quad (3.54)$$

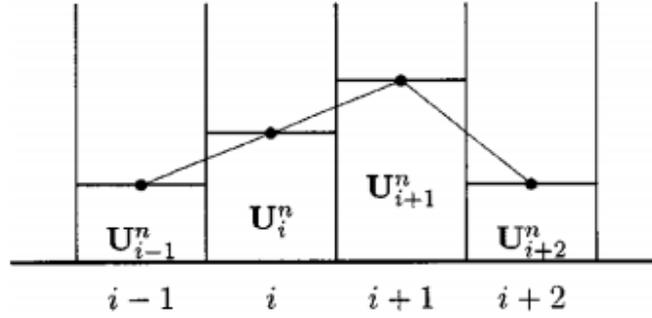


Figura 3.11 Limitador de pendiente.

### Método de Godunov de segundo orden

Mientras que los esquemas de primer orden producen una disipación numérica excesiva, los esquemas de segundo orden [Sabbagh-Yazdi et al. (2009)] dan como resultado oscilaciones espurias cerca de los frentes de choque. Los limitadores aumentan el orden de precisión de un esquema al tiempo que garantizan que los resultados estén libres de oscilaciones falsas.

Sean

$$\begin{aligned}\sigma_j^n &= (\mathbf{U}_{j+1}^n - \mathbf{U}_j^n) / \Delta x \\ \sigma_{j-1}^n &= (\mathbf{U}_j^n - \mathbf{U}_{j-1}^n) / \Delta x\end{aligned}\quad (3.55)$$

Usando el limitador MINMOD, una aproximación para  $\mathbf{U}_L^n$  y  $\mathbf{U}_R^n$  que es de segundo orden en espacio y tiempo se obtiene como sigue [Toro (1997)]:

Primer paso (reconstrucción de datos iniciales)

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{i-(1/2)+}^n &= \mathbf{U}_i^n - 0.5\Delta x \text{MINMOD}(\sigma_j^n, \sigma_{j-1}^n) \\ \mathbf{U}_{i+(1/2)-}^n &= \mathbf{U}_i^n + 0.5\Delta x \text{MINMOD}(\sigma_j^n, \sigma_{j-1}^n)\end{aligned}\quad (3.56)$$

Segundo paso (evolución por  $\Delta t/2$ )

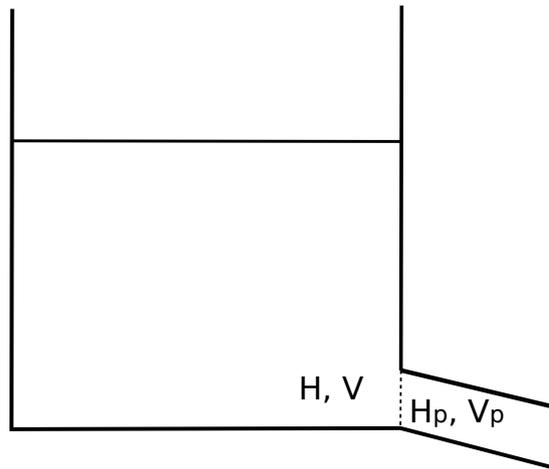
$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{i-(1/2)+}^{n*} &= \mathbf{U}_{i-(1/2)+}^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{f}(\mathbf{U}_{i-(1/2)+}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i+(1/2)-}^n)] \\ \mathbf{U}_{i+(1/2)-}^{n*} &= \mathbf{U}_{i+(1/2)-}^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{f}(\mathbf{U}_{i-(1/2)+}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i+(1/2)-}^n)]\end{aligned}\quad (3.57)$$

donde la pendiente [Sabbagh-Yazdi et al. (2009)]:

$$\text{MINMOD}(\sigma_j^n, \sigma_{j-1}^n) = \sigma_j^n \text{ si } \begin{cases} |\sigma_j^n| < |\sigma_{j-1}^n| \\ \sigma_j^n \sigma_{j-1}^n > 0 \end{cases}\quad (3.58)$$

$$\text{MINMOD}(\sigma_j^n, \sigma_{j-1}^n) = \sigma_{j-1}^n \text{ si } \begin{cases} |\sigma_j^n| > |\sigma_{j-1}^n| \\ \sigma_j^n \sigma_{j-1}^n > 0 \end{cases}\quad (3.59)$$

$$\text{MINMOD}(\sigma_j^n, \sigma_{j-1}^n) = 0 \text{ si } \sigma_j^n \sigma_{j-1}^n < 0\quad (3.60)$$



**Figura 3.12** Esquema de la condición de contorno de un depósito..

(Ver Figura 3.11).

Y el subíndice  $i + (1/2)^-$  se usa para denotar que  $x \rightarrow x_{i+(1/2)}$  con  $x < x_{i+(1/2)+}$ ;  $i - (1/2)$  se usa para denotar que  $x \rightarrow x_{i-(1/2)+}$  con  $x > x_{i-(1/2)}$ .

La aproximación de segundo orden es

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_L^n &= \mathbf{U}_{i+(1/2)^-}^{n*} \\ \mathbf{U}_R^n &= \mathbf{U}_{i+(1/2)^+}^{n*} \end{aligned} \tag{3.61}$$

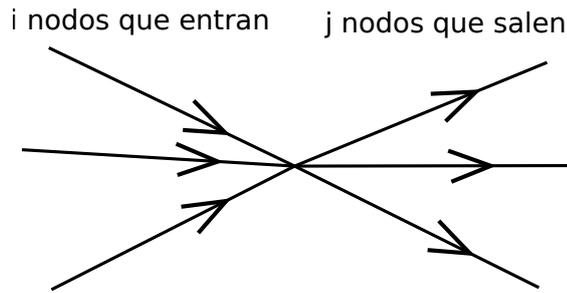
Insertando la ecuación (3.61) en la ecuación (3.52) da el método de segundo orden para los flujos del golpe de ariete en  $i + 1/2$  para todos los nodos internos y para  $t \in [t^n, t^{n+1}]$ . Este esquema es a veces llamado el esquema de MUSCL-Hancock [Toro (1997)].

### 3.5 Condiciones de contorno

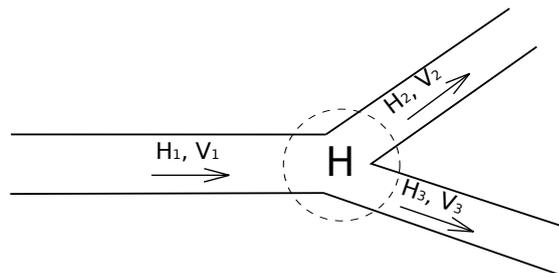
Para terminar de resolver el problema transitorio es necesario conocer unas condiciones de contorno. En esta sección se discutirán como son las condiciones de contorno para una serie de casos generales. Analicemos ahora la notación que usaremos. Designamos los extremos aguas arriba y aguas abajo con referencia a la dirección del flujo inicial, aunque el flujo puede revertirse durante el estado transitorio. Para el cálculo de las condiciones de contorno se utilizan las ecuaciones de las características y unas ecuaciones que serán diferentes para cada caso.

#### 3.5.1 Altura impuesta

Este es el caso tanto de un deposito aguas arriba como aguas abajo de un conducto, lo que variará es si se usa la características negativa (caso de aguas arriba) o la característica positiva (caso de aguas abajo). Para ello se establece una variable  $\psi$  que será igual a -1 en el caso de que el depósito esté aguas arriba y 1 en el contrario.



**Figura 3.13** Esquema de un nodo de intersección con  $i$  nodos de entrada y  $j$  nodos de salida.



**Figura 3.14** Esquema de la intersección de un conducto de entrada con dos de salida..

La primera ecuación será la de la característica que es

$$H + \psi \frac{a}{g} V = H_p + \psi \frac{a}{g} V_p \quad (3.62)$$

Donde  $H_p$  y  $V_p$  son conocidos y son la altura y la velocidad antes o después del contorno dependiendo del caso.

La otra ecuación para que el problema esté cerrado es

$$H = H_{dep} \quad (3.63)$$

Donde  $H_{dep}$  es un dato también que es la altura que se impone en el nodo.

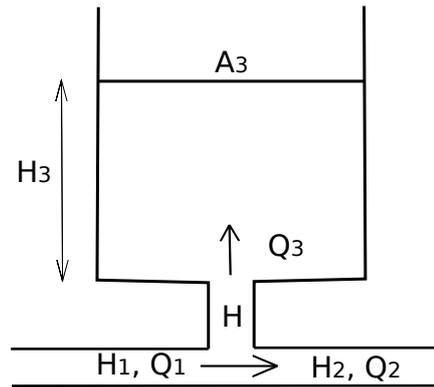
Con estas dos ecuaciones calcularíamos las condiciones de contorno  $H$  y  $V$ .

### 3.5.2 Nodo de intersección

Es el caso en el hay  $n$  conductos que entran y  $m$  conductos que salen de un de un mismo nodo. Para la resolución de este caso se aplica tanto la característica como la ecuación de Kirchhoff. Para los nodos que entran al conducto se usa la característica positiva, mientras que para los que salen se usa la característica negativa. Pueden entrar y salir tantos conductos como se deseen, se designará por  $i$  los nodos que entran y por  $j$  los que salen como se ve en la figura 3.13 Para regular estos caso se usa una variable  $\psi$  que valdrá 1 en el caso de que el conducto entre y -1 en el que salga.

$$H + \psi \frac{a}{g} V = H_p + \psi \frac{a}{g} V_p \quad (3.64)$$

Siendo  $H_p$  y  $V_p$  conocidos en cada conducto.



**Figura 3.15** Esquema de la estructura de una chimenea de equilibrio..

Y la ecuación que cierra el problema será la de Kirchhoff,

$$\sum_{i=1}^n A_i V_i = \sum_{j=1}^n A_j Q_j \quad (3.65)$$

Donde  $A_i$  y  $V_i$  son el área y la velocidad de un conducto que entra y  $A_j$  y  $V_j$  de un conducto que sale. Con estas dos ecuaciones obtendríamos ya todas las incógnitas que son  $H$  y  $V$ ,  $H$  sería la misma para todos los conductos y la  $V$  es una para cada circuito.

### 3.5.3 Velocidad impuesta

Es el caso de una válvula que regule el caudal, se considera el caso en el que la válvula se encuentra al final del conducto. Las ecuaciones que permiten calcular las condiciones de contorno serán la ecuación de la característica, al igual que en todos los casos,

$$H + \frac{a}{g} V = H_p + \frac{a}{g} V_p \quad (3.66)$$

Siendo  $H_p$  y  $V_p$  conocidos, son los valores justo antes de la válvula. Para la ecuación que cierra el problema se usará una función que puede ser una constante o una función del tiempo.

$$V = f(t) \quad (3.67)$$

Para el caso por ejemplo de un cierre instantáneo  $V=0$ .

### 3.5.4 Chimenea de equilibrio

Se ha diseñado también la condición de contorno para el caso en el que hubiera una chimenea de equilibrio [Wylie and Streeter]. Que tiene la estructura de la figura 3.15.

En primer lugar por las ecuaciones de Kirchhoff,

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (3.68)$$

Partiendo de  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $H_1$  y  $H_2$  conocidos, conociendo también las características de cada conducto y del calderín sabemos que,

$$V_3 = \frac{V_1 A_1 - V_2 A_2}{A_3} \quad (3.69)$$

Luego, conociendo  $H_3$

$$H = H_3 + kV_3|V_3| \quad (3.70)$$

Por las ecuaciones de las características se cerraría el problema. Para el conducto que entra

$$H + \frac{a}{g}V_{c1} = H_1 + \frac{a}{g}V_1 \quad (3.71)$$

Y para el que sale,

$$H - \frac{a}{g}V_{c2} = H_2 - \frac{a}{g}V_2 \quad (3.72)$$

Siendo  $H$  y  $V_{c1}$  las condiciones de contorno del conducto que entra y la misma  $H$  y  $V_{c2}$  del conducto que sale.

### 3.5.5 Turbina controlada por potencia

Esta condición de contorno consiste en una turbina al final de un conducto en la que la potencia permanece constante. Esta potencia será,

$$W = \rho g Q_f H_f \eta \quad (3.73)$$

Siendo  $Q_f$  y  $H_f$  el caudal y altura de funcionamiento de la instalación respectivamente. Al ser  $W$  constante, como realmente  $\rho$ ,  $g$  y  $\eta$  no varían lo que ha de permanecer constante es

$$HQ = H_f Q_f = cte \quad (3.74)$$

Con esa ecuación y con la de las características se cierra el problema, esta ecuación sería

$$H + \frac{a}{g}V = H_p + \frac{a}{g}V_p \quad (3.75)$$

Donde  $H_p$  y  $V_p$  son conocidos y son los valores en el conducto. Tendríamos por tanto ya dos ecuaciones y dos incógnitas y solo haría falta resolver el sistema. Esta condición de contorno sería fácilmente particularizada para el caso de una bomba, esta al ser una bomba debería estar al principio y no al final del conducto, y lo único que cambiaría sería que se usaría la característica negativa y no la positiva.

### 3.5.6 Otros

A parte de las condiciones de contorno mencionadas hay otras que llegado el caso podrían introducirse en la herramienta como son calderines, turbinas que no sean finales y que sean reguladas de una manera distinta, bombas, etc.

# 4 Descripción de la herramienta

---

La herramienta creada consiste en un programa implementado en MATLAB capaz de resolver instalaciones complejas tanto estacionarias como transitorias, con distintos elementos singulares como chimeneas de equilibrios, turbinas o bombas.

## 4.1 Problemas estacionarios

Para introducir la instalación a resolver se introduce un fichero de texto que es leído por el programa, el fichero lo primero que debe establecer es si el problema es estacionario o transitorio. Eso se establece escribiendo “Estatico” o “Dinamico” en el fichero.

Para el caso estático el fichero tiene la siguiente estructura,

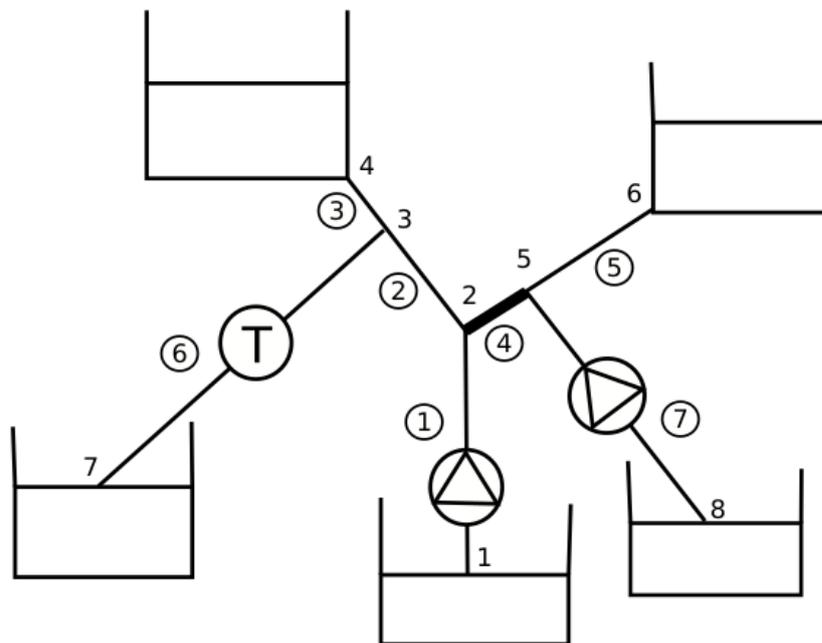
Donde en primer lugar  $n_n$  y  $n_c$  son respectivamente el número de nodos y el número de conductos. A continuación se proceden a introducir los conductos con sus características, el primer término  $t_i$  es el tipo de conducto del conducto  $i$ . Los dos siguientes parámetros son los mismos para todos los tipos de conductos que son el nodo inicial,  $n_i$ , y el nodo final,  $n_f$  del conducto. Hay cuatro tipos de conductos para cada uno se introducen unos parámetros distintos. El primer caso es un conducto normal que son de tipo 1, tiene la estructura de la figura 4.1, los parámetros a introducir son en este orden longitud,  $L_i$ , diámetro,  $D_i$  y rugosidad relativa,  $k_i$ . El segundo caso es una bomba que es el tipo 2, para el que hay que introducir a parte de los nodos iniciales y finales, los coeficientes A, B y C, en este orden, que son los coeficientes de la curva de altura que da la bomba que tiene la forma,

```

Estatico
n_n n_c
n_c { t_1 n_{i,1} n_{f,1} L_1 D_1 k_1
      ...
      ...
      t_{n_c} n_{i,n_c} n_{f,n_c} L_{n_c} D_{n_c} k_{n_c}
      C n ...
      ...

```

**Figura 4.1** Estructura fichero problema estacionario..



**Figura 4.2** Instalación ejemplo estacionario..

$H_b = A + BQ + CQ^2$ . El tercer caso es una pérdida de carga localizada, que va del nodo  $n_i$  al nodo  $n_f$ , es el tipo 3 y los parámetros a introducir serán dos, que serán las pérdidas de carga en uno y otro sentido,  $k_p$  y  $k_n$ . El último caso es finalmente una turbina, tipo 4, que es muy parecida a la bomba hay que introducir los parámetros A, B y C de la curva de la turbina de forma  $H_t = A + BQ + CQ^2$ .

Una vez introducidos los  $n_c$  conductos se introducen las condiciones de contorno que para el caso estacionario solo tendrá sentido el caso 1, que es el caso en el que se impone una altura en un nodo, es el caso de un depósito. La estructura es: c n H, donde c es el caso que será 1, n el nodo donde está y H la altura impuesta. También se puede introducir el caso 5 que es el caso de una turbina al final de un conducto que tiene una estructura 5 A B C. Donde A, B y C son los coeficientes de una curva cuadrática de la altura con la siguiente forma:  $H = A + BQ + CQ^2$ . A continuación se mostrará un ejemplo.

#### 4.1.1 Ejemplo: caso estacionario con 2 bombas y una turbina

El ejemplo simulado que se presenta es el que tiene la estructura de la siguiente figura

El fichero introducido es:

```

1 Estatico
2 8 7
3 2 1 2 100 -0.5 -0.01
4 1 2 3 40 0.3 0.05
5 1 3 4 25 1 0.01
6 3 2 5 0.5 1
7 1 5 6 150 1.5 0.01

```

8	4	3	7	-100	22	-0.01
9	2	8	5	50	-0.25	-0.02
10	1	1	12			
11	1	4	70			
12	1	6	50			
13	1	7	0			
14	1	8	26			

Los datos de partida que se toman son:

- Conducto 1 (bomba):  $H_{B1} = 100 - 0.5Q - 0.01Q^2$
- Conducto 2:  $L = 40$  m;  $D = 0.3$  m;  $k = 0.05$  m
- Conducto 3:  $L = 25$  m;  $D = 1$  m;  $k = 0.01$  m
- Conducto 4 (perdida de carga localizada):  $K_p = 0.5$ ;  $K_N = 1$ ;
- Conducto 5:  $L = 150$  m;  $D = 1.5$  m;  $k = 0.01$  m
- Conducto 6 (turbina):  $H_{T1} = -100 + 22Q - 0.01Q^2$
- Conducto 7 (bomba):  $H_{B2} = 50 - 0.25Q - 0.02Q^2$

Y las condiciones de contorno a introducir son las alturas de los distintos depósitos,

- Depósito 1:  $H = 12$  m
- Depósito 4:  $H = 70$  m
- Depósito 6:  $H = 50$  m
- Depósito 7:  $H = 0$  m
- Depósito 8:  $H = 26$  m

Los resultados que se obtienen de la herramienta son los siguientes:

- Conducto 1:  $Q = 8.9464$  m<sup>3</sup>/s
- Conducto 2:  $Q = 0.4657$
- Conducto 3:  $Q = -7.1078$  m<sup>3</sup>/s
- Conducto 4:  $Q = 8.4807$  m<sup>3</sup>/s
- Conducto 5:  $Q = 19.5743$  m<sup>3</sup>/s
- Conducto 6:  $Q = 7.5735$  m<sup>3</sup>/s
- Conducto 6:  $Q = 11.0936$  m<sup>3</sup>/s
- Nodo 1:  $H = 12$  m
- Nodo 2:  $H = 106.7264$  m
- Nodo 3:  $H = 66.0428$  m
- Nodo 4:  $H = 70$  m
- Nodo 5:  $H = 70.7653$  m
- Nodo 6:  $H = 50$  m
- Nodo 7:  $H = 0$  m
- Nodo 8:  $H = 26$  m

```

Dinámico
dt tf
nn nc
nc {
t1 ni,1 nf,1 L1 D1 k1 a1 npi
...
...
tnc ni,nc nf,nc Lnc Dnc knc
CC {
c n ...
...

```

Figura 4.3 Estructura fichero problema estacionario..

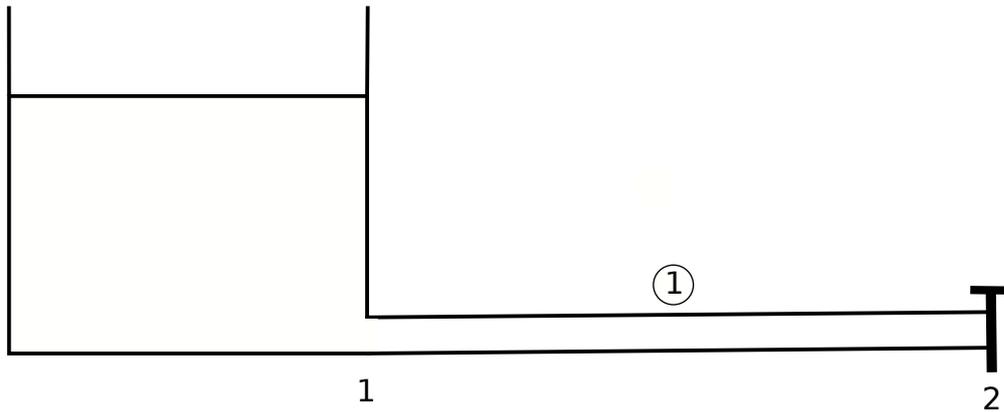
## 4.2 Problemas transitorios

La herramienta para resolver el sistema transitorio empieza resolviendo en primer lugar el problema estacionario, cuyos resultados usará como los valores iniciales del problema transitorio. A la hora de introducir el fichero de la instalación a resolver, tiene leves modificaciones con respecto el estacionario.

En primer lugar, la primera orden que da es que el problema es transitorio, después otra diferencia es que hay que introducir un paso de tiempo,  $d_t$  y el tiempo final hasta el que hay que simular  $t_f$ . Al igual que en el estacionario los tipos de conductos son los mismos con la única diferencia de que en los de tipo 1, los conductos normales, hay que introducirle dos datos más la velocidad del sonido en el conducto  $a_i$  y el número de puntos en los que se divide el conducto,  $n_{pi}$ .

El transitorio lo resuelve la herramienta con el método de Godunov de segundo orden cuya teoría se ha desarrollado en el capítulo anterior y que se encuentra implementado los anexos. A parte el método de Godunov de primer orden también ha sido programado y está en el anexo. En cuanto a las condiciones de contorno, ahí los casos a introducir son los siguientes,

- Caso -1: consiste en una ley temporal de cierre de una válvula. La estructura a introducir es: -1 n cierre(t). Donde n es el número del nodo y cierre(t) es la ley temporal que marca el cierre.
- Caso 0: cota de un nodo, se introduciría el 0 del caso, el número del nodo y la cota del nodo.
- Caso 1: altura impuesta, es el caso de un depósito. Se debe introducir por tanto tres parámetros, el caso que sería un 1, el nodo en el que está, y la altura en el nodo.
- Caso 2: chimenea de equilibrio, para el que se deben introducir 4 datos, el número del nodo, la altura geométrica del nodo, la pérdida de carga en el estrangulamiento y el area de la chimenea de equilibrio, todo en ese orden.
- Caso 5: turbina al final de un conducto con potencia constante, habría que introducir el nodo, y los coeficientes A, B y C, de la curva de la turbina de forma,  $H = A + BQ + CQ^2$ .



**Figura 4.4** Instalación ejemplo 1.

- Caso 6: caudal impuesto, se introducen 3 parametros, el 6 que es el caso, el número del nodo y el caudal en el nodo

Después están los casos 3 y 4, que corresponden a un calderín y a una turbina, que no está al final de un conducto. Estos casos se han implementado pero no se han incorporado al documento porque no han sido testados suficientemente. A continuación se muestran una serie de casos con los resultados obtenidos.

#### 4.2.1 Ejemplo 1: cierre instantáneo con un solo depósito

Se va a simular el caso de un conducto que sale de un depósito y se produce un cierre instantáneo, la instalación es de la forma de la figura 4.4.

El fichero que se introduce a la herramienta es el siguiente:

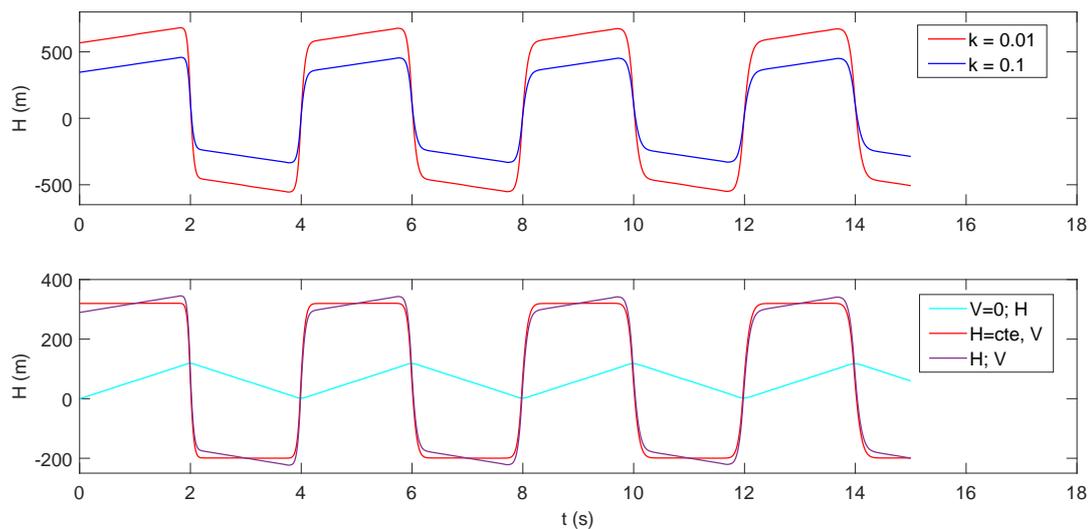
```

1 Dinamico
2 0.001 4.5
3 2 1
4 1 1 2 1000 1 0.01 1000 100
5 1 1 35
6 1 2 0
7 -1 2 cierre(t)

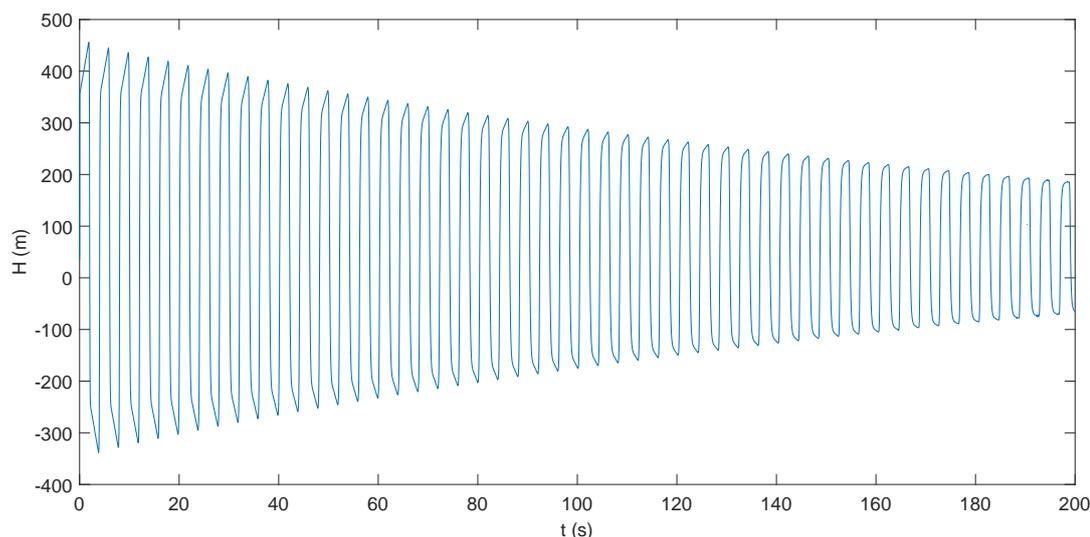
```

Es un conducto de 1000 m de longitud, 1 m de diámetro, rugosidad relativa de 0.01, una velocidad del sonido de 1000 m/s y se toman 100 puntos en el conducto. Eso nos da que el paso de tiempo ha de ser 0.001 s y se produce la simulación hasta un instante final de 4.5 s. El conducto sale de un depósito de 60 m de altura y acaba con una válvula gobernada por una ley de cierre que establece un cierre instantáneo ( $V=0$ ).

En la gráfica de la figura 4.5 vemos en la superior como varía la presión en la válvula con la rugosidad, como se preveía a menor rugosidad la velocidad será mayor y los picos de presión serán mayores. En la segunda se estudia el comportamiento de la variación de la altura en la válvula con las condiciones iniciales para una distribución lineal de alturas en el conducto y una velocidad inicial se obtiene una forma similar a la de las gráficas de arriba; en el segundo caso que corresponde al color rojo de abajo corresponde a un caso en el que en las condiciones iniciales la altura es la misma en



**Figura 4.5** Altura de presión en la válvula para distintos casos..



**Figura 4.6** Gráfica que muestra la amortiguación de la altura de presión..

todo el conducto y hay una velocidad inicial distinta de cero y el último caso de color celeste es el caso de una distribución de alturas inicialmente y una velocidad nula. Por lo tanto, vemos que el comportamiento en un cierre instantáneo está fuertemente marcado por las condiciones iniciales.

En la figura 4.6 es posible ver como se van amortiguando los picos de presión por la fricción.

#### 4.2.2 Ejemplo 2: cierre instantáneo con dos depósitos

En este caso vamos a estudiar un caso similar al anterior pero con dos depósitos, una instalación como la de la figura 4.7.

Vamos a ver dos casos en el caso 1 la altura de los depósitos es la misma, los ficheros introducidos en la herramienta son los siguientes, siendo el primero para

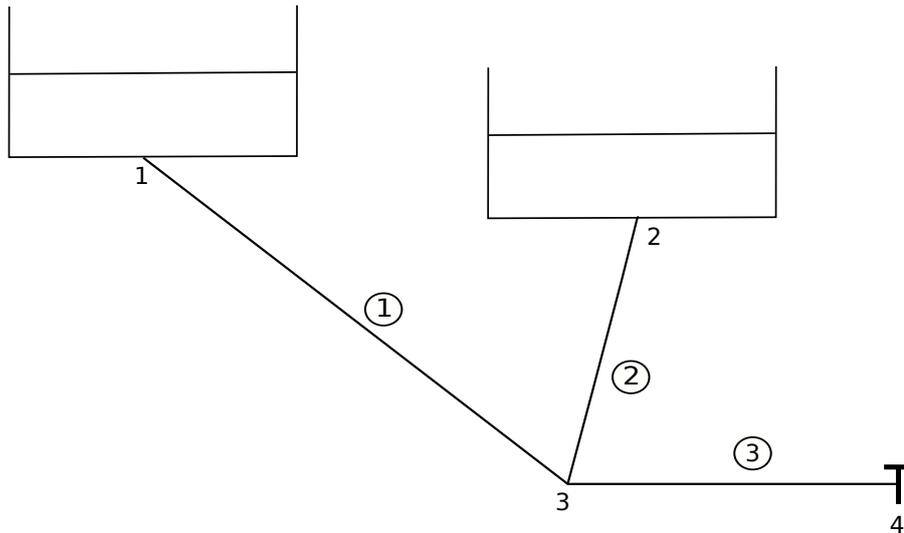


Figura 4.7 Instalación ejemplo 1.

depósitos a la misma altura y el siguiente a distinta altura.

```

1 Dinamico
2 0.005 40
3 4 3
4 1 1 3 600 1 0.01 1000 30
5 1 2 3 600 1 0.01 1000 30
6 1 3 4 400 1 0.01 1000 20
7 1 1 50
8 1 1 50
9 0 3 10
10 1 4 0
11 -1 4 cierre(t)

```

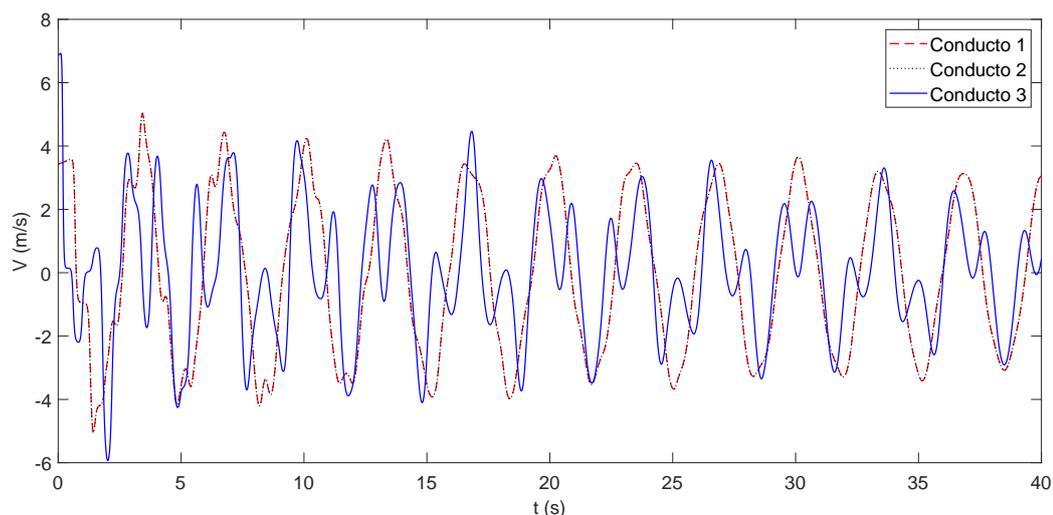
```

1 Dinamico
2 0.005 40
3 4 3
4 1 1 3 600 1 0.01 1000 30
5 1 2 3 600 1 0.01 1000 30
6 1 3 4 400 1 0.01 1000 20
7 1 1 60
8 1 1 40
9 0 3 10
10 1 4 0
11 -1 4 cierre(t)

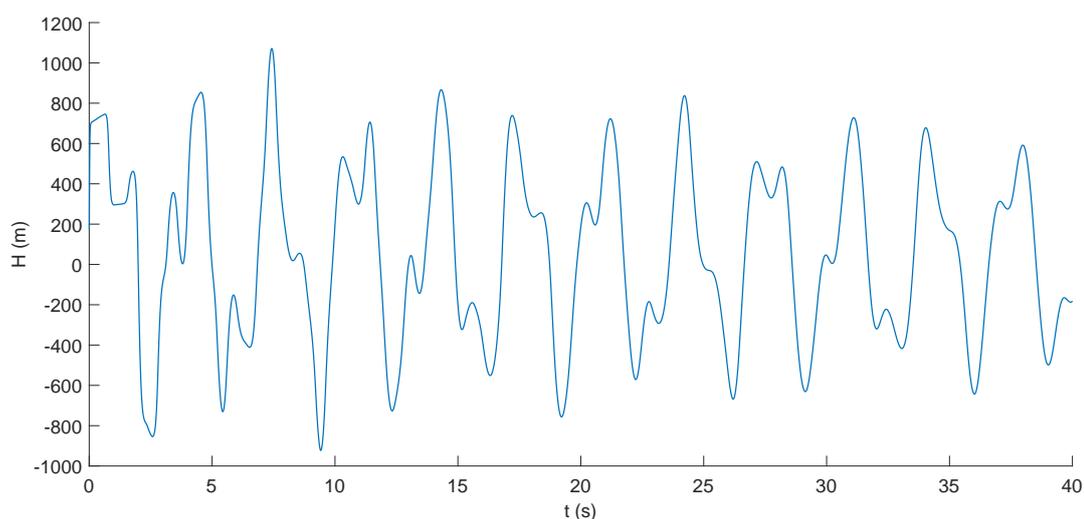
```

En los ficheros se pueden observar las distintas características de los conductos y nodos. Los conductos 1 y 2 son iguales, con longitudes de 600 m los conductos 1 y 2, y de 400 m el conducto 3, diámetros de 1 m, rugosidades de 0.01, velocidad del sonido de 1000 m/s y conductos divididos en 30, 30 y 20 puntos respectivamente. El conducto 3 es igual pero de 400 m de longitud.

Y las condiciones de contorno son dos depósitos a 50 m en el caso 1 y un depósito a 60 m, otro a 40 m en el caso 2, el nodo de intersección a 10 m de cota y un cierre



**Figura 4.8** Velocidad en los conductos, con depósitos a la misma altura.



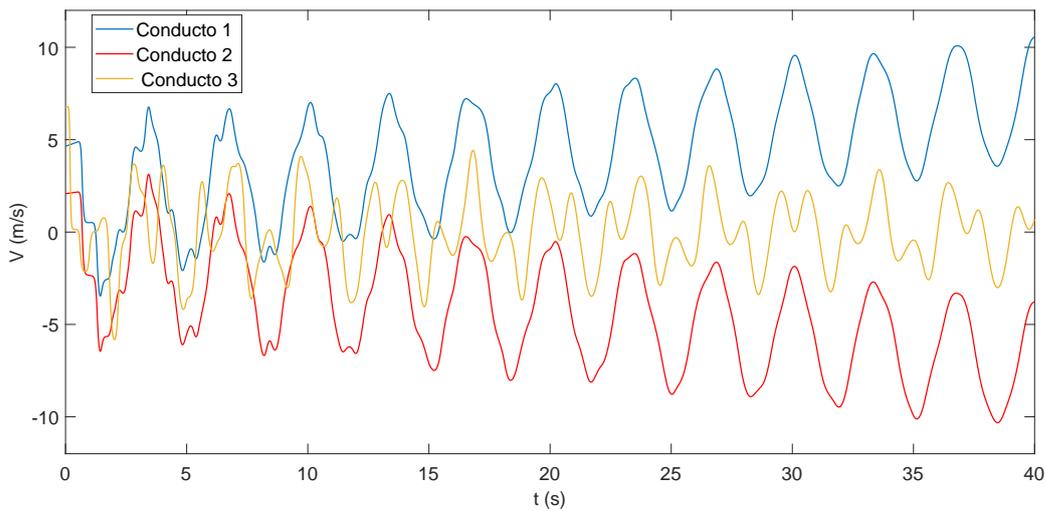
**Figura 4.9** Altura de presión en la válvula en función del tiempo para el caso de depósitos a la misma altura.

instantáneo como el del ejemplo 1 en el nodo 4.

En la figura 4.8 se puede ver como era de esperar que las velocidades en los conductos 1 y 2 son iguales, ya que ambos conductos tienen las mismas condiciones, y la velocidad en el conducto 3 se irá amortiguando y oscilando entorno al cero.

El comportamiento de la altura en la válvula no se ve un cambio reseñable del comportamiento por lo que no es de interés comparar los dos casos en ambos se observan unos picos de presión que se van amortiguando por efecto de la fricción con el tiempo.

En cuanto la velocidad para el caso de alturas diferentes, figura 4.10, la velocidad en el conducto 3 tenderá a 0 pues la válvula está cerrada, y las velocidades en los conductos que salen de los depósitos serán iguales y con signo opuesto, siendo la



**Figura 4.10** Velocidad en los conductos, con depósitos a distinta altura.

positiva la de mayor altura y negativa la de mayor altura, eso es porque el sistema tenderá a un estacionario en el que el fluido correrá desde el depósito de mayor altura hasta el de menor.

### 4.2.3 Ejemplo 3: Depósito con turbina a final de conducto (Central hidráulica)

El ejemplo que se va a simular a continuación es un caso muy típico que suele darse en las centrales hidráulicas, que consiste en un depósito a una cierta altura y una turbina aguas abajo que aprovecha la energía del fluido que posteriormente será aprovechada en forma de energía eléctrica. Es un ejemplo muy esquemático pues consiste en dos conductos, en la realidad suelen ser un conjunto de conductos con distintas cotas y pendientes, pero el objetivo es simplemente observar el comportamiento. En la figura 4.11 se puede ver una esquema de la instalación.

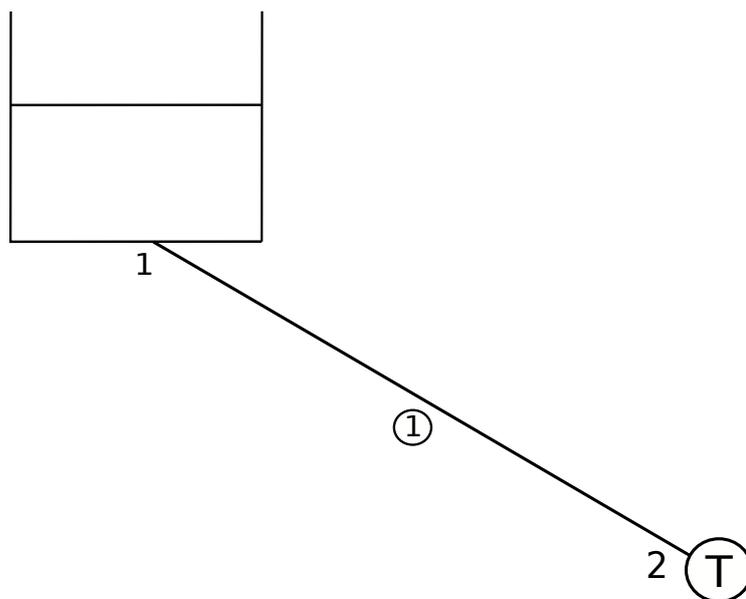
Introducimos un fichero con los datos de la instalación que se puede ver a continuación, consiste en dos conductos de 300 m, con diámetros de 2 m, a los que se le va cambiando la rugosidad viendo el efecto de esta que se puede ver en la gráfica de la figura 4.12. Se observa como era de esperar que a menor rugosidad hay mayores oscilaciones y menor amortiguamiento.

```

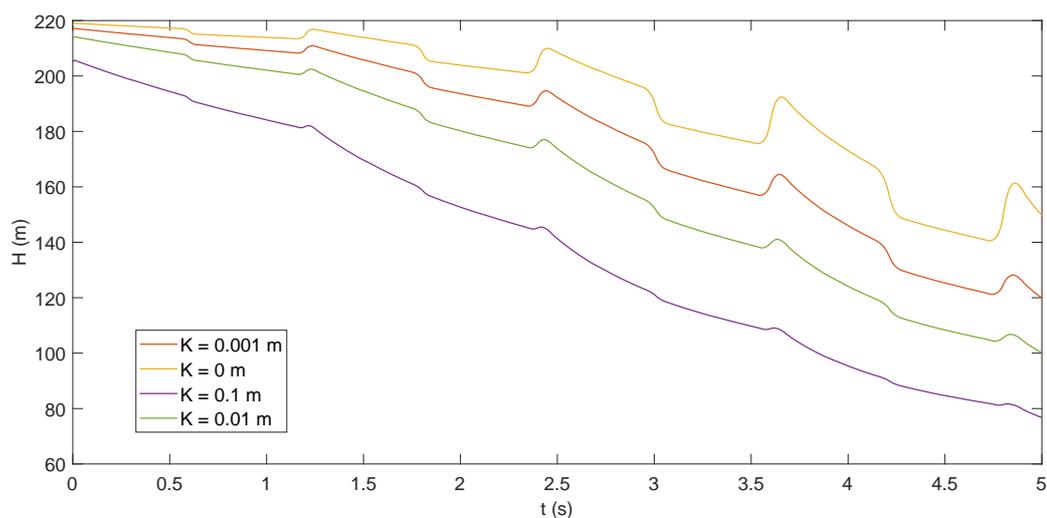
1 Dinamico
2 0.0002 5
3 3 2
4 1 1 2 300 1.5 0.01 1000 80
5 1 2 3 300 1.5 0.01 1000 80
6 1 1 220
7 5 3 -100 25 -0.1

```

En la figura 4.13 se observa la variación de la altura de presión, velocidad y caudal en la turbina al decrecer la altura, el caudal deberá crecer para que la potencia siga siendo constante.



**Figura 4.11** Instalación ejemplo 3..



**Figura 4.12** Gráfica de variación de la altura de presión en la turbina con el tiempo para distintos valores de rugosidad..

#### 4.2.4 Ejemplo 4: Central hidráulica con chimenea de equilibrio

En este ejemplo se va a simular el caso en el que hubiera una central hidráulica semejante a la del anterior ejemplo en la que la turbina funciona a un caudal de diseño pero que en un cierto instante se produce un cierre brusco, viendo como se comporta la instalación con, figura 4.11, y sin chimenea de equilibrio, figura 4.14.

Los ficheros de los datos de la instalación son los siguientes, para el caso sin chimenea:

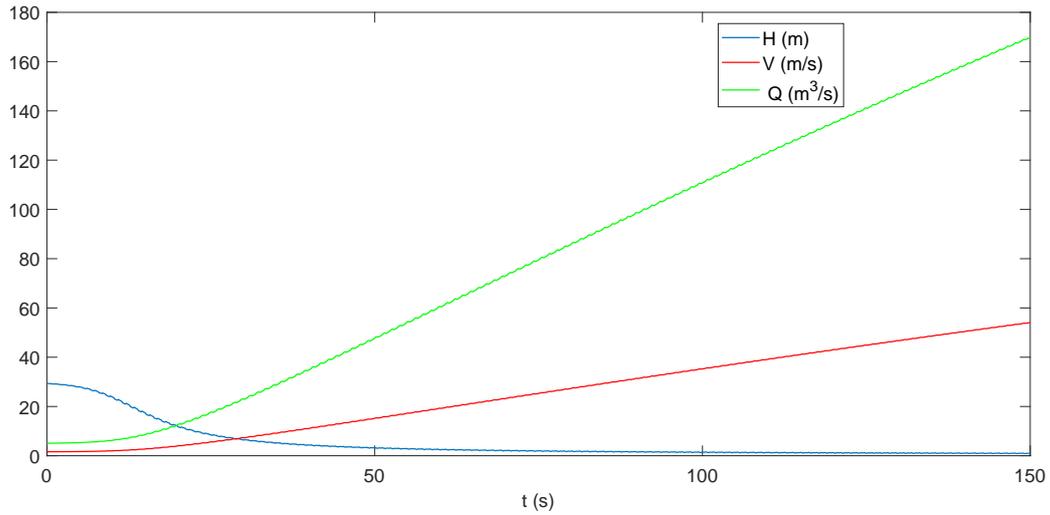


Figura 4.13 Variación de la altura, velocidad y caudal en la turbina..

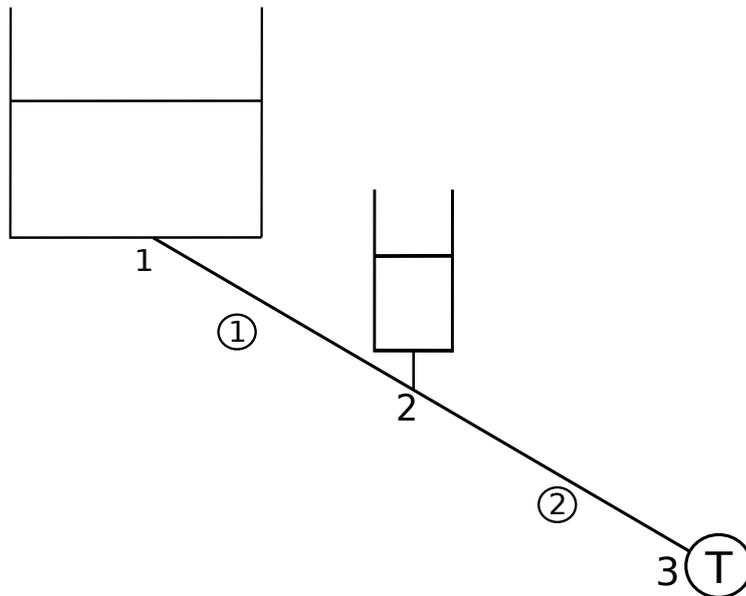
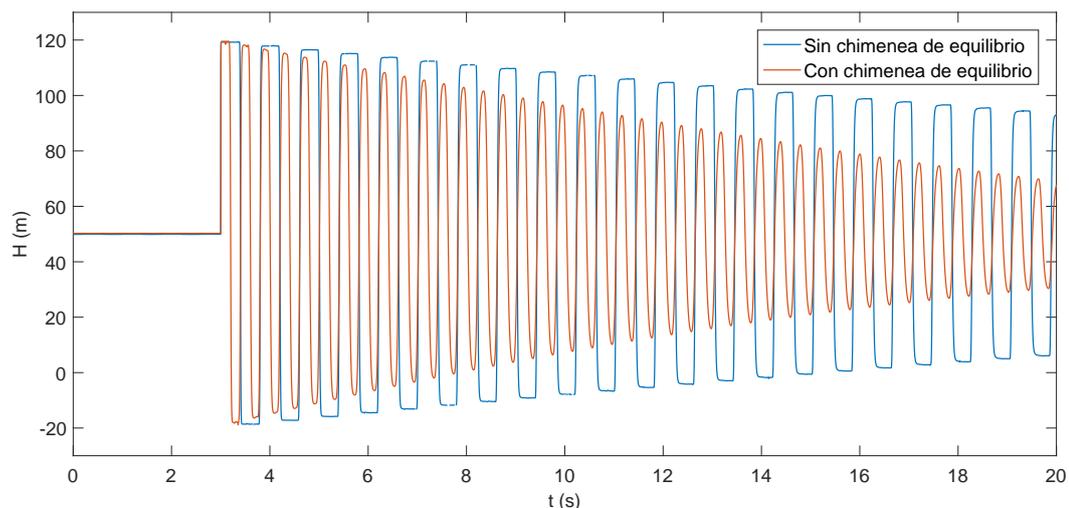


Figura 4.14 Instalación hidráulica del ejemplo 4 con chimenea de equilibrio..

```

1 Dinamico
2 0.003 20.0
3 3 2
4 1 1 2 100 1.5 0.01 1000 30
5 1 2 3 100 1.5 0.01 1000 30
6 1 1 50
7 6 3 -1.2
8 0 3 0
9 -1 3 ejemplo(t)
10 end
    
```

Y para el caso con chimenea:



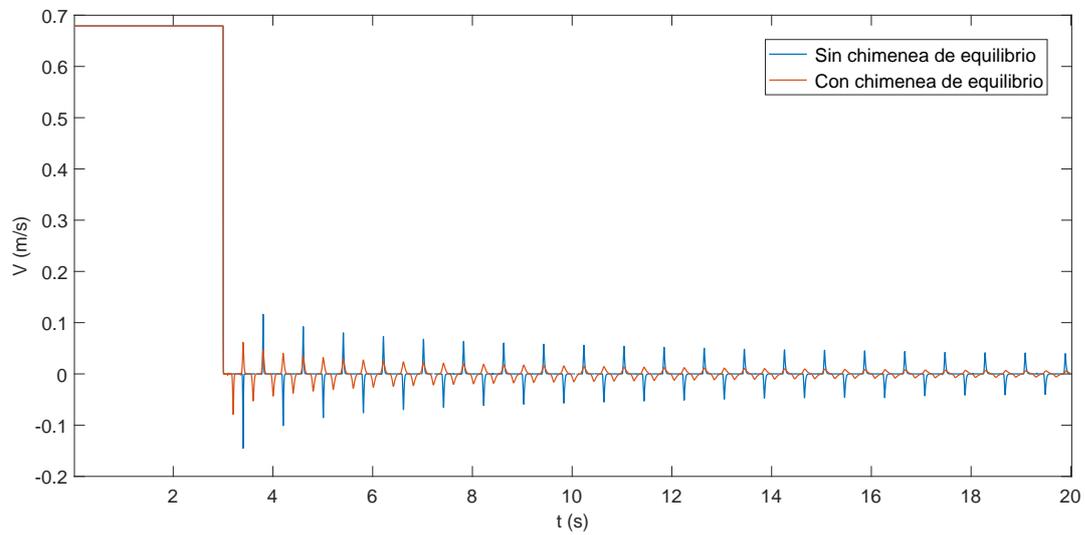
**Figura 4.15** Evolución de la altura de presión en la turbina..

```

1 Dinamico
2 0.001 20.0
3 3 2
4 1 1 2 100 1.5 0.01 1000 30
5 1 2 3 100 1.5 0.01 1000 30
6 1 1 50.38
7 6 3 -1.2
8 2 2 0 0.2 4
9 0 3 0
10 -1 3 ejemplo(t)

```

En la gráfica de la figura 4.15 es posible ver la evolución de la altura de presión en la turbina, el problema es estacionario hasta el instante  $t = 3$  s, en el que se produce un cierre brusco provocando un transitorio, los resultados son los esperados en el caso en el que hay una chimenea de equilibrio las oscilaciones se amortiguan antes, la frecuencia es la mitad ya que el tiempo de ida y vuelta se reduciría a la mitad, ya que el conducto tendría la mitad de longitud. Se observa que las oscilaciones se están amortiguando y pasado un cierto tiempo la instalación volverá a una situación estacionaria. En la gráfica 4.16 se ve la evolución de la velocidad en la turbina que tiene un cierto valor en el instante inicial hasta el instante  $t = 3$  s en el que se produce el cierre que origina un transitorio y la velocidad en la turbina oscila entorno a 0 amortiguandose por el efecto de la fricción y produciendose una mayor amortiguación en el caso de la chimenea de equilibrio, como era de esperar.



**Figura 4.16** Evolución de la velocidad en el extremo del conducto a la entrada de la turbina..



# 5 Conclusiones

---

En las instalaciones hidráulicas una de las mayores causas de fallo catastrófico en las mismas, por no decir la mayor, es la aparición de transitorios violentos causados por la puesta en juego de efectos compresibles en el movimiento del fluido; es el caso del llamado golpe de ariete. Estas situaciones pueden ser provocadas por cualquier cambio que se experimente el circuito hidráulico como es la rotura/parada de una turbina, el cierre de una válvula o el encendido de una bomba. El objetivo de este trabajo era realizar un programa capaz de calcular el comportamiento de cualquier instalación hidráulica utilizando el método de Godunov. Se ha logrado obtener una herramienta que permite diseñar instalaciones hidráulicas y calcular su comportamiento tanto en situaciones estacionarias como en las problemáticas, las situaciones transitorias. En el capítulo 4 se muestran algunos casos para los que se ha testado la herramienta obteniendo unos resultados muy prometedores, son ejemplos en los que se simulan los efectos de un cierre brusco en distintas instalaciones obteniendo los resultados esperados. Esta herramienta es capaz de resolver casos estacionarios, conductos, bombas, turbinas, pérdidas de carga localizadas y todo lo comentado en los anteriores capítulos. Para los casos transitorios puede implementar elementos singulares como chimeneas de equilibrio y turbinas, así como leyes que gobiernen la velocidad en una válvula. Sin embargo, esta herramienta tiene mucho margen de mejora todavía y para líneas futuras se propone la implementación en los casos transitorios de bombas, turbinas, que no tengan por qué ser finales, la culminación y comprobación de los calderines, además de más variedad de elementos para que se puedan calcular todo de tipos de instalaciones hidráulicas.



# Apéndice A

## Código principal

---

### A.1 Programa general

```
1  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2  %% HERRAMIENTA DE SIMULACION DE INSTALACIONES HIDRAULICAS %%
3  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4
5  clear all
6  global g
7
8  folder = fileparts(which(mfilename));
9  addpath(genpath(folder));
10
11 rho=1000; % densidad
12 g = 9.81; %gravedad
13 pa = 10^5; %pascales
14
15 inputfile1=sprintf('DATOS_INSTALACION');
16 fid=fopen(inputfile1,'r');
17
18 % Lectura de parametros globales
19
20 estatico = fscanf(fid, '%s \n', 1);
21
22 if(estatico == 'Dinamico')
23     data = fscanf(fid, '%f %f \n', 2);
24     dt = data(1); % paso de tiempo
25     tf = data(2); % tiempo final
26     npunt = 0;
27 end
28
29 data = fscanf(fid, '%d %d \n', 2);
30
31 nv = data(1); % numero de nodos
32 nc = data(2); % numero de conductos / turbomaquinas / perdidas ...
33     localizadas
34 if(estatico == 'Dinamico')
```

```

35     cota = zeros(nv,1);
36     alfa = zeros(nc,1);
37 end
38
39 ni = nv + nc; % numero de incognitas
40
41 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
42 % Generacion del archivo del sistema de ecuaciones %
43 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
44
45 fileID = fopen('sistema.m','w');
46 fprintf(fileID, '%sistema de conductos \n');
47 fprintf(fileID, '%');
48 fprintf(fileID, 'function F=sistema(x,nv) \n');
49 fprintf(fileID, 'H=x(1:nv); \n');
50 fprintf(fileID, 'Q=x(nv+1:end); \n');
51 fprintf(fileID, '%\n');
52 MK = zeros(nv,nc);
53
54 %friction = 'colebrook'; % factor de friccion calculado con ...
    Colebrook
55 friction = 'swamee'; % factor de friccion calculado con Swamee
56
57 lcond = zeros(nc,1);
58 dH = zeros(nc,1);
59
60 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
61 % Lectura de los datos de los conductos %
62 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
63
64 for i=1:nc
65     data = fscanf(fid, '%d ', 1)';
66     tipo = data(1);
67     lcond(i)=tipo;
68     switch tipo
69         case 1 % conducto normal
70             if(estatico == 'Dinamico')
71                 data = fscanf(fid, '%d %d %f %f %f %f %d\n', 7)';
72                 cotas = zeros(nv,1);
73             else
74                 data = fscanf(fid, '%d %d %f %f %f \n', 5)';
75             end
76             ci(i)=data(1); % nodo inicial
77             MK(ci(i),i)= - 1; %si sale del nodo negativo
78             cf(i)=data(2); % nodo final
79             MK(cf(i),i)= 1; % si entra el el nodo positivo
80             L(i)=data(3); % longitud
81             D(i)=data(4); % diametro
82             k(i)=data(5); % rugosidad
83             if(estatico == 'Dinamico')
84                 vson(i)=data(6); % velocidad del sonido
85                 npo(i)= data(7); %numero de puntos del conducto
86                 npunt = npunt + (npo(i) + 2);
87             end
88             perdida = 8/9.81*L(i)/pi^2/D(i)^5;

```

```

89     fprintf(fileID, ['Re=4e6/(pi*' num2str(D(i)) ...
90         ')*abs(Q(' num2str(i) ')); \n']);
91     fprintf(fileID, ['eps=' num2str(k(i)/D(i)) '; \n']);
92     fprintf(fileID, ['F(' num2str(i) ') = H(' ...
93         num2str(cf(i)) ') - H(' num2str(ci(i)) ') + '...
94         num2str(perdida) '*' friction '(eps,Re)*Q(' ...
95         num2str(i) ')*abs(Q(' num2str(i) ...
96         ')); \n']); % Escribe en el fichero del sistema ...
97         la ecuacion
98     case 2 % bomba
99         data = fscanf(fid, '%d %d %f %f %f \n', 5)';
100        ci(i)=data(1); % nodo inicial
101        MK(ci(i),i)= - 1; %s i sale del nodo negativo
102        cf(i)=data(2); % nodo final
103        MK(cf(i),i)= 1; %si entra el el nodo positivo
104        as(i)=data(3); %La bomba da H = a +b*Q + c*Q^2
105        bs(i)=data(4);
106        cs(i)=data(5);
107        fprintf(fileID, ['F(' num2str(i) ') = H(' ...
108            num2str(ci(i)) ') - H(' num2str(cf(i)) ') + (' ...
109            num2str(as(i)) ' +('...
110            num2str(bs(i)) '*Q(' num2str(i) '))+(' ...
111            num2str(cs(i)) '*Q(' num2str(i) '^2)); \n']);
112    case 3 % perdida de carga localizada, hay 2 dependiendo ...
113    del sentido del caudal
114        data = fscanf(fid, '%d %d %f %f \n', 4)';
115        ci(i)=data(1); % nodo inicial
116        MK(ci(i),i)= - 1; %si sale del nodo negativo
117        cf(i)=data(2); % nodo final
118        MK(cf(i),i)= 1; %si entra el el nodo positivo
119        Kp(i)=data(3); % perdida de carga en un sentido
120        Kn(i)=data(4); % perdida de carga en el otro sentido
121        fprintf(fileID, ['F(' num2str(i) ') = H(' ...
122            num2str(ci(i)) ') - H(' num2str(cf(i))...
123            ') - 0.5*( ' num2str(Kp(i) - Kn(i)) '+' ...
124            num2str(Kp(i) + Kn(i)) '*sign(Q(' ...
125            num2str(i) '))*Q(' num2str(i) '^2; \n']);
126    case 4 % turbina
127        data = fscanf(fid, '%d %d %f %f %f \n', 5)';
128        ci(i)=data(1); % nodo inicial
129        MK(ci(i),i)= - 1; % si sale del nodo negativo
130        cf(i)=data(2); % nodo final
131        MK(cf(i),i)= 1; % si entra el el nodo positivo
132        A(i)=data(3); % La turbina tiene una curva H = a ...
133            +b*Q + c*Q^2
134        B(i)=data(4);
135        C(i)=data(5);
136        fprintf(fileID, ['F(' num2str(i) ') = H(' ...
137            num2str(ci(i)) ') - H(' num2str(cf(i)) ') - ((' ...
138            num2str(A(i)) ' +('...
139            num2str(B(i)) '*Q(' num2str(i) '))+(' ...
140            num2str(C(i)) '*Q(' num2str(i) '^2)); \n']);
141    end
142 end
143
144
145
146
147
148
149

```

```

130 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
131 % Ecuaciones de Kirchhoff%
132 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
133
134 fprintf(fileID, '%Ecuaciones Kirchhoff \n');
135 S = sum(abs(MK), 2);
136 je = nc+1;
137 for i=1:nv
138     if(S(i) > 1)
139         fprintf(fileID, ['F(' num2str(je) ') = ']);
140         for j = 1:nc
141             if(MK(i, j) ≠ 0)
142                 fprintf(fileID, [ '+' num2str(MK(i, j)) '*Q(' ...
143                     num2str(j) ') ']);
144             end
145         end
146         fprintf(fileID, ';\n');
147         je = je+1;
148     end
149 end
150 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
151 % Condiciones de contorno %
152 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
153
154 Hinit = ones(1, nv);
155
156 % Almacena el tipo de BC nodo
157 % -1 corresponde a un nodo donde unicamente se impone Kirchhoff
158 % 0 se da la cota del nodo (por defecto vale 0)
159 % 1 nodo finalista donde se impone la altura
160 % 2 nodo en el que hay una chimenea de equilibrio
161 % 3 nodo en el que hay un calderin
162 % 4 turbina
163 % 5 turbina final con potencia constante
164 % 6 nodo con condicion de caudal
165 % Los casos 3 y 4 estan comentados por que no se han ...
166     implementado finalmente, porque no estan lo suficientemente ...
167     testados
168
169 typovert = zeros(nv, 1); % almacena el tipo de condiciones del nodo
170
171 ks=0; %contador de surge tanks
172 kc=0; %contador de calderines
173 kt=0; %contador turbinas
174 ktp=0; %contador turbinas potencia
175
176 % Lectura de datos de las condiciones de contorno
177 while ~feof(fid)
178     tipo = fscanf(fid, '%d ', 1); %type of BC
179     if(isempty(tipo))
180         break
181     end
182     switch tipo;
183     case 1 % altura impuesta

```

```

182         data = fscanf(fid, '%d %f\n', 2); % numero del ...
           nodo; altura alcanzada
183     typovert(data(1))= 1;
184     fprintf(fileID, ['F(' num2str(je) ') = H(' ...
           num2str(data(1)) ') -' num2str(data(2)) ';\n']);
185     Hinit(data(1)) = data(2);
186     je =je + 1;
187     case 2 % chimenea de equilibrio
188         data = fscanf(fid, '%d %f %f %f \n', 4);
189         typovert(data(1))= 2;
190         surge(ks+1,1) = data(1); % numero del nodo
191         surge(ks+1,2) = data(2); % altura geometrica del nodo
192         surge(ks+1,3) = data(3); % perdida de carga en el ...
           estrangulamiento
193         surge(ks+1,4) = data(4); % area
194         surge(ks+1,5) = 0.; % altura columna en la chimenea ...
           de equilibrio
195         cota(data(1))=data(2);
196         ks = ks+1;
197     %     case 3; % calderin
198     %         data = fscanf(fid, '%d %f %f %f %f\n', 5);
199     %         typovert(data(1))= 3;
200     %         calde(kc+1,1) = data(1); % numero del nodo
201     %         calde(kc+1,2) = data(2); % altura geometrica del ...
           calderin
202     %         calde(kc+1,3) = data(3); % $n$ politropica
203     %         calde(kc+1,4) = data(4); % constante
204     %         calde(kc+1,5) = data(5); % perdida de carga del ...
           estrangulamiento
205     %         calde(kc+1,6) = 0.; % volumen camara calderin
206     %         cota(data(1))=data(2);
207     %         kc = kc+1;
208     %     case 4; % turbina
209     %         data = fscanf(fid, '%d %f %f %f \n', 4);
210     %         typovert(data(1))= 4;
211     %         turb(kt+1,1) = data(1); %numero del nodo
212     %         turb(kt+1,2) = data(2); %coeficiente A
213     %         turb(kt+1,3) = data(3); %coeficiente B
214     %         turb(kt+1,4) = data(4); %coeficiente C
215     %         kt = kt + 1;
216     case 5; % turbina estableciendo potencia
217         data = fscanf(fid, '%d %f %f %f \n', 4);
218         typovert(data(1))= 5;
219         tpot(ktp+1,1) = data(1); %numero del nodo
220         tpot(ktp+1,2) = data(2); %coef A
221         tpot(ktp+1,3) = data(3); %coef B
222         tpot(ktp+1,4) = data(4); %coef C
223         tpot(ktp+1,5) = find(MK(data(1),:)); %conducto que ...
           llega
224         fprintf(fileID, ['F(' num2str(je) ') = H(' ...
           num2str(data(1)) ') - ((' ...
           num2str(tpot(ktp+1,2)) ' +' ...
225         num2str(tpot(ktp+1,3)) '*Q(' ...
           num2str(tpot(ktp+1,5)) ')')+(' ...
           num2str(tpot(ktp+1,4)) '*Q(' ...
           num2str(tpot(ktp+1,5)) ')^2)); \n'];

```

```

226         ktp = ktp + 1;
227     case 6; % caudal impuesto
228         data = fscanf(fid, '%d %f\n', 2); %numero del ...
                nodo; caudal alcanzado
229         if (S(data(1))==1)
230             typovert(data(1))= 6;
231             jj=find(MK(data(1),:));
232             fprintf(fileID,['F(' num2str(je) ') =' ...
                num2str(MK(data(1),jj)) '*Q(' num2str(jj) ') ...
                +(' num2str(data(2)) '); \n']);
233             Hinit(data(1)) = data(2);
234             je =je + 1;
235         else
236             stop %%% Nodo no finalista
237         end
238     end
239     if(estatico == 'Dinamico')
240         switch tipo;
241         case -1; % condicion de contorno que se altera para ...
                la dinamica; se asume ley temporal de cierre
242             node = fscanf(fid, '%d ', 1); %numero del nodo
243             typovert(node)=- 1;
244             func = fscanf(fid, '%s \n', 1); %nombre ...
                funcion cierre
245             str=['@(t)' func];
246             fh = str2func(str); % ley temporal de cierre
247         case 0; % cotas de nodos
248             data = fscanf(fid, '%d %f \n', 2); %numero del ...
                nodo
249             cota(data(1))=data(2); % cota
250         end
251     end
252
253 end
254 fclose(fileID);
255
256 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
257 % Calculo numerico del estacionario %
258 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
259
260 x0 = zeros(1,ni);
261 options=optimset('Display','iter','Algorithm','levenberg-marquardt');
262 x=fsolve(@(x) sistema(x,nv),x0,options);
263 H=x(1:nv);
264 Q=x(nv+1:end);
265
266 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
267 % Calculo de elementos singulares y perdidas en conductos %
268 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
269
270 for i = 1:nc
271     switch lcond(i)
272     case 1 % calculo perdidas
273         Re=4e6/(pi*D(i))*abs(Q(i));
274         eps=k(i)/D(i);
275         switch friction

```

```

276         case 'swamee'
277             lambda = swamee(eps, Re);
278         otherwise
279             lambda = colebrook(eps, Re);
280     end
281     dH(i) = ...
282             8/9.81*lambda*L(i)/pi^2/D(i)^5*Q(i)^2*sign(Q(i));
283     case 2
284         dH(i) = as(i)+bs(i)*Q(i)+cs(i)*Q(i)^2;
285     case 3
286         dH(i) = -0.5*(Kp(i) - Kn(i)+(Kp(i) + ...
287             Kn(i))*sign(Q(i)))*Q(i)^2;
288     end
289 % if(kc > 0)
290 %     for kc = 1:length(calde(:,1))
291 %         C=calde(kc,4);
292 %         z= calde(kc,2);
293 %         HH = H(calde(kc,1));
294 %         n = calde(kc,3);
295 %         calde(kc,6) = (C/(rho*g*(HH-z)+pa))^(1/n);
296 %     end
297 % end
298 if(ks>0)
299     for ks = 1:length(surge(:,1))
300         z= surge(ks,2);
301         HH = H(surge(ks,1));
302         j = find(MK(surge(ks,1),:));
303         Vn = sum(4*Q(j)./(pi*D(j).^2))/length(j);
304         surge(ks,5) = HH-z-Vn^2/(2*g);
305     end
306 end
307 if (ktp>0)
308     for ktp = 1:length(tpot(:,1))
309         Hn = H(tpot(ktp,1)); % altura de funcionamiento
310         Qn = Q(tpot(ktp,5)); % caudal de funcionamiento
311         tpot(ktp,6)=Hn*Qn; % ''Potencia''
312     end
313 end
314
315 %%%%%%%%%%%
316 % Inicializacion %
317 %%%%%%%%%%%
318
319 if(estatico == 'Dinamico')
320     nplot = 1;
321     sina = zeros(1,nc);
322     t = 0;
323     indf = 0;
324     dx=L./npo;
325     Hp = zeros(1,npunt);
326     Vp = zeros(1,npunt);
327     J = zeros(2,npunt);
328     for i=1:nc
329         if(lcond(i)==1)

```

```

330     indi = indf + 1;
331     indf = indi + npo(i) + 1;
332     sina(i) = (cota(cf(i))-cota(ci(i)))/L(i);
333     % Iniciar la altura de presion
334     Vi = 4.*Q(i)/(pi*D(i)^2);
335     Hi = H(ci(i))-cota(ci(i))-0.5*Vi^2./g;
336     Hf = H(cf(i))-cota(cf(i))-0.5*Vi^2./g;
337     Hc = linspace(Hi,Hf,npo(i));
338     end
339     Hp(indi:indf) = [0 Hc 0];
340     Vp(indi:indf) = [0 Vi*ones(1,npo(i)) 0];
341     end
342     Vpo = Vp;
343
344     [zc,zf,dc]=finitaslorder(npo,L);
345
346     %%%%%%%%%%%
347     % Bucle de tiempo %
348     %%%%%%%%%%%
349
350     while (t < tf)
351         BC; % calculo condiciones de contorno en el paso de tiempo
352         dHext = dc*Hp'; % derivadas
353         dVext = dc*Vp';
354         U=[Hp ; Vp];
355
356         for i=1:nc
357             ncell = npo(i);
358             dH = zeros(1,ncell);
359             dV = zeros(1,ncell);
360             irow=sum(npo(1:i-1))+(i-1);
361             irow2=sum(npo(1:i-1))+2*(i-1);
362             ll = sum(npo(1:i-1));
363
364             dH=minmod(dHext(irow + 1 : irow + ncell + 1)');
365             dV=minmod(dVext(irow + 1 : irow + ncell + 1)');
366
367             Hfr = U(1,irow2+2: irow2+ncell+1)-0.5*dx(i)*dH; ...
                 %Hfpos(i) es U(i-1/2+) (by the r_ight of the face)
368             Hfl = U(1,irow2+2: irow2+ncell+1)+0.5*dx(i)*dH; ...
                 %Hfneg(i) es U(i+1/2-) (by the l_eft of the face)
369
370             Vfr = U(2,irow2+2: irow2+ncell+1)-0.5*dx(i)*dV; ...
                 %Vfpos(i) es U(i-1/2+)
371             Vf1 = U(2,irow2+2: irow2+ncell+1)+0.5*dx(i)*dV; ...
                 %Vfneg(i) es U(i+1/2-)
372
373             %% Evolution by dt/2
374             dF=zeros(2,ncell);
375             for j=1:ncell
376                 fr = fvalue([Hfr(j) Vfr(j)]', vson(i));
377                 fl = fvalue([Hfl(j) Vf1(j)]', vson(i));
378                 dF(:,j) = 0.5*dt/dx(i)*(fr - fl);
379             end
380
381             UR = [Hfr; Vfr] + dF;

```

```

382     UL = [Hf1; Vf1] + dF;
383
384
385     % Calculo del flujo en la celda interior
386
387     F(:,      1) = fvalue(U(:,irow2+1), vson(i));
388     F(:,ncell + 1) = fvalue(U(:,irow2+npo(i)+2), vson(i));
389     for j=2:ncell
390         F(:,j)=flux(UL(:,j-1), UR(:,j),vson(i));
391     end
392
393     % Advance in time
394
395     for j=1:ncell
396         U(:,irow2+ j +1) =U(:,irow2 + j + 1) - ...
397             dt/dx(i)*(F(:,j+1)-F(:,j));
398     end
399     Hp(irow2+2:irow2 + ncell + 1) = U(1,irow2 + 2:irow2 ...
400         + ncell +1);
401     Vp(irow2+2:irow2 + ncell + 1) = U(2,irow2 + 2:irow2 ...
402         + ncell +1);
403
404     % Friccion estacionaria y no estacionaria
405
406     J= source(Vp, Vpo, sina, vson, npunt, dt, dc, nc, ...
407         npo, D, k, friction);
408     U2 = U - 0.5*dt*J; % Segundo paso con termino ...
409         fuente en dt/2
410     Vp = U2(2,:);
411     J = source(Vp, Vpo, sina, vson, npunt, dt, dc, nc, ...
412         npo, D, k, friction);
413     U = U - dt*J; % Ultimo paso con termino fuente en dt2
414     t=t+dt
415     Vpo = U(2,:);
416     Hval(nplot)=U(1,end-1);
417     Time(nplot)=t;
418     nplot=nplot+1;
419 end
420 end

```

## A.2 Condiciones de contorno

```

1  for i=1:nv
2      switch typovert(i)
3          case -1 % Nodo cambio de caudal
4              j = find(MK(i,:));
5              %% MK(i,j)<0 sale del nodo, inicio del conducto y ...
6                  característica negativa
7              %% MK(i,j)>0 entra en el nodo, final del conducto y ...
8                  característica positiva
9              js = (1+MK(i,j))/2;

```

```

8         jc=sum(npo(1:j-1))+ 2*(j-1)+ js*(npo(j)+1) +(1-js)*2;
9         U1 = [Hp(jc) Vp(jc)];
10        Uf=BCvalvula(U1,MK(i,j), vson(j),fh, t);
11        Hp(jc + MK(i,j)) = Uf(1);
12        Vp(jc + MK(i,j)) = Uf(2);
13        case 0 % Nodo de interseccion
14            j = find(MK(i,:));
15            psi = MK(i,j);
16            js = (1+MK(i,j))/2;
17            n = S(i);
18            for K=1:n
19                jc(K)=sum(npo(1:j(K)-1))+ 2*(j(K)-1)+ ...
20                    js(K)*(npo(j(K))+1) +(1-js(K))*2;
21            end
22            ason = vson(j);
23            Aes = pi*D(j).^2/4.;
24            UB = [Hp(jc) ; Vp(jc)];
25            Uf=BCvertex(UB, psi, ason, Aes);
26            Hp(jc + psi) = Uf(1,:);
27            Vp(jc + psi) = Uf(2,:);
28        case 1 % altura impuesta
29            if(S(i) > 1)
30                stop %% no es nodo final
31            end
32            Hdep = H(i)-cota(i);
33            j = find(MK(i,:));
34            % MK(i,j)<0 sale del nodo, inicio del conducto y ...
35            % característica negativa
36            % MK(i,j)>0 entra en el nodo, final del conducto y ...
37            % característica positiva
38            js = (1+MK(i,j))/2;
39            jc=sum(npo(1:j-1))+ 2*(j-1)+ js*(npo(j)+1) +(1-js)*2;
40            U = [Hp(jc) Vp(jc)];
41            Uf=BCdeposito(U,MK(i,j),Hdep,vson(j));
42            Hp(jc + MK(i,j)) = Uf(1);
43            Vp(jc + MK(i,j)) = Uf(2);
44        case 2 % Chimenea de equilibrio
45            if(S(i) > 2)
46                stop %% mas de dos conductos llegan al nodo no ...
47                se considera
48            end
49            j = find(MK(i,:));
50            ks = find(surge(:,1)==i);
51            for ii=1:2
52                jj = j(ii);
53                js = (1+MK(i,jj))/2;
54                jc=sum(npo(1:jj-1))+ 2*(jj-1)+ js*(npo(jj)+1) ...
55                    +(1-js)*2;
56                if (js == 0) %conducto sale del nodo
57                    U2 = [Hp(jc) Vp(jc)];
58                    A2 = pi*D(jj)^2/4.;
59                    a2 = vson(jj);
60                else
61                    U1 = [Hp(jc) Vp(jc)];
62                    A1 = pi*D(jj)^2/4.;
63                    a1=vson(jj);

```

```

59         end
60     end
61     [U1 U2 Zsnew V3n]=BCsurge_tank(A1, U1, A2, U2, ...
62         surge(ks,5), surge(ks,3), surge(ks,4), dt, a1, a2);
63     surge(ks, 5)= Zsnew;
64     for ii=1:2
65         jj = j(ii);
66         js = (1+MK(i,jj))/2;
67         jc=sum(npo(1:jj-1))+ 2*(jj-1)+ js*(npo(jj)+1) ...
68             +(1-js)*2;
69         if (js == 0)
70             Hp(jc + MK(i,jj)) = U2(1);
71             Vp(jc + MK(i,jj)) = U2(2);
72         else
73             Hp(jc + MK(i,jj)) = U1(1);
74             Vp(jc + MK(i,jj)) = U1(2);
75         end
76     end
77     case 4 %turbina
78     %         if(S(i) > 2)
79     %             stop %% mas de dos conductos llegan al nodo ...
80     %             no se considera
81     %             end
82     %             j = find(MK(i,:));
83     %             kt = find(surge(:,1)==i);
84     %             for ii=1:2
85     %                 jj = j(ii);
86     %                 js = (1+MK(i,jj))/2;
87     %                 jc=sum(npo(1:jj-1))+ 2*(jj-1)+ js*(npo(jj)+1) ...
88     %                 +(1-js)*2;
89     %                 if (js == 0) %conducto sale del nodo
90     %                     psi2=-1;
91     %                     H2 = Hp(jc);
92     %                     V2 = Vp(jc);
93     %                     alph2 = H2+psi2*vson(jj)*V2/g;
94     %                     A2 = pi*D(jj)^2/4;
95     %                     a2=vson(jj);
96     %                 else
97     %                     psil=1;
98     %                     H1 = Hp(jc);
99     %                     V1 = Vp(jc);
100     %                     alph1 = H1+psil*vson(jj)*V1/g;
101     %                     A1 = pi*D(jj)^2/4;
102     %                     a1 = vson(jj);
103     %                 end
104     %             end
105     %             [U1 U2] = Bcturbina(A1, A2, alph1, alph2, a1, a2, ...
106     %             turb(kt,2), turb(kt,3), turb(kt,4))
107     %             for ii=1:2
108     %                 jj = j(ii);
109     %                 js = (1+MK(i,jj))/2;
110     %                 jc=sum(npo(1:jj-1))+ 2*(jj-1)+ js*(npo(jj)+1) ...
111     %                 +(1-js)*2;
112     %                 if (js == 0)
113     %                     Hp(jc + MK(i,j)) = U2(1,:);
114     %                     Vp(jc + MK(i,j)) = U2(2,:);

```

```

109 %           else
110 %           Hp(jc + MK(i,j)) = U1(1,:);
111 %           Vp(jc + MK(i,j)) = U1(2,:);
112 %           end
113 %       end
114 %   case 5 %turbina final controlada con potencia
115 %   if(S(i) > 1)
116 %       stop %% mas de dos conductos llegan al nodo no se ...
117 %       considera
118 %   end
119 %   j = find(MK(i,:));
120 %   js = (1+MK(i,j))/2;
121 %   jc=sum(npo(1:j-1))+ 2*(j-1)+ js*(npo(j)+1) +(1-js)*2;
122 %   Ht = Hp(jc);
123 %   Vt = Vp(jc);
124 %   alph = Ht+vson(j)*Vt/g;
125 %   A = pi*D(j)^2/4;
126 %   a=vson(j);
127 %   U = BCturbinaipot(alph, a, tpot(ktp,6), A);
128 %   Hp(jc + MK(i,j)) = U(1);
129 %   Vp(jc + MK(i,j)) = U(2);
130 end

```

### Caso -1: Valvula

```

1 function Uf=BCvalvula2(U1, psi, a, func, t)
2 global g
3 B = [(U1(1)+psi*a/g*U1(2)); func(t)];
4 A=[ 1 psi*a/g; 0 1];
5 Uf = A\B;
6 end

```

### Caso 0: Nodo de intersección

```

1 function Uf=BCvertex(U, psi, a, Ac)
2 global g
3 n=length(a)+1;
4 A=zeros(n, n);
5 B=zeros(n, 1);
6 A(1:n-1,1) = ones(n-1,1);
7 A(n,2:n) = psi.*Ac;
8 for i=1:n-1
9     A(i,i+1) = psi(i)*a(i)/g;
10    B(i) = U(1,i) + psi(i)*a(i)/g*U(2,i);
11 end
12 SOL= A\B;
13 Uf = [SOL(1)*ones(1,n-1); SOL(2:n)'];

```

### Caso 1: Altura impuesta

```

1 function Uf=BCdeposito(U,psi,Hdep, a)
2 global g
3 B = [(U(1)+psi*a/g*U(2)); Hdep];
4 A=[ 1 psi*a/g; 1 0];
5 Uf = A\B;

```

### Caso 2: Chimenea de equilibrio

```

1 function [Uf1 Uf2 Zsnew V3new]=BCsurge_tank(A1, U1, A2, U2, Zs, ...
    Rs, As, dt, a1, a2)
2 global g
3 H1 = U1(1);
4 V1 = U1(2);
5 H2 = U2(1);
6 V2 = U2(2);
7 V3 = (V1*A1 -V2*A2)/As;
8 Hp = Zs + Rs*sign(V3)*V3^2.;
9
10 B = [(H2-a2/g*V2); Hp];
11 A=[ 1 -a2/g; 1 0];
12 Uf2 = A\B;
13
14 B = [(H1+a1/g*V1); Hp];
15 A=[ 1 a1/g; 1 0];
16 Uf1 = A\B;
17 V1 = Uf1(2);
18 V2 = Uf2(2);
19 V3new = (V1*A1 -V2*A2)/As;
20 Zsnew = dt*(V3new+V3)/2. + Zs; % actualizacion de altura

```

### Caso 3: Calderín

```

1 function [Uf1 UfN]=BCcalderin(A1, U1, A2, U2, Z3, R3, A3, dt)
2 global a g
3 V2 = U2(2);
4 V1 = U1(2);
5 Q3 = (V1*A1 -V2*A2)/A3;
6 Hp = Z3 + R3*sign(Q3)*Q3^2.;
7 Z3 = dt/A3*Q3 + Z3; % actualizacion de altura
8
9 B = [(U2(1)+a/g*U2(2)); Hp];
10 A=[ 1 a/g; 1 0];
11 UfN = A\B;
12
13 B = [(U1(1)-a/g*U1(2)); Hp];
14 A=[ 1 -a/g; 1 0];
15 Uf1 = A\B;

```

### Caso 4: Turbina en nodo central

```

1 function [U1 U2] = Bcturbina(A1, A2, alph1, alph2, a1, a2, A, ...
    B, C)

```

```

2 global g
3 Q = (-B - a1*psi1/(A1*g) + a2*psi2/(A2*g) + sqrt((B + ...
      a1*psi1/(A1*g) - a2*psi2/(A2*g))^2 ...
4     - 4*C*(A - alph1 + alph2)))/(2*C);
5 V1 = Q/A1;
6 V2 = Q/A2;
7 H1 = - a1*psi1/(A1*g) + alph1;
8 H2 = - a2*psi2/(A2*g) + alph2;
9 U1 = [H1 V1];
10 U2 = [H2 V2];
11 end

```

### Caso 5: Turbina en nodo final controlada por potencia

```

1 function [U] = Bcturbinapot(alph, a, cte, Ac)
2 global g
3 A= a/g;
4 B=-alph;
5 C=cte/Ac;
6 V=(-B + sqrt(B^2 - 4*A*C))/(2*A);
7 H=C/V;
8 U = [H V];
9 end

```

## A.3 Programas auxiliares

### A.3.1 Cálculo del factor de fricción

```

1 function f=colebrook(epsilon, Re)
2
3 b = epsilon/3.7;
4 a = 2.51./Re;
5 c = b./a;
6 x = (0.5*log(10)./a).*10.^(0.5*c);
7 y = (2.*lambertw(0,x)/log(10)-c).^2;
8 f=1./y;
9 index=find(isinf(x));
10 f(index)=(0.5/log10(b)).^2.;
11 end

```

```

1 function f=swamee(epsilon, Re)
2 f=0.25./(log10(epsilon/3.7 + 5.74./Re.^0.9)).^2;

```

### A.3.2 Ley de cierre temporal

#### Cierre instantáneo en el instante inicial

```

1 function v=cierre(t)
2 v=0;
3 end

```

### Cierre instantáneo en un instante introducido

```

1 function v=ejemplo(t)
2 if(t < 3.)
3 v=1.2*4/(pi*1.5^2);
4 else
5     v=0.0;
6 end
7 end

```

## A.3.3 Programas auxiliares para la resolución por el método de Godunov de segundo orden

### Cálculo de derivadas de matrices

```

1 function [zc,zf,dc]=finitaslorder(npo,L)
2 nc = length(npo);
3 zc=zeros(1,sum(npo));
4 zf=zeros(1,sum(npo)+nc);
5 dc=zeros(sum(npo) + nc ,sum(npo) + 2*nc);
6 dz=L./npo;
7 dx=1./dz;
8 for i=1:nc
9     icol=sum(npo(1:i-1))+2*(i-1);
10    irow=sum(npo(1:i-1))+(i-1);
11    zf(irow+1)=0;
12    for j=1:npo(i)
13        zf(irow + 1 + j)=j*dz(i);
14        zc(irow + j)=(j-0.5)*dz(i);
15        dc(irow + j,icol+j) = -dx(i);
16        dc(irow + j,icol + j + 1) = dx(i);
17    end
18    dc(irow+npo(i) + 1,icol + npo(i)+2) =dx(i);
19    dc(irow+npo(i) + 1,icol + npo(i)+1) = -dx(i);
20 end
21 dc =sparse(dc);

```

### Cálculo del MINMOD

```

1 function Out=minmod(sigma)
2 ncell=length(sigma)-1;
3 sigmap=sigma;
4 for j=2:ncell+1
5     if(sigma(j-1)*sigma(j) > 0)
6         if(abs(sigma(j-1)) > abs(sigma(j)))
7             sigmap(j-1) = sigma(j);
8         else

```

```

9         sigmap(j-1) = sigma(j-1);
10        end
11    else
12        sigmap(j-1)=0.;
13    end
14 end
15 Out=sigmap(1:ncell);

```

**Cálculo del flujo**

```

1 function f=flux(uL, uR, a)
2 global g
3 B = 0.5*[1 a/g; g/a 1];
4 C = 0.5*[1 -a/g; -g/a 1];
5 u=B*uL + C*uR;
6 f=fvalue(u, a);

```

**Cálculo del valor del flujo**

```

1 function f=fvalue(u, a)
2 global g
3 v=u(2);
4 A = [v a^2/g; g v];
5 f=A*u;

```

**Cálculo del termino fuente (fricción)**

```

1 function So =source(Vp, Vpo, sina, vson, npunt, dt, dc, nc, ...
2     npo, D, k, friction)
3 global g
4 So = zeros(2,npunt);
5 Ju=zeros(1, npunt);
6 dVt = (Vp-Vpo)/dt;
7 dVx = dc*Vp';
8 dH=zeros(1,npunt);
9 Ju=zeros(1, npunt);
10 for i=1:nc
11     ncell=npo(i);
12     irow2=sum(npo(1:i-1))+2*(i-1);
13     irow=sum(npo(1:i-1))+(i-1);
14     dVxc =0.5*(dVx(irow + 1 : irow + ncell) + dVx(irow + 2 : ...
15         irow + ncell + 1));
16     Vpp = Vp(irow2+2: irow2+ncell+1);
17     Vppo = Vpo(irow2+2: irow2+ncell+1);
18     dVt = (Vpp-Vppo)/dt;
19     Re=1e6*abs(Vpp)*D(i);
20     eps=k(i)/D(i);
21     switch friction
22         case 'swamee'
23             lambda = swamee(eps, Re);
24         otherwise
25             lambda = colebrook(eps, Re);

```

```

24     end
25     dHH = g*sina(i) + lambda/(2*D(i)).*Vpp.*sign(Vpp);
26     k_p = log10(14.3./Re.^0.05);
27     K3= 2.*sqrt(7.41./Re.^k_p);
28     Ju=K3.*(dVt + vson(i)*sign(Vpp).*abs(dVxc)');
29     So(2,irow2+2: irow2+ncell+1)= dHH + Ju;
30     end
31
32     end

```

## A.4 Godunov de primer orden

```

1  %% FIRST ORDER GODUNOV SOLVER
2  % Zhao & Ghidaoui (2004)
3  clear all
4  global a g
5  ncell = 40 % number of points of pipe
6  a = 1000; %perturbation velocity
7  g = 9.81;
8  L= 50; % length of the pipe
9  D= 0.25; %diameter of the pipe
10 Cour = 1.0; % Courant number
11
12 dx=L/ncell;
13 dt = 0.0002 %dx/a*Cour;
14 [zc,zf,dc]=finitas1order(ncell,L);
15
16 Hf=zeros(1,ncell + 1); % fluxes are defined also beyond the ...
    extremes of the pipe
17 Vf=zeros(1,ncell + 1); % fluxes are defined also beyond the ...
    extremes of the pipe
18 F=zeros(2,ncell+1); %array of fluxes
19
20 %%Initialize H & V
21 t= 0;
22 tfinal = 10;
23 Hdep = 20.38;
24 H = ones(ncell,1)*10.19;
25 V = ones(ncell,1)*0.%%sqrt(2.*g*Hdep);
26 U=[H';V'];
27 nplot = 1;
28 while (t < tfinal)
29     %% BC left
30     U0 =BCdeposito(U(:,1),-1,Hdep);
31     F0 = fvalue(U0);
32     F(:,1) = F0; %% flux by the first face
33
34     %% Flux calculation in the inner cells
35     %
36     for j=2:ncell
37         F(:,j)=flux(U(:,j-1), U(:,j));
38     end
39

```

```
40 UN1= BCvalvula(U(:,ncell),1,t);
41 FN1 = fvalue(UN1);
42 F(:,ncell+1) = FN1; %% flux by the last face
43
44 %% Advance in time
45 %
46 for j=1:ncell
47     U(:,j) =U(:,j) - dt/dx*(F(:,j+1)-F(:,j));
48 end
49 t=t+dt
50
51 %% pressure in the valve
52 %
53 HVAL(nplot) = U(1,ncell);
54 VVAL(nplot) = U(2,ncell);
55 time(nplot) = t;
56 nplot = nplot + 1;
57 end
```

# Bibliografía

---

- Bergant, A., A. R. Simpson, and E. Sijamhodzic  
1991. Water hammer analysis of pumping systems for control of water in underground mines. In *4th International Mine Water Congress, Ljubljana, Slovenia, Yugoslavia*.
- Brunone, B., U. Golia, and M. Greco  
1991. Some remarks on the momentum equations for fast transients. In *International Meeting on Hydraulic Transients with Column Separation, 9th Round Table, IAHR, Valencia, Spain*, Pp. 201–209.
- Chaudhry, M. H.  
2014. *Applied Hydraulic Transients*, 3 edition. Springer.
- Golia, U.  
1990. Sulla valutazione delle forze resistenti nel colpo d'ariete. *Pubblicazioni del Dipartimento di Idraulica dell'Università di Napoli, No. 639, Napoli*.
- Guinot, V.  
2003. *Godunov-type Schemes: An Introduction for Engineers*, 1 edition. Elsevier.
- López-Herrera Sánchez, J.  
2018. Notas sobre fenómeno del golpe de ariete.
- Pearsall, I. S.  
1965. The velocity of waterhammer waves. In *Proc. Symposium on Surges in Pipelines, Inst. of Mech. Engrs., England, vol. 180, Part 3E*.
- Sabbagh-Yazdi, S.-R., A. Abbasi, and N. E. Mastorakis  
2009. Water hammer modeling using 2nd order godunov finite volume method. In *Proceedings of the European Computing Conference, Athens, Greece*.
- Toro, E. F.  
1997. *Advances in Unsteady Friction Modelling in Transient Pipe Flow*. Springer.
- Twyman Q., J.  
2018. Water hammer analysis using an implicit finite-difference method. *ingeniare. Revista chilena de ingeniería, vol. 26 N° 2*.

Vardy, A. and J. Brown

1996. On turbulent, unsteady, smooth-pipe friction. *Pressure Surges and Fluid Transients, BHR Group*, Pp. 298–311.

Vítkovský, J., M. Lambert, A. R. Simpson, and A. Bergant

2000. Advances in unsteady friction modelling in transient pipe flow. In *The 8th International Conference on Pressure Surges, BHR, The Hague, The Netherlands*.

Weyler, M. E., V. L. Streeter, and P. S. Larsen

1971. An investigation of the effect of cavitation bubble on the momentum loss in transient pipe flow. *Basic Engineering*.

Wylie, E. B. and V. L. Streeter

Zhao, M. and M. S. Ghidaoui

2004. Godunov-type solutions for water hammer flows. *Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 130, No. 4*.