Programa de Doctorado "Matemáticas"

PhD DISSERTATION

Irrationality and transcendence in the 18th and 19th centuries
A contextualized study of J. H. Lambert's *Mémoire* (1761/1768)

Author

Eduardo Dorrego López

Supervisor

Prof. *José Manuel Ferreirós Domínguez*

Committee in charge of judging the thesis:

Antonio Durán Guardeño (Presidente)	Universidad de Sevilla
María Rosa Massa Esteve (Vocal)	Universitat Politècnica de Catalunya
María Victoria Otero Espinar (Vocal)	Universidad de Santiago de Compostela
Davide Crippa (Vocal)	Academy of Sciences of the Czech Republic
María de Paz Amérigo (Secretario)	Universidad de Sevilla

Rapporteurs:

Christopher Hollings	University of Oxford
Carmen Martínez Adame	Universidad Nacional Autónoma de México

Neniñas: puidendo ser non vos metáis con naide, pero tornade sempre de vós e dos vosos intereses.

Contents

Agradecimientos

No creo que nadie se extrañe, si digo que en mis tiempos de instituto ni entendía, ni me gustaban las matemáticas. Me resultaría difícil ser preciso al respecto, pero sí recuerdo que todo aquello se presentaba ante mí sin una razón clara y «sin alma». Pero, aunque yo compartía ese sentimiento con muchos de mis compañeros de entonces, tuve sobre ellos la suerte de recibir en un momento clave uno de los mejores consejos que me han dado nunca —«cuando estudies, hazlo sin presión, pero hazlo a diario» (gracias papá)— y la ventaja de tener a mi lado una guía.

Mi tío Tonón fue sin duda mi mentor. Su cariño por esta disciplina realmente me hacía pensar: «¿qué habrá en ella?». No fue difícil descubrir, de su mano, la respuesta. Los razonamientos eran limpios y elegantes, y lo más importante, había un lado humano en toda esa simbología que yo no conocía: «¿el mayor matemático de todos los tiempos ? ... ¿Carmen, tú qué dirías? ... Yo diría que fue Euler, ¿verdad?». Mi pasión por la docencia, las matemáticas y su historia se la debo a él.

Desde aquel entonces, apenas contaba 16 años, tenía claro que ya no quería estudiar derecho y ser notario (lo de ser notario suena tan sencillo... ¿verdad papá?). No fue una decisión fácil, pero un «cuando llegue el momento sabrás qué elegir» que al principio sonó desconcertante, terminó siendo una premonición de las que solo una persona sabia está en condiciones de anunciar (gracias mamá). Empecé a leer sobre historia de las matemáticas, y no era difícil identificarme, puesto que era presumiblemente el único alumno que iba con «el Boyer» debajo del brazo. Gracias a la infinita compresión y ayuda de mis padres, pude ir a Santiago a estudiar matemáticas, y desde el primer momento devoré libros de historia y divulgación. El libro de Morris Kline, «La pérdida de la certidumbre», cambió mi perspectiva radicalmente, acentuando mi gusto por cuestiones histórico-filosóficas.

En una de mis indagaciones, me encontré en la sección de investigación de la biblioteca de la facultad, un libro que trataba temas sobre los que había estado discutiendo con mi tío. Se titulaba «El nacimiento de la teoría de conjuntos, 1854–1908». A día de hoy, Cantor, el

principal protagonista del libro, sigue siendo mi héroe matemático, y el autor de ese libro, casualidades de la vida, el supervisor de esta tesis doctoral. A José Ferreirós le agradezco en primer lugar el haberme enseñado, desde aquel momento con su trabajo, una parte de las matemáticas de enorme belleza, y en segundo lugar, hace ahora cinco años, el haberme aceptado como alumno de doctorado. Desde el primer momento se mostró dispuesto a escucharme, y a que mi intención de realizar una tesis en historia se materializase. A pesar de que nos separan unos cuantos kilómetros, una conversación con alguien de su nivel —«con lo más selecto de la historia de las matemáticas como disciplina», como me dijeron en una ocasión— es siempre instructiva. Estoy en deuda con él por ello, y espero haberle devuelto parte del favor con el trabajo que he hecho.

De esa forma acabé en Sevilla, aunque en la distancia, en la Línea de Investigación en Análisis Matemático del IMUS, institución a la que estoy verdaderamente agradecido por haber aceptado la propuesta de tesis permitiendo que se llevase a cabo, así como a Guillermo Curbera por la disponibilidad que me ofreció como tutor para ayudarme siempre que lo necesitase. Espero que en el IMUS me permitan, sin embargo, lanzarles un guante en forma de propuesta. Los pasos que brillantes investigadores dan desde sus despachos del IMUS, los dan sobre caminos que antes no existían y que fueron asfaltados por personas que osaron cruzar puertas con el claro cartel de «prohibido», o que simplemente no estaban a la vista. Una de las razones por la que la historia es importante, es porque se hace responsable de no dejar olvidar los enormes esfuerzos de los que nos han traído hasta aquí. Pero desde un punto de vista más práctico, la historia puede revelarse en multitud de ocasiones como una ayuda para la propia investigación en matemáticas: «muchas de mis ideas las saqué leyendo a los geómetras italianos clásicos» me decía Manuel Pedreira, amigo y exprofesor mío. Por ello, teniendo en el IMUS a investigadores en historia de las matemáticas de gran nivel, sería productivo, sano, y sin duda alguna, un elemento diferenciador con respecto a otras universidades e institutos de investigación, el crear una línea oficial de investigación en «Historia y Filosofía de las Matemáticas».

Quiero expresar mi agradecimiento al Dr. Christopher Hollings de la Universidad de Oxford, por haberme aceptado como estudiante visitante en el Grupo de Investigación en Historia de las Matemáticas que él encabeza, y por su hospitalidad. Durante mi estancia, tuve la oportunidad de cumplir el sueño de conocer esa hermosa ciudad, y de participar de su ambiente académico a través de las actividades organizadas por el Mathematical Institute y el Queen's College, así como de dar un importante impulso a mi investigación gracias a la fuente casi inagotable de recursos que me ofrecía la red de bibliotecas de la universidad.

Así mismo quiero agradecer a aquellos con los que he tenido correspondencia durante estos años, y que me han ofrecido su ayuda de manera desinteresada de una u otra forma. Entre ellos: Christopher Baltus de la State University of New York at Oswego, por sus comentarios sobre la demostración de Lambert y la gentileza de enviarme uno de sus artículos con los que pude responder a algunas de mis dudas; Bruce J. Petrie del Institute for the History and Philosophy of Science and Technology (IHPST), por sus reflexiones y la amabilidad de enviarme material de algunas de sus conferencias; Armin Emmel de la Universität Mannheim por sus comentarios relacionados con el *Monatsbuch* de Lambert y el haberme enviado las partes relevantes de su nueva edición de dicho *Monatsbuch*; Maarten Bullynck por sus aportaciones y, más en general, por el trabajo dedicado al diseño y mantenimiento de la página *Lambert, Collected works*; Eliane Michelon de los Archives de Mulhouse por la enorme amabilidad de facilitarme documentos históricos relacionados con Lambert; a Stephan Fölske, Christina Wilke y Dr. Vera Enke de los Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften por su información; al grupo «Arithmos» por permitirme participar en sus seminarios de Historia de las Matemáticas; a Joshia por su ayuda con el inglés; a todos aquellos colegas de investigación que tan amablemente me han ofrecido su experiencia a través de diferentes congresos o en otro contexto, de manera expresa a Elías Fuentes y a María de Paz; y especialmente a Carlos Gómez Bermúdez por su amistad, ayuda, y las conversaciones en Carnoedo sobre historia, de las que he ido tomando buena nota.

No querría olvidar de ningún modo, el hacer una muy especial mención a todas aquellas personas que hacen, a través de plataformas de digitalización, infinitamente más sencillo el trabajo del historiador. Aunque el bucear en bibliotecas y archivos da a la investigación histórica un sabor especial, y en ocasiones es indispensable, gracias a su trabajo dicha investigación puede avanzar a una velocidad sin precedentes. En no pocas ocasiones a lo largo de estos años, me he acordado, no ya de los matemáticos de la época que estudié y sus medios, sino también de las dificultades que enfrentaron los que estudiaron épocas anteriores, sin los medios de los que he gozado yo. Es digno de respeto.

Por último, mi más emotivo agradecimiento a mis seres queridos. Mis amigos, Cristian, Alex, Dieguito, Iago, Emilio, Samu y Alberto, por hacerme desconectar, por su apoyo, y por sus tan importantes ánimos. A mis suegros por cuidar tanto de nosotros, y a Laura y Juan por los buenos momentos. A mi familia, a la que le debo todo. Son mi razón de ser. Mi madre, Ana, por su amor y ayuda con el francés que tan útil me ha resultado (yo le he devuelto el favor, haciéndole leer a Lambert); mi padre, Modesto, que no me ha dejado de mimar desde los 100 besos; mi hermana Zazu, mi orgullo y heroína, que en estos días de cuarentena se juega la salud para que gente como yo pueda estar tranquila; mis hermanos, Karry y Chenchy, principalmente a Karry con el que he pasado más tiempo, y que ha sido siempre uno de mis mejores amigos; a Mari, por todos estos años de cariño; a memé y a la memoria de mi abuelo pepé, para el que siempre fui su «cocó»; a Luisita, a mi ahijado Xosé, a mi tía Maruja y a la memoria de mi tía Luisa, tan importantes en los que fueron los mejores años de mi infancia; a mi abuelo Modesto por regalarme mi primera bicicleta y a mi abuela Julia, por su carácter, por no dejarse pisar nunca, por sus enseñanzas y por su infinito amor; y a mi pareja, amante y compañera Anita. Tiene que ser difícil convivir con alguien que pasa períodos largos de tiempo encerrado en sí mismo. Ella siempre, y quiero enfatizar lo de siempre, me ha apoyado y se ha sentido orgullosa de mí por ello. Quiero que sepa que le estoy profundamente agradecido, y que el amor, el orgullo y el respeto es mutuo.

Resumen

El objetivo de esta tesis, es realizar un estudio histórico del desarrollo de los números irracionales y del concepto de trascendencia en la matemática de los siglos XVIII y XIX. Si bien son muchos los autores que se analizan, este estudio tiene en Johann Heinrich Lambert (1728–1748) y su *Mémoires sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes, circulaires et logarithmiques* (1761/1768) a sus principales protagonistas. La principal aportación —Parte II de la tesis— consiste en la primera traducción anotada de este trabajo —particularmente conocido por incluir la primera demostración de la irracionalidad de π—, un análisis que se acompaña con un estudio del propio autor.

La investigación de este trabajo y de su autor no se hace de forma aislada, sino que se contextualiza analizando el desarrollo de los llamados irracionales «especiales» en dos siglos marcadamente diferentes, el XVIII y el XIX, hasta culminar en las teorías completas de los números reales y en los ya números «trascendentes». En la Parte I de la tesis, se analiza la situación antes de Lambert y principalmente en el siglo XVIII —un análisis en el que Euler tiene un papel relevante—, pero echando una breve mirada hacia las últimas décadas del siglo XVI así como al siglo XVII, marco temporal del origen y desarrollo de los métodos analíticos, claves para el avance hacia una comprensión profunda del número irracional.

Finalmente, la Parte III arroja luz sobre la influencia que este trabajo de Lambert pudo tener en las generaciones posteriores, y más en general, acerca de la manera en la que el número irracional pasó de ser una mera cantidad (imagen clásica) a un objeto abstracto definido a través de objetos infinitos (imagen moderna). Este conocimiento más profundo del número irracional se refleja particularmente en las primeras demostraciones de trascendencia, y en este sentido un personaje clave es Joseph Liouville (1809–1882), no solo por sus propias aportaciones, sino por su enorme influencia a través de su *Journal*, de sus clases, y de la red de contactos internacional de la que gozaba, siendo Dirichlet un caso especialmente distinguido. En gran medida, la influencia de Liouville, que directa o indirectamente recibe la influencia de Lambert, es la responsable de los famosos

resultados de Hermite y Lindemann sobre la trascendencia de e y de π, concepto —el de trascendencia— que no se empezará a utilizar en su significado moderno de una forma sistemática hasta las últimas décadas del siglo XIX, principalmente gracias al trabajo de Dedekind.

Abstract

The object of this dissertation is to carry out a historical study on the development of irrational numbers and the concept of transcendence in mathematics during the 18th and 19th centuries. Although many authors are analyzed, the central character of the study is Johann Heinrich Lambert (1728–1748) and his *Mémoires sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes, circulaires et logarithmiques* (1761/1768). The main contributing portion —Part II of the dissertation— consists of the first annotated translation of this work, which is particularly known for including the first demonstration of the irrationality of π, an analysis that is accompanied with a biography of its author.

The research of this work and its author is not done separately. Rather, it is contextualized by analyzing the development of the so-called «special irrationals» in two markedly different centuries, the 18th and 19th, culminating in the complete theories of real numbers and the new conception of «transcendental» numbers. In Part I of the thesis, the situation prior to Lambert and mainly in the 18th century is analyzed —an analysis in which Euler has a relevant role—, but we also take a brief look at the last decades of the 16th and the 17th centuries, the time frame of the origin and development of analytical methods, key to progress towards a deeper understanding of irrational numbers.

Lastly, Part III sheds light on the influence that Lambert's work had on later generations, and more generally, on the way in which irrational numbers went from being a mere quantities (classical image) to abstract objects defined through infinite processes (modern image). This deeper knowledge of irrational numbers is particularly reflected in the first demonstrations of transcendence, and in this sense, a key character is Joseph Liouville (1809-1882). This is not only because of his own contributions, but also because of his enormous influence through his Journal, his lectures, and the international network of contacts at his disposal, Dirichlet being a particularly distinguished case. To a large extent, the influence of Liouville, which directly or indirectly was swayed by Lambert, is responsible for the famous results of Hermite and Lindemann on the transcendence of e and π —a concept (that of transcendence) which will not begin to be used in its modern meaning in a systematic way until the last decades of the 19th century, starting with the work of Dedekind.

Introducción

Desde que los griegos se encontraron por primera vez con la irracionalidad, hasta que finalmente se estableció un conjunto coherente de números definidos mediante una misma propiedad resultado de una comprensión profunda de los mismos, pasaron más de dos milenios. Desde luego, hay razones históricas que ayudan a explicar tan amplio período de tiempo —algunas de las cuales se desarrollarán en esta tesis—, pero el hecho es que el número de obstáculos a sortear, y el grado de sofisticación necesario para hacerlo, fue enorme.

Interconectados con los números irracionales, encontramos algunos de los problemas y conceptos más complejos a los que se ha tenido que enfrentar la matemática como disciplina (y no solo la matemática, de hecho). Los números irracionales, podríamos decir, llevan la infinitud en su interior, algo que de por sí podría explicar el enorme desconcierto que generaron, así como la dificultad para captar su naturaleza; el propio concepto de infinito, de hecho, fue un auténtico gigante que solo pudo ser apaciguado tras varios milenios de lucha.[1] Pero entrelazado con él, también encontramos el problema clásico de la cuadratura del círculo, un problema tan atractivo como difícil que encontró su final alejado de las técnicas puramente geométricas que lo vieron nacer.

El caso es que en su largo recorrido, el número irracional manejado no pasaba de los radicales, y a pesar de que el problema de la cuadratura del círculo estuvo siempre muy presente, su gemelo numérico, π, había tenido poco protagonismo a este respecto, puesto que los cánones exigían para un problema de esta índole un tratamiento geométrico. El momento a partir del cual empieza a haber una consciencia clara de la existencia de irracionales especiales y de lo que los hacía ser especiales, surge con la aparición y desarrollo de los método analíticos en el contexto del conocido como proceso de desgeometrización (1650–1750).[2] A partir de este momento empiezan a aparecer resultados relacionados con

[1] Apaciguado mejor que derrotado, pues sigue teniendo sus detractores.

[2] Un resumen de este proceso estudiado por historiadores como Henk Bos o Craig Fraser puede verse en [Guicciardini 2007, pp. 89–91].

nombres como Euler, Lambert, Lagrange o Legendre, que dan los primeros pasos en una dirección nueva: demostraciones de irracionalidad (e; π; e^x con $x \in \mathbb{Q}; \pi^2$). ¿Por qué aparecen estas demostraciones ahora? ¿Qué métodos se usan? ¿Hay un interés generalizado por estas cuestiones? ¿Qué visión sobre el número irracional se consigue con estos avances? El trabajo de Michel Serfati [Serfati 1992] es muy útil para hacerse una idea general de la situación entre los siglos XVIII y XIX. Esta tesis pretende ser una aportación a una comprensión más profunda del tema, centrada específicamente en Lambert.

En la primera parte de esta tesis —capítulos 1 y 2— se abordan estas cuestiones entrando en un período que realmente supone un punto de inflexión en la historia del número irracional. Las últimas décadas del siglo XVI supusieron un despegue en lo que al conocimiento aproximado de π, el primer irracional especial, se refiere, pero: ¿había una intención más profunda? ¿Quizá se pretendía dilucidar qué tipo de número (si es que era tal cosa) era π? ¿O las razones eran, digamos, más mundanas?

La diferencia entre estas últimas décadas en las que el método analítico estaba aún emergiendo,[3] y la segunda mitad del siglo XVII en la que vemos cómo se desarrollan y aplican con cierta destreza, marca una diferencia que también se deja ver en el desarrollo del número irracional. Surge en este contexto el concepto de trascendencia (de la mano de Leibniz) que será uno de los protagonistas de esta disertación y que apunta a una necesidad de distinguir entre irracionales, pero: ¿de qué forma? ¿En qué sentido estos irracionales especiales son trascendentes? ¿Por qué y a qué trascienden? El estudio de la trascendencia en esta época es algo bien estudiado. Excelentes trabajos directa o indirectamente relacionados con este tema y que serán citados a lo largo de este estudio, proporcionan una respuesta coherente con la época: algo (curva, ecuación, cantidad) es trascendente si trasciende al álgebra, es decir, si no puede ser expresado en forma finita a través de los medios algebraicos usuales (suma, resta, multiplicación, división, y extracción de raíces). Analizando algunas fuentes primarias proponemos otra interpretación que no está reñida con esta, pero que sí arroja luz sobre la misma.

Un protagonista especial en esta primera parte es Euler. No es extraño, desde luego, que Euler sea protagonista de algo que tenga que ver con la matemática de su tiempo, y en esta historia concreta, es de hecho quien proporciona el método a seguir (fracciones continuas), y el que da el primer paso (la irracionalidad de e). A mayores, Euler en su tratamiento de las funciones incluido en su *Introductio*, diferencia entre funciones algebraicas y trascendentes, último término que incorpora también como adjetivo cuando

[3]Ilustre protagonista de este movimiento es Viète.

habla de cantidades. Hay pues una clara consciencia de lo especial de ciertas cantidades, consciencia que también refleja en sus comentarios sobre π. ¿Qué impacto tuvo este trabajo de Euler sobre la irracionalidad de e? ¿Entendió la trascendencia en la misma línea que la tradición, o se puede captar leyendo entre líneas una comprensión más profunda? ¿Es quizá esta comprensión más profunda de la trascendencia de ciertas cantidades un denominador común en la época? y de ser así, ¿a qué se debe? En cualquier caso, el número e era un irracional especial bastante desconocido cuando Euler publicó el trabajo en el que se incluye la mencionada demostración,[4] con lo que si por algo destaca en materia de irracionalidad el siglo de las luces, es por los avances conseguidos en torno a π, avances que están ligados en este siglo al nombre de Lambert y de Legendre.

La segunda parte de esta tesis —capítulos 3, 4 y 5— está dedicada precisamente a, entre otras cosas, profundizar en estos avances, y tiene un protagonista principal: Johann Heinrich Lambert. Conscientes de que la matemática es una práctica humana, se ha incluido en este estudio un capítulo entero dedicada a su persona (capítulo 3). Téngase en cuenta desde el principio que no se ha pretendido llevar a cabo algo así como una biografía exhaustiva, al estilo de, por ejemplo, [Calinger 2016] sobre Euler, [Lützen 1990] sobre Liouville, o [Merzbach 2018] sobre Dirichlet, excelentes trabajos de los que se ha echado mano y que me han permitido comprender mejor algunos pasajes del tema del que me he ocupado. Pero sí se ha querido dar un primer paso en esa dirección puesto que una tal biografía sobre Lambert no existe. Ya en su artículo clásico sobre Lambert, Gray y Tilling insistían en la necesidad de pensar en este autor de una manera global,[5] y resulta en muchos casos revelador el conocer al personaje en un intento de comprender sus acciones y decisiones (matemáticas o no, aunque en este caso, matemáticas). Ciertamente hay buen material al respecto, y especialmente útiles han resultado las ediciones y traducciones de Oscar Sheynin de las primeras biografías sobre Lambert,[6] y los trabajos del gran especialista en Lambert, Roger Jaquel.[7]

Pero el principal objetivo, y lo que de hecho ha motivado esta segunda parte, ha sido el comprender al detalle la aportación de Lambert al estudio de la irracionalidad. El resultado de este estudio se recoje en el capítulo 5, y es la primera traducción anotada del

[4]El trabajo es [Euler 1744].

[5]Me refiero a [Gray et al. 1978].

[6][Sheynin 2010].

[7]Por cierto que el reto de recoger en una biografía exhaustiva la vida y obra de Lambert, salta a la vista si se tiene en cuenta que algunos han estimado su obra en unos 30 volúmenes (Max Steck en base a [Jaquel 1977, p. 93]).

artículo en el que se demuestra por vez primera la irracionalidad de π.[8] Como se explica en el capítulo 4, donde se da una visión general de la bibliografía al respecto así como de las diferentes opiniones acerca de este trabajo, este artículo de Lambert tiene un interés histórico evidente: extrínseco, en tanto que, por ejemplo, da un paso de gigante hacia una comprensión más profunda de la irracionalidad; e intrínsico, por los propios métodos usados, los resultados ahí incluidos, y el rigor con el que llevó adelante dicha empresa. Con el estudio realizado se ha tratado al mismo tiempo de arrojar luz sobre algunos problemas históricos que han rodeado esta demostración: ¿puede decirse que Lambert demostró rigurosamente este resultado, o hay que aceptar que la primera prueba rigurosa se debe, como dicen algunas fuentes, a Legendre?

Llegados a este punto, si uno hace balance de la situación se encuentra con lo siguiente. Dos demostraciones de irracionalidad, una de la mano de Euler (e), y la otra, especialmente relevante en tanto que incumbía a una constante (π) íntimamente relacionada con un problema de enorme envergadura (la cuadratura del círculo), y que de por sí había sido motivo de números trabajos de aproximación, de la mano de Lambert. Por otro lado, un poderoso método que se antojaba enormemente fructífero para el estudio de la irracionalidad, las fracciones continuas, tal y como habían sido usadas tanto por uno como por otro. Y por último un concepto, el de trascendencia, que aparece por vez primera en su formulación moderna al final de la *Mémoire*. Ahora bien, pasa casi un siglo, y en algún caso más aún, hasta que: aparecen nuevos resultados en torno a irracionales especiales (con alguna excepción); hay una compresión más detallada de los mismos (demostraciones de trascendencia, teorías completas); y la terminología usada explícitamente por primera vez por Lambert encuentra su sitio. ¿Qué pasó entremedias?

La tercera parte de la tesis —capítulos 6, 7 y 8— analiza esta situación concretando en la influencia que pudo tener Lambert en las generaciones posteriores. Es bien conocido, por ejemplo, que Legendre realizó una demostración más breve y asequible de la irracionalidad de π, extendiéndola para el caso de π^2, ya en la primera edición de sus *Éléments de Géométrie* (1794), y que se suele aludir a ella como la demostración que viene a tapar los huecos de la de Lambert. Tras un análisis detallado de ambas demostraciones, ¿puede afirmarse tal cosa? ¿Qué diferencias esenciales se pueden encontrar entre ellas? ¿Supone Legendre una cierta continuidad con respecto a Lambert? El propio Legendre alude a la demostración de Lambert, así que para poder responder a estas preguntas, y

[8] Me refiero a [Lambert 1761/1768]. El título de dicho artículo es *Mémoires sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes, circulaires et logarithmiques*. En no pocas ocasiones me referiré a él simplemente como *Mémoire*.

dada la importancia de su demostración, se incluye en el capítulo 6 un estudio introductorio acompañado de una traducción anotada.

Los cambios de siglo suponen una ruptura temporal, pero en gran parte de los casos la ruptura no pasa de ahí. Ciertamente las últimas décadas del siglo XVIII supusieron una ruptura con respecto (permítasenos decir) al siglo anterior, que fue más allá del cambio meramente temporal con el estallido de la Revolución Francesa. Pero en relación al tema más concreto que nos ocupa, el desarrollo del número irracional: ¿hubo también una clara ruptura con el cambio de siglo, o la inercia del XVIII no varió el panorama hasta bien entrado el XIX? El libro de Legendre tuvo una enorme influencia, y fue leído y estudiado por generaciones:[9] ¿esa influencia también se dejó notar de manera sustancial en conexión con el estudio de los irracionales?

Sí hubo lo que a primera vista podría parecer un punto de ruptura con la vieja visión de lo algebraico en el anuncio de Ruffini de 1799 sobre la no resolubilidad de la quíntica. Eso suponía que la expresabilidad algebraica —en los términos que hemos comentado más arriba— no captaba la esencia de lo que era ser algebraico, que era y de hecho había sido siempre, el ser raíz de una ecuación. ¿Tuvo esto alguna repercusión? Lambert, quien había establecido por primera vez la propiedad de ser raíz de una ecuación como vara de medir para lo algebraico, ¿jugó algún papel en el cambio? Hoy sabemos que ese cambio se dio pero, ¿cuándo exactamente, y por qué no antes? El capítulo 7 está dedicado a responder a estas cuestiones.

Por otro lado, la visión que de la matemática se tenía en el XVIII, usando la definición que da Euler en su *Vollständige Anleitung zur Algebra*[10] de 1770, era la de una «ciencia de las cantidades, o la ciencia que busca el medio para medirlas». Estos medios, los procesos infinitos, habían avanzado mucho en esta dirección con el desarrollo de las fracciones continuas, y habían permitido alcanzar al número irracionalidad con una eficacia nunca vista hasta el momento. ¿Cambió eso la percepción con el cambio de siglo, o esos métodos seguían siendo vistos como eso, medios? Es decir, ¿esos medios seguían siendo vistos como herramientas —siguiendo a [Ferreirós 2015, cap. 8]—, o pasaron a la categoría ontológica superior de objeto en estas primeras décadas?

Dejando a un lado lo rápido o no que se hayan producido los cambios, el siglo XIX sufrió un giro en el rumbo con respecto a su predecesor caracterizado por un énfasis en los

[9] Fue un best-seller del XIX como lo cataloga [García 2004].

[10] *Tratado completo de álgebra.* Aquí se ha manejado [Euler 1770].

fundamentos y el rigor.[11] Cabría esperar que esta corriente arrastrase consigo las ideas clásicas sobre el número irracional llevándolas a otro nivel: un interés más acentuado sobre la naturaleza de los irracionales especiales; un cambio en el marco teórico a la vista de nuevos resultados como los de Abel; o una concepción distinta del número irracional, ahora ya como un objeto abstracto definido, no ya medido, por medio de procesos infinitos.

Este cambio en lo que al número irracional se refiere, efectivamente se dio, pero no precisamente pronto: resultados de trascendencia, uso moderno del concepto de trascendencia en base a un cambio del marco teórico, y teorías completas de los irracionales. En conexión con esto, dos figuras parecen especialmente relevantes tanto por sus resultados, como por su influencia: Liouville y Dedekind. En torno a ellos gravitarán las ideas claves justamente mencionadas, y los matemáticos claves para este cambio. Mención especial merecen Hermite, Lindemann, Cantor o Weierstarss. El último capítulo de la tesis, el capítulo 8, trata de arrojar luz sobre cómo este movimiento, que enfatizó la importancia de la aritmética como modelo a seguir, moldeó la visión moderna del número irracional; sobre el papel que un ya alejado en el tiempo Lambert pudo jugar (a distancia); y sobre la influencia de estos nuevos resultados a un nivel global.

Creemos que, para finalizar, sería importante hacer una reflexión historiográfica y filosófica con tintes metodológicos. Una de las razones de ser del quehacer histórico (si no la razón), es la de vindicar el pasado recuperando y trayendo al presente autores, ideas, trabajos, etc., que, o habían sido mal estudiados, o estudiados de forma incompleta, o simplemente ignorados. Pero como ocurre en otros ámbitos de la vida, también en el contexto histórico en no pocas ocasiones se tergiversa, más que se vindica, aquello que se quiere defender aún cuando se actúa de buena voluntad.

El caso concreto que nos atañe se ha prestado a actuaciones de ese estilo, proyectando sin filtro sobre el pasado los conocimientos que uno ha adquirido en su tiempo, y es por eso que resulta apropiada una llamada de atención. Por ejemplo, no es difícil encontrar textos en los que se hablen de que las fracciones continuas ya se encontraban en los *Elementos* de Euclides, algo que como mínimo requeriría de una profunda matización. Las fracciones continuas como objetos infinitos, que es como las pensamos hoy, serían de hecho desterradas de Grecia si osasen pisar un pie en ella. Así también los números reales, cuya distinción encontramos por vez primera en Descartes para distinguirlos de los imaginarios, autor que no por ello tenía en mente un sistema de los números reales como el de la

[11] Ferreirós ha estudiado en detalle este movimiento, sobre todo en Alemania. Yo he dependido en gran medida de su libro [Ferreirós 2007 a].

segunda mitad del XIX, ni por supuesto de los números complejos. Es importante tener esto presente para reivindicar el pasado sin tergiversarlo.

Un último comentario, esta vez, acerca del idioma. Cuando empecé con mi investigación, empecé al mismo tiempo con la redacción de algunas de las partes que estaba investigando. El punto de partida fue Lambert, y a partir de ahí, contextualizarlo. Pero pronto me dí cuenta de algo, por otro lado, bastante obvio, a saber: para darle el mayor alcance posible debía redactar la tesis en inglés. Es por ello que las Partes I y III están redactadas en inglés, y la Parte II, con la que empecé mi andadura y que fui puliendo con el tiempo, está en español. Esa Parte II, formará parte de un libro que en este momento está en proceso de revisión por la editorial College Publications. El título del libro será *Dilucidando* π*. Irracionalidad, trascendencia y cuadratura del círculo en Johann Heinrich Lambert (1728–1777)*, e incluirá a mayores una traducción anotada a cargo de Elías Fuentes Guillén del trabajo de Lambert *Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rektifikation des Cirkuls suchen*,[12] que es la Parte V de su [Lambert 1766/1770]. El libro estará prologado por José Ferreirós.

[12] *Conocimientos previos para quienes buscan la cuadratura y la rectificación del círculo.*

Introduction

The Greeks were the first to encounter irrationality, but it took more than two millennia before a coherent set of numbers was finally established as result of a deeper understanding of irrationals. Of course, there are historical reasons that help to explain such a long period of time, some of which will be examined in this thesis, but what is clear is that there were an enormous number of obstacles to overcome and an extraordinarily high degree of sophistication was necessary to do so.

Interconnected with irrational numbers, we find some of the most complex problems and concepts that mathematics has had to face as a discipline (and not just mathematics, in fact). Irrational numbers, we could say, carry infinity within them, something that in itself could explain the massive amount of confusion they generated, as well as the difficulty in capturing their nature. The very concept of infinity, in fact, was a giant that could only be appeased after several millennia's worth of struggling.[13] But intertwined with it, we also find the classic problem of squaring the circle, a problem as attractive as it is difficult; one that found its solution away from the purely geometric techniques that bore it.

The fact is that in this long journey the irrational numbers handled did not exceed the radicals, and despite the fact that the problem of squaring the circle was always present, its numerical twin, π, had little prominence in this regard, since the canon required a geometric treatment for problems of this nature. The moment from which there began to be a clear awareness of the existence of special irrationals and of what made them special arose with the appearance and development of analytical methods in the context of what is known as the process of de-geometrization (1650–1750).[14] From this moment on, results related to names like Euler, Lambert, Lagrange or Legendre began to appear, taking the first steps in a new direction: proofs of irrationality (e; π; e^x with $x \in \mathbb{Q}; \pi^2$). Why

[13] Appeased better than deceived, because infinity continues to have its detractors.

[14] A summary of this process studied by historians like Henk Bos o Craig Fraser can be seen in [Guicciardini 2007, pp. 89–91].

are these demonstrations appearing now? What methods are used? Is there a general interest in these questions? What vision of irrational numbers was achieved with these advances? The work of Michel Serfati [Serfati 1992] is very useful to get a general idea of the situation between the 18th and 19th centuries. This dissertation is intended to be a contribution to a deeper understanding of the subject, focusing specifically on Lambert.

In the first part of this thesis —chapters 1 and 2— these questions are approached, entering a period that truly represents a turning point in the history of irrational numbers. The last decades of the 16th century saw a takeoff in terms of the approximate knowledge of π , the first special irrational, but was there an even deeper intention? Perhaps it was intended to clarify what kind of number (if it was even such a thing) was π? Or were the reasons, shall we say, more mundane?

The changes between these last decades, in which the analytical method was still emerging,[15] and the second half of the seventeenth century, in which we see how they are developed and applied with some skill, mark a difference that can also be seen in the development of the concept of irrational number. In this context, the concept of transcendence arises (from Leibniz's hand) that will be one of the main protagonists of this dissertation and which points to a need of distinguishing between irrationals. But in what way? In what sense are these special irrationals transcendental?[16] Why and what do they transcend? The conception of transcendence at this time is something well studied. Excellent works, directly or indirectly related to this topic, will be cited throughout this study, and they provide a coherent answer for this period: something (curve, equation, quantity) is transcendental if it transcends algebra, that is, if it cannot be expressed in finite form through the usual algebraic means (addition, subtraction, multiplication, division, and extraction of roots). Analyzing some primary sources, we propose another interpretation that is not at odds with this one, but that does shed light on it.

A very important character in this first part is Euler. It is not strange, of course, that Euler is the primary figure in something that has to do with the mathematics of his time, and in this specific story, he is in fact the one who provides the method to follow (continuous fractions) giving besides the first step forward (the irrationality of e). Furthermore,

[15] Viéte is an illustrious protagonist of this movement.

[16] The term «transcendental» is nowadays widely used in modern mathematics, and for this reason it will be that I will be using it throughout this thesis, although some authors prefer to use the term «transcendent». In any case, this distinction is not relevant as far as my research is concerned. The important distinction is between the two different ways the concept of transcendence was understood.

Euler's treatment of the functions included in his *Introductio* differentiates between algebraic and transcendental functions, and he also incorporates this last term as an adjective when speaking of quantities. There is thus a clear awareness of how special certain quantities are, an awareness that also reflects in his comments on π. What impact did this work by Euler on the irrationality of e have? Did he understand transcendence along the same lines as tradition, or can a deeper understanding be captured by reading between the lines? Perhaps it is this deeper understanding of the transcendence of certain quantities that was the common denominator at the time? And if so, why? In any case, the number e was a special irrational quite unknown when Euler published the work in which the aforementioned demonstration is included,[17] so if the century of Enlightenment stands out in terms of irrationality, it is because of the advances achieved around π, advances that are linked to the name of Lambert and Legendre.

The second part of this thesis —chapters 3, 4 and 5— is dedicated primarily to deepening these advances and has another main figure: Johann Heinrich Lambert. Aware that mathematics is a human practice, an entire chapter dedicated to him has been included in this study (chapter 3). Note from the outset that I have not intended to write such a comprehensive biography as, for example, [Calinger 2016] on Euler, [Lützen 1990] on Liouville, or [Merzbach 2018] on Dirichlet, all excellent works that were used and that have allowed me to gain a better understanding on some of portions of the subject which I have dealt with. However, I did want to give a first step in that direction since such a biography on Lambert does not exist. In their article on Lambert, Gray and Tilling insisted on the need to think about this author in a global way,[18] and in many cases, it is very revealing to know the character when attempting to understand his actions and decisions (mathematical or not, although in this case, mathematical). There is certainly good material on the subject, but especially helpful were Oscar Sheynin's editions and translations of some of the earlier biographies on Lambert,[19] along with the works of the great Lambert specialist, Roger Jaquel.[20]

However, the main objective, and what in fact has motivated this second part, has been to understand in detail Lambert's contribution to the study of irrationality. The result of this study is collected in chapter 5, and it is the first annotated translation of the work

[17] The work is [Euler 1744].

[18] I am referring to [Gray et al. 1978].

[19] [Sheynin 2010].

[20] By the way, the challenge of collecting the life and work of Lambert in a comprehensive biography is conspicuous if we take into account that some experts have deemed Lambert's collected works at around 30 volumes (Max Steck according to [Jaquel 1977, p. 93]).

which first demonstrated the irrationality of π.[21] As explained in chapter 4 where an overview is given on the literature of the matter as well as the different opinions about this work, this paper by Lambert has an obvious historical interest: extrinsically, for example, when he takes a giant step towards a deeper understanding of irrationality; and intrinsically through the very methods that were used, as well as the results included there and the rigor by which they were carried out. This study has, at the same time, tried to shed light on some of the historical problems that have surrounded this demonstration, for example: Can it be said that Lambert rigorously demonstrated this result, or must it be accepted that the first rigorous proof was due, as some sources say, to Legendre?

At this point if one were to make balance of the situation, one would find the following: two demonstrations of irrationality, one by Euler (e), and the other by Lambert, this last one especially relevant due to the fact that it had to do with a constant (π) related to a problem of enormous scope (the squaring of the circle), and that by itself had been the subject of numerous calculations; on the other hand, a powerful method which seemed extremely fruitful for the study of irrationality, continued fractions, such as they have been used by both of them; and finally, a concept (transcendence) which appears for the first time in its modern formulation at the end of Lambert's *Mémoire*. However, almost a century passes, and in some cases even more, until: new results appear around special irrationals (with some exceptions); there is a more detailed understanding of them (proofs of transcendence and complete theories); and the terminology used for the first time by Lambert settles down. So why such a long delay?

The third part of the thesis —chapters 6, 7, and 8— analyzes this situation, specifically the influence that Lambert could have on subsequent generations. It is well known, for example, that Legendre made a shorter and more accessible demonstration of the irrationality of π, extending it to the case of π^2 which was already in the first edition of *Éléments de Géométrie* (1794). This is often referred to as the demonstration that comes to cover the gaps in Lambert's work. After a detailed analysis of both proofs, can such a thing be confirmed? What are the essential differences that can be found between them? Seeing how Legendre himself alludes to Lambert's proof, is there a certain continuity with respect to Lambert? Given the importance of this proof, an introductory study accompanied by an annotated translation is included in Chapter 6 in order to answer these questions.

[21] I am referring to [Lambert 1761/1768]. The paper's title is *Mémoires sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes, circulaires et logarithmiques*. When I want to make explicit reference to the title I will simply write *Mémoire*.

The turn of a century is a temporary break, but in most cases the break does not go beyond there. The last decades of the eighteenth century clearly marked a break with (let us say) the previous century, which went beyond being a mere temporary change since it saw the outbreak of the French Revolution. But in relation to the more specific issue that concerns us, the development of the irrational number concept, was there also a clear break with the turn of the century, or did the inertia from the 18th century carry the same ideas until well into the 19th century? Legendre's book had an enormous influence and was read and studied by generations,[22] so was this influence also noticeable enough in connection with the study of irrationals?

Ruffini's announcement of 1799 on the unsolvability of the quintic might have seemed like a breaking point in the old vision of algebraic form. This meant that algebraic expressibility, like in the terms we discussed above, did not manage to capture the essence of what it meant to be an algebraic number (which was, and in fact always had been, being the root of an equation). So, did this have any repercussions? Did Lambert, who had first established the property of using the root of an equation as an algebraic measuring tool, play a role in the change? Today, we know that this change happened, but when exactly, and why not before? Chapter 7 is dedicated to answering these questions.

On the other hand, the 18th century view of mathematics, using the definition given by Euler in his *Vollständige Anleitung zur Algebra*[23] of 1770, was that of «the science of quantities, or the science that seeks the means to measure them». These means —the infinite processes— had advanced so much in this direction with the development of continuous fractions and had allowed to capture irrational numbers with an efficiency never seen before. But did that change perceptions with the turn of the century, or were those methods still seen as just that, means? In other words, following [Ferreirós 2015, chap. 8], did those means continue to be seen as tools, or did they move to the higher, ontological category of object during these earlier decades?

Leaving aside how quickly or not the changes occurred, the 19th century saw a turn in the course from its predecessor, one characterized by an emphasis on fundamentals and rigor.[24] One might expect that the current would drag with it the classical ideas about

[22] It was a 19th-century best-seller [García 2004].

[23] *Complete treatise of algebra.* We have drawn on [Euler 1770].

[24] Ferreirós has studied this movement in detail, above all in Germany. I have relied to a large extent on his book [Ferreirós 2007 a].

irrational numbers, taking them to new heights, such as: a more accentuated interest in the nature of special irrationals; a change in the theoretical framework with new results like Abel's; or a different conception of irrational numbers, now already defined as an abstract object and no longer measured by means of infinite processes.

This change in what the irrational number refers to did indeed occur, but not particularly quickly: new results of transcendence, modern use of the concept of transcendence based on a change in the theoretical framework, and completed theories of irrationals. In connection with this, two figures seem especially relevant, both for their results and their influence: Liouville and Dedekind. Around these two will gravitate the key ideas just mentioned and the key mathematicians for this change. Hermite, Lindemann, Cantor or Weierstarss deserve also special mention. The last chapter of the thesis, Chapter 8, tries to shed light on how this movement, which emphasized the importance of arithmetic as a model to follow, shaped the modern vision of irrational numbers, defined the role that an already distant Lambert could play, and guided the influence of these new results at a global level.

Before ending this introduction, we think that it would be important to add a historiographic and philosophical reflection with methodological overtones. One of the reasons for undertaking this historical task (if not the reason) is to vindicate the past by recovering and bringing to the present the authors, ideas, works, etc., that had been poorly studied, incompletely studied, or simply ignored. Another reason is to show how some things we may take for granted today, had a long and convoluted process of development, facing severe epistemological obstacles in their evolution. But as happens in other areas of life, as well as in the historical context, on many occasions what we are trying to defend is misrepresented, rather than vindicated, even when acting in good intention.

The specific case that concerns us has lent itself to performances of that style, filterlessly projecting onto the past knowledge from one's own time, and that is why a wake-up call is appropriate. For example, it is not difficult to find texts stating that continued fractions were already in the *Elements* of Euclid, a claim that can hardly be substantiated and which would require careful explanation. Continuous fractions as infinite objects, which is how we think of them today, would in fact be banished from Greece if they dared to step foot on its shores. The same goes with real numbers, whose distinction from imaginary ones we first find in Descartes, and yet he did not have a well-formed conception of the real numbers comparable to that of the second half of the 19th century in mind, nor of course of complex numbers. It is important to keep this kind of nuances in mind to reclaim the past without misrepresenting it.

One last comment, this time, about the language in which this dissertation is written. When I started my research, I started simultaneously writing some of the parts that I was researching. The starting point was Lambert, and from there, I contextualized him. But I soon realized something, on the other hand quite obvious, namely: to give it the widest possible scope, I had to write the dissertation in English. This is why Parts I and III are written in English, while Part II, with which I started my journey and which I was polishing over time, is in Spanish. Part II will be part of a book that is currently in the process of being reviewed by College Publications. The title of the book is *Dilucidando π. Irracionalidad, trascendencia y cuadratura del círculo en Johann Heinrich Lambert (1728–1777)*, and it will also include an annotated translation by Elías Fuentes Guillén of Lambert's work *Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rektifikation des Cirkuls suchen*, which is Part V of [Lambert 1766/1770]. The book will be prefaced by José Ferreirós.

Part I
From Ludolph to Euler

First steps towards the understanding of special irrationals

Chapter 1

From Geometry to Analysis

> *So as Viète and Descartes had shown that the problems of rectilinear geometry are reduced to the calculations of numbers by means of equations, I show here how the difficulties of the most important problems of curvilineal geometry are transfered from Geometry to the Arithmetic of rational numbers by means of progressions.*

- Leibniz, *Quadrature Arithmétique.*

1.1 Introduction

The first major period of those into which the historical development of the circle-squaring problem is usually divided reaches a key phase in the European Renaissance with the drive taken by algebra.[1]

[1] See for instance [Hobson 1913, pp. 10–12] who writes:

> The history of our problem falls into three periods marked out by fundamentally distinct differences in respect of method, of immediate aims, and of equipment in the possession of intellectual tools. The first period embraces the time between the first records of empirical determinations of the ratio of the circumference to the diameter of a circle until the invention of the Differential and Integral Calculus, in the middle of the seventeenth century [...] The second period, which commenced in the middle of the seventeenth century, and lasted for about a century, was characterized by the application of the powerful analytical methods provided by the new Analysis to the determination of analytical expressions for the number π in the form of convergent series, products, and continued fractions [...] In the third period, which lasted from the middle of the eighteenth century until late in the nineteenth century, attention was turned to critical investigations of the true nature of the number π itself, considered independently of mere analytical representations.

Although step by step the classical geometric treatises of the Greeks were being recovered and translated, the difficulty with both the language and the mathematics gave more impetus to the medieval Latin translations of Arabic arithmetical and algebraic works.[2] Algebra, in the hands of Arabic-speaking authors, underwent a major development, and although its use was focused above all on solving problems about numbers, it soon found a place in addition —though not without opposition[3]— in the field of geometry.

The classical idea of number inherited from the Greeks as representation of discreteness found in the 16th Century an ever-increasing number of detractors, who almost obliged by the unstoppable currents of the theory of equations, reconsidered the status of certain objects offered by algebra (like radicals or so called «surds»). Some authors like Simon Stevin, advocated a «continuous arithmetic», establishing a strong connection between numbers and geometric magnitudes.[4]

The purer concept of exactness in geometry had its adversaries as well, significantly Regiomontanus, who made a defence in his influential work *On triangles* (1533) of the legitimate use of numerical approximations in geometry. Several authors like Ludolph van Ceulen defended this approach,[5] and used the classical method of inscribing and circumscribing polygons in order to get numerical approximations of the circumference of the circle with diameter one, that is to say, π.

However, this numerical incursion was viewed with distrust by those who still followed the standards of purity of traditional geometry, something that obstructed the acceptance of algebra until that finally became the fundamental tool in geometry in the middle of the 17th Century. This gave rise to a change in methods, and the way in which the quadrature problems were tackled —in particular that of squaring the circle— changed from geometrical to analytical. This directed attention towards the numerical aspect of the problem —that is, towards π— and paived the way for a deeper knowledge of this

[2] [Boyer 1968, p. 297].

[3] From [Bos 2001, p. 143]:

> During most of the sixteenth century algebraic methods were used only in solving numeral problems and were considered as directly linked to numbers. Therefore, the doubts about the geometrical legitimacy of numbers constituted an additional obstacle against the merging of algebra and geometry.

[4] [Bos 2001, p. 139].

[5] On the merging of algebra, arithmetic and geometry in the 16th century see [Bos 2001, chapters 6, 7 and 8].

number.

1.2 Renaissance antecedents

In many places, it is noted that the general opinion about the quadrature of the circle from the 16th Century onwards was that this problem was unsolvable. Two main reasons are given: on the one hand the Greek influence, and on the other, the experience obtained of the large number of failed geometrical constructions, and the increasingly numerous and better numerical approximations of π that seemed to not reach their goal of exactness.[6]

The best approximations were obtained at the end of the century, and there is no doubt that this show of force —headed by Ludolph van Ceulen— would have fomented this idea of impossiblity, which, as far as π is concerned, would imply its irrationality. In fact, in many cases these same approximations were those which allowed the ruling out of the supposed quadratures, since the values entailed for π did not fit in with the numerical calculations.

In this course of action we find for instance Johannes Buteo, who followed this strategy in his treatise of 1559 about the quadrature of the circle, which refutes most of the quadratures of classical authors (and of his contemporaries), by showing that the values obtained contradicted the calculations of Archimedes about π.[7] This seems to have been a quite useful strategy, since the use of numbers started to break through geometric issues, becoming one of the primary motives of the more and more accurate approximations for π. Decimal expansions let clearly to detect the failed constructions, comparing the entailed values for π with that obtained through the Archimedean method, although, as was already pointed out, not everybody accepted this arithmetical incursion.

The case of Ludolph van Ceulen[8] is interesting, not only due to his accurate approximations, but because he lived in firsthand those tensions among arithmetic and geometry. During his life, he was involved in several disputes concerning the circle-squaring problem. Among the most influential for him, we have: that caused by the publication of a supposed quadrature by Simon van der Eycke in 1584, which he falsified by the usual method

[6] See for example [Bos 2001, p. 24] or [Montucla 1831, p. 277].
[7] [Bos 2001, pp. 25, 26].
[8] With regard to this see [Hogendijk 2010] and [Wreede 2010].

of comparing the resultant value of π;[9] and his dispute with J. J. Scaliger, which set in motion not only Van Ceulen's calculistic machinery, but also that by known defenders of the numerical method.

In 1590, the French erudite Scaliger announced that he had resolved the classical problem of squaring the circle and that of the rectification. From Archimedes, it was known that they were equivalents but Scaliger did not accept this link because it had been proven by means of *reductio ad absurdum*, a method that according to him corrupted young people. Consequently, it was not a problem to Scaliger that the obtained values for π were not consistent with those numerically determined; he only accepted geometric methods to do geometry and not the use of numbers.[10]

This kind of challenges should have been what boosted the search for approximations such as those by Viète (10 decimal places in 1593) and Adriaen van Rooman (14 decimal places in 1593), that along with the 20 decimal places given by Ludolph in 1596, were used as attack against this mistaken quadrature:[11] approximations that should have caused a strong influence to answer negatively (that is to say, towards the impossibility of squaring the circle and therefore towards the non-rationality of π). But despite the calculations of approximations having this clear purpose —in fact this technique was used by later authors for the same purpose[12]— one could consider whether besides this, mathematicians were trying to extract some conclusion about the number itself: namely its rationality or not. Undoubtedly, their own experience should have made them distrust the rationality of π,[13] just like all failed attempts of squaring the circle throughout history, but it seems unlikely that this was the case. It should be taken into account, that these investigations on π were fully connected with the problem of squaring the circle, and mathematicians knew that irrationality did not resolve the dilemma.

During 17th Century, radical irrationals had been continually handled in the context

[9]In fact, this seems to have led him towards the study of Archimedes (I am referring to the method of inscribing and circumscribing polygons to calculate the circumference of the circle).

[10][Hogendijk 2010, p. 346].

[11]Ludolph got better approximations, one with 33 decimals and another with 35, but these were published posthumously (in 1615 and 1621 respectively).

[12]For example, Fray Martín Sarmiento said in relation to Ludolph's approximations, that knowing the first decimal digits «anyone will be able to walk around the World tearing up *imagined quadratures*» (Sarmiento cited in [Rodríguez et al. 2006, p. 363]).

[13]Leibniz years later would comment in a letter to Oldenburg dated 16th October 1674, that the commensurability of the circle and the square over its diameter seemed likely impossible to him, due to its being completely irreconcilable with the approximations [Arthur 1999, p. 5].

of the resolution of equations. The ways of constructing them with ruler and compass were known, and moreover there were methods to approximate these numbers whatever the required precision was; the fog of infinity that characterised these numbers for Stiefel was well known and was translated into an infinite sequence of decimals.[14] Therefore a sequence of decimals that do not seem to reach their goal, as is the case of Ludolph's approximations, would not help to give an answer, not even a conjecture, about the quadrature of the circle.

Certainly, it could be speculated that mathematicians of this period attempted to find out some kind of criterion or information from the decimal part of π in order to get some conclusion about it, and therefore —perhaps— about the quadrature, for which more and more extended decimal expansions would be needed.[15] However, this seems implausible, due to the almost embryonic nature of the use of decimal expansions found at the time;[16] it is rather more likely that with these approximations, they were seeking more a tool to rule out «imagined quadratures» than answers about the nature of π.

[14]Stevin in the appendix to his *Arithmétique* of 1594, gives a method to approximate the positive roots of equations of any degree, and comments that van Ceulen also had a similar method but he never published [Stevin II 1958, p. 475, 476]. It is clear in addition, that he had no doubt about the infinite character of these decimal expansions, for he himself comments while he is resolving a third degree equation that "proceeding in this way unendingly, one approaches infinitely closer to the required value" (Stevin cited in [Ebbinghaus et al. 1988, p. 33]).

[15]We refer here to the information that it is possible to obtain from a number if it is known that it has a finite number of decimal places, for instance, or that being infinite they are periodically repeated.

[16]See [Stevin I 1958, pp. 373, 375–377]. Furthermore and regarding the comment in the previous note about a supposed criterion it is something that appears clear if we think for example of a fraction like $\frac{2}{5}$, but it is necessary to take into account that even some of the mathematicans of this epoch who were most «modern» (in several aspects) —like Viète— adopted a classical interpretation of fractions as relations and not as the result of divisions [Bos 2001, p. 149]. On the other hand, it is true that there were studies in this direction such as those contained in the *Algebra* of Wallis of 1685 (see [Bernoulli 1771, pp. 278–282]) —supposedly the first about this issue— showing that this was considered a good line of research, but all these cases are far away from the works of the Renaissance men. (This will be clear in Chapters 2 and 5 but, just to take an example, Lambert would start his search about the nature of π in 1753, trying to find some useful information within its decimal expasion in his *Monatsbuch*, although he would end up following the analytic path by means of continued fractions (see [Bullynck 2009].)

1.3 Towards a better comprehension. The prominence of the analytic method

Over the course of the second half of the 17th century, the so called degeometrization process,[17] originated by the introduction of algebraic methods in geometry, drew attention more and more away from the geometric part of the quadrature problems towards the analytic one. Obviously, the central question was still that of the possiblity or otherwise of such a construction, but the idea —once established— of translation between constuctible geometric objects and analytic (algebraic) expressions, opened the way to analysis of the issue from a different point of view. This change of paradigm placed into focus the search for finite combinations of suitable algebraic operations —those constructible with ruler and compass— expressing the area of the circle following Descartes' ideas. Now, the attention will be paid to studying these formal expressions, and therefore, the values expressed by them on their own.[18]

In any case, the actual experience along with the great amount of attempts made by predecessors, shortly turned this search into deception and pessimism. In fact, it was this apparent impossibility to express the area within the algebraic boundaries which paved the way to the emergence and awareness of a split within the irrational numbers, something that finally was made explicit by Lambert in his *Mémoire* of 1768.

A very illustrative and influential case in this analytical direction is that of James Gregory,[19] who published a treatise in 1667, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, that kept leading mathematicians occupied in a controversy about quadrature issues and especially, of particular interest to us, the attempts of squaring the circle. Gregory was able to reduce the quadrature problem —that of squaring (geometrically) the sector of a conic— to expressing a certain magnitude, the area of this sector, by means of the five cartesian

[17] This process studied by historians like Bos and Fraser is summarised in [Guicciardini 2007, pp. 89–91].

[18] A pioneer in the use of these techniques was Viète, who expressed for the first time, in 1593, the ratio between the circle and its inscribed square as follows (see [Boyer 1968, p. 353])

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

(rigorously speaking, the product is the inverse of this ratio).

[19] An exhaustive study of James Gregory along with quadrature problems in the 17th century is [Crippa 2014].

operations,[20] and he even came at first to think this viable. As in many other cases, though, the obstacles finally convinced him of quite the opposite, making the *Vera circuli* a monument dedicated to the impossibility arguments.[21]

With regard to the circle-squaring problem, he concluded its impossibility in a corollary. It was therefore quite clear to Gregory not only the non-rationality of π, but also that this number could not be expressed by means of traditional operations, although the treatise that appeared to solve the classical problem had to face sharp criticisms.

Christiaan Huygens was one of the leading mathematicians in criticising several points of Gregory's treatise, in his case —among other things— the validity of deducing precisely this corollary from the general theorem. He himself did not think the issue was clear-cut, and brought into focus the necessity to be cautious even about the rationality or not of this quantity.[22] In fact, as late as in 1674, he still thought that an algebraic expression for π was possible,[23] against the consensus of the leading specialists of this epoch.

John Wallis for instance, who shared some of the criticisms made by Huygens towards Gregory's treatise, had already set out his opinion years before in his *Arithmetica infinitorum*. In this work, published in 1656, Wallis placed the focus on seeking the quadrature of certain curves, paying special attention to the circunference. The path followed by Wallis is based on an arithmetical approach instead of an algebraic one as in other cases, using divergent series and numerical interpolations in order to get the ratio between the circle and its circumscribed square,[24] a ratio expressed in Proposition 191 by the following infinite product:

$$\frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times \cdots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times \cdots}.$$

[20] Addition, subtraction, multiplication, division and extraction of roots of kth order.

[21] See [Crippa 2014, pp. 310–312].

[22] Huygens in 1668 writes:

> Although Mr. Gregory has avoided any defect in his proof in the reply he has provided to my objection, let me tell you that there is after all a long time left before the impossibility of squaring the circle is correctly proved, that it is still unknown whether the circle and the square of its diameter are not commensurable, that is to say, whether they are not in the same relation as a number to another number.

(Huygens, *Oeuvres*, vol. XX, p. 308 quoted in [Crippa 2016]).

[23] [Crippa 2014, p. 411].

[24] In this respect see [Crippa 2014, p. 300], [Wallis 1656, pp. xiv, xviii]. Like Viète, the expression stands for the inverse of this ratio.

Although he did not represent this expression in this way, the product is nothing but $\frac{4}{\pi}$ and, as he proves, it is possible to get approximations as accurate as one wants, which along with the applicability of the usual arithmetical rules, led him to consider it as a common number.[25]

But, what is the nature of this number? In a four-page commentary between Proposition 190 and Proposition 191, Wallis lays out what his opinion is. The second paragraph epitomises his thought about this issue:[26]

> And indeed I am inclined to believe (what from the beginning I suspected) that this ratio we seek is such that it cannot be forced out in numbers according to any method of notation so far accepted, not even by surds (of the kind implied by Van Schooten in connection with the roots of certain cubic equations, in his *Appendix* to the treatise *On a complete description of conic sections*, or in the thinking of Viète, Descartes and others) so that it seems necessary to introduce another method of explaining a ratio of this kind, than by true numbers or even by the accepted means of surds.

Indeed, he gives «another method»: it is precisely the product obtained in Proposition 191, one that according to his analysis cannot be expressed algebraically (that is to say, using a finite combination of algebraic operations), which entails the incapability of framing π within the field of known numbers, whether rationals («true numbers») or not («by the accepted means of surds»).[27]

Therefore, it is by means of π —motivated by the circle-squaring problem— and thanks to the new analytic methods, that a clear consciousness from various authors of the existence of a new kind of irrational numbers —numbers falling outside the algebraic or transcending algebra— starts to arise.[28]

In fact, it was also in this epoch, in 1673, and from the hand of another distinguished mathematician, Gottfried Leibniz, that the term «transcendence» appears in the field of mathematics,[29] although its range of applicability was much wider than the current one:

[25][Wallis 1656, pp. xxv, 163, 164].

[26][Wallis 1656, p. 161].

[27]In fact, this leads Wallis to introduce a new notation for his infinite product (see [Wallis 1656, pp. 162, 163]).

[28]«Therefore it is clear, on the one hand, that π is the "*motor of transcendence*"[...]» [Serfati 1992, p. 22].

[29]In [Serfati 1992, p. 43] the author, based on another work, settles 1675 as its first appearance, but more recent studies have corrected the date (see [Crippa 2014, p. 418 note 134] or [Knobloch 2006,

curves, figures, problems, equations, quantites or numbers were susceptible to carry this qualification, making it very problematic to get a concise understanding of its meaning.

Something that can be glimpsed —according to what has been written up to now— is that the epoch that is being analysed was a swarm of ideas, some of which were not established until two hundred years later boosted by further developments in the 18th century, such as the case of a well-defined concept of number. Mathematicians of this period did not have any clearly-recongnised collection inside of which all numbers lived together with equal status; this is clear reading the above passage by Wallis. Rather, numbers were appearing in different and concrete contexts, and in this way, they were being incorporated into the changing realm of numbers.

There is no doubt about the central role played by algebra in this (slow) introduction and assimilation of new mathematical objects. In this respect, [Bos 2001, p. 130] comments that irrational numbers and in particular irrational roots:

> had been introduced by medieval Arabic writers in order to extend the applicability of the algebraic operations and the rules for solving numerical equations. They were readily taken over in the European medieval and Renaissance texts on algebra.

In fact, according to Katz:

> many authors over the centuries had been treating irrational quantities as "numbers", that is, had been dealing with them using the same rules and concepts as with whole numbers.[30]

The case of Simon Stevin is representative of this trend, because he unified numbers based precisely on this operative reason and on the idea that the part is of the same kind as the whole, something that allowed him to consider quantities like $\sqrt{8}$ as numbers in their own right.[31] Anyway, it is important to take into account that most of the mathematicians of Stevin's time were not too worried about the inherent subtlety of numbers like $\sqrt{8}$, but

p. 122]). On the other hand, it is not the aim of this introductory chapter to do an accurate analysis of the Leibnizian meaning of this term, but merely to expound its connection with his reflections on the nature of π. For the interested reader, as well as regarding the nature of π in Leibniz, see [Arthur 1999], [Crippa 2014, pp. 405–421], [Knobloch 2006], [Sereda 2017, chapter 4 (sections 1, 2 and 3)] and [Serfati 1992, pp. 43–48].

[30] [Katz 2008, p. 416].

[31] On Stevin's consideration of numbers I refer the reader to [Stevin II 1958, pp. 533–536], [Bos 2001, 138–141], [Ferreirós 2015, pp. 143–148] and [Katz 2008, pp. 416, 417] (Stevin in the context of decimal expansions will be treated in Chapter 2).

rather about practical issues[32] which made it easier to include all these quantities within the same category. However they never lost sight of these difficulties; continuing with Bos' quote:

> Yet mathematicians were aware that their status as numbers (in the classical sense) was problematic. Numbers like $\sqrt{2}$ or $\sqrt[3]{3+\sqrt{2}}$ were indeed called irrational or "surds," because they had no expressible (i.e., rational) ratio to the numerical unit.

It was the distinction made by Al-Khowârizmî between «audible» and «inaudible» numbers —due to the inability to name the infinite process involving irrationals— which gave rise to the term «surd», as far as we know used for the first time by Gerard of Cremona around 1150.

And if the legitimacy of these numbers was not clear, there has never been a general agreement either about what numbers should be called surds. «It is admitted that a number like $\sqrt{2}$ is surd, but there have been prominent writers who have not included $\sqrt{6}$, since $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$; $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ is commonly excluded».[33] Newton comes to add a new confusion because, while the majority of authors seemed to have used this term in reference to radicals or combinations of radicals, he clearly includes all irrationals under that same category:[34]

> By *Number* we understand no so much a Multitude of Unities, as the abstracted *Ratio* of any Quantity, to another Quantity of the sime Kind, which we take for Unity. [Number] is threefold; integer, fracted and surd, to which last Unity is incommensurable.

Therefore π would be a surd from the Newtonian perspective.[35]

In any case, although these confusions show the tensions within the field of arithmetic in progress, I would say that it is plausible to think that, because the irrationals handled at that time came from algebra, having therefore the form of radicals, the term «surd» made reference to them at large.[36]

---

[32][Boyer 1968, p. 347].

[33][Smith 1958, pp. 252, 253]. A «modern» definition of this term can be seen in [Chrystal I 1904, p. 203] («modern» because the first edition was published in 1886) where the author says: «we define a *surd number as the incommensurable root of a commensurable number*», so numbers like $\sqrt{e}$, $\sqrt{\sqrt{2}+1}$ or $\sqrt{4}$ would not be surds; but $\sqrt{\sqrt{2}}\,(=\sqrt[4]{2})$ or, in this case, $\sqrt{6}$, would come under this definition [Chrystal I 1904, p. 204].

[34]See [Newton 1720, p. 2].

[35]I underscore that this observation was made by Ferreirós.

[36]The confusion with the terminolgy does not came to an end here (we will return to this issue in the next chapters).

Going back to Leibniz, he was also involved in the debate concerning Gregory's work. He shared criticisms from some colleagues towards *Vera circuli*, adding a few more, but as far as the ratio between the circle and the circumscribed square is concerned, he seemed to have quite clearly decided upon the impossibility of expressing it by means of known numbers (that is, rational numbers or surds). The rationality seemed to be «completely irreconcilable with approximations»[37] but according to his own research, its nature looked still more restrictive. Leibniz refers to his alternate series for $\frac{\pi}{4}$:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots,$$

as an infinite equation,[38] a kind of equation susceptible to be called «transcendental» by him,[39] so that π, in some way, could have been seen by Leibniz as a «transcendental» number.

But did Lebniz, and, more generaly, Wallis and others, have in mind a modern idea of transcendence? Only in part, and partially for wrong reasons. From the domain of algebra —which was pre-eminent throughout this era— roots, radicals and surds were always thought of in connection with equations: $\sqrt{2}$ or $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ do not make sense without the equation from which they came into being. In addition, we have to take into account that at that moment, and for a long period of time, there was the belief that the general equation of nth degree could be solved by means of radicals,[40] that is to say, through the available algebraic means: rationals and surds. Therefore, from an 17th century mathematician point of view, rationals and surds were the same as algebraic numbers, so that the reflections made by them about the nature of this constant led to the belief that π could not be the root of an algebraic equation.[41]

[37] [Arthur 1999, p. 5]. The author of this paper comments that Lebniz might be thinking of Wallis and Brouncker approximations based on their infinite expressions. We note further, and above all, those made by Ludolph van Ceulen, which had an enormous popularity, in particular in Germany, and should play an important role in suggestions of a negative answer for the rationality of π.

[38] See [Crippa 2014, p. 417 note 130]. Leibniz found this series in 1673 based on the arctang series (J.Gregory and Nilakantha found independently this very expression) [Berggren 1997, pp. 92, 93, 97 note 4].

[39] [Knobloch 2006, p. 122].

[40] As we know this is not the case, but the first proof (by Abel) would not come until 1824 (Ruffini made an incomplete proof in 1799).

[41] In [Blasjo 2017, p. 7] one can find a related point of view (even if we may disagree in small details):

> It is often said that the transcendence of π and e was not formally proved until the 19th century, but we must not be misled into thinking that 17th-century mathematicians were not conscious of the finer points of the algebraic-transcendental distinction. On the contrary,

1.4 Conclusion

At the turn of the 16th century, the most accurate approximations for π ever appeared, as an outcome of the mixture between arithmetic, algebra and geometry; they were very useful approximations to compare with the values obtained for π through supposed quadratures of the circle. Regarding the understanding of the nature of this constant, these calculations seem to have had a practical function and not a theoretical one, something that had to wait for more sophisticated tools in the 17th century.

In the middle of the 17th century, the introduction of the new analytic methods gave rise to a clear awareness of the different nature of π; a clear distinction from the rest of irrational numbers based, according to our interpretation, on the possibility or not to be a root of an algebraic equation. However, there were no clear definitions of «transcendence», no clear meaning in conection with π and no clear split between irrationals, something that will be inherited by 18th century mathematicians and solved by one of them.

they had a refined understanding of this issue.

With regard to the concrete case of Leibniz, see [Arthur 1999].

Chapter 2

The situation in the first half of the 18th century: Euler and continued fractions

[...] the perimeter of a circle should establish such a type of transcendental quantities that it may allow itself in no way to be compared with any other quantities [...]

- Euler, *On Establishing a Relationship Among Three or More Quantities.*

2.1 Introduction

The analytical techniques originated in the previous period became the ground for the majority of research lines in the 18th century. Although there were important investigations outside the mainstream, as for example the tireless search of a definitive answer to the Euclidean-postulate problem, «considered broadly, mathematical activity in the eighteenth century was characterized by a strong emphasis on analysis and mechanics».[1]

As far as our interests are concerned, these tools were seen as a new highway towards a better comprehension of irrational numbers, one of its paths being the calculus of increasingly accurate approximations, something that led to the analysis of decimal expansions. Now, we can really speak about a clear choice by mathematicians to study patterns to extract useful information about numbers.

In any case, this direction did not bear fruit, and there were mathematicians who put the

[1][Fraser 2003, p. 305]. We will discuss this issue in more detail in later chapters.

focus instead on proper analytical expressions: «Leibniz suggests that he understands incommensurability in terms of infinite series»[2] and Euler will establish later an irrationality criterion, in his case by using continued fractions, a very recent analytical machinery that would prove to be essential when considering transcendence and irrationality issues.

In fact, Euler's work about continued fractions was the clear turning point in the search for understanding of the nature of certain numbers. He himself proved the irrationality of e, and Lambert, following his steps, likewise proved the irrationality of π, making the 18th century —in this respect— «the century of the proofs of irrationality».[3]

2.2 Searching for «something» in decimal expansions

The discoveries made in the 17th century, drove a renewed interest for calculating decimal approximations. Undoubtedly, they were not used solely to cope with π, but it is quite clear that this was one of the main goals:

> The new methods of systematic representation gave rise to a race of calculators of π, who, in their consciousness of the vastly enhanced means of calculation placed in their hands by the new analysis proceeded to apply the formulae to obtain numerical approximations to π to ever larger numbers of places of decimals...[4]

One key issue to be considered is that in some respects the use made by mathematicians of these improved approximations was different from the traditional one. Whereas people like Stevin or van Ceulen —as we have argued before— used them for basic utilitarian reasons, around the 18th century there was a change towards a more theoretical use. The new idea was to search «inside» the number, trying to figure out what information about it can be drawn by analysing its succession of decimals. Decimals were still seen as tools, but this change of tack seems a clear sign that the vision about decimal expansions was

[2] In this respect see [Sereda 2017, pp. 84–91] (the quote is from p. 91). In any case, it is important to take into account what the author comments just after the quote:

> However, as I have noted, Leibniz does not explicitly provide infinite series for irrational numbers other than π in his mathematical writings. Thus, although there is some evidence to suggest that he understands other irrational numbers in terms of unity in the way that he understands π, it is not possible to establish for certain that Leibniz has more than a general conception of irrationals as related to unity by means of infinite series, rather than a sophisticated account of how to analyze particular irrational numbers by means of infinite series of rationals.

[3] [Serfati 1992, p. 13].

[4] [Hobson 1913, p. 11].

about to change —«simultaneously with the acceptance of infinitary processes»— from being mere tools to their being proper mathematical objects.[5]

In this search through decimal expansions, it was observed that a fraction with a denominator that is not «a prospective power of 10», yielded a periodic infinite decimal expansion. If we have in mind the following mental scheme:

$$M = 0, d_1 d_2 \cdots d_n \qquad \longleftrightarrow \qquad M = \frac{d_1 d_2 \cdots d_n}{10^n}$$

it is easy to understand why.

Let us think about $\dfrac{N}{D}$ where $D = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2}$, being $\alpha_1 > \alpha_2$. If this is the case, we can complete the denominator until getting a power of 10:

$$\frac{N}{D} = \frac{N}{2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2}} = \frac{N \cdot 5^{\alpha_1 - \alpha_2}}{2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_1 - \alpha_2}} = \frac{N \cdot 5^{\alpha_1 - \alpha_2}}{2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_1}} = \frac{N \cdot 5^{\alpha_1 - \alpha_2}}{10^{\alpha_1}} \equiv \frac{d_1 d_2 \cdots d_n}{10^n}$$

obtaining an exact decimal, that is, a number with a finite decimal expansion. Clearly, this can not be done with, for instance, $\dfrac{7}{12}$ or $\dfrac{1}{7}$, because there is no way of eliminating from the denominator those prime numbers that are preventing completion to obtaining a power of 10. Therefore, our fraction will yield an infinite decimal expansion.[6] But because the remainder of any division is less than the divisor, we will only have a finite number of different options before the process enters into a loop. If the loop starts immediatly after the decimal point we will have a so-called «pure periodic decimal» like 0.121212..., and if not we will have a «mixed periodic decimal» like 0.5636363... Notice that this approach opens a new way to tackle the irrationality issues: if some number has a infinite non-periodic decimal expansion, it cannot be rational. The problem is, obviously, how to prove this.

We have a valuable eighteenth-century source that summarises some of the advances made in this line of research until approximately the middle of the century. The same author includes his own ideas about the subject after analysing the contributions of some colleagues. The paper, dated in 1771, is signed by M. Johann III Bernoulli, and in the first page, after giving a brief overview to introduce basic ideas —some of which we have

[5] In this last respect see [Ferreirós 2015, Chapter 8] (the quote is from p. 147).

[6] Of course, as long as we are considering irreducible fractions; otherwise:

$$\frac{7}{14} = \frac{1}{2} = 0,5$$

just outlined in the lines above— we can read:[7]

> These decimal fractions are named *periodic* or *circulars*; it will be seen that they are the subject of numerous investigations, not only by curiosity, but they are useful at the same time, due to the increasing use made of decimal calculus in general; however I do not know about anybody else who had adressed this question other than Wallis & Mrs. Euler & Robertson.

It was in fact Wallis the first who noticed certain patterns in passing from fractions to decimal expansions,[8] among them those commented by J. Bernoulli in the introduction of his article, who realised that all depended on the factorisation of the denominator with 2 and 5 as moderators. In short, a denominator with just 2 and 5 as prime divisors yields an exact decimal with at most $D-1$ digits in the period; if other primes are allowed, for instance in $D = 14 = 2 \cdot 7$, yields a mixed periodic decimal; and in any other case, it yields a pure periodic decimal (using the modern terminology).

Euler, analysing the same question in Chapter XII of his *Algebra*, gave several methods to proceed in the opposite direction, passing from decimal expansions to fractions. He deals with those fractions which have 7 as denominator, a more interesting and complicated case according to him, and takes in particular $\frac{1}{7}$ as a concrete example. This fraction produces $0,\widehat{142854}$ as decimal but «in order to demostrate that this decimal fraction is effectively equivalent to $\frac{1}{7}$»,[9] Euler turns it into a geometric progression[10] proving that its sum is precisely $\frac{1}{7}$. In modern notation:

$$0,\widehat{142854} = 142854 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [10^{-6}]^n = 142854 \cdot \frac{10^{-6}}{1-10^{-6}} = \frac{142857}{99999} = \frac{1}{7}$$

Let us say in passing that, although Euler's main goal here is to turn decimals into fractions, this reasoning seems too rigorous to have come from him. One would expect him to consider it sufficient to do the division, without making sure (remember the quote) that

[7][Bernoulli 1771, p. 273]. One study about the research carried out on decimal expansions at that time can be found in [Bullynck 2009].

[8][Bullynck 2009, p. 138].

[9]Euler quoted by Bernoulli in [Bernoulli 1771, p. 274].

[10]He also shows other simple methods to get the same result. If we call $s = 0,\widehat{142854}$ then:

$$10^6 s - s = 142854,\widehat{142854} - 0,\widehat{142854} = 142854$$

and therefore:

$$s = \frac{142854}{99999} = \frac{1}{7}$$

using modern notation (see [Bernoulli 1771, p. 275]).

the resultant decimal certainly equates to the fraction; and it is curious because this procedure is reminiscent of that carried out by Lambert in his *Mémoire* when, after having obtained by means of division the continued fraction for $\tan v$, he retraces his steps to prove that this infinite expression is effectively convergent to it.[11]

It is easy to glimpse how new this line of research was, as Bernoulli only cites three cases. Of course this does not exclude other studies.[12] For example, the correspondence between Daniel Bernoulli and Goldbach reveals the attempts to justify irrationality, and moreover, to justify that certain quantities could not be the root of any rational number, by using properties of decimal expansions.[13] The reasoning is based on the fact that their powers do not seem to have any periodicity in their decimals, which leads one to the conclusion, as any quantity of the form $\alpha = \sqrt[n]{q}$, with q rational, must produce a rational quantity by means of powers ($\alpha^n = q$).[14] When Goldbach comments this very question in the correspondence with Euler, the latter also alludes to the non-periodicity of the decimal expansion to justify its irrationality.[15]

Johann Bernoulli III himself had to include an «Addition» to his paper[16] after Lambert said to him that he had been already occupied with the study of decimal fractions for some time, having published his results in *Acta Helvetica* (1758) and *Acta Eruditorum* (1769).[17] In fact, Lambert's interest in decimal expansions had already started in 1753 according to his *Monatsbuch*, probably influenced by Wallis' work on the subject, and it

[11] This could be one more hint to take in our attempts to contextualise the surprisingly rigorous step taken by Lambert in his proof, besides the information included in the letter to Euler dated from 12 July 1762, and the discussions that took place about convergence at that time (the reader will read a more in-depth analysis of this question in the part devoted to the translation of Lambert's *Mémoire*).

[12] Indeed, Bernoulli himself got involved in this subject after a suggestion made by Lagrange, who was his colleague in the Berlin Academy of Science ([Bullynck 2009, p. 142]).

[13] A step towards the recognition of their transcendence; indeed, one of these quantities, namely:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-2^{k-1}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{100000000} + \cdots$$

(not to be confused with Liouville's number $\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$) would eventually be proven transcendental (see [Lützen 1990, p. 515]).

[14] See [Lützen 1990, pp. 513, 514]. It is possible to see a similar idea in Wolfram at the end of the 18th century, in an attempt to prove the transcendence of π (see [Bullynck 2009, pp. 146–147]).

[15] [Lemmermeyer et al. I 2015, p. 56].

[16] Indeed he includes more than one.

[17] [Bernoulli 1771, p. 305].

was connected with his idea of proving the irrationality of π.[18] In any case, they proved to be unfruitful for this goal and it would be another tool, arising from the analitycal boost present in mathematics at that time, which would prove to be pivotal in giving the first key step towards a clear understanding of π.

2.3 Continued fractions, irrationality and transcendence in Euler's work

In spite of the new analytical tools, there were still few who called for decisive proofs of irrationality. The conception that the majority of mathematicians had about π was that this number was irrational, and in fact, some of them did not have any problem placing this opinion on record, such as Euler who writes in his *Introductio in analysin infinitorum*:

> We let the radius, or total sine, of a circle be equal to 1, then it is clear enough that the circumference of the circle cannot be expressed exactly as a rational number.[19]

Note that it cannot be said that 18th-century mathematicians were not worried about foundational questions. We can actually enumerate many cases: the status of negative and complex numbers, Euclid's fifth-postulate problem, the existence of infinitely small quantities, or the debates around divergent series. Schubring has drawn attention to this issue:

> It is a widespread opinion to think of eighteenth-century mathematics as unconcerned with the foundations and as interested only in the further development of analysis. As we have seen with the concepts of negative numbers as well as with the infinitely small quantities, the mathematicians were, in contrast, very anxious to clarify basic concepts.[20]

But in any case, and although the nature of certain quantites was a source of several discussions between some of them —due mainly to the strong influence of quadrature

[18][Bullynck 2009, p. 138]. In any case, in Lambert's *Monatsbuch* there are no explicit references or reflexions about using decimal expansions with this goal (I am very grateful for the comments provided by Armin Emmel about this subject).

[19][Euler I 1748, p. 101]. Another (earlier) notable example is that of Aryabhata, who was clear enough (see [Brezinski 1991, p. 84]):

> Why do we give for π an approximate value in place of the true value? For this reason: the ratio of the circumference to the diameter can never be expressed as the ratio of two integers.

In spite of some claims supporting the idea that Euler considered the irrationality of π as already demostrated, it seems that this was not the case (see [Petrie 2009]).

[20][Schubring 2005, p. 285].

problems and the new methods— there was not an interest (at least in the first half of the 18th century) to clarify rigorously their condition, with Goldbach being one of the first to ask for definite proofs.[21] In fact, although he seemed quite sure of the non-rationality of π, he pointed out as Huygens had done before that, whereas «irrational numbers can be easily shown not to be reducible to the rationals»,[22] as he wrote in 1729 to Euler, «nobody to my knowledge has yet proved that the quadrature of the circle cannot be effected by rational numbers».[23]

It is curious that the first major rigorous proof of irrationality came from Euler[24] — the irrationality of e— and even more so if we take into account that proving this was not his goal at all. The proof appeared in his *De Fractionibus Continuis Dissertatio*, presented to the St. Petersburg Academy in 1737, published in 1744 and included with changes as Chapter XVIII in his *Introductio*; it came from an ongoing new analytical tool, continued fractions, of which Euler wrote:

> Although this area has been little cultivated up until this time, we have no doubt that it will be much more widely used in the analysis of the infinite in the times to come.[25]

Indeed, this paper is considered to be the first systematic work about the subject, something that it is possible to grasp from Euler's own words when after speaking about the two most common infinite expansions (infinite sums and products) he writes:[26]

> Although this construction is less used than the other two, not only does it exhibit its value just as clearly but it is also very well suited to approximate computation. However, these continued fractions have been used so little that except for a few especial cases no methods have been available either for computing their precise values or for using them to express given transcendental quantities. Since I have been

[21] See for example [Lemmermeyer et al. I 2015, p. 54 note 60]. As for the commentary about Goldbach, see the end of the previous section (more developed in [Lemmermeyer et al. I 2015, p. 54–55]).

[22] Clearly this phrase requires an explanation, because from our point of view, it is more than simple to prove that irrational numbers cannot be reduced to the rationals; this is the definition of irrational number! We are once again faced with a terminological confusion. The fact is that Goldbach, as various of his 18th-century colleagues, uses the term «irrational» to make reference to simple radicals (see [Lemmermeyer et al. II 2015, p. 590 note 2] and [Lemmermeyer et al. I 2015, pp. 53–54]; we will return to these terminological problems later).

[23] [Lemmermeyer et al. II 2015, p. 589].

[24] A brief summary of the debates around the rigorous character of this proof can be seen in [Petrie 2009, pp. 104, 105].

[25] [Euler I 1748, p. 303].

[26] [Euler 1744, pp. 296, 297].

> studying continued fractions for a long time, and I have observed many important facts pertaining both to their use and their derivation, I have decided to discuss them here. Although I have not yet arrived at a complete theory, I believe that these partial results which I have found after hard work will surely contribute to further study of this subject.

This work has been analysed by R. Cretney who, looking for the motives that led Euler to work with continued fractions, concludes that they «arose not from earlier writings on continued fractions, but from a wish to solve the Riccati differencial equation».[27]

At any rate, in this paper Euler provides a fundamental tool to determine the rationality or otherwise of certain quantities coming from adequate continued fractions. This criterion can be summarised as follows:[28]

$$x \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow x \text{ can be expressed by a finite regular continued fraction}$$

Therefore, if for instance:

$$x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}},$$

then x has to be an irrational quantity because its regular continued fraction is infinite.[29] Indeed, this is exactly the expression in continued fraction for e, found by Euler after various steps intended to solve the aforementioned Riccati differential equation.[30] But af-

[27] See [Cretney 2014] (the quote is from p. 1; in this same line p. 23).

[28] See [Euler 1744, p. 302].

[29] A contined fraction like:

$$b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{b_4 + \cfrac{1}{b_5 + \cfrac{1}{b_6 + \ddots}}}}},$$

is usually called regular when every b_i is a positive integer number (see for example [Baltus 2003, p. 3]). We shall not provide in this thesis a summary of continued fractions and their history; the interested reader can find a good outline in [Cretney 2014], or a more expanded study in the classic [Brezinski 1991]. In this dissertation we will introduce whatever is necessary when it is required.

[30] See [Cretney 2014, pp. 11–14] for a gentle explanation of Euler's reasoning.

ter showing this expression for e by continued fraction, with assurance that he will prove rigorously its infinitude,[31] when he concludes the promised demonstration he does not make any reference to the non-rationality[32] of e. It may seem strange at least from our point of view, but if we take into account what has been mentioned regarding the general lack of concern about the issues of irrationality along with their obvious secondary role in this paper, this omission starts to make sense.

Furthermore, Euler proceeds to analyse one kind of continued fractions that allow one to be more specific about the nature of certain quantities, proving that:

> In this manner all continued fractions of this kind, whose denominators are either all equal, or else every second or every third or every fourth, etc., denominator are equal among themselves may be computed. Moreover, every such value x is the root of a quadratic equation.[33]

That means that every periodic continued fraction like:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}} \qquad \text{or} \qquad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}},$$

is a (quadratic) algebraic number in the modern sense of the term ($\sqrt{2}$ and $\sqrt{3}$ respectively[34]). But throughout this paper Euler also comes across continued fractions with a different behaviour:

> let us analyze certain transcendental quantities which, when converted into continued fractions, give denominators proceeding in an arithmetic progression [...] I have found that the number whose natural logarithm is 1, and its powers, lead to continued fractions of this kind.[35]

Focusing on e, he is referring here to the already-found continued fraction for this number, where the denominators effectively follow an arithmetic progression:

$$2\,,\,1\,,\,2\,,\,1\,,\,1\,,\,4\,,\,1\,,\,1\,,\,6\,,\,\cdots$$

[31] [Euler 1744, pp. 311, 318].
[32] [Euler 1744, p. 321] (this «strange» fact has been brought out by many historians).
[33] [Euler 1744, p. 311].
[34] See [Euler 1744, pp. 307, 308].
[35] [Euler 1744, p. 311].

This suggests a difference in the nature of certain numbers by using the form of their continued fractions. In this particular case we would have that, as this is an aperiodic continued fraction, the number e cannot be the root of a quadratic equation,[36] but moreover, as this also happens with its powers,[37] we would also have that e^n cannot be the root of a quadratic equation, which is a clear step towards its transcendence in the modern

[36] It has to be said that Euler only proves that:

$$x = \text{periodic continued fraction} \Longrightarrow x = \text{quadratic irrational}$$

the other side of the equivalence being proved by Lagrange in 1771 in his addition to the Euler's *Algebra*. In any case, I think that Euler is assuming —at least for himself— the equivalence, because in [Euler 1785] we can read the same argument in this case coming directly from him and without any reference to Lagrange (see below). Maybe Euler considered that this part of the equivalence did not add anything new to which he already thought and for this reason he did not quote to Lagrange, or maybe he was not aware yet of the recent rigorous proof of this result included in his *Algebra*, which seems to me the most likely. Take into account that Euler expresses his gratitude and recognition in a private letter to Lagrange dated on September 24, 1773, and it would be strange no to do so in public as well. He says:

> Having finally receive my Algebra's French translation, I have the honour of being able to express to you my complete recognition for the work you have had to undertake to add your most profound researches in Indetermine Analysis, and I would appreciate you to convey to both M. Bernoulli and the editors my most humbles gratitudes.

Furthermore, although Euler's paper was presented to the St. Petersburg Academy on August 14, 1775, it was presumably written several years before, which make it possible that Euler might have not known Lagrange's result at that time .

[37] Notice that Euler does not prove this claim, but only **shows** the particular case of e^2 leading the reader to believe that the same occurs with the rest of its powers. He writes ([Euler 1744, p. 312]):

> The situation is similar if integral powers of e are considered and transformed into continued fractions. Thus, considering the square of e, I have found

$$\frac{e^2-1}{2} = 3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{13 + \cfrac{1}{15 + \text{etc.}}}}}}}$$

In the abscence of proofs, we can assume which he says before with regard to the expression in continued fraction for e ([Euler 1744, p. 311]):

> Even if this rule is seen by observation alone, nevertheless it is reasonable to suppose that it extends to infinity.

sense of the term. But Euler already described these quantities, and more concretely the number e as transcendental so: what was Euler referring to?

Obviously the meaning of this term for Euler is not the modern one, something that is clear enough from reading a commentary made by him shortly before:

> On the other hand, a fraction whose numerator and denominator are infinitely large numbers[38] (which are given for irrational and transcendental quantities) will go across to a continued fraction running to infinity.[39]

From the modern point of view, distinguishing between irrational and transcendental would not be necessary (every transcendental number is irrational by definition) but in this case this distinction does make sense because the term «irrational» for Euler —as we have noted before— has a different and more restrictive meaning based on a number's form:

> Daniel Bernoulli, Goldbach and Euler often used the word irrational in Euclid's original sense: in his Introductio, for example, Euler remarked that logarithms of rational numbers to a rational base cannot be "irrational", since if $\log_a b = \sqrt{n}$, then $a^{\sqrt{n}} = b$, which he claimed was impossible for rational numbers a, b [...] By the time he wrote his *Algebra*, he also regarded cube roots of non cubes as irrational numbers[40].

So from the Eulerian point of view, an irrational number —or surd as Euler called them in other works[41]— would be a number expressed by means of radicals, with the transcendental numbers being those that fall outside this format. Therefore, there is not too much difference from the outlook of the second half of the 17th century and the same argument would be acceptable in this case:[42] this kind of irrational numbers were thought inextricably linked with the algebraic equations where they arise —this connection being made more precise with Euler in the 18th century[43]— so to consider that Euler saw numbers

---

[38]Euler is making reference to infinite decimal expansions like $\sqrt{2} = 1,41421356\cdots$ which therefore would give rise to fractions with "infinitely large" numerators and denominators like $\frac{141421356\cdots}{100000000\cdots}$.

[39][Euler 1744, p. 302].

[40][Lemmermeyer et al. I 2015, pp. 53, 54]. With regard to Daniel Bernoulli and Goldbach see [Lützen 1990, pp. 513–514]; the reader will be able to glimpse once again the confusion around the terminology, when Bernoulli says about $\log\frac{m+n}{m} = \frac{n}{m} - \frac{n^2}{2m^2} + \frac{n^3}{3m^3} - \frac{n^4}{4m^4} + \cdots$:

> not only can it not be expressed in rational numbers but it cannot be expressed in radical or irrational numbers either

using the term «irrational» probably to make reference to combinations of radicals (the quote is from p. 513).

[41]For example in [Euler I 1748, p. 80].

[42]See also chapter 1 for the same argument.

[43]See [Petrie 2014, pp. 101, 102].

like e or π as non-roots of algebraic equations (that is to say, transcendental numbers in the modern sense of the term) would not be senseless. He himself was of the opinion that some of these quantities:

> must be considered to belong to a much higher class of irrationals, which can only be reached by repeating the extraction of roots an infinite number of times[44].

and moreover, he could have thought that their non-algebraicity was sufficiently clear because his investigations led directly towards the impossibility of expressing these numbers as roots of concrete algebraic equations.[45] Indeed, Euler is quite explicit when he deals with the case of π in [Euler 1785],[46] firstly when he says that:

> it seems demonstrated so greatly enough that the perimeter of a circle with diameter 1 allows no comparison with simple quadratic radical formulas, since otherwise, a continued fraction, equal to π itself, ought to have periodic terms, a thing which does not seem to happen at all.[47]

and secondly when he makes the stronger claim that π cannot be expressed by means of radicals, a conclusion he draws after proving that this number cannot be expressed by means of $\sqrt{2}$ and $\sqrt{3}$.[48]

But although Euler could think that one conspicuous difference between these quantities and the more «usual» irrationals could rest ultimately in the fact that the former are not roots of algebraic equations, most probably they do not carry the adjective "transcendence" for this reason.[49] In fact, this term is applied by Euler primarily to functions, that are divided into algebraic and transcendental depending on what class of operations they involve:[50] algebraic (addition, substraction, multiplication, division, raising to a power,

[44] Euler is making reference in this particular case to π (quoted by [Lemmermeyer et al. I 2015, p. 54]).

[45] One may take into account that this will be precisely what will lead Lambert also to conjecture the transcendence of the number π when in his *Mémoire* proves that the tangent of a rational quantity cannot be the square root of a rational quantity (§. 90.), and uses this fact in order to conjecture its non-algebraicity and therefore the non-algebraicity of π (§. 91.).

[46] It could be useful for the reader to refer to [Serfati 1992, pp. 52–54] and [Beckmann 1971, pp. 152, 153] (in this latter case, the author extracts the same conclusion, namely, that Euler is thinking of the transcendence of π).

[47] [Euler 1785, p. 7]. What Euler is saying here —namely that $\pi \neq \sqrt{q}$ for any rational q— had already been conjectured by I. Barrow but in a even more general way: in modern notation, that $\pi^n \neq q$ (see [Hutton 1815, p. 679]).

[48] Euler reaches this conclusion by using a «proof by simplicity» in the same way as Lambert in his *Mémoire*, something that will be discussed later.

[49] With regard to the use and understanding of this term in Euler see [Petrie 2012] and [Petrie 2014].

[50] See [Euler I 1748, p. 4].

and the extraction of roots) or transcendental (exponentials, logarithms, etc). Therefore, they inherit their nature from the operations and consecuently curves inherit their nature from their functions:

> Until now we have been concerned with algebraic curves. These are characterized by the following: for any abscisa the corresponding ordinate can be expressed by an algebraic function of the abscisa [...] It follows immediately that if the value of the ordinate cannot be expressed by an algebraic function, the curve cannot be algebraic. A curve which is not algebraic is called *transcendental*.[51]

In the same way, determinate quantities like π or e seem to inherit their transcendental character —in the «few occasions where we see that Euler classified a specific value as transcendental»— from those functions they arise from:[52] the arc-length and the logarithm respectively, both considered as transcendental functions by Euler.[53]

Therefore, although we can see in Euler's work an explicit division between algebraic and transcendental, this division did not make reference to numbers but to functions, and when numbers carry this adjective they do so by inheritance. In any case, the awareness of the non-algebraicity (that is to say, of the transcendence from the modern point of view) of certain quantities like e or π seems clear.

2.4 Conclusion

Those analytical methods originated in the 17th century initiated studies aimed at seeking regularities in decimal expansions in order to draw conclusions about numbers. These investigations started with Wallis and some 18th-century mathematicians motivated by this new pathway carried out investigations in this line of research; in any case these attempts did not turn out to be fruitful. It was another powerful analitical tool —continued

[51] [Euler II 1748, p. 330].

[52] This transcendental-inheritance interpretation is proposed in [Petrie 2012, pp. 286–289] (quote at p. 287). Petrie proceeds to quote [Euler I 1748, p. 5] and [Euler 1744, p. 311] where Euler calls π and e transcendental (in this chapter we have already seen the latter case).

[53] See for example [Euler II 1748, 331]. It may be useful to remember the definition provided by Euler of both, the number π:

> We say, then, that a half of the circunference of a unit circle is π, or that the length of an arc of 180 degrees is π

([Euler I 1748, p. 101]) and the number e:

> For the number whose logarithm is unity, let e be written...

(the quote is from [Petrie 2012, p. 288]).

fractions, developed by Euler— which would prove to be the driving force towards this goal.

Using this method, Euler was able to establish a framework in which to decide about the irrationality or otherwise of numbers, and he even went beyond this, giving steps towards their transcendence. But although it seems clear that Euler had in mind that numbers like e or π were transcendental in the modern sense of the term, the use that he makes of this adjective is quite different from ours: «algebraic» and «transcendental» are terms applied to functions and these functions transfer their nature to those numbers arising from them.

This use of the term will be inherited by Lambert in his *Mémoire*, where he makes reference to it —as early as in the title— using the classic meaning of quantities that somehow transcend algebra. But at the end of his paper, this «somehow» will be finally specified in the modern sense of quantities that are not roots of algebraic equations.

Part II
Johann Heinrich Lambert
(1728–1777)
and his *Mémoire*

Chapter 3

Johann Heinrich Lambert Una biografía en su contexto

> *Lambert es un caso interesante. Polímata autodidacta, tomó como su principal guía la aplicación de las matemáticas a la física e incluso a la metafísica [...] Habló como un igual con Leonhard Euler y Georg Brander, respectivamente el matemático y el constructor de instrumentos más destacado de Alemania. En una palabra, fue el perfecto físico matemático: los matemáticos lo consideraban un experimentalista con un 'extraño talento para aplicar cálculos a los experimentos;' los experimentalistas lo creían un matemático con una comprensión inusual del comportamiento de los instrumentos. Todo ello trabajando desde las cinco de la mañana hasta las doce de la noche, con un descanso de dos horas al mediodía.*

- J. L. Heilbron, *Elements of Early Modern Physics.*

3.1 Introducción

El siglo XVI en Europa comienza con un acontecimiento que pasados dos siglos derivará en un cambio en la forma de concebir las cosas, y en un deseo por parte de la gente de romper los grilletes de una intolerancia opresora y empobrecedora. El 31 de octubre de 1517 en la puerta de la iglesia del castillo de Wittenberg, Martín Lutero clavaba, según dice la tradición,[1] sus famosas 95 tesis en las que ponía de relieve la necesidad de terminar con las corruptelas de una Iglesia que usaba las indulgencias como moneda de cambio.

[1] Aunque es muy probable que así haya sido por testimonios que tenemos de su colaborador Melanchthon y su secretario Georg Rörer, es algo que los especialistas aún no dan por sentado (ver [Roper 2017, pp. 11, 451 notas 2 y 3]).

Estas prácticas ya denunciadas antes tomaron notoriedad en esta época en la que, por ejemplo, a cambio de participar en la construcción de la basílica de San Pedro uno podía librarse del purgatorio.

Con el apoyo de la imprenta, algo que en principio no preocupó demasiado a Roma se extendió rapidamente convirtiéndose en un problema incluso para el propio Lutero, ya que dio lugar a violentas revueltas que él mismo condenó. Se produce así una escisión en el conjunto de los creyentes que ven necesaria una reforma surgiendo así el protestantismo. Como reacción ante esta situación, se convoca en Trento un concilio que discurre de manera interrumpida entre 1545 y 1562, donde se discuten las posibles (contra)reformas de la Iglesia ante este nuevo movimiento. Las tensiones que eran más que evidentes derivaron en diversos conflictos, y es así como por ejemplo en ese mismo último año comienzan en Francia las Guerras de Religión entre católicos y protestantes calvinistas. La rama protestante en Francia tenía su origen en las ideas de un teólogo seguidor de Lutero, Juan Calvino, y recibían el nombre de hugonotes. La Matanza de San Bartolomé en 1572 con miles de hugonotes asesinados marca el punto álgido de la barbarie en Francia.

Con el cambio de centuria, la enorme fragmentación provocada por los acontecimientos del siglo anterior iba a provocar un recrudecimiento de los conflictos a lo largo del continente, que en la práctica, derivaría en una dura persecución del protestantismo. Por ejemplo, los Países Bajos que habían estado bajo dominio español desde el siglo XVI, adoptaron mayoritariamente la religión calvinista después de la reforma. El tira y afloja religioso derivado de esta diferencia con sus gobernantes católicos desembocó en guerras y tratados de paz que sacaron a la luz la clara diferencia entre el norte y el sur de la región. Mientras el norte encabezado por Guillermo de Orange seguía reivindicando una cierta independencia, algunas provincias del sur en la actual Bélgica acabaron finalmente anexionándose al estado español. El punto de ruptura fue La Unión de Arras de 1579 en la que entre otras cosas se establecía la religión católica como única, y la persecución del calvinismo.

De esta zona de los Países Bajos del sur provenían los Lambert,[2] concretamente de Wallonie (Valonia), una de las tres partes en las que se divide la actual Bélgica y que en aquella

[2]Los orígenes de la familia Lambert de Mulhouse se estudian en [Mieg 1939, pp. 27–30] por el historiador y genealogista Philippe Mieg (si he podido consultar este artículo ha sido gracias a la amabilidad de Eliane Michelon de los *Archives de Mulhouse* que me lo ha proporcionado de manera desinteresada); se puede ver un resumen en [Jaquel 1977, pp. 133–135]. Por otro lado, en lo que se refiere a la contextualización histórica, dependo enteramente de [Parker 1997], [Bergin 2001] y [Oberle 1985].

época formaba parte del Sacro Imperio Romano Germánico.[3] Como muchos otros, terminaron en Lambrecht escapando de la persecución católica, una localidad situada a unos 70 km de Heidelberg, capital del calvinista Bajo Palatinado y en aquel momento uno de los principales centros de la religión reformada en Europa. Al parecer en esta localidad había una colonia de calvinistas de lengua francesa —refugiados ellos mismos de los Países Bajos y de Bélgica— que se habían establecido en 1568 en los edificios en desuso del antiguo convento, y es posible que los Lambert, que habían llegado también en la segunda mitad de siglo, encontrasen consuelo y acomodo entre ellos. De hecho tanto el tatarabuelo de Lambert, Jean Colin Lambert, como su bisabuelo Jean Nicolas Lambert (llamado Colin) nacen allí, aunque la complicada situación en el norte no tardó en hacer peligrosa su estancia.[4]

Años más tarde en Bohemia (actual República Checa), una región mayoritariamente protestante, el conflicto con los católicos gobernantes Habsburgos había culminado el 23 de Mayo de 1618 con dos ministros del emperador Matías y el secretario de uno de ellos arrojados por la ventana.[5] Anticipando lo que se les venía encima, pidieron ayuda al líder de la Unión Protestante, Federico del Palatinado, y le ofrecieron la corona de Bohemia deponiendo a Fernando, un año después elegido Emperador del Sacro Imperio. Bajo el punto de vista de los protestantes, el control de Bohemia era algo más que un capricho; era de hecho vital para no acabar con la libertad religiosa en el Imperio. No obstante, esta visión era también compartida por el bando católico, que envió una comitiva de tropas españolas al Palatinado en 1620 para evitar un ataque por retaguardia y de paso asegurar su posición.[6] La prueba de lo realista de estas visiones, es que después de que los católicos acabasen con la revuelta de Bohemia en la Batalla de la Montaña Blanca en Praga el 8 de noviembre de 1620, la recatolización saltó al Palatinado extendiéndose por el Imperio. Quizá la toma de Heidelberg por parte de los católicos en 1622, otrora a la cabeza del protestantismo europeo, sirva como hecho representativo de la clara derrota de los protestantes.

La situación por lo tanto ya no era segura, así que los Lambert cogieron sus cosas poniendo rumbo en esta ocasión a Mülhausen. Probablemente no fue casualidad el que hubiesen escogido como nuevo destino esta pequeña República calvinista del norte de Alsacia, aliada desde 1515 de la Confederación Helvética (Suiza) (de hecho una de las pocas partes de

[3] Sobre el Sacro Imperio Romano Germánico ver [Stollberg-Rilinger 2018].
[4] La propia colonia sería disuelta en 1623 con la llegada de las tropas españolas.
[5] La denominada «Defenestración de Praga».
[6] Paso clave hacia la Guerra de los Treinta Años [Parker 1997, p. 76].

Alsacia que no quedaría anexionada a Francia después de la Guerra de los Treinta Años). Si bien el Edicto de Nantes de 1598, que ponía fin a las Guerras de Religión francesas, había instaurado cierta tolerancia hacia los protestantes, «jamás había sido aplicado en Alsacia»,[7] así que este ambiente geográfico hostil convertía a Mülhausen en una pequeña isla calvinista. No obstante, durante todo el siglo XVII había servido de refugio para muchos protestantes que venían principalmente de diversos lugares de Francia, como Lorraine,[8] aunque la débil situación económica hacía complicada la concesión del derecho de burguesía que daba derecho a ejercer un oficio.

No debió ser sencillo por lo tanto para Jean Nicolas Lambert —el bisabuelo de nuestro savant— conseguir este derecho. Había llegado a Mülhausen en 1624 con su madre viuda Marie Marx y su tío (y también tutor) Jean Nicolas de Cornesse —oriundo de Cornesse en Wallonie, y que había sido burgomaestre de Lambrecht en el Palatinado— y no obtuvo dicho derecho hasta once años después en 1635. Al parecer Jean Nicolas, que era maestro panadero, se convierte en 1655 en «échevin»,[9] función que le transmite a su hijo Jérémie (1660–1733) quien acabaría por convertirse en sastre, profesión que heredaría finalmente su hijo y padre de Lambert, Lucas Lambert (1699–1747).[10] Negocios equivocados hacen que a partir de 1660 y de manera gradual Jean Nicolas tenga que vender la mayor parte de sus bienes, lo que probablemente motiva que en 1671 los Lambert dejen Mülhausen por el Palatinado; pero tras la muerte del cabeza de familia y la destrucción de Lambrecht por las tropas francesas, su viuda y su hijo Jérémie vuelven alrededor de 1689 para quedarse de manera definitiva. Desde luego Mülhausen seguía siendo una buena opción, en una Europa que, a pesar de haber dejado atrás la Guerra de los Treinta Años con la firma de

[7] [Oberle 1985, p. 12] quien cita a Pfister, *L'Alsace et l'Edit de Nantes* en Revue historique, 1929 (pp. 217–240).

[8] Es posible que venga de aquí la tradición de situar a los Lambert como refugiados venidos de Lorraine, o más generalmente de Francia, una tradición que Matthias Graf —pastor de Mülhausen y autor de una biografía de referencia sobre el suizo publicada en 1829 con motivo del centenario de su nacimiento (en [Huber et al. 1829])— sitúa incluso entre la propia familia. Un ejemplo lo encontramos en la biografía de Formey con motivo de su *Elogio a Lambert* [Sheynin 2010, p. 137], o en el artículo de Scriba [Scriba 1973, p. 595] (a quien [Sheynin 2010, p. 5] cataloga como el biografo moderno de Lambert). Además, el lector que se acerque a la biografía de Lambert, notará cómo se suele situar sus orígenes familiares entre los hugonotes refugiados, aunque en realidad no eran franceses. Philippe Mieg matiza esta tradición bibliográfica ya antigua, encontrando cierta confirmación en lo ya incluido más arriba sobre que habían tenido contacto con una colonia de hugonotes en Lambrecht (ver [Mieg 1939, pp. 26, 29]).

[9] En el diccionario Larousse: «En la Edad Media y bajo el antiguo régimen, magistrado [magistrat, definido como «personaje investido de funciones públicas importantes»] municipal en las ciudades del norte de Francia, que asistía al alcalde [maire, definido como «el primero de esos magistrados»]».

[10] Ver [Sitzmann 1909, p. 92] (en base a [Mieg 1939] y [Jaquel 1973], el autor debió equivocarse al decir que el derecho de burguesía lo consigue en 1645).

la Paz de Westfalia (1648), aún resultaba peligrosa. En 1685 Luis XIV revoca el Edicto de Nantes dando un nuevo impulso a la persecución de los calvinistas;[11] una persecución que en realidad ya se había internacionalizado, y con creces, con el Edicto de Restitución de 1629, en el que básicamente se incluía la prohibición de toda secta protestante menos el luteranismo.[12]

Todos estos conflictos habían dibujado un paisaje en Europa, especialmente en Alemania, desolador. Pero en medio de este panorama, se empieza a fraguar —gracias a los descubrimientos de hombres como Galileo, Kepler, Descartes o Newton, y por el impacto de las obras de Locke, Bayle o Leibniz— un cambio en la mentalidad de determinados grupos sociales cuyo objetivo será romper con los dogmas, usar la razón como guía, y «la ilustración de todos los seres humanos como lucha contra la superstición y su educación para la aplicación y la utilidad pública»:[13] nace la Ilustración.[14] Es en este contexto en el que transcurre la vida de Lambert.

3.2 Primeros años (1728–1746)

Johann Heinrich Lambert nace en Mülhausen el 26 de agosto de 1728, cuatro años después de que sus padres, Lucas Lambert y Elizabeth Schmerber, se casen.[15] La situación

referencia a él como suizo.

[11] No será hasta 1787 cuando se restaure en Francia una medida de tolerancia para ellos (ver [Blanning 2000, pp. 144, 160]).

[12] [Parker 1997, pp. 127, 128].

[13] [Hermann 1988, p. 123].

[14] Uso este término en un sentido amplio y sin entrar en distinciones terminológicas en función de en qué lugar —Francia, Inglaterra, Alemania, etc— se quiera poner el foco, así como a sabiendas de que normalmente y sin un consenso claro se enmarcan en tres períodos distintos: la larga (1688–1815), la estricta (1700–1800) y la corta (1715–1789) «Ilustración» (la principal fuente usada en lo que a este período histórico se refiere para este capítulo ha sido [Blanning 2000]).

[15] En realidad, la fecha de nacimiento no se sabe con seguridad porque en aquel entonces en Mülhausen no había registro de nacimiento, sino de bautizo (Lambert se bautiza el 29 de agosto) [Jaquel 1973, p. 102]. Si bien Jaquel dice que se suele adoptar el día 26 como su fecha de nacimiento, uno encuentra en algunas biografías del XVIII otras opciones, como por ejemplo el mismo 29 en [Barlow 1814], o el 28 (de Abril!) en [Hutton 1815, p. 710]. Por otro lado, en la historiografía lambertiana existe confusión acerca de la nacionalidad del savant ya que en no pocas ocasiones se le presenta como francés, alemán o suizo. Las regiones de origen de los Lambert eran de lengua mayoritariamente francesa, y parece que tuvieron contacto con comunidades de franceses en Lambrecht; más aún, gran parte de Alsacia era de dominio francés (pero no Mülhausen), lo fue por completo entre 1798 y 1871 cuando pasó a manos alemanas, y volvió a serlo a partir de 1918, algo usado con frecuencia para catalogarlo como francés. Desde luego por parte de padre es de origen alemán —al menos hasta que su bisabuelo llegó a Mülhausen— viniendo de regiones dominadas por el Sacro Imperio Romano Germánico, y pasó la última parte de su vida —

Figure 3.1: Lambert en su juventud (en la web *Johann Heinrich Lambert (1728-1777) Collected Works-Sämtliche Werke Online*).

económica de la familia es difícil; el modesto sueldo del padre, que coge el testigo de la profesión de sastre, junto con la necesidad de sostener a una familia numerosa de diez hijos —tres de ellos muertos a corta edad[16]— obliga a un nivel de vida alejado de las co-

12 años— en Alemania, donde encontró su sitio (además entre 1871 y 1918 Mülhausen pasó a ser de dominio alemán, lo que también hizo que algunos lo «alemanizaran», además del hecho de que su lengua materna era el alsaciano, un dialecto alemán). Lo mismo serviría en lo que al origen por parte de madre se refiere, de bisabuelos mayoritariamente mulhousianos y también alemanes. Pero los aproximadamente 15 primeros años de su vida los pasó en su ciudad natal, en aquel momento parte de la Confederación Helvética (Suiza). [Jaquel 1973] analiza el caso con todo detalle y llega a la conclusión de que, si bien la relación de Mülhausen con la Confederación fue variable y lo más sencillo y riguroso al mismo tiempo sería catalogarlo como mulhousiano, la práctica más habitual y natural es considerar a esta cuidad como suiza. De esta forma lo más natural también sería catalogar a Lambert como suizo. En esta misma linea: Knobloch en [Begehr et al. 1998, p. 5] lo considera suizo, puesto que Mülhausen en aquellos días pertenecía a Suíza hasta que acabó anexionada a Francia; Rudolf Wolf (1816-1893) en su biografía sobre Lambert traducida del alemán en [Sheynin 2010] añade (p. 150) que Lambert:

> se consideraba invariablemente a sí mismo como suizo y hasta que ganó título científico alguno sus contemporáneos lo llamaban *Mülhusino-Helvetus.* No puedo por lo tanto dudar en describir a este gran pensador como un científico suizo.

[Cajori 1927, p. 129 nota 5] y [Gray 2007, p. 84] lo presentan como suizo sin más detalles; [Calinger 2016] hace referencia a él como suizo-alemán (p. 643), aunque aclara que su ciudad natal estaba en Suiza (p. 427). En p. 558 nota 22 es más claro y habla de él como suizo. Aquí siempre que proceda se hará

[16] El dato en [Jaquel 1973, p. 102]. En [Klemme et al. 2016, p. 451] se dice que tuvo cinco, pero también se dice (como en otros lugares) que sus antepasados llegaron a Mulhouse en 1635 como refugiados huidos

modidades. Es cierto que los padres no descuidan su educación básica: asiste a la escuela de su ciudad revelándose como un alumno aplicado y aventajado, donde recibe una formación elemental en francés, latín y otras materias, pero a la temprana edad de 12 años tiene que dejar sus estudios para ayudar al padre en la sastrería. Ya en ese cortísimo período de tiempo da muestras de una fuerte inclinación hacia el estudio, algo poco normal para su edad, más aún si se tiene en cuenta que no crece en el seno de una familia de intelectuales.

El poco tiempo libre que le queda después de ayudar a sus padres lo dedica a la lectura.

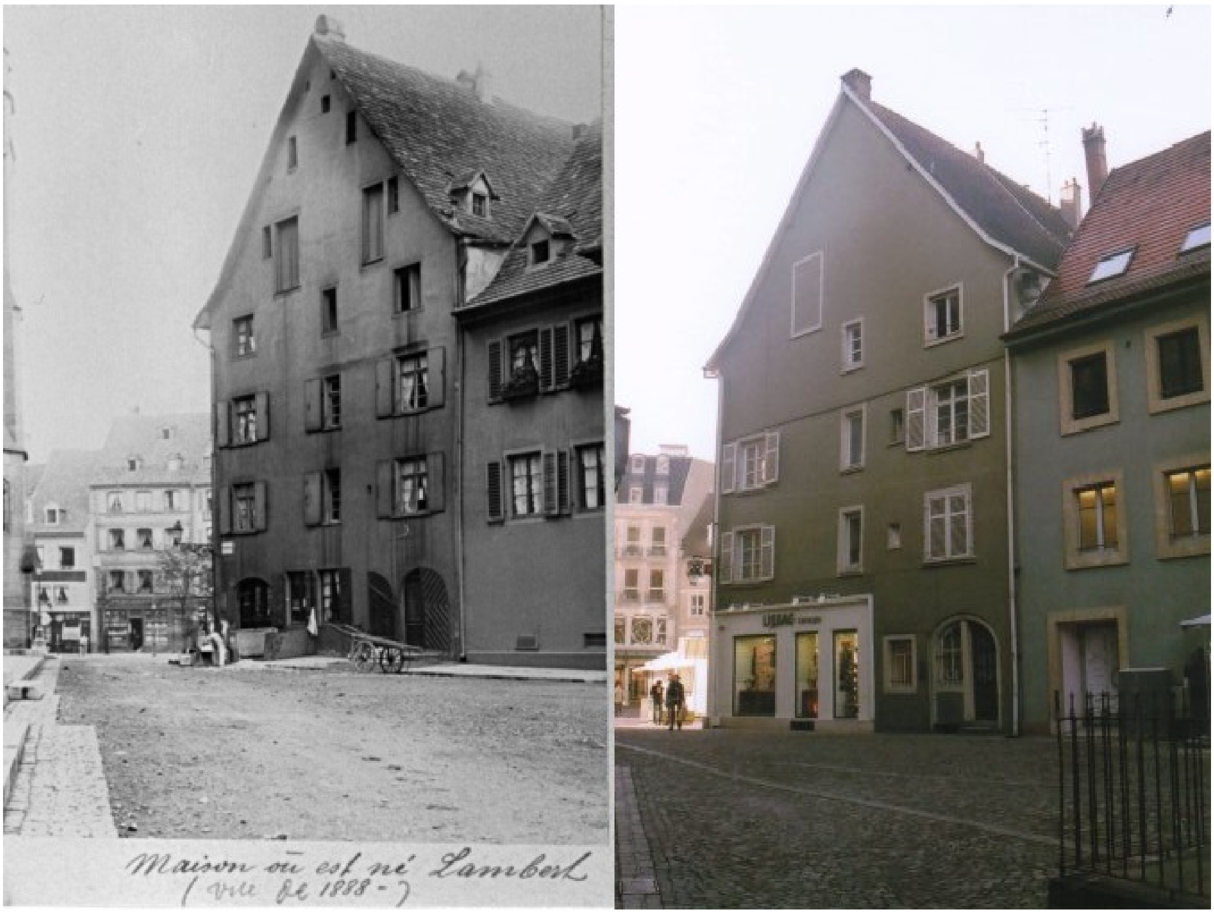


Figure 3.2: A la izquierda foto antigua (1888) de la casa natal de Lambert (*Musée historique, Mulhouse*) y a la derecha su estado actual (en la web *Monuments on Mathematicians*).

---

de Lorraine. Por cierto que, y al hilo de lo que se acaba de comentar en la nota anterior, el título de este trabajo da muestra de la preferencia de los autores hacia la nacionalidad alemana de Lambert, aunque habría que decir que considerarlo un filósofo alemán es una tendencia historiográfica natural puesto que «se esforzó en desarrollar un lenguaje filosófico alemán, y se sirvió únicamente del alemán en sus impresionantes obras filosóficas» [Jaquel 1973, p. 104].

Incluso de noche cuando el resto duerme, él estudia a la luz de las velas. Su madre, posiblemente preocupada por su falta de descanso se las retiraba, pero él conseguía más vendiendo pequeños dibujos que hacía y que iba mejorando a la par que su caligrafía. Su fuerte y sorprendente dedicación, unida a las referencias que los profesores daban de él, hicieron que su padre se planteara la idea de que dejara la satrería y se dedicara a lo que a todas luces parecía su vocación: el estudio.

En aquella época, la oferta de estudios era muy distinta a la de ahora. El abanico de posibilidades incluía una facultad de Derecho, una de Medicina y una de Teología, junto con la de Filosofía que era preparatoria y en la que se recibía la base cultural necesaria para poder ingresar en alguna de las tres anteriores.[17] Formey en su *Elogio a Lambert* de 1780 resume el ambiente intelectual en la ciudad natal de nuestro savant apuntando que:

> Es apropiado mencionar que en aquella época el número de hombres de letras que había en Mulhause se restringía a media docena de teólogos, ya que se pensaba que no había otra ciencia que la teología o, de otro modo, que sólo los teólogos eran capaces de desarrollar ciencias.[18]

Teniendo en cuenta además que la familia de Lambert era muy religiosa, toman la decisión con los consejos de sus profesores de que estudie Teología. El padre trata de conseguir una ayuda económica para su hijo, pero para desesperación de este no consigue nada. Ninguno de los recursos cambian la respuesta, y Lambert tiene que quedarse a las puertas de cambiar la sastrería por los estudios.

A pesar de la desilusión no sucumbe, y sigue usando su poco tiempo libre para estudiar lo que cae en sus manos: dos libros de artimética y geometría (uno prestado por uno de sus compañeros y otro por un obrero contratato por su padre sorprendido por

[17] Ver [Ferreirós 1995]. Aquí se incluye la historia, las matematicas, la filosofía en sentido estricto, la física, la filología etc, claro está, tal y como se entendían en aquella época. Por poner sólo un ejemplo, en el siglo XVIII la física se entendía como «la ciencia que nos enseña las razones y las causas de todos los efectos que la naturaleza produce» (Rohalt citado en [Hankins 1988, p. 13]), con lo que la medicina, entre otras, se entendía como parte de la física. De hecho, en el siglo XVII el físico y el médico eran la misma cosa, y aún hoy en ciertos idiomas se puede rastrear dicha conexión en las palabras designadas para «médico» (en inglés «physician» viene definido en el Cambridge Dictionary como «a medical doctor, especially one who has general skill and is not a surgeon»).

[18] [Sheynin 2010, p. 138]. Los textos a los que se hace referencia en [Sheynin 2010] son el *Elogio a Lambert* de 1780 por parte de Johann Heinrich Samuel Formey (1711–1797), secretario perpetuo de la Academia de Ciencias de Berlín y entre cuyas obligaciones estaba la de realizar los obituarios de los miembros fallecidos, y una biografía de 1860 de Johann Rudolf Wolf (1816–1893), profesor de astronomía en Zurich. En lo que sigue, y siempre que proceda, se hará explícito a cuál de los dos se hace referencia.

la dedicación a la lectura del joven Lambert) van incrementando su conocimiento. Un profesor de la zona le ayuda gratuitamente con el francés y con el latín, y Heinrich Reber, el escriba de la ciudad, viendo la calidad de su caligrafía lo contrata en su oficina como copista. Reber fue una figura clave para Lambert en estos primeros años por el apoyo que le brindó y por sus recomendaciones.

Después de una temporada como copista, a la edad de 15 años y por su recomendación, entra a trabajar como contable en la industria de la siderurgia en Seppois, en el norte de Alsacia. Allí perfecciona su francés y entre otras cosas sigue con gran atención el curso del cometa de 1744, lo que más tarde motivaría su trabajo sobre estos temas.[19] De aquí en adelante Lambert no tendrá que volver la mirada atrás. Dejará de lado de una vez por todas la sastrería familiar, y dedicará la siguiente década a formarse desde todos los ángulos sin descuidar ninguna rama del conocimiento, lo que lo convertirá en el científico polímata que fue.

3.3 Época de aprendizaje (1746–1756)

Después de volver de Seppois en 1746, Lambert, que cuenta con 18 años, se traslada a Basel para convertirse, por nueva recomendación de Reber, en secretario del filósofo suizo Isaac Iselin,[20] que en aquella época era editor de un períodico de caráter político. En una carta del 6 de diciembre de 1750, Lambert habla de su labor en Basilea:

> Hasta hace unos cuatro años lo que había aprendido era básicamente latín y francés hasta que el difunto escriba de la ciudad Reber me recomendó al Dr. Iselin en Basel para ayudarle con su correspondencia y artículos periodísticos.[21]

La personalidad de Lambert distaba de ser arrolladora y tenía un caracter bastante extraño pero:

> por una parte su extraordinaria capacidad y, por otra, la insobornable rectitud de su espíritu, le conquistó aliados seguros capaces de apreciar sus virtudes y perdonar su temperamento.[22]

[19]Catalogado como «Gran cometa», fue especialmente brillante y espectacular, llegando a desarrollar un abanico de 6 colas después de alcanzar su perihelio.

[20]Nacido en 1728, estudió derecho y filosofía en las Universidades de Göttingen y Basilea, recayendo en esta última como profesor de derecho. Hombre respetado, fue uno de los fundadores de la Sociedad Helvética. Murió en 1782 como miembro permanente de la Academia de Berlín.

[21]Wolf en [Sheynin 2010, p. 151].

[22]Juan Arana en [Lambert 1765, p. 200].

Iselin fue uno de los que, junto con Reber y sus antiguos profesores, vieron en él ese ardiente deseo de aprender. Llegó a cogerle gran estima. Lo educaba por el día y le permitía asistir a sus lecciones, pero el carácter profundamente autodidacta que siempre lo acompañaría, hacía que prefiriera refugiarse en los libros que conseguía antes que asistir a sus clases. Esta misma carta arroja luz acerca de sus primeras influencias:

> En ese cargo apenas estaba ocupado la mitad del día así que me hice con algunos libros para aprender los principios de la filosofía. Entendí de inmediato que mis primeros esfuerzos debían dirigirse a perfeccionar mi conocimiento y hacerme feliz. Sin embargo, también entendí de inmediato que las intenciones naturalmente depravadas no pueden mejorarse sin liberar la mente de prejuicios e iluminarla debidamente. Ese fue por tanto mi primer punto de referencia [...], y encontré esas reglas, en los escritos de Wolff sobre el poder de la mente humana, de Malebranche sobre la investigación de la verdad, y en las ideas de Locke sobre la mente humana. Todo esto se revela sobre todo en las ciencias matemáticas y especialmente en el álgebra y la mecánica, las que me proporcionaron claros y profundos ejemplos que me permitieron confirmar las reglas que había aprendido previamente [...] Hasta ahora, no he encontrado razones para lamentar mis esfuerzos ya que ahora soy mucho más capaz de aprender otras ciencias más fácil y profundamente.

Además de la importancia que da a las matemáticas como paradigma de las ideas filosóficas que estos libros le enseñan y como herramienta fundamental para las demás ciencias,[23] en este pequeño extracto de la carta se ve la constatación de que efectivamente su mente está libre de prejuícios. Aunque para una persona de la época con inquietudes intelectuales estas tres obras, entre otras, eran casi de lectura obligada, es cierto también que Wolff (junto con Malebranche) y Locke representan las dos corrientes opuestas de la teoría del conocimiento: racionalismo vs empirismo.[24]

A pesar del cariño que le había cogido a Lambert, Iselin supeditó las ganas de retenerlo a la búsqueda de un destino que le proporcionara una buena opción para su desarrollo como científico. Es así como nuestro mulhousiano viaja en 1748 a la edad de 20 años a Chur, la capital del Cantón de los Grisones en Suiza, para convertirse en el tutor privado de tres jóvenes familiares del Conde Peter von Salis. Von Salis, que en aquel entonces tenía 80 años, además de Conde del Sacro Imperio Romano Germánico había sido embajador en Londres y uno de los negociadores de la Paz de Utrecht. Era pues un hombre importante e influyente además de culto, poseedor de una gran biblioteca que abriría a Lambert las

[23] Aquí ya se divisa, como quedará constatado más adelante, su visión entrelazada de las diferentes partes de la ciencia.

[24] Él no se casará con ninguna de las dos. De hecho casará a las dos entre sí (ver [Gray et al. 1978]).

Figure 3.3: Lambert en su etapa madura. Retrato hecho por el ilustrador G. Dantzer alrededor de 1850 (en el *Catalogue général Gallica.* El retrato original en la *Bibliothèque nationale et universitaire de Strasbourg*).

puertas a un estudio más amplio y profundo con el que definiría su pensamiento científico y filosófico.

Su labor en Chur consistía en llevar personalmente la educación del nieto del conde de 11 años Antoine de Salis, su primo Baptista también de 11 años, y otro familiar de 7 años llamado Johann Ulrich von Salis. Durante la siguiente década los instruye en lenguas, matemáticas, geografía, historia y catecismo (la familia von Salis era muy devota, algo que Lambert compartía y mantendría). El tiempo libre del que dispone lo dedica a estudiar en la biblioteca de su anfitrión, y como aquél que intenta calmar su sed después de un largo camino sin agua, abraza indiscriminadamente la física, la astronomía, las matemáticas y la mecánica, así como la teología, la metafísica e incluso la poesía, a la par que realiza regulares observaciones astronómicas y construye sus propios instrumentos para los experimentos.

Con este bagaje empieza a desarrollar sus propias reflexiones, que irá anotando mes a mes, a partir de 1752, en su *Monatsbuch*, diario científico en el que no dejará de escribir hasta su muerte. En él se puede ver la huella que dejaron en él los escritos de Wolff y

Locke, ya que combina estudios teóricos con experimentos basados en la observación, en una síntesis de ambas corrientes que caracterizará su metodología de la ciencia. También en esta época entra en contacto con el mundo académico. Unido al probable apoyo de su influyente padrino, sus rápidos progresos y el gran conocimiento adquirido lo llevan en 1753 a la Sociedad Literaria de Chur y posteriormente a la Sociedad Científica Suiza con sede en Basel. Por requerimiento de esta institución, realiza varias observaciones meteorológicas que se materializan en diversas publicaciones en *Acta Helvetica*, la revista de la Sociedad. Es en esta revista, concretamente en el volumen 2, en la que en 1755 publica su primer artículo *Tentamen de vi caloris, qua corpora dilatat ejusque dimensione*[25] que trata sobre el calor, uno de los principales temas de estudio de la física de la época junto al de la luz, la electricidad y el magnetismo.

El 1 de Septiembre de 1756, después de ocho años en casa de los von Salis —un período clave para su formación que le permitió suplir, y con creces, las carencias educativas que había tenido a causa de la falta de recursos cuando era más joven— Lambert se embarca con Antoine y Baptista, de 19 años ya, en un viaje académico por Europa en el que visitará los principales centros intelectuales del momento, abriéndose a la comunidad científica y haciéndose un nombre ya a nivel internacional.

3.4 Tour europeo (1756–1759)

Como ya se apuntó antes, desde mediados del siglo XVI hasta las puertas del XVIII tuvieron lugar una serie de acontecimientos religiosos y políticos, que combinados con determinados desarrollos científicos desembocaron en un cambio de mentalidad. Estos avances venían a apuntar la posibilidad de que el hombre por sí mismo usando la razón, sin recurrir a la verdad revelada, pudiera conocer el funcionamiento de las cosas. Es más, este giro de 180 grados en el enfoque, razón frente a dogma, no se quedó en el campo de la ciencia sino que se extendió en general a los diferentes aspectos de la vida cambiando toda la actividad humana.[26]

[25] [Lambert 1755]. Una lista exhaustiva de los trabajos de Lambert se puede ver en la página web *Johann Heinrich Lambert (1728-1777) Collected Works - Sämtliche Werke Online* escrita y diseñada por Maarten Bullynck: `http://www.kuttaka.org/~JHL/Main.html`. También en el trabajo clásico de Max Steck *Bibliographia Lambertiana* [Steck 1970].

[26] Es importante resaltar sin embargo, que este cambio no fue para nada inmediato. De hecho hasta mediados de siglo la Iglesia aún estaba ganando terreno en algunos ámbitos y su dominio era fuerte en lugares como Francia, España, Portugal y Hungría, dificultando la entrada de ideas renovadoras que en otros lugares ya habían cuajado como en Gran Bretaña, Holanda o Prusia. Derek Beales en su capítulo «Religión y cultura» en [Blanning 2000, pp. 140-187] lo deja claro ya en la página 142:

Aunque en un principio pueda parecer que esto quita de en medio al pensamiento

Figure 3.4: Lambert (en [Speiser 1946–1948]).

religioso, fue de hecho un impulsor verdaderamente notable de esta forma de acercarse al conocimiento. A medida que iban apareciendo nuevos descubrimientos, el argumento del designio según el cual el orden y el mecanismo que rige en la naturaleza evidencia la existencia de un creador, fue reemplazando a los razonamientos a priori e incluso a la revelación de las Escrituras como prueba principal. Buscar a Dios pues, era buscar en la Naturaleza, con lo que las implicaciones para la ciencia fueron importantes.

Entre los títulos que se atribuyen generalmente al siglo XVIII, faltan «la época de la religión» y el «siglo del cristianismo». No debería ser así porque, durante la primera mitad de siglo, en muchos aspectos las iglesias estaban aún ganando terreno en distintos ámbitos. Pero este logro ha sido ocultado porque los historiadores han exagerado en gran medida el efecto inmediato en la religión de dos fenómenos de finales del siglo XVII. El primero es el supuesto «fin de las guerras religiosas» y el segundo la «revolución científica» que condujo a lo que Paul Hazard denominó «la crisis de la conciencia europea» y dató entre 1680 y 1715.

Pero esta era una búsqueda desde la observación y el experimento pues «ningún argumento lógico por sí sólo puede penetrar en la libre elección de Dios»,[27] con lo que el término «usar la razón» debe interpretarse como una manera de conocer con espíritu crítico y mentalidad abierta orientada hacia las ciencias naturales, y no ya como un acercamiento apriorístico a la verdad. Una visión que dio lugar también a que en el campo de las matemáticas el interés cambiara de la Geometría al Cálculo, una herramienta que había sido desarrollada para dar respuesta a los problemas relacionados con el movimiento (mecánica). Lo que nos encontramos en este siglo entonces, en a lo que a ciencia se refiere, es un ansia por responder a las preguntas planteadas por la naturaleza unido a un espíritu experimentador,[28] donde la matemática, principalmente el Cálculo, como paradigma de la razón —el método correcto a seguir— juega un papel central. Después de la unión que había hecho Newton entre experimentación y matemáticas en su obra, el debate se centraba en el equilibrio adecuado entre las dos.

Lambert llega a Göttingen —cuya universidad es un buen ejemplo del cambio hacia el modo de vida ilustrado— a finales de 1756. Desde la Paz de Westfalia en 1648 las Guerras de Religión en el Sacro Imperio Romano habían finalizado, y la zona disfrutaba de una sana tolerancia religiosa y un carácter renovado. El pensamiento científico estaba empapado por las ideas de Wolff: se hacía un uso de la experimentación pero el enfoque era principalmente racionalista.

Allí recibe clases de leyes en su recién fundada universidad y estudia trabajos tanto de los Bernoulli, quienes habían desarrollado el Cálculo de Leibniz para abordar las cuestiones sobre mecánica —muy en voga en aquel momento como es el caso de la braquistocrona—, como los de Euler, que con el enorme impulso que estaba dando al Cálculo derivarían en la formación de una disciplina cada vez más autónoma. De hecho sólo un año antes de la llegada de Lambert a Göttingen, había salido a la luz su famoso *Instituciones de Cálculo Diferencial*, uno de los tres tratados que contendrían todo lo recogido hasta el momento sobre el tema.[29]

[27][Hankins 1988, p. 4]. Esto es propio de la teología voluntarista, una corriente importante desde la Edad Media (y opuesta a la teología racionalista, cf. Leibniz) (agradezco a J. Ferreirós el comentario).

[28]De hecho Lambert, que ya había construído instrumentos de experimentación para llevar a cabo sus propias observaciones, será algo que siempre mantendrá vivo.

[29]Los otros dos son la *Introducción al análisis infinitesimal* en dos volúmenes de 1748 y los tres volúmenes que llegarían en 1768 de las *Instituciones de Cálculo Integral*.

También conoce a dos importantes académicos: al astrónomo Tobias Mayer,[30] que era el responsable del observatorio de la ciudad y quien años antes había publicado el primer mapa con coordenadas de la Luna y unas excelentes tablas lunares que le valdrían un premio de la Junta de Longitud en Londres (a título póstumo);[31] y a Abraham Gotthelf Kästner, profesor de filosofía y matemáticas en dicha universidad y con el que mantendría correspondencia hasta su muerte. La influencia que tanto Kästner como su alumno Klügel —al que también conoce en su estancia en Göttingen— ejercieron sobre Lambert, le llevaría a marcar el camino que siguieron las generaciones posteriores hacia la búsqueda de nuevas geometrías.[32]

También es probable que Kästner, que compartía con Lambert el interés en el estudio de la perspectiva, lo hubiese inspirado a profundizar sobre ello. Ambos habían publicado trabajos sobre el tema años atrás, y en esta época, tal y como registra en su *Monatsbuch*, hasta la publicación en 1759 de su principal trabajo sobre perspectiva,[33] Lambert realiza diferentes anotaciones, siendo la de Septiembre de 1758 especialmente interesante: «en Marsella establecí las bases de la perspectiva».[34]

La estancia de Lambert en Göttingen —donde es nombrado miembro de la Academia de Ciencias— no dura más de un año. Las disputas políticas en Europa debidas principalmente a problemas dinásticos y a conflictos territoriales estaban a la orden del día, y en la misma época en la que visita la ciudad —concretamente en el verano de 1757— esta es invadida por Francia en el contexto de la Guerra de los Siete Años. Sin más opción, coge a sus dos pupilos y marcha rumbo a Holanda, terreno neutral y que a pesar de que sobre esta época estaba en decadencia, había sido desde principios de siglo junto con Gran

[30]Se pueden ver bastantes paralelismos con la vida de Lambert: dificultades económicas (se crió en la pobreza) y pronto huérfano de padre, fue también un autodidacta aprendiendo matemáticas y física. En lo primero en lo que destacó antes de dedicarse a la astronomía fue en la cartografía, campo en el que posteriormente también Lambert haría aportaciones importantes.

[31]Unas tablas lunares eran de gran interés práctico pues permitían calcular la longitud en alta mar, pero era una labor difícil puesto que, a diferencia de los planetas que son atraídos por el Sol, la Luna es atraída también por la Tierra. Esto quebró la cabeza de Euler, D'Alembert y Clairaut que se enfrentaron a este «problema de los tres cuerpos», una de las tres pruebas que habría de pasar la ley de la gravitación de Newton para su verificación junto con la determinación de la forma de la Tierra y el regreso del cometa Halley.

[32]Dada la fundamental importancia de sus investigaciones, le dedicaremos al final de esta sección unas cuantas líneas a esto.

[33][Lambert 1759].

[34]Tomado de [Andersen 2007, p. 638], quien dedica un capítulo al trabajo de Lambert dado que sus contribuciones «son tan impresionantes en la historia de la perspectiva que merecen un capítulo separado» (en p. 559).

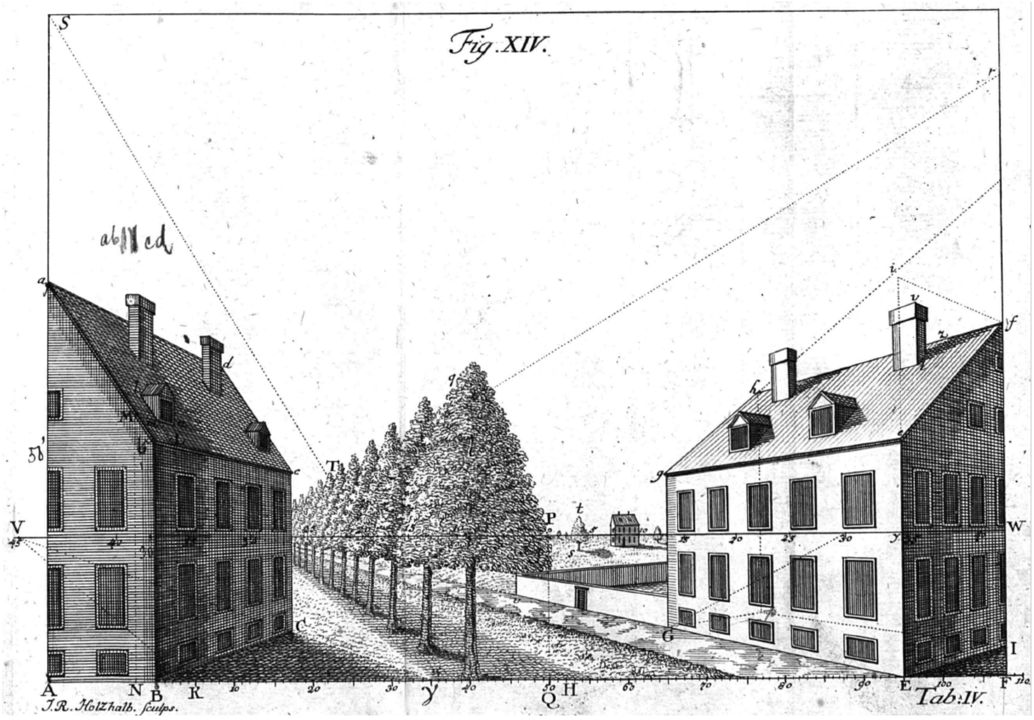


Figure 3.5: «Uno de los pocos diagramas ilustrativos de Lambert» [Andersen 2007, p. 685] (Fig. XIV; en *Die Freye Perspective*).

Bretaña, ahora en preeminencia, ejemplo de tolerancia religiosa y de relativa libertad de expresión, lo que había facilitado la entrada de los nuevos aires de la época.

La mayor parte del año que dura su estancia en Holanda lo pasa en Utrecht. Está registrado que estando allí sufre una aparatosa caída que casi le cuesta la vida. Estuvo un día inconsciente y de hecho el médico que lo atendió, le recomendó que durante una buena temporada dejara aparcado el estudio debido al fuerte golpe que había recibido en la cabeza. Pero «una buena temporada» era mucho tiempo para él. Desde Utrecht hace pequeños viajes a las principales ciudades holandesas: Amsterdam primero; la Haya después, donde en 1758 publica su primer libro *Les propriétés remarquables de la route de la lumière par les airs et en général par plusieurs milieux réfringens, sphériques et concentriques*[35] acerca de la trayectoria de la luz en diferentes medios; y por último Leyden donde conoce a Pieter van Musschenbroek.

Van Musschenbroek junto con Willem Jaco 'sGravesande y Hermann Boerhaave habían publicado a principios de siglo una serie de trabajos en los que seguían los pasos de

[35] [Lambert 1758].

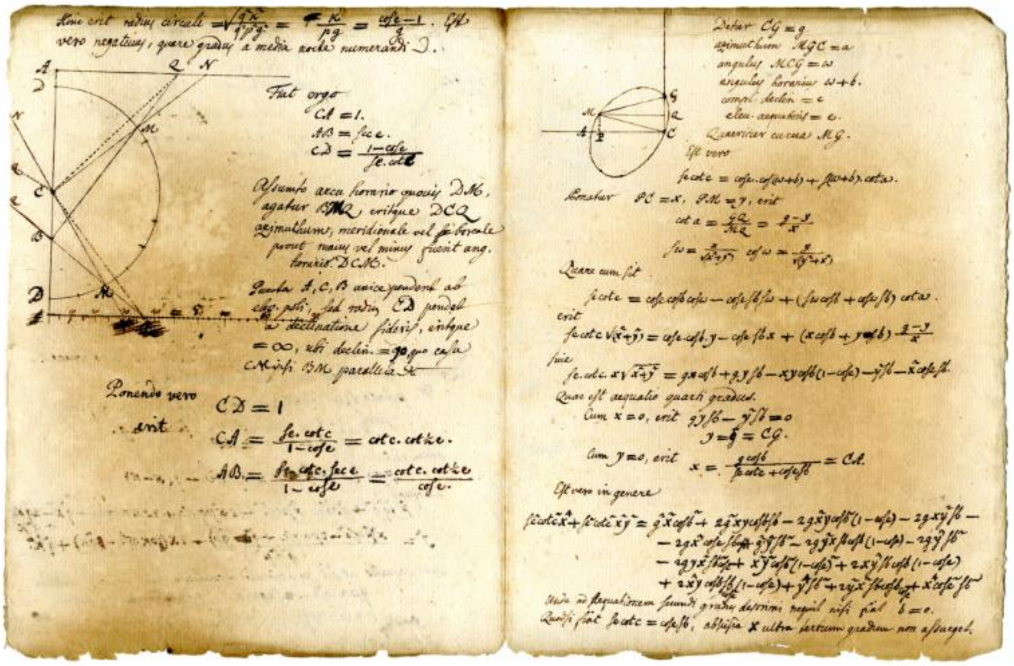


Figure 3.6: Estudios manuscritos de Lambert sobre Cartografía, disciplina en la que también dejaría su impronta (cortesía de los *Archives de Mulhouse*).

Newton en la realización de experimentos, los cuales jugaban un papel principal (las matemáticas eran necesarias pero subyugadas a la experimentación, a diferencia de lo que ocurría en Alemania). Holanda con la Universidad de Leyden a la cabeza, se convirtió en la principal seguidora de su método en Europa, después obviamente de Gran Bretaña. Musschenbroek, quien tenía en su haber entre otras cosas el descubrimiento, de manera independiente, del primer tipo de condensador eléctrico (la conocida como botella de Leyden) conoce a Lambert cuando es ya un hombre mayor. Al parecer mantienen una conversación sobre diferentes temas en la que, contrariamente a su primera impresión, queda muy sorprendido sobre su amplio conocimiento: «los roles de los interlocutores cambiaron; Lambert se convirtió en el profesor y Musschenbroek en el estudiante».[36]

Su última parada antes de regresar a Chur la hace en Francia de donde a pesar de las dificultades encontradas por algunos de sus ciudadanos más ilustres como Voltaire o Diderot, saldría el documento central de la Ilustración, *L'Encyclopédie*. Lambert llega a París en el verano de 1758 y allí entabla relación con Charles Messier, un astrónomo que empezaba en esa época a confeccionar su aún hoy conocido «Catálogo de Messier», en el que clasificaba ciertos objetos celestes fijos con la idea de realizar así una búsqueda

[36] Formey en [Sheynin 2010, p. 142].

más cómoda de cometas, su principal objetivo, motivada al parecer por su observación del cometa de 1744. Pero sobre todo, establece contacto con un hombre de fama ya internacional que formaba parte de la vanguardia de la matemática junto con Euler y los Bernoulli, y que era un importante exponente en el cambio de mentalidad que se establecería en Francia, como en ningún otro sitio, a partir de la segunda mitad del siglo.

Lambert conoce a D'Alembert en 1758 cuando este había dejado el proyecto de la Enciclopedia probablemente a raíz de las diferencias que empezaban a surgir entre sus dos directores. Diderot cuestionaba a las matemáticas como herramienta argumentando que alejaban al científico de la realidad, y D'Alembert, a pesar de que comprendía la necesidad de la observación, defendía en cambio que debían ocupar un puesto central.[37] No eran pocos los que compartían esta visión poco utilitaria de las Matemáticas. Buffon llegó a calificarlas de vacías y poco útiles para la vida real; productos de la mente humana y no abstracciones —como las veía D'Alembert— de objetos reales que por ende se ven beneficiados de su estudio matemático. Diderot, que no esconde su alegría cuando su colega deja la Enciclopedia —«el reino de las matemáticas se ha terminado»,[38] escribe a Voltaire—, en los diez volúmenes que le siguieron «hizo lo que pudo para debilitar las reivindicaciones del *"espíritu geométrico"* de D'Alembert».[39]

En cualquier caso, su «Discurso preliminar» en esta misma obra y los siete primeros volúmenes de la misma que irían apareciendo entre 1751 y 1759 dejaron su impronta granjeándole gran prestigio. De hecho años antes, y hasta en dos ocasiones, había recibido la oferta por parte de Federico el Grande de presidir la Academia de Ciencias de Berlín, propuestas que rechazó argumentando que sería una osadía pretender estar por encima de Euler en una intitución científica.[40] Parece ser que al contrario que con Messier, con el que llegaría a mantener una relación de amistad, la primera impresión de este ilustre pensador hacia Lambert no fue buena, aunque pasado el tiempo acabaría por reconocer su valía.[41]

[37] Las críticas hacia las matemáticas como una disciplina inútil y oscura no eran nuevas. Petrus Ramus ya en 1569 publicaba *Scholarum Mathematicarum* en la que examinaba el porqué de la baja estima que se tenía hacia las matemáticas. Él (como D'Alembert después) señalaría a la estructura y metodología de los *Elementos* de Euclides —el texto clásico de instrucción matemática de la época— como el principal problema (para más detalles ver [Schubring 2005, pp. 68–69] donde el autor califica esta obra de Ramus como «la primera reflexión metodológica impresa sobre las matemáticas»). En relación a la disputa sobre la utilidad de las matemáticas en torno a la figura de D'Alembert ver [Richards 2006, pp. 702–704, 706].

[38] Diderot citado en [Richards 2006, p. 706].

[39] [Richards 2006, p. 706].

[40] [Hormigón 1994, p. 27].

[41] Más adelante en este mismo capítulo se analizarán más de cerca estas impresiones.

Este viaje europeo que finaliza en los últimos días de 1758, le sirve tanto para conocer en persona las principales líneas de investigación del momento junto con algunos de sus artífices más relevantes, como para dar a conocer sus primeros trabajos en el mundillo académico. Pero ahora, dado que su servicio para la familia Salis estaba llegando a su fin, se le planteaba el problema de buscar una posición estable desde la que poder seguir con sus estudios. Su mente estaba en Göttingen, como atestigua una carta del 18 de agosto de 1758 que escribe estando aún en París y que dirige a Albrecht von Haller, quien había recomendado a Lambert mientras estaba allí, y que junto a Kästner le había ayudado a divulgar sus trabajos. Haller ocupaba la Cátedra de Medicina en la Universidad de Göttingen y había sido llamado por Jorge II para inaugurar la presidencia de la Academia de Ciencias fundada siete años antes. Luego de agradecerle su ayuda, Lambert le pide que interceda por él:

> Mis servicios en la famila Salis acabarán antes de octubre y lamentaré la inminente pérdida de tiempo libre que me habían dejado por propia voluntad para trabajar sobre estos temas.[42] Ciertamente sabe, Señor, que el tiempo libre es necesario [...] Sinceramente admito, Señor, que espero encontrarlo en Göttingen y nada me satisfaría más que una invitación a la Cátedra de Filosofía [...] su ejemplo demuestra vívidamente que la gloria de una universidad depende mucho menos de aquellos que enseñan que de aquellos que además adquieren reputación por sus escritos. No niego que esa es la gloria a la que yo aspiro [...] Cuán satisfecho estaría si sus recomendaciones me aseguraran tal posibilidad o si las actuales circunstancias en la Universidad de Göttingen me permitieran una invitación que me beneficiara.[43]

A pesar de que Haller había apoyado a Lambert en su etapa en Göttingen, su intento de conseguir un puesto en la universidad se queda en nada. Abandona París para regresar a casa de los von Salis en Chur vía Marsella, Niza, Turín y Milán. Se emancipará finalmente en mayo de 1759 para llevar, durante los siguientes 5 años, una vida sin descanso orientada hacia un puesto seguro desde el que continuar con sus investigaciones, y hacia posibles editores para sus trabajos.

3.4.1 Lambert y las geometrías no euclidianas

A pesar de que ciertamente el estudio de las matemáticas en esta época se centraba en el Análisis, ciertas cuestiones nunca habían dejado de preocupar y de interesar. La falta

[42] Se refiere a su *Pirometría* [Lambert 1779] y *Fotometría* [Lambert 1760] que publicará más adelante (la primera de ellas se publicará póstumamente).

[43] Wolf en [Sheynin 2010, p. 153].

de evidencia del quinto postulado de los *Elementos* en comparación con los demás, unido a que su recíproco sí requería demostración explícita, lo había puesto en tela de juicio desde el principio. La duda, hay que señalar, no era si dicha afirmación era verdadera o falsa —la fuerza de la intuición señalaba la respuesta— sino si esta afirmación era una verdad «fundamental» o no. Esta cuestión terminó por convertirse en una espina que la Geometría llevó clavada desde los tiempos de Euclides hasta, pasando por los árabes, la Europa que nos toca, donde de manera fundamental Lambert marcó el camino que seguirían aquellos que, casi un siglo después, zanjaron la questión.

La obra que marcó el punto de inflexión en esta historia y que llevó el interés sobre la teoría de las paralelas al siglo XVIII, fue *Euclides ab omni naevo vindicatus*[44](1733) de Giovanni Girolamo Saccheri, que se convirtió sin su intención en el primer trabajo sobre geometrías no euclidianas. De manera muy resumida, en este tratado Saccheri parte de un cuadrilátero birrectángulo ($A = B = 90^o$) isósceles ($AC = BD$), hoy conocido como cuadrilátero de Saccheri,[45] y demuestra basándose solo en las 28 primeras proposiciones —aquellas que no usan el axioma de las paralelas—, que siendo este el caso los ángulos C y D han de ser iguales. Caben por lo tanto tres opciones: que sean rectos, lo que equivale a que se cumpla el quinto postulado, que sean agudos, o que sean obtusos. Esto genera tres tipos de geometrías,[46] que como también demuestra son excluyentes: la del ángulo recto (GAR) que equivale a la euclidiana, la del ángulo agudo (GAA) y la del ángulo obtuso (GAO). El método que sigue ahora Saccheri es su aportación más valiosa y profunda:[47] añadir a los cuatro primeros postulados la negación del quinto y tratar de establecer que esto lleva necesariamente a una contradicción; es decir, demostrar que la GAO y la GAA no son posibles.[48]

Esta obra pronto se dio a conocer. En 1736, sólo tres años después de su publicación (y muerte del autor), aparece mencionada en *Acta Eruditorum*, así como por dos recono-

[44] *Euclides vindicado de toda mancha.* Para una traducción anotada al inglés ver [Saccheri 1733].

[45] Ver Figura 3.7

[46] Cada una de las opciones anteriores, si se cumple para un cuadrilátero de Saccheri se cumple para todos (cosa que demuestra), lo que justifica que se pueda hablar en un principio de tres tipos de geometrías o, siguiendo su terminología, tres hipótesis diferentes (HAR, HAO y HAA).

[47] Ver [Dou 1992].

[48] Hoy sabemos que tales geometrías sí son posibles, pero con matices. La GAO usada por Saccheri y que descarta correctamente, presupone la infinitud de las rectas (segundo postulado), con lo que no coincide por completo con la geometría elíptica, donde estas son de longitud finita. Además, las rectas en el plano elíptico difieren tanto de lo que debería ser una recta (son de longitud finita, no unívocamente determinadas por dos puntos), que se desecha como opción de una posible geometría. Donde comete el error es en el caso de la GAA, la que hoy llamamos geometría hiperbólica ([Dou 1992]).

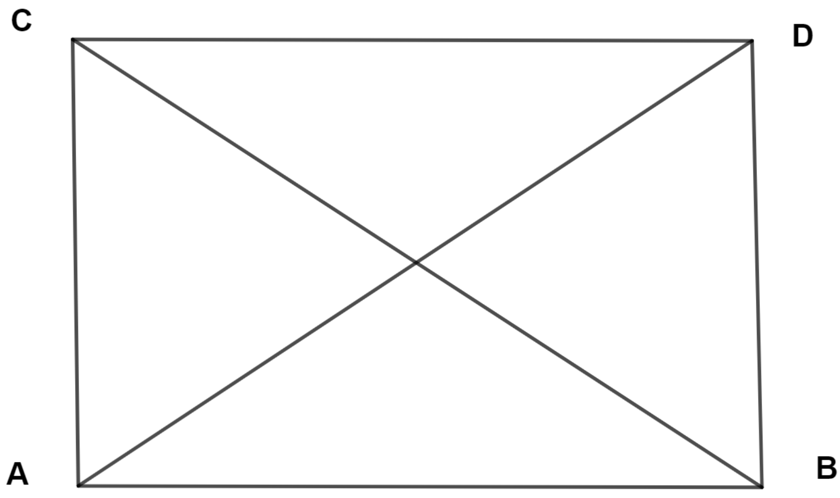


Figure 3.7: Cuadrilátero de Saccheri

cidos historiadores de las matemáticas de la época, J. C. Heilbronner (Leipzig, 1742) y J. E. Montucla (París, 1758), lo que le aporta una segura difusión. También aparecen copias de la misma en varias universidades entre las cuales se encuentra la de Göttingen.[49] De hecho es aquí donde surge con más intensidad el interés sobre este tema y donde recogen el testigo del italiano. Kästner llegó a reunir una enorme biblioteca sobre el problema de las paralelas, y Klügel realiza bajo su dirección una tesis (1763) en la que estudia exhaustivamente los diferentes intentos de demostración del quinto postulado, en particular el de Saccheri. La conclusión a la que llega es que si bien estos resultados pueden contradecir la experiencia no contradicen los axiomas, siendo el primero que reconoce su posible independencia.

Por lo tanto Lambert visita un Göttingen enfrascado en el problema de las paralelas. Cuando pasados unos años la tesis de Klügel llega a sus manos, su interés por el tema se materializa en la obra *Theorie der Parallellinien*(1766/1786).[50] En la introducción a la tercera parte, que es la que contiene las aportaciones más importantes, introduce el «cuadrilátero de Lambert», que difiere del de Saccheri en que es trirrectángulo.[51] El án-

[49] Ver [Dou 1970] o [Saccheri 1733, p. 54].

[50] [Lambert 1766/1786]. Lambert escribe esta obra en 1766 pero no se publica hasta después de su muerte en 1786.

[51] Acerca de una posible conexión entre Lambert y Saccheri, se dice en [Saccheri 1733, p. 53] que:

> No está claro si Lambert conoció de primera mano el libro de Saccheri, pero esta hipótesis no es realmente necesaria para explicar su logro dado el genio de Lambert y la abundancia de detalles aportados en la tesis de Klügel.

gulo restante da lugar a las mismas tres hipótesis o geometrías que se comentaron antes: la GAR equivalente a la euclidiana, la GAO que descarta pues suponiendo la infinitud de las rectas llega a una contradicción con los otros postulados,[52] y la GAA. Avanzando en esta última dirección, Lambert se da cuenta de las dificultades para encontrar una contradicción, y prueba una serie de resultados que comparados con los de la GAO y unidos a una, como se verá, fértil observación, le llevan a escribir:[53]

1. Es fácil ver, que asumiendo la tercera hipótesis, se puede ir más lejos y deducir consecuencias análogas, pero diametralmente opuestas a las que se deducen de la segunda hipótesis. Pero por mucho que se busque en las consecuencias de la tercera hipótesis, no aflora ninguna contradicción. Todo esto hace ver claro que no es fácil refutar esta hipótesis. Citaremos algunas consecuencias sin considerar de que manera se pueden extender mutatis mutandi bajo la segunda hipótesis.

2. La más impactante de estas consecuencias es que, bajo la tercera hipótesis, habríamos de tener una medida absouluta de longitud para cada línea, de área para cada superficie y de volumen para cada espacio físico ... Hay algo exquisito en esta consecuencia, ¡por lo que uno quisiera que la tercera hipótesis fuera verdadera!

3. A pesar de esto, no deseamos que sea así, porque traería incontables inconvenientes. Las tablas trigonométricas serían inmensas, no habría figuras semejantes y proporcionales, ninguna figura se podría imaginar sino sólo en sus magnitudes absolutas, los astrónomos tendrían tiempos difíciles.

4. Pero todos estos argumentos están dictados por amor y odio, cosa que no ha de suceder en geometría o ciencia.

5. Volvamos a la tercera hipótesis. Como hemos visto, bajo esta hipótesis la suma de los tres ángulos de cada triángulo es menor que 180. Pero la diferencia a 180 crece con el área del triángulo, lo que se puede expresar así: si uno de los triángulos tiene más área que el otro, entonces el primero tiene una suma de ángulos más pequeña que el segundo.

6. Añadamos justamente la siguiente observación: teoremas completamente análogos se cumplen bajo la segunda hipótesis, exceptuando que la suma de los ángulos

---

[52]Demuestra que dos rectas distintas comparten dos puntos distintos. Esto de nuevo no contradice a la geometría de la esfera donde las rectas son de longitud finita y constante y comparten dos puntos (los polos), pero sí a los cuatro primeros postulados de Euclides y por tanto a su GAO.

[53]Ver *Una revisión de la historia del descubrimiento de las geometrías no euclídeas*, tesis doctoral en la que se incluyen los artículos [Abardia et al. 2012] y [Rodríguez 2006] (la numeración es algo que incluye el autor pero que no está en el original de Lambert como se puede ver en [Engel et al. 1895]).

es mayor que 180. El exceso es siempre proporcional al área del triángulo. Al menos esto explicaría el hecho que, contrariamente a lo que sucede con la segunda hipótesis, la tercera ha resistido refutaciones.

7. Pensemos que es extraordinario que la segunda hipótesis se cumple si en lugar de un triángulo plano se considera uno esférico, porque la suma de sus ángulos es más grande que 180 y el exceso es también proporcional al área del triángulo.
8. Lo que más impresiona todavía es que lo que he dicho sobre triángulos esféricos se puede probar independientemente de la dificultad presentada por las rectas paralelas...
9. Me inclino a pensar que la tercera hipótesis es cierta en alguna esfera de radio imaginario. De esto habríamos de concluir que la tercera hipótesis se cumple sobre alguna esfera imaginaria. Al menos esto explicaría el hecho que, contrariamente a lo que sucede con la segunda hipótesis, la tercera ha resistido refutaciones.

Estos nueve puntos es lo que [Rodríguez 2006] llama la «Analogía de Lambert», sobre la que dice:[54]

> Me propongo suministrar evidencias suficientes en favor de la hipótesis siguiente: la analogía es el umbral de la geometría no euclidiana; el desarrollo de la analogía es el método de descubrimiento de los resultados cruciales de la nueva geometría.

Es decir, el método heurístico sobre el que se apoyaron Schweikart, Taurinus, Gauss, J. Bolyai y Lobatchevski, los cinco fundadores de las geometrías no euclidianas.

Si fijamos la atención en los cinco últimos puntos, Lambert establece dos resultados para triángulos que se cumplen en el caso de la GAA (punto 5), a saber:

$$A + B + C < \pi$$

$$\mathcal{A}_t = k(\pi - A - B - C)$$

y que son completamente análogos a los de la GAO (punto 6):

$$A + B + C > \pi$$

$$\mathcal{A}_t = k(A + B + C - \pi)$$

siendo A, B y C los ángulos del triángulo en cuestión y k la constante de proporcionalidad.

[54][Rodríguez 2006, p. 8].

El punto 7 es clave, pues fija la conexión entre una hipotética geometría (GAO) y una geometría «real» (la de la esfera), lo que le permite dar el salto a la conjetura acerca de la GAA. Como dice, «es extraordinario que la segunda hipótesis se cumple si en lugar de un triángulo plano se considera uno esférico», puesto que en la esfera, la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que π y su área es también proporcional a su exceso. En concreto, siendo R el radio de la esfera, se cumple que:

$$\mathcal{A}_t = R^2(A + B + C - \pi)$$

Si ahora nos fijamos en la fórmula del área de un triángulo bajo la HAA y en la de uno en la superficie esférica, vemos que la diferencia es mínima. De hecho si hacemos una sustitución formal en esta última, R por Ri, siendo i la unidad imaginaria:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_t &= (Ri)^2\,(A + B + C - \pi) \\
&= -R^2(A + B + C - \pi) \\
&= R^2(\pi - A - B - C) \\
&= k(\pi - A - B - C)
\end{aligned}$$

obtenemos la primera. Lambert no lo explicita, pero es muy posible que haya sido esto lo que le llevó a su conjetura (punto 9): «Me inclino a pensar que la tercera hipótesis es cierta en alguna esfera de radio imaginario».

Estas ideas se mostraron tremendamente fructíferas marcando el camino a seguir hacia el desarrollo de la geometría hiperbólica, un camino que culminaría Beltrami poniendo a esta geometría al mismo nivel de consistencia que la euclidiana. Lambert además se encuentra entre los primeros que tuvieron serias dudas sobre la demostrabilidad del quinto postulado (así lo expresa en el punto 1), dudas que incluso le hicieron no publicar su obra consciente de que su «demostración» del axioma de las paralelas era poco rigurosa.[55] Teniendo en cuenta el contexto y el problema, llama la atención su atrevimiento —una característica que se deja ver en otras partes de su obra—, apoyado en una imaginación guiada por la lógica y carente de prejuicios.

[55] En relación a estas dudas ver [Dou 1970, pp. 400, 401, 411 nota 38].

3.5 Período itinerante (1759–1765)

Después de un breve descanso en casa de los que habían sido sus pupilos, Lambert parte hacia Mülhausen con el deseo de pasar un tiempo con su familia. Antes hace escala en Zürich donde es recibido con entusiasmo por, entre otros, Johannes Gessner, médico y botánico con el que hace observaciones astronómicas, y es elegido miembro de la Sociedad de Física. En las semanas en las que permanece en la ciudad helvética publica su *Die freye Perspektive*, tratado en el que estudia cómo dibujar con exactitud en perspectiva. Ya en Mülhausen pasa tres meses con su madre (su padre había muerto en 1747), y de ahí marcha hacia Augsburgo. Madre e hijo no se volverán a ver.

En Augsburgo conoce al famoso inventor de instrumentos Georg Friedrich Brander con el que mantendrá una correspondencia de veinte años, y participa como miembro fundador en 1759 en la creación de la *Academia Electoral de Ciencias de Baviera*.[56] El acuerdo al que llegan, es que a cambio de enviar sus memorias y asistirlos en general con sus consejos, él recibiría el título de profesor honorario y una pensión de 800 florines, pudiendo además establecerse libremente más allá de los límites de Baviera, una flexibilidad poco común que da muestra de la categoría y reputación que Lambert tenía ya como científico. Esto le permitiría proseguir con sus investigaciones de una forma relativamente segura y estable, fijando su atención en terminar definitivamente los trabajos sobre los que le había hablado a Haller en su carta. El primero de ellos fue su *Fotometría*, trabajo que termina en 1760 y en el que trata el comportamiento de la luz al atravesar diferentes medios (por ejemplo yeso o papel), llegando de forma independiente a resultados establecidos años atrás por Pierre Bouguer, verdadero pionero en el tema, y ampliando sus investigaciones. Un año más tarde, motivado por su encuentro con el gran cometa de 1744, publica un pequeño trabajo, *Propiedades de las trayectorias de los cometas*,[57] en el que aparece su famoso teorema sobre las órbitas elípticas aplicado posteriormente por Olbers para calcular las órbitas de los comentas.[58]

Pero quizá más interesantes son sus *Cartas cosmológicas* que publica el mismo año,[59]

[56] La *Churfürstliche Akademie der Wissenschaften* [Sheynin 2010, p. 149 nota 9]. Lambert aparece citado como miembro fundador de la Academia en [Calinger 2016, p. 563 nota 51] y en la web de la *Bayerische Akademie der Wissenschaften*. [Thiébault II 1806, p. 291] dice que «fue nombrado director», aunque en la web antes citada el primero que aparece como presidente ya desde 1759 es Sigmund Ferdinand Graf von Haimhausen.

[57] [Lambert 1761a].

[58] El método de Olbers es usado aún hoy en día.

[59] [Lambert 1761b].

Figure 3.8: Retrato de J. H. Lambert por Frédéric-Emile Simon alrededor de 1836 (en el *Catalogue général Gallica.* El original en la *Bibliothèque nationale et universitaire de Strasbourg*).

y que muestran a un Lambert que rompe con las corrientes dominantes de la Ilustración, para abogar por una concepción más propia del Romanticismo. Esto se ve claramente en su visión organicista del Universo. Ver el Universo como un todo, similar a como puede funcionar un organismo, chocaba con la concepción mecanicista imperante. Pero también se ve en su forma de razonar su estabilidad: este es una obra hecha por Dios según sus intenciones; crearlo para que después se destruyese no tendría sentido, con lo que el fin del Universo es la conservación de la vida, de ahí su establidad. El recurso del argumento teleológico muestra otra clara diferencia con las corrientes principales,[60] en las que se exigía que todo fuera explicado en términos de movimiento y no echando mano de las causas finales.[61]

Lambert en este trabajo intentando dar una respuesta acerca de la Vía Láctea —un tema abordado durante este siglo y en el que destacan las contribuciones teóricas de Emanuel Swendenborg, Thomas Wright e Inmanuel Kant— propone un cosmos jeranquizado: el Sol con los planetas forman un sistema de primer orden, el Sol con algunos millones de estrellas forman un sistema de segundo orden, y agrupaciones de estos últimos formarían sistemas de tercer orden uno de los cuales sería nuestra Vía Láctea (incluso especula sobre la existencia de posibles sistemas de cuarto orden, cúmulos de galaxias, formando el universo). El verdadero problema que entrañaba el estudio del Universo y que había llevado a Kant a afirmar que la cosmología no podía constituir una ciencia en sentido estricto, era que se perdía el contacto empírico directo. Para poder responder a ciertas preguntas había que dejar paso a la especulación y a la imaginación, aunque sin perder de vista la experiencia; lo que algunos autores llaman «empirismo imaginativo»[62] y que no sólo se puede ver en Lambert. Con este tipo de recursos que le llevaron a imaginarse un Universo estable formado por sistemas de diferente orden, estaba incurriendo en un riesgo del que era consciente. En cualquier caso, sus propias palabras no dan muestra de que estuviese demasiado preocupado por ello:

> Puedo considerar mis conclusiones como un modelo de gran osadía, sobre todo porque vivo en tiempos, en los que la libertad para ordenar la naturaleza según el propio criterio ha sido desterrada del todo. Y yo no ordeno sólo partes aisladas

[60]De todos modos, aunque el mecanicismo frente a la teleología ciertamente era la tendencia general (por ejemplo en Francia eran ideas muy comunes), no era la única posibilidad. En Alemania eran de enorme influencia las ideas de Wolff, aprendidas por Lambert en sus primeras lecturas, y a través de este las de Leibniz, quien defendía que mecanicismo y teleología no sólo no estaban reñidos sino que la fuente de la mecánica eran las causas finales.

[61][Hankins 1988].

[62]Por ejemplo [Martín et al. 2007] que es de quien me he valido en lo que a este trabajo de Lambert se refiere.

> sino toda la Naturaleza y el entorno completo de la Creación según mi criterio. ¿Se puede ser más descarado? [63]

El impacto de sus ideas en algunos de los científicos de la época fue enorme, aumentando su reputación y contribuyendo aún más a su fama de genio.[64]

Ese mismo año luego de sus últimas publicaciones emprende numerosos viajes. Visita la Universidad de Erlangen para luego dirigirse a Chur y a Zürich, donde es elegido miembro honorífico de la Sociedad de Física «como una persona cuya mente penetrante revela las verdades en las más difíciles ciencias, descubre otras nuevas y revela secretos»,[65] para en el verano de 1762 volver a Chur donde permanece hasta el otoño. De aquí va a Italia y en diciembre de 1763 llega a Leipzig donde se vuelca en sus trabajos sobre filosofía —trabajos que tuvieron un enorme impacto, sobre todo en Alemania— y que finalmente publica en 1764 en dos partes bajo el título de *Neues Organon*.[66]

Es también en esta época cuando se viene abajo el soporte económico que le permitía actuar con cierta tranquilidad. A raíz de diferentes discrepancias que surgen entre la Academia de Baviera, que le echa en cara no tener suficientemente en cuenta sus intereses, y Lambert, que les reprocha haber descuidado sus consejos, las relaciones entre ambos llegan a su fin, dejando éste de percibir su pensión como miembro. Lo que le escribe a Euler por carta apunta en esta dirección:[67]

> Es también de manera inesperada para mí y sin hacer uso de mis observaciones sobre el Mpt. [¿?] que se ha publicado la Observación de ♀ en ⊙ que los Académicos habían hecho en Múnich.[68] De seis observaciones no han publicado más que dos, las que parecían concordar mejor, y he tenido que ver esta obra impresa en una revista,

[63] [Martín et al. 2007, p. 303].

[64] En cartas reproducidas en [Sheynin 2010], se pueden encontrar en relación a este trabajo comentarios como: «Lambert es el intérprete y rival de Newton...» o «Lambert, uno de los más asombrosos genios del siglo XVIII...». Es cierto sin embargo, que algunos de los que lo adulan no tienen reparo en criticarlo debido a la falta de claridad que muestra en sus escritos (de todos modos hay opiniones en diferentes sentidos).

[65] Wolf en [Sheynin 2010, p. 159].

[66] [Lambert 1764].

[67] A fecha de 12 de julio de 1762 [Bopp 1924, p. 28]. [Thiébault II 1806, p. 291] viene a decir que Lambert decidió irse debido a los problemas en los que le habían metido algunos rivales envidiosos que tenía dentro de la Academia. Al parecer Euler era de la opinión de que la relación de Lambert con la institución había empeorado debido a las diferencias religiosas entre los suizos protestantes y los jesuitas [Sheynin 2010, p. 172 nota 22]. La referencia en [Calinger 2016, p. 562 nota 51] —«Protestante [Lambert], no podía trabajar con los jesuitas de Baviera»— parece desmesurada.

[68] Los símbolos representan a Mercurio y al Sol respectivamente.

> y que los editores no tuviesen Escrúpulos, de tratar las conclusiones de sospechosas. Parece de esta forma, que la Academia se cree que se basta consigo misma, puesto que de lo contrario yo habría tenido más parte en estos procesos, que evidentemente nunca habrían tenido lugar.

Esto lo coloca en una situación delicada de la que aparentemente no se preocupa demasiado, pues rechaza una oferta de la Academia de San Pertersburgo. En realidad, su mente hacía tiempo que estaba en Prusia, concretamente en Berlín y su Academia de Ciencias, en la que esperaba conseguir la ansiada estabilidad con la ayuda de Sulzer y Euler.

3.6 Estabilidad y últimos años. Lambert y la Academia de Ciencias de Berlín (1765–1777)

Desde principios de siglo, habían empezado a surgir en diferentes lugares de Europa —consecuencia del nuevo panorama— numerosas sociedades y academias, que con el apoyo de intelectuales y mandatarios más o menos integrados en el movimiento ilustrado, tomaron como objetivo el estudio y la investigación crítica; aquí ya se han citado varias.[69] El papel que jugaban era importante, primero en lo que se refiere a la ciencia, pues las universidades de la época eran reacias a su enseñanza e investigación,[70] y segundo en lo que se refiere a los científicos, pues proporcionaban una estabilidad difícil de conseguir de otra forma.

Una de las que más relevancia acabaría teniendo en el siglo XVIII fue la Academia de Ciencias de Berlín, aunque su comienzo estuvo repleto de dificultades.[71] La Academia es fundada por el primer Rey de Prusia Federico I de Prusia y III de Brandeburgo (1657–1716), conocido como «El Elector», por consejo de Leibniz el 11 de julio de 1700 coincidiendo con el cumpleaños del rey. En realidad el motor real (y Real) detrás de la instauración de la Academia fue su segunda esposa, la Princesa Sofía Carlota de la casa de Hannover, quien había apoyado económicamente a Leibniz para llevar a cabo su empresa. Con dificultades desde el principio —por problemas de financiación no se inaugura hasta 1711— Leibniz,

[69] Los modelos sobre las que se construyeron fueron la Royal Society de Londres (1662) y la Academia de Ciencias de París (1666).

[70] Los primeros que hicieron un hueco a otro tipo de materias diferentes de las clásicas que ya se daban en las universidades fueron los pietistas, quienes en sus importantes reformas educativas introdujeron novedades como la enseñanza de la geometría y la mecánica [Blanning 2000, p. 145].

[71] Las fuentes consultadas sobre la Academia de Ciencias de Berlín son: [Thiébault I 1806], [Thiébault II 1806], [Cajori 1927], [Aarsleff 1989], [Begehr et al. 1998] y [Calinger 2016] (sobre todo, aunque no solo, el capítulo 6), además de cierta correspondencia que será citada a su debido tiempo.

que muere en 1716, no logra ver en vida cómo la institución consigue un lugar destacado entre las Academias y Sociedades dominadas por la de Londres, la de París y la de San Petersburgo.

En un primer momento, la Academia, que se había fundado bajo el nombre de *Societas Regia Scientiarum*, emitía publicaciones periódicas en su *Miscellanea Berolinensia* para difundir —de la misma forma que lo hacían sus homólogas europeas— las investigaciones llevadas a cabo por sus miembros. Estas se enmarcaban dentro de las cuatro clases en las que se dividía en su primera etapa: la clase de física, medicina y química; matemáticas, astronomía y mecánica; lengua alemana e historia; y literatura, con especial énfasis en escritos orientales para los misioneros que llevaban el Evangelio al Este.[72] En cualquier caso, las primeras actividades de la institución apenas tuvieron repercusión, y bajo el mandato de su hijo y segundo Rey de Prusia Federico Guillermo I de Prusia (1688–1740) conocido como «El Rey Sargento» —un hombre más preocupado por menesteres militares que académicos— la recién creada Academia sin apenas apoyos no solo no mejoró, sino que a punto estuvo de desaparecer. Baste como ejemplo del respeto que estos asuntos le merecían, el que nombrase como vicepresidente de la Academia al bufón real de la corte.[73] Pero a partir de 1740, año en el que el tercer Rey de Prusia Federico «El Grande» (1712–1786) asciende al trono, las cosas aunque lentamente empiezan a tomar un cariz distinto.

Antes incluso de convertirse en rey, en torno a 1736, su correspondencia con Voltaire muestra ya la preocupación del futuro monarca por el mal estado de la vieja Academia, y el interés en hacer de ella una digna competidora en el panorama europeo. La elección del presidente para llevar a cabo este reflotamiento era de vital importancia, por supuesto desde un punto de vista académico pero también publicitario, y al parecer fue precisamente Voltaire debido a su fama la primera elección de Federico, pero tras la negativa, todos los esfuerzos se dirigieron hacia Maupertuis, un hombre que en su tiempo «disfrutaba de la más alta celebridad».[74] Maupertuis acabaría aceptando la presidencia de la Academia en 1746, pero en un primer momento —el francés llega a Berlín en 1740— los planes del rey de revitalizar la descuidada institución se vieron relegados a un segundo plano por su incursión en la Guerra de Silesia.

Entre los que también reclamaban la pronta atención del monarca se encontraba Euler, quién después de negociar las condiciones de su contrato, había aceptado la oferta que

[72] [Calinger 2016, p. 177].
[73] [Calinger 2016, p. 177].
[74] [Thiébault II 1806, p. 282].

le había propuesto Federico:

> Haz lo que puedas por contratar a M. Euler, el gran algebrista, y si puedes tráelo contigo. Le daré diez o doce mil escudos de salario.

le escribe a su amigo y embajador en San Petersburgo Ulrich Friedrich von Suhm tan solo 15 días después de su ascenso.[75] El sueldo de Euler que finalmente se había negociado hasta los 1600 escudos, para igualar lo que le ofrecían en Rusia para quedarse —compárese con el sueldo medio de los «miembros junior» de la Academia que era de unos 300 táleros[76]—, da una idea de la importancia que Euler tenía para el rey en su proyecto.

Euler, que llega a Berlín el 25 de julio de 1741 impaciente por ponerse a trabajar en la nueva Academia, también se encuentra de frente con un escenario poco alentador. Por más que insiste, durante el siguiente par de años el rey está demasiado ocupado en el frente como para centrarse en otras cuestiones, así que con la ayuda de intelectuales franceses de la ciudad y nobles de la corte dan vida a la *Nouvelle Société littéraire* (1743), una especie de paso intermedio entre la vieja *Societas* y la que vendría a ser la nueva Academia, y que se reuniría semanalmente para dar cuenta de los resultados obtenidos por sus miembros. Clasificada en tres clases —matemáticas, literatura y física— quedaría dividida en 20 miembros ordinarios y 16 honorarios o aristócratas. La mitad de ellos eran franceses hugonotes y el idioma oficial sería el francés, lo que da muestra de la fuerte presencia de franceses en la ciudad en torno a esta época,[77] la fuerte influencia de la Ilustración francesa, y los propios gustos afrancesados del rey.[78] La idea era que esta *Nouvelle Société* se convirtiese en la nueva y definitiva sociedad, pero finalmente se fusionó con la antigua creando la *Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Prusse*, que aprobaría sus estatutos fundacionales aprovechando el 32º cumpleaños del rey, el 23 de enero de 1744.

De todos modos, como se suele decir, las cosas de palacio van despacio, y no es hasta

[75] A fecha de 14 de junio de 1740 [Preuss 1850, p. 391].

[76] [Calinger 2016, p. 170]. Como se ve, en algunos casos se habla de escudos franceses —por ejemplo en esta carta o en otra de Lagrange que se citará más adelante— y en otros se habla del táleros («reichsthaler») como en el caso de Calinger, que es presumiblemente la moneda utilizada para el pago de los salarios. De todos modos téngase en cuenta que la equivalencia en aquella época era de 1 escudo = 1 tálero [Kindleberger 2006, p. 475].

[77] Ver [Calinger 2016, pp. 195, 196]. [Aarsleff 1989, p.194] da el dato de que en torno a 1740 un 20 por ciento de la población eran hugonotes, un alto porcentaje de los cuales probablemente habían escapado de Francia por las persecuciones religiosas —como se comentó al principio del capítulo— y habían sido acogidos por Federico Guillermo I de Brandenburgo «El Gran Elector» (1620–1688), él mismo calvinista.

[78] Su propia educación había corrido a cargo de hugonotes [Aarsleff 1989, p.194].

el 3 de marzo de 1746 que la Academia hace a Maupertuis presidente de manera oficial, y hasta la sesión plenaria del 2 de junio del mismo año que se lee la constitución de la nueva Academia. Por iniciativa del nuevo presidente, se establece la obligatoriedad para todos los miembros de asistir a las sesiones plenarias semanales que se celebrarían cada Jueves sin importar la clase a la que perteneciesen, una novedad respecto a otras academias que daba a sus miembros un conocimiento más amplio acerca de las principales líneas de investigación llevadas a cabo en los diferentes campos de estudio. En dichas sesiones, además de dar cuenta de distintas actividades, los miembros debían leer sus trabajos, pudiendo elegir para hacerlo tanto el latín, como el alemán o el francés. En cualquier caso como escribió Maupertuis:[79]

> El latín ha sido sustituido para asegurar una más amplia lectura de las *Mémoires*, ya que el conocimiento del latín está claramente disminuyendo mientras que la lengua Francesa hoy está casi en la misma situación que el Griego en los tiempos de Cicerón; se enseña en todos lados y la gente busca con entusiasmo libros escritos en francés.

Así que es teniendo como principal objetivo su internacionalización, que los trabajos susceptibles de ser incluidos en las *Mémoires* de la Academia debían estar escritos en la lengua vehicular.

La Academia queda dividida en cuatro clases, una división ligeramente distinta a la de la *Nouvelle Société littéraire* tres años antes. Tres de ellas —la primera, la segunda y la cuarta— en base a los temas que se trataban en las academias en las que esta se basaba, pero la tercera clase era de cosecha propia y más concretamente de propia iniciativa del rey. En la anteriormente citada sesión plenaria del 2 de junio de 1746, se establece la división en los siguientes términos:[80]

1. La Clase de Filosofía experimental comprenderá la Química, Anatomía, Botánica y todas las ciencias que se basan en la experiencia.
2. La Clase de Matemáticas comprenderá la Geometría, Álgebra, Mecánica, Astronomía y todas las ciencias que tienen como objeto el estudio abstracto, o los Números.
3. La Clase de Filosofía Especulativa se aplicará a la Lógica, a la Metafísica y a la Moral.
4. La Clase de Belles Lettres comprenderá las Antigüedades, la Historia y las Lenguas.

[79] Citado en [Aarsleff 1989, p.196].

[80] Se puede ver la transcripción de dicha sesión plenaria en la página web del *Archive of the Berlin-Brandenburg Academy of Sciences and Humanities*.

Figure 3.9: La Academia de Ciencias de Berlín a mediados del siglo XVIII por Johann David Schleuen (en la web del *Archive of the Berlin-Brandenburg Academy of Sciences and Humanities*).

En esa misma sesión se especifican ciertos puntos que Dieudonné Thiébault, él mismo miembro de la Academia desde el 5 de abril de 1765, sintetiza en [Thiébault II 1806, p. 283]:

> Toda discusión teológica y política quedaba excluida de la Academia. Cada clase tenía un director, que era escogido por su propio organismo, y estando compuesto de seis miembros residentes, el número de académicos ordinarios se extendía a 24, además del secretario perpetuo y el presidente.

En vista a sufragar los gastos ocasionados por la Academia en forma de alojamientos, edificios o salarios, Thiébault continúa diciendo que:

> el rey asignó a su academia, además de los edificios y las tierras necesarias, primero, algunas extensiones de plantaciones de moreras, sobre las que se había puesto gran expectación, pero que finalmente resultaron ser de poco valor; segundo, el privilegio exclusivo de publicar los edictos del rey y las cartas geográficas, que apenas fueron más productivas que lo anterior; tercero, el privilegio exclusivo de componer y publicar los almanaques, un artículo que, aunque insignificante en apariencia, es la principal fuente de riqueza de la Academia.

Las cuatro clases antes mencionadas serían un referente en la Europa del momento. En ellas se haría investigación de primer nivel, y la clase de filosofía especulativa —única en Europa, y el orgullo de la Academia— le daría a la Academia reconocimiento internacional dada su unicidad.[81] En cualquier caso, no hay que olvidar que, a pesar de la clara animadversión de Federico hacia las matemáticas,[82] gran parte de la fama y alta estima la obtendría gracias a haber tenido entre sus miembros a cuatro de los más destacados matemáticos de su tiempo: Euler —director de la clase de matemáticas—, Lagrange —sustituto de Euler tras su marcha a Rusia—, Johann III Bernoulli —llamado por el rey en 1764 para reorganizar el observatorio astronómico— y Lambert.[83]

Lambert, con la mirada puesta en la Academia de Berlín, intenta con la ayuda de Euler y Sulzer conseguir el favor del rey, y Sulzer que lo había invitado en numerosas ocasiones a Berlín y ejercía de director del departamento de filosofía, se vuelca en ello. A pesar de que al principio no consiguen nada —Euler lo había propuesto en 1761 como miembro regular y había sido aceptado unánimemente, pero el rey en un intento de hacerse con el control de la Academia después de haber estado ausente durante la guerra, rechaza el nombramiento[84]— cuando Lambert llega a Berlín definitivamente deciden reactivar los intentos. Sulzer es llamado a Potsdam donde Federico tiene su casa de verano, y allí se ocupa de hablar con pasión del candidato, al que admira profundamente, a la gente cercana al rey, con la intención de que llegue a sus oídos. Como resultado, cuando Sulzer vuelve a Berlín le está esperando una carta que le insta a enviar a Lambert a Potsdam al día siguiente para poder tener una entrevista con él. Conscientes de su extraño comportamiento y con miedo a que la audiencia pudiese salir mal, objetan que su equipaje aún no ha llegado, a lo que el rey responde que quiere ver al hombre y no a su ropa. Su último cartucho fue advertirle de que no podría presentarse con la apariencia adecuada, contestando que entonces lo llevasen por la noche y con la luz apagada. Finalmente la entrevista se produce:[85]

[81][Aarsleff 1989, p. 198].

[82]A este respecto ver [Cajori 1927].

[83][Begehr et al. 1998, pp. 1, 6].

[84][Calinger 2016, p. 428].

[85]Esta anécdota se reproduce en casi toda biografía de Lambert, por eso es más interesante si cabe saber de su autenticidad. Lo más cerca que se puede estar de lograrlo es echando mano de los relatos de aquellos que hubiesen oído las opiniones del mismo monarca en la cena de ese mismo día, en el que Federico se quejó de las maneras de Lambert, o de algún otro miembro de la Academia que hubiese oído algo a posteriori. La versión que se da aquí es la que relata Dieudonne Thiébault en [Thiébault II 1806, p. 293], quién por cierto en [Thiébault I 1806, p. vi] dice:

> La primera regla que me impuse a mí mismo al emprender este trabajo, y de la que no me he desviado nunca siquiera en pensamiento, fue escribir con la más estricta fidelidad

F: *Buenos días, Señor. Hágame el favor de decirme qué ciencia ha estudiado particularmente.*

L: *Todas ellas, señor.*

F: *¿Es usted, entonces, también un matemático experto?*

L: *Sí, Señor*

F: *¿Y con qué profesor ha estudiado la ciencia de las matemáticas?*

L: *Fui mi propio instructor, Señor.*

F: *Así pues, ¿es usted un segundo Pascal?*

L: *Sí, Señor.*

A pesar de que la impresión que dejó la reunión en un ingenuo Lambert fue positiva, la que valía era la de Federico, poco acostumbrado a un lenguaje tan soberbio, y esta fue pésima. Sulzer se esforzó vía carta en hacer ver a la gente del rey que no debían poner la atención en las pequeñeces sino en su enorme conocimiento, y que dado que volvía a recibir ofertas desde Rusia, corrían el riesgo de perder la oportunidad de ingresar entre sus filas a un hombre de gran valía.[86] Federico se dejó aconsejar sabiamente y, aunque «M. Lambert no era menos merecedor de ocupar una plaza en la clase de matemáticas o filosofía especulativa, que en la de filosofía natural; esto lo demuestran sus trabajos»,[87] finalmente fue incluido como parte de la sección de Física Experimental el 10 de enero de 1765. En cualquier caso, el rey deja claro en una carta a D'Alembert la impresión que le fue causada por el nuevo inquilino de la Academia:[88]

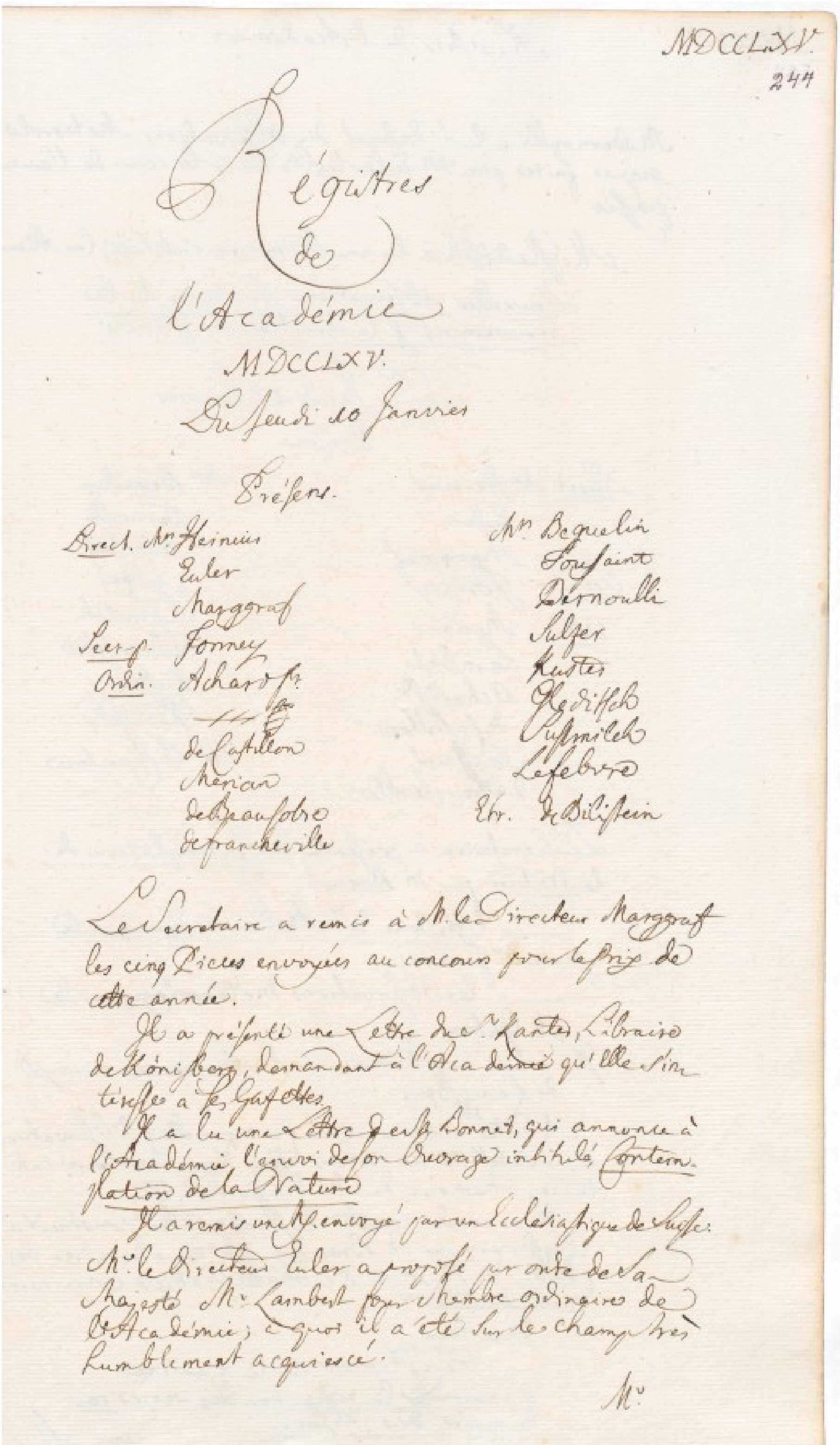
> respetando los hechos que contendría. Declaro solemnemente, que ni una sola palabra aparece aquí que no tenga mi entera creencia. Algunos lectores opondrán quizá a esta aseveración, las conversaciones particulares que he puesto en los labios de la mayor parte de las personas que figuran en mi escena, tales como Federico, Maria Theresa, &c. Con respecto a esto puedo afirmar que no solo no he atribuido a mis interlocutores opiniones que no fueran realmente las suyas; sino que puedo más aún asumir el declarar, que la misma forma y modo de presentar la opinión es genuina y no de mi propia invención.

En [Sheynin 2010, pp. 144, 172 nota 30] se pueden leer otras versiones de la misma entrevista, la primera de ellas de Formey en su *Elogio a Lambert* —bastante abreviada— y la segunda de Graf prácticamente idéntica.

[86] Ver [Cajori 1927, p. 127].

[87] [Thiébault II 1806, p. 290].

[88] No tiene fecha pero probablemente sea de enero de 1765 [Lalanne 1882, p. 142 nota 1].


MDCCLXV.
244

Régistres
de
l'Académie
MDCCLXV.
Du Jeudi 10 Janvier

Présens.

Direct. Mrs Heinius
Euler
Marggraf
Secret. Formey
Ordin. Achard fr.
de Castillon
Merian
de Beausobre
de Francheville

Mrs Beguelin
Toussaint
Bernoulli
Sulzer
Kuster
Gleditsch
Süssmilch
Lefebvre
Etr. de Bilistein

Le Secretaire a remis à Mr le Directeur Marggraf les cinq Pieces envoyées au concours pour le Prix de cette année.
Il a présenté une Lettre du Sr Kanter, Libraire de Königsberg, demandant à l'Academie qu'elle s'intéresse a ses Gazettes.
Il a lu une Lettre de Mr Bonnet, qui annonce à l'Académie l'envoi de son Ouvrage intitulé Contemplation de la Nature.
Il a remis un Ms. envoyé par un Ecclésiastique de Suisse.
Mr le Directeur Euler a proposé par ordre de Sa Majesté Mr Lambert pour Membre ordinaire de l'Académie; à quoi il a été sur le champ très humblement acquiescé.

Mr

Figure 3.10: Acta de la sesión del 10 de enero de 1765 en la que se registra la inclusión de Lambert como nuevo miembro de la Academia de Ciencias de Berlín. En las cuatro últimas líneas se puede leer: «Mr. el Director Euler ha propuesto por orden de Su Majestad a Mr. Lambert como Miembro ordinario de la Academia; a lo que se ha asentido humildemente de inmediato» (en la web del *Archive of the Berlin-Brandenburg Academy of Sciences and Humanities*). Dos semanas después daría su discurso de recepción.

> Prácticamente se me ha forzado, por así decir, a coger a la criatura más hosca que haya en el universo para incluirla en nuestra Academia. Se llama Lambert, y, aunque puedo comprobar que no tiene sentido común, se dice que es uno de los más grandes geómetras de Europa. Pero, como este hombre ignora las lenguas de los mortales y no habla más que de ecuaciones y Álgebra, no tengo la intención a corto plazo de tener el honor de entretenerme con él. Por el contrario, estoy muy contento con M. Toussaint, al que he adquirido. Su ciencia es más humana que la del otro. Toussaint es un habitante de Atenas, y Lambert un Caribe o algún salvaje de las costas de la Cafrería. Sin embargo, toda la Academia se pone de rodillas ante él, hasta Euler, y este animal, totalmente embarrado de la más sucia pedantería, recibe estos homenajes como Calígula recogía los del pueblo romano, queriéndose pasar por dios. Os ruego que estas pequeñas anécdotas de nuestra Academia no salgan de vuestras manos.

La imagen que los miembros de la Academia tenían de Lambert como «uno de los más grandes geómetras de Europa», sirvió para que Federico se decantase por elegirlo como nuevo fichaje, pero no para endulzar su opinión sobre él. La respuesta que le da el francés deja claro que si de él hubiese dependido, Lambert no habría sido elegido nuevo miembro:[89]

> Solo estoy familiarizado con un trabajo de M. Lambert, el cual es bueno, pero no me parece comparable a ninguno de los trabajos de Euler; y si el último se pone de rodillas ante M. Lambert, tal y como su majestad me ha concedido el honor de informarme, debemos decir de Euler como ha sido dicho de La Fontaine, que fue suficientemente insensato como para creer que Esopo y Fedro tenían mejor juicio que él mismo. No es que pretenda menospreciar el mérito de M. Lambert, que debe ser muy sustancial, ya que es algo declarado por la Academia al completo: pero hay más de un lugar honorable en el templo de las ciencias; si creemos en el evangelio, hay varias mansiones en la casa del padre celestial. M. Lambert quizá sea sumamente merecedor de ocupar uno de esos lugares. Me informan además de que ha escrito varios trabajos excelentes, los cuales nunca he leído. Lo vería tolerablemente bien preparado cuando estuviese, por hablar matemáticamente, en el mismo ratio con Euler como Descartes y Newton lo están con Bayle, de acuerdo con su majestad; o como Bayle lo está a Descartes y Newton, de acuerdo con un matemático conocido suyo; o, de nuevo, por usar una comparación que no es tema de contradicción, en la misma proporción como Marco Aurelio y Gustavo Adolfo lo están a un monarca a quién no oso nombrar.

Parece claro que el que el rey no hubiese pedido consejo a D'Alembert antes de incorporar a Lambert a las filas de la Academia fue un golpe de suerte para este —en contra de lo

[89] A fecha de 1 de marzo de 1765 [Holcroft Vol. 11 1789, pp. 20, 21].

que sugiere [Aarsleff 1989, p. 204][90]—, puesto que su influencia sobre Federico en lo que a la contratación de nuevos miembros se refiere era enorme, ejerciendo (vía carta) desde París casi como el presidente en las sombras,[91] una actitud que desagradaba a algunos de los académicos.[92]

D'Alembert, que en la carta anterior corrige al rey intercambiando los roles entre la pareja Descartes-Newton y Bayle en base a su (más autorizado) criterio, recibirá en los años siguientes noticias de primera mano acerca de esa alta estima que los miembros de la Academia tenían de Lambert. De hecho en 1769 le pide a Lagrange —quién había sustituido a Euler como director de la clase de matemáticas tras su marcha en 1766 precisamente por consejo de D'Alembert— referencias sobre él:[93]

> A propósito de vuestra Academia, siempre me olvido de preguntarle lo que piensa de M. Lambert; lo que he leído de él hasta el momento no me parece de la mayor relevancia: se dice sin embargo que Euler lo tiene en gran estima.

Téngase en cuenta que en 1769 Lambert ya había publicado trabajos de gran calidad, entre ellos el que nos ocupa en esta tesis. Este hecho, acreditado por las opiniones altamente positivas de algunos de sus contemporáneos más ilustres —el caso de Euler es notable—, hace ver que esta falta de reconocimiento probablemente se basase en una falta de conocimiento acerca de su obra.[94] La respuesta de Lagrange —otro gigante del XVIII— en julio de ese mismo año, apuntala esta idea:[95]

> M. Lambert, sobre el que usted desea saber mi opinión, es sin lugar a dudas uno de los mejores sujetos de nuestra Academia; es muy trabajador y sostiene prácticamente solo nuestra Clase de Física. Domina el Análisis, pero su fuerte es la Física sobre la que ha proporcionado una obra estimada, titulada *Photometria*, es decir sobre la medida de la luz; hay sobre todo una excelente Memoria suya sobre el imán en el Volumen de 1766.

La alta estima que tenían de él sus colegas en la Academia era por lo tanto clara, aunque no solo era conocido y reconocido por sus conocimientos sino también por su peculiar,

[90] «Probablemente fue también bajo la recomendación de d'Alembert al rey que Johann Heinrich Lambert fue nominado».

[91] De hecho si no era presidente era porque no quería, puesto que después de la muerte de Maupertuis en 1759 el rey se lo había ofrecido y pedido por activa y por pasiva.

[92] Tal es el caso de Euler a quién le parecía inaceptable [Calinger 2016, p. 431].

[93] A fecha de 16 de junio de 1769 [Lalanne 1882, p. 135].

[94] Ha de tenerse en cuenta en cualquier caso, que gran parte de los trabajos de Lambert están escritos en alemán, lo que muy probablemente disminuyó su alcance y difusión.

[95] A fecha de 15 de julio de 1769 [Lalanne 1882, p. 141].

por así decir, comportamiento. Lagrange, al que Lambert tampoco dejó indiferente al principio, continua diciendo:

> Por lo demás, hay algo singular en su actitud y en su conversación que desagrada en un primer momento, y no me sorprende que al rey no le haya gustado, habiendo tenido yo mismo dificultades para adaptarme a sus maneras. Él estaba o por lo menos me pareció tan orgulloso de sí mismo, cuando llegué aquí, que tomé la decisión de no frecuentarlo, pero al mismo tiempo de no dejar pasar oportunidad alguna de hacerle de menos; esto lo ha vuelto bastante más tratable, y en la actualidad somos bastante buenos amigos. No recibe más que 500 escudos de la Academia, y, si usted tiene la ocasión de procurarle un aumento, le aseguro que haría una buena obra, ya que es ciertamente uno de los miembros a los que más le debe nuestra Academia.

Figure 3.11: La «Colonne Lambert». Dibujo del monumento levantado en honor a Lambert en 1828 enfrente de su casa natal y al abrigo de la iglesia de Saint-Etienne con motivo de los 100 años de su nacimiento. El medallón con el retrato de Lambert que aparece en el monumento fue construido por su sobrino Jean-Heinri Lambert (1763–1834), que se debió basar en el trabajo de Engelmann (ver Appendix A) pues al parecer no lo vio nunca en persona [Jaquel 1969, p. 302].

En su discurso de recepción, *Discurso sobre la física experimental natural* del 24 de enero de 1765, Lambert deja claro que su principal empresa es abordar la teoría del fuego y del calor que ya había tratado años atrás, de una manera más completa y sistemática en su *Pirometría*, «¡Ocupación vasta y complicada, como jamás la haya habido!».[96] Pero también lo dedica a defender su visión de la ciencia como un todo, explicando de qué manera están interconectadas las diferentes ramas del saber. Desde las conexiones entre la matemática y la física, tema de debate como ya se apuntó durante todo el siglo y que él equilibra en una síntesis entre empirismo y racionalismo, base de su metodología y filosofía; a la relación que existe entre la ciencia y la poesía o entre la física y la historia. En relación a este discurso, Thiébault cuenta una anécdota exquisita y que a pesar de ser larga sin duda merece un puesto en esta biografía, pues muestra claramente, como él mismo dice, «la simplicidad, ingenuidad y franqueza del carácter de M. Lambert»:[97]

> El nuevo académico estaba ahora empleado en componer su discurso inaugural, y determinó resolver en él una cuestión de importancia acerca de la reflexión de la luz. Aún tenía, sin embargo, a estos efectos algunos experimentos que verificar, para lo que necesitaba un espejo grande, mientras que su stock de accesorios ofrecía solo un pequeño espejo de bolsillo apenas suficientemente largo como para permitirle ajustar su peluquín con él. El mejor remedio que se le ocurrió fue entrar en la principal cafetería de Berlín, situada en el lado opuesto al castillo. Al entrar en una de las estancias de la primera planta, hizo una reverencia de la manera en la que acostumbraba, sin mirarlos, y moviendo su cabeza diagonalmente de un lado a otro a algunos oficiales y otras personas de la ciudad, [...] se dirigió hacia un espejo grande situado casualmente en la parte más luminosa de la sala; entonces desenvainó su espada, la apuntó como si lo hiciese contra un adversario, retrocedió, avanzó, en resumen, actuó como si se tratase de un enfrentamiento real, meditando al mismo tiempo profundamente sobre lo que veía y hacía. Realizó sus experimentos por espacio de media hora, sin la menor consciencia de que los espectadores, que ni lo conocían ni sabían qué pensar de la exhibición que habían presenciado, habían concluido que era un lunático, y estaban de hecho preparándose para sujetarlo y desarmarlo si fuese necesario. Cuando Lambert hubo acabado sus experimentos y sus reflexiones, guardó tranquilamente su espada en su funda, lanzó una mirada de indiferencia sobre aquellos que lo rodeaban, les hizo una reverencia de la misma forma que cuando entró, y volvió a casa para componer una memoria digna de la admiración del docto.

Los doce años que permaneció en la Academia fueron los mejores de su vida, aunque al principio —como ya debió quedar claro— su peculiar personalidad complicó las relaciones

[96] [Lambert 1765, p. 215]. Esta obra sólo aparecerá tras su muerte.
[97] Tanto esta cita como la que viene, en [Thiébault II 1806, p. 295].

con sus compañeros. Desde luego era una persona poco propensa al quedar bien, y algo que no se le puede achacar es que no dijese las cosas tal como las pensaba. [Thiébault II 1806, pp. 296 y 297] cuenta cómo en una ocasión le preguntó a quiénes consideraba los mejores geómetras vivos. Lambert coloca a Euler y D'Alembert en el primer puesto de su ranking y argumenta:

> no porque sus cualidades sean similares en todos los aspectos, sino porque cada uno tiene eminentes cualidades que compensan aquellas carentes en el otro. M. Euler tiene más simplicidad y prontitud, quizá incluso una mayor abundancia, que M. d'Alembert; M. d'Alembert tiene más sutileza, sagacidad y elegancia, que M. Euler. En profundidad de entendimiento y fertilidad de invención son iguales. Es imposible dar preferencia a uno o a otro.

Siguiendo con su ranking, Lambert dice:

> M. de la Grange es a día de hoy el segundo: digo a día de hoy, porque hay razones de sobra para creer que no permanecerá mucho tiempo inferior al primero. El tercero soy yo mismo. No procedo más allá en esta clasificación, porque no conozco a ningún otro geómetra que merezca ser nombrado.

Al parecer, un joven profesor de matemáticas que daba clase a los estudiantes de artillería, no solo discrepaba con él en este último detalle sino que se colocaba a sí mismo como tercero. Cuando se topó con Lambert y le hizo saber su propuesta, el suizo le respondió con una carcajada.

Es quizá por detalles como este, que Johann III Bernoulli, uno de sus mejores amigos, y de hecho uno de los que mejor lo conocían, escribió sobre él:[98]

> Lambert lanza sombras sobre sus grandes méritos con su inimaginable arrogancia. En parte hizo que perdiésemos a Euler,[99] y entre sus colegas solo se lleva bien

[98]A fecha de 11 de octubre de 1766. Citado por Wolf en [Sheynin 2010, p. 164].

[99]Sheynin abre también aquí una nota (en [Sheynin 2010, p. 173]) para intentar arrojar un poco de luz sobre esto. La idea que se puede extraer leyendo la literatura al respecto —sin pretender estar mejor informado que el propio Bernoulli— es que Lambert pudo ser solo una gota más en el vaso casi lleno de un Euler quemado. Por muy buen matemático que fuera, para el rey, Euler nunca estaría a la altura de un D'Alembert o un Voltaire, hombres con la clase y la conversación necesaria para adornar sus tertulias. Más aún, cuando Maupertuis casi al final de su vida empezó a pasar estancias largas fuera de Berlín, y también desde su muerte, Euler hacía las veces de presidente de la Academia pero sin ser nombrado como tal a pesar de las recomendaciones de D'Alembert, algo que perfectamente podría haber sentido como una falta de reconocimiento a su arduo, brillante y voluminoso trabajo. El rey debía desconfiar de las habilidades administrativas del suizo, y lo culpaba de los elevados gastos de la Academia durante la guerra. Cuando ordenó una comisión para investigar por qué los ingresos habían descendido tanto,

> conmigo [...] Su conversación en todas las ciencias es instructiva. Si no le preguntas más que por sus propias ideas, y no lo interrumpes o lo contradices, hablará durante tres horas como si leyese de un libro.

En cualquier caso, su talento estaba fuera de toda duda, y al cabo de los años ellos mismos acabarían por convencerse de que su comportamiento se debía más a la excesiva ingenuidad y a una deficiencia en su capacidad de relacionarse socialmente con normalidad, que a un mal temperamento. El mismo Thiébault, que coincide con lo dicho por Johann III Bernoulli acerca de lo que debía ser algo bastante característico de su personalidad, da muestras de esa admiración:[100]

> Cuando lo encontraba en compañía, o en mis paseos, mi primera preocupación era proponerle algunas cuestiones que me interesaban; ya que una vez entrado en discusión, sobre cualquier tema que pudiera ser, ya no era posible ni pararlo ni interrumpirlo. Nunca fallaba en tener una idea sumamente clara y completa de su plan desde el primer momento, y adherirse a él tan de cerca, que desviar su atención era impracticable. El orden de sus ideas era siempre regular y perfecto; si se le proponían objeciones, paraba no más de lo que fuese necesario para oírlas hasta el final; sin embargo, nunca las respondía, sino que reanudaba el hilo de su argumento como si no hubiese sido interrumpido, porque las objeciones que había oído, entendía, debían ocurrir en un momento diferente y en un orden más adecuado, y no podría sino ser desventajoso para la discusión desviarse del método que había establecido al principio. Lo puse a prueba un centenar de veces a este respecto, y lo encontré siempre igual. Él era verdaderamente una máquina de producir disertaciones, pero una máquina perfecta.

Incluso acabó por ganarse la admiración del rey, quien le subiría el salario y lo pondría al frente de la comisión económica en 1770, a la que ya pertenecía. Al parecer la petición que Lagrange le hace a D'Alembert de que interceda por él surte su efecto, y en 1769 comenta que en su última carta al rey «también he dicho unas palabras sobre M. Lambert, de acuerdo con lo bien que me ha hablado usted de él»,[101] palabras que le dirige al rey ese mismo día:[102]

---

comisión dirigida por el propio Euler y en la que Lambert figuraba entre sus miembros, las tensiones entre ambos empeoraron. Lo que parece claro entonces, es que Lambert pudo ser en tal caso una gota más, aunque —puntualiza Sheynin en su nota— sin ninguna intención de serlo. [Calinger 2016, p. 442] despacha el asunto diciendo que la idea de que Lambert fuese el culpable de la marcha de Euler es equivocada.

[100] [Thiébault II 1806, pp. 295, 296].

[101] A fecha de 7 de agosto de 1769 [Lalanne 1882, p. 147].

[102] 7 de agosto de 1769 [Lalanne 1882, p. 147 nota 1].

> Las *Memorias* de vuestra Academia de las Ciencias son una excelente Obra y demuestran que es una de las Sociedades de eruditos mejor compuestas de Europa. No hablo solamente de M. de la Grange, cuyo mérito es bien conocido por Vuestra Majestad; hablo, entre otros, de M. Lambert y Beguelin, que contribuyen con excelentes Memorias a esta Recopilación y que me parecen dignos de las bondades con las que Vuestra Majestad siempre ha honrado el mérito.

La respuesta de Federico II da signos de ese cambio de percepción:[103]

> Los tres sujetos sobre los que usted me habla, son sin lugar a dudas, los mejores que tenemos en este cuerpo.

Con un frenético ritmo de estudio, Lambert se dedicó por completo a sus investigaciones llegando a realizar más de 150 trabajos para su publicación en las más diversas áreas. De hecho, aunque se centró sobre todo en temas científicos, siguió escribiendo sobre filosofía, y fue el único miembro de la historia de la Academia que realizó memorias para sus cuatro secciones. Prueba de esta versatilidad —y nuevamente del cambio de opinión y estima del rey hacia Lambert— es que cuando D'Alembert le plantea una tema para ser tratado en la clase de filosofía especulativa, el rey piensa inmediatamente en él:[104]

> Me habla de proponer un tema a la academia. ¡Qué lástima! Recientemente hemos perdido al pobre Lambert, uno de nuestros mejores miembros. No sé quién podría tratar el tema filosóficamente.

El 1775 un catarro que había descuidado de forma imprudente se complicó durante el invierno. A pesar de los consejos de sus allegados se negó a tratarlo de forma seria con un médico hasta una etapa muy tardía, aplicando por contra sus propios remedios empeorando así la situación. Poco preocupado por su enfermedad, sus compañeros lo vieron por última vez en una sesión de la Academia más muerto que vivo. El genio polímata fallecía finalmente el 25 de septiembre de 1777 en Berlín a la temprana edad de 49 años, dejando tras de sí un amplio legado científico. Sirvan como conclusión, las tristes palabras que le dedica un abatido Lagrange en una carta a D'Alembert:[105]

[103] A fecha de 14 de septiembre de 1769 [Lalanne 1882, p. 147 nota 1].

[104] A fecha de 5 de octubre de 1777 [Holcroft Vol. 12 1789, p. 107]. El tema que le propone para discutir es el de «si es útil engañar a la gente», del que dice:

> No hemos osado nunca proponer esta gran pregunta a la Academia Francesa, porque las disertaciones, enviadas para el premio, deben, para infortunio de la razón, someterse a censura por dos doctores de la Sorbona; y porque sería imposible, con gente como esta, escribir cualquier cosa racional. Pero su majestad no tiene ni prejuicios ni doctores de la Sorbona. (a fecha de 22 de septiembre de 1777 [Holcroft Vol. 12 1789, p. 104])

[105] A fecha de 3 de octubre de 1777 [Lalanne 1882, pp. 333 y 334].

Estoy muy triste por la muerte de mi colega M. Lambert; es una pérdida irreparable para nuestra Academia y para Alemania en general; poseía eminentemente el extraño talento de aplicar el cálculo a los experimentos y a las observaciones, y de extraer, por así decir, todo lo que podía haber de regular. Su *Photométrie*, Obra poco conocida en Francia y aún en Alemania, es un verdadero modelo de este tipo de investigaciones; estaba también versado en el cálculo, y no ignoraba ninguna de las diferentes ramas del Análisis y de la Mecánica. Los tres Volúmenes de Memorias que ha producido en alemán, hace algunos años, contienen excelentes cosas, y sería deseable que alguien quisiera traducirlas. Hay en todas sus investigaciones una gran nitidez, y poseía sobre todo el arte de lograr los resultados más simples, incluso en los temas que parecían más complicados. Se dejó morir poco a poco de tuberculosis, no habiendo querido jamás, excepto en los últimos 15 días, ni tomar ningún remedio ni tampoco consultar a ningún médico. Él había recibido de la naturaleza un carácter y un temperamento admirables; siempre satisfecho consigo mismo, no mostró jamás la mínima envidia ni celos. Tenía una forma de pensar y de actuar muy ingenua, lo que con frecuencia ponía contra él a las personas que no le conocían particularmente; pero, cuando se había logrado conocerlo a fondo, uno no podía evitar concebir para él toda la estima y amistad que merecía; esto es lo me ocurrió a mi. Si envidio su vida, envidio igualmente su muerte, que ha sido de las más dulces, y de la que ni siquiera sospechó.

Chapter 4

Comentarios introductorios y esquema de la *Mémoire*

Por lo tanto la circunferencia del círculo no es al diámetro como un número entero a un número entero.

- J. H. Lambert, *Mémoire.*

4.1 Algunos comentarios sobre la *Mémoire*

El interés y la importancia histórica de este trabajo de Lambert resulta evidente desde el momento en que uno da cuenta de los grandes temas que aborda el suizo.[1] Sin duda la fama se la lleva la primera parte del artículo, la que dedica a la irracionalidad de π, en la que haciendo gala de una gran destreza con herramientas matemáticas tan recientes como las fracciones continuas, y de un rigor poco propio para la época, zanja un tema que había sido una preocupación para muchos durante siglos. El tema de la naturaleza de esta constante, había tomado un nuevo impulso desde los esfuerzos hercúleos de Ludolph van Ceulen a finales del XVI, con el uso de las nuevas herramientas analíticas y su aplicación a los problemas de cuadratura. Autores como Gregory, Huygens, Mengoli, Leibniz o Wallis se enfrentaron a estas cuestiones, y en particular, a la más concreta de la cuadratura del círculo en la que π jugaba un papel central. Lambert coge el testigo de esta tradición analítica —enriquecida por Euler con su primer estudio sistemático de las fracciones continuas— y zanja la cuestión de su irracionalidad.

Es de recibo en cualquier caso matizar esta última afirmación, puesto que en torno a

[1]Pretendo únicamente hacer algunos comentarios sin entrar en detalles, puesto que todas las explicaciones relevantes se pueden ver en la parte dedicada a la traducción anotada.

la demostración de Lambert han surgido dudas. Tal es el caso de Ferdinand Rudio o el de Felix Klein (que sigue a aquél), y que se refieren a la demostración de Lambert como incompleta,[2] en contraposción a autores como Alfred Pringsheim o J. W. L. Glaisher. Pringsheim dice que el trabajo de Lambert es «sumamente ingenioso y en lo esencial sin defectos»,[3] mientras que Glaisher en su artículo *«On Lambert's Proof of the Irrationality of π, and on the Irrationality of certain other Quantities»*, compara su demostración con la de Legendre —demostración que vino a completar los vacíos de la de Lambert según algunas interpretaciones— en los siguientes términos:[4]

> Aunque el método de Legendre es tan riguroso como aquel en el que se basa, aún así, en lo general, la demostración de Lambert parece ofrecer una prueba más notable y convincente de la verdad de la proposición.

Y añade después de realizar su exposición:

> Que la demostración de Lambert es perfectamente rigurosa y sitúa el hecho de la irracionalidad de π más allá de toda duda, es evidente a todo aquel que la examine cuidadosamente; y considerando la poca atención que se la había prestado a las fracciones continuas antes de ser escrita, este no puede sino ser considerado como un trabajo muy admirable.

Como se verá más adelante, la interpretación que se da aquí muestra básicamente un único punto conflictivo en la demostración; un paso no obvio y necesitado de prueba, pero que no merecería ser la fuente de las críticas hacia la demostración teniendo en cuenta el año en el que se hace (1761/1768).

Es posible, aunque no puede considerarse seguro, que a Lambert le hubiese ocurrido lo mismo que a Euler en relación a su demostración de la irracionalidad de e. Algunos historiadores tomaban como su «demostración» la afirmación incluida en el último capítulo del tomo primero de su *Introductio*. Allí,[5] Euler presenta una fracción continua simple infinita para $\frac{e-1}{2}$, lo cual asegura la irracionalidad de dicha fracción y por ende de e, pero no proporciona justificación alguna, limitándose a comentar: «Este resultado puede confirmarse por medio del calculo infinitesimal». Lo que ocurre es que en realidad, Euler ya había publicado una demostración rigurosa en un trabajo mucho menos conocido.[6]

[2] Ver [Baltus 2003].
[3] [Cantor IV 1908, p. 447] (traducción de José Ferreirós).
[4] [Glaisher 1871, p. 12].
[5] [Euler I 1748, p. 325].
[6] Ver [Petrie 2009, p. 105] —quien remite a un estudio hecho por Ed Sandifer— para una explicación más completa. El trabajo menos conocido de Euler al que me refiero es [Euler 1744].

Lambert podría estar en la misma situación: por una lado publica un artículo cuyo título indica claramente el tema que va a tratar, y cuyo contenido se dirige a un público más general —es la parte V de su [Lambert 1766/1770], con título[7] *Conocimientos previos para los buscadores de la cuadratura y la rectificación del círculo*—, por lo tanto un trabajo accesible en el que hace algunas afirmaciones sobre la naturaleza de π; y por otro lado tenemos un trabajo más académico sin una referencia directa en su título a la cuadratura del círculo ni a π, y dirigida a un público más reducido —su [Lambert 1761/1768]— y por lo tanto un trabajo mucho menos conocido, pero que al contrario sí incluye una prueba rigurosa de la irracionalidad de π.

Un ejemplo de esta interpretación podría ser el caso de A. L. Crelle, quien en su traducción del trabajo de Legendre (3ª edición alemana, 1837) comenta que la demostración que da Lambert de la irracionalidad de π es menos rigurosa que la de este, y hace referencia a [Lambert 1766/1770].[8] En la literatura más reciente, un ejemplo lo tenemos en [Beckmann 1971, pp. 170, 171], donde se dice en relación a la ya mencionada parte V de [Lambert 1766/1770] que:

> Lambert investigó ciertas fracciones continuas y demostró el siguiente teorema:
>
> *Si x es un número racional no nulo, entonces* $\tan x$ *no puede ser racional*

añadiendo que «Legendre, en sus *Elementes de Géometrie* (1794) demostró la irracionalidad de π de una manera más rigurosa».[9] Exactamente en la misma línea se encuentra [Ebbinghaus et al. 1988, p. 149], donde se vuelve a tomar como referencia [Lambert 1766/1770], y se añade que la demostración de Lambert ahí incluida «no es completamente rigurosa porque le falta un lema sobre la irracionalidad de ciertas fracciones continuas infinitas», lema que sería probado por Legendre.

Quizá, deberíamos decir, en la propagación de esta visión Lambert tenga su parte de culpa, puesto que en [Lambert 1766/1770, p. 167] se expresa en los siguientes términos:

> Puesto que, por lo tanto, la tangente de todo arco racional es irracional, entonces, a la inversa, el arco de toda tangente racional es irracional. Pues, si se asume que el arco es racional, entonces, de manera contraria a la presuposición, la tangente sería irracional **conforme a lo demostrado anteriormente**.[10]

[7] *Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rektifikation des Cirkuls suchen.*

[8] Agradezco los comentarios de José Ferreirós al respecto.

[9] [Beckmann 1971, pp. 170, 171].

[10] Traducción de Elías Fuentes Guillén (las negritas son mías).

De todos modos esta interpretación puede dar cuenta, parcialmente, de este tipo de declaraciones, aunque no ha de tomarse como una explicación definitiva. Por ejemplo, ya se ha mencionado el caso de Rudio, quien en [Rudio 1892] parece hacer referencia explícita a la *Mémoire* de Lambert cuando habla de que a su demostración le falta un punto clave, y que este sería aportado por Legendre en su ya citada nota, aunque desafortunadamente no indica el lugar concreto de la prueba en el que considera que está el problema. En cualquier caso, Pringsheim en su *Ueber die ersten Beweise der Irrationalität von e und* π, comenta, haciendo referencia entre otros a Rudio y a Klein, que bajo su punto de vista la interpretación de que la prueba de Legendre vino a completar la de Lambert no se sostiene, y que Lambert demostró este (y otros hechos[11]) «*con un rigor que es realmente excepcional* para su tiempo», apuntando nuevamente a la demostración de convergencia que sí incluye Lambert pero no Legendre.

La impresión general es que los matemáticos de esta época estaban fuertemente orientados hacia problemas y métodos de cálculo, fórmulas generales y aproximaciones numéricas, mientras que la orientación que toma Lambert en 1761/1768 es de una tendencia claramente más teórica y lógica.[12] Estamos pues ante un resultado que parece pionero, avanzado para su época, y que podría ser encuadrado más fácilmente dentro de la orientación general de las matemáticas desde digamos la primera mitad del siglo XIX, lo que parece explicar que hubiese pasado desapercibido en su época. A este respecto resultan muy ilustrativas las palabras del historiador de las matemáticas A. von Braunmühl recogidas en [Cantor IV 1908, 447–448]:[13]

> Los contemporáneos de Lambert sin embargo parecen o haber pasado por alto su trabajo, o haber ignorado el significado del paso que dio al dilucidar la naturaleza de π, por medio de su prueba exacta [...] La naturaleza del procedimiento de la demostración de Lambert al completo, permaneció fuera de la esfera de la actividad de sus contemporáneos, dirigida casi exclusivamente a la expansión formal de las matemáticas, con lo que resulta comprensible que pudiese ser ignorado.

Dejando ya a un lado la irracionalidad de π, de especial interés es que Lambert hace uno de los primeros usos modernos de las funciones hiperbólicas, aunque la terminología que usa él no es la moderna (él habla de «cantidades trascendentes logarítmicas»). Luego de hacer notar el parecido entre la representación en serie de las funciones trigonométricas circulares y las hiperbólicas, busca la razón detrás de dicha similitud, razón que encuentra

[11] Se refiere a la irracionalidad de e^x con x un racional no nulo.

[12] Enfaticemos que Lambert, siempre difícil de categorizar, fue también un lógico de renombre, un metafísico que trabajó en filosofía teórica, es decir, un hombre con claras tendencias especulativas.

[13] Agradezco a José Ferreirós la traducción.

en el hecho de que mientras que las primeras parametrizan la circunferencia, las segundas parametrizan la hipérbola.

Por último y casi al final del trabajo, Lambert hace la primera distinción moderna entre irracionales algebraicos y trascendentes. A lo largo del artículo se puede ver cómo el significado moderno del término «trascendente» va aflorando a medida que uno se acerca al final del mismo, pasando de representar cantidades no expresables a través de los medios clásicos —combinaciones finitas de operaciones algebraicas usuales (suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces)— a cantidades que no son raíces de ecuaciones algebraicas. En cualquier caso y como se detalla en la traducción anotada, este uso no se hizo definitivo hasta que nuevos resultados en el campo del álgebra y la teoría de números —el teorema de Ruffini-Abel y el teorema de Liouville— motivaron el cambio del viejo marco teórico («ser expresable») al nuevo («ser raiz»). La parte final del trabajo culmina concretamente y de manera notable, con la conjetura de la trascendencia de π y la imposibilidad de cuadrar el círculo.

En general, la *Mémoire* no es un trabajo, digamos, autocontenido, en el sentido de que permita una lectura cómoda y sencilla. Baste para dejar clara esta idea lo que dice Legendre en la Nota VI de sus *Elementos de Geometría* —titulada *Donde se demuestra que la razón de la circunferencia al diámetro y su cuadrado son números irracionales*, y en la que da una nueva demostración mucho más breve y sencilla de este hecho— sobre (solo) la parte dedicada a la demostración de irracionalidad de π:

> Ya conocemos una demostración de esta proposición que ha sido dada por Lambert en las Memorias de Berlín, año 1761; pero, como esta demostración es larga y difícil de seguir, hemos tratado de abreviarla y simplificarla.[14]

Es por eso que es útil e incluso necesaria una guía para aquellos que quieran leer y comprender este importante trabajo, sin caer en la tentación de abandonar e ir directamente a demostraciones más sencillas de irracionalidad como la de Legendre o la más moderna de Ivan Niven; ni que decir para los que se adentren en la lectura de todo el artículo. Un resumen de lo que uno se podría encontrar —y de hecho lo que el autor de estas líneas se encontró— en la búsqueda de dicha guía sería el siguiente.

[14] [Legendre I 1794, p. 296]. En la 2ª edición la demostración se incluye en la Nota V y a partir de la 4ª (la 3ª edición no la he podido consultar) en la Nota IV. El comentario a Lambert a partir de la 4ª edición (repito que la 3ª edición no la he podido consultar) se reduce a una breve nota a pie de página:

> Esta proposición ha sido demostrada por primera vez por Lambert, en las Memorias de Berlín, año 1761.

Para empezar, no hay ninguna traducción del trabajo completa ni al inglés ni al castellano, ya sea anotada o sin anotar, y tampoco hay ninguna traducción completa de la demostración de irracionalidad de π, ya sea anotada o sin anotar; esta es la primera. Los trabajos a los que se remite constantemente son comentarios o traducciones de ciertas partes de la *Mémoire*, así que la búsqueda en un primer momento puede resultar descorazonadora. Lo que sí hay es una anotación en francés del trabajo completo en su lengua original; se trata de [Speiser 1946–1948]. Este trabajo de Andreas Speiser, quien editó la obra matemática de Lambert, es el trabajo clásico al que se suele remitir en última instancia —por ejemplo [Serfati 1992, p. 75]— pero las 10 notas a pie de página con las que acompaña la edición de la *Mémoire* distan de solucionar todos los obstáculos a los que se enfrentaría uno en su lectura. Se ha decidido incluir también las anotaciones de Speiser (véase Appendix B) por lo clásico del trabajo, así que en cualquier caso el lector podrá juzgar por sí mismo.[15] Lo que sí es indudable es la meticulosidad de su análisis, en tanto que corrige todos y cada uno de los errores o erratas de Lambert, aún cuando alguno de ellos no es fácil de localizar. Algunas veces hace la corrección en una nota a pie de página, y otras veces lo hace directamente en el cuerpo principal del texto, incluyendo el original a pie de página; hay ocasiones en las que corrige el texto sin hacer mención de ello.

Tratando de buscar más detalles,[16] uno se encontraría comentarios sobre todo en lo que a la demostración de irracionalidad de π se refiere, como por ejemplo [Struik 1969, pp. 369–374] y [Berggren 1997, pp. 369–374] pero contienen exactamente lo mismo (de hecho el último reedita lo que incluye el primero): únicamente los puntos 37-51 de dicho trabajo y sin anotaciones. Faltan los 37 primeros puntos y los puntos del 51 al 91 y no son de poco interés como hemos comentado ya brevemente.

Una parada obligada sería [Serfati 1992, pp. 62–83] no tanto para el que quiera detalles técnicos como para el que quiera un acercamiento más global al trabajo, concretando en los puntos en los que Lambert toca temas de irracionalidad y trascendencia; en su trabajo más reciente [Serfati 2018, pp. 179–184] uno encuentra básicamente lo mismo. Para detalles técnicos, en este caso referente únicamente a su demostración de irracionalidad,

[15] Dado que, como se verá, en ocasiones se juntan las anotaciones de Speiser con las propias de esta versión, téngase en cuenta que las del alemán tienen todas la forma 1) o 2), y las de la versión actual tienen la numeración usual. De esta forma no habrá confusión alguna.

[16] He de decir que este resumen no muestra mi andadura en orden cronológico, puesto que hay, como sabrá el lector, fuentes más rápidas y fáciles de consultar que otras. Por ejemplo el trabajo antes citado de Adreas Speiser fue el último que he podido analizar, mucho después de haber preparado casi por completo la traducción con las anotaciones.

es clave [Baltus 2003], quien aborda en una de las partes del artículo el principal «pero» que se le pone a la demostración de Lambert.

De camino hacia lo más reciente, uno vería como Martin Mattmüller y Franz Lemmermeyer, en su edición de la correspondencia entre Euler y Goldbach, ponen como referencia un artículo de Bruce J. Petrie [Petrie 2009] para «una exposición moderna de la demostración de Lambert».[17] Ciertamente este trabajo contiene una explicación más detallada —basada en parte, por cierto, en la dada en [Struik 1969]— pero para el resto de la demostración (los puntos 1–37) Petrie remite simplemente a [Chrystal II 1906, pp. 517–523], que no la sigue literalmente sino que hace un acercamiento moderno y muy técnico, y a [Brezinski 1991, 109–111], que en las tres páginas que le dedica solo hace algunos comentarios. De hecho Brezinski remite a [Struik 1969] para una traducción en inglés (repito que la traducción es solo parcial y sin anotaciones).

Un poco fuera de lo «más típico» y en lo que se refiere a su tratamiento de las funciones hiperbólicas contenido en la *Mémoire* (Lambert es pionero es esto), sí que hay un trabajo —[Barnett 2004]— que analiza esta parte, pero no es traducción y hay cosas que la autora se deja y que Lambert sí trabaja (cosas que él usa al final del trabajo como el concepto de «tangente prima»). También en [Juhel 2009] se puede ver un análisis útil tanto de esta cuestión como de las partes dedicadas a la irracionalidad de π y a la conjetura que lanza Lambert sobre su trascendencia.

Aunque este breve resumen no cubre todo el material sobre el tema, lo dicho servirá para hacerse una idea de las lagunas que rodean a este importante trabajo y de la idoneidad de una tal publicación en forma de traducción anotada del artículo *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulares et logarithmiques* (1761/1768).

Por cierto que esta doble datación quizá requiera una explicación. Los años 1761/1768 hacen referencia probablemente al período de entrega de los diferentes trabajos incluidos en ese ejemplar de las Memorias de la Academia de Berlín. En el caso de la *Mémoire* de Lambert, él mismo dice en [Lambert 1766/1770] que lo redactó unos meses después de haber redactado este último, algo que hace en 1766. Karl Bopp indica que la *Mémoire* se escribe en 1767 y se publica, como indica el propio volumen de la Academia, en 1768. De hecho, Lambert hace una anotación en su *Monatsbuch* con fecha Julio de 1767 que empieza así: «Sur une proprieté remarquable des quantités transcendentes circulaires et Logarithmiques.

[17] [Lemmermeyer et al. I 2015, p. 55 nota 65].

Diss[ertatio] acad[emica]». A mayores, los estatutos de la Academia habían establecido la celebración de sesiones plenarias semanales cada Jueves. A ellas debían asistir los miembros ordinarios, y se daba cuenta de las actividades realizadas procediéndose a la lectura de los trabajos pendientes de publicación. En la sesión plenaria del Jueves 17 de Septiembre de 1767, queda registrada la lectura de la *Mémoire* por parte de Lambert[18] (ver Figura 4.1).[19]

4.2 Resumen esquemático

Lo que viene a continuación es un breve esquema de la *Mémoire*. La intención es dar simplemente una idea general del trabajo; los detalles se muestran en el capítulo siguiente.

- **§. 1. – §. 3. (pp. 265–267)**
  - ∗ Breve introducción histórica sobre la problemática que rodea a π.
  - ∗ Explicación intuitiva por la que uno debería esperar la irracionalidad de π.
  - ∗ Qué se pretende demostrar:

$$[v \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \tan v \not\in \mathbb{Q}] \tag{4.1}$$

    y cómo hacerlo: usando el Algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor.

- **§. 4. – §. 15. (pp. 267–275)**
  - ∗ Expresión mediante fracción continua de la tangente.
  - ∗ Demostración por inducción de dicha expresión.
  - ∗ Casos particulares en los que (4.1) puede ser demostrado.

- **§. 16. – §. 30. (pp. 276–286)**

[18] La referencia a la lectura de este trabajo aparece también en la esquina inferior izquierda de la primera página del mismo: «Leído en 1767».

[19] En relación a lo expuesto, [Rudio 1892] advierte de que, aunque lo repite mucha gente, el dato 1761 como fecha es erróneo. Las partes relevantes del Monatsbuch a este respecto son [Bokhove et al. 2020, pp. 112 (nota 527), 164 (nota 733), 169 (nota 763), 172 (nota 773)]. Me gustaría aclarar que he podido acceder a este trabajo gracias a la amabilidad de Armin Emmel, que me envió de forma totalmente desinteresada las partes relacionadas con mi investigación. Así mismo, agradezco a José Ferreirós la traducción de dichas partes.

  * Búsqueda y demostración por inducción, del término general por recurrencia de la sucesión de las fracciones convergentes $\{\frac{p_n}{q_n}\}$ de la fracción continua de $\tan v$.
  * Búsqueda y demostración por inducción —en base a este término general por recurrencia— del término general de esta misma sucesión dependiente únicamente de n.
  * Demostración de que dicha sucesión efectivamente converge a $\tan v$.

- **§. 31. – §. 51. (pp. 286–297)**
  * Expresión en serie de la tangente a partir de las convergentes.
  * Demostración por reducción al absurdo de (4.1).
  * Como consecuencia inmediata, $\pi \not\in \mathbb{Q}$ ya que $\tan \frac{\pi}{4} = 0 \in \mathbb{Q}$.

- **§. 52. – §. 71 (pp. 297–304)**
  * Resultados que motivan la introducción del concepto de «tangente prima».
  * El caso de $\tan 45^{\text{o}}$.
  * Resultados sobre tangentes primas.
  * La similitud con el coseno (de manera completamente análoga al de la tangente se tendría el concepto de coseno primo con resultados similares) y la diferencia con el seno (en este caso no).

- **§. 72. – §. 88 (pp. 304–320)**
  * Búsqueda de las fracciones que aproximen tanto por defecto como por exceso a la fracción continua. Expresión en fracción continua de la cotangente.
  * Similitud entre las series infinitas de las «cantidades trascendentes circulares» (seno y coseno) y las «cantidades trascendentes logarítmicas» (seno y coseno hiperbólico). Expresión en fracción continua de algunas expresiones racionales de e^x. Nuevo resultado de irracionalidad:

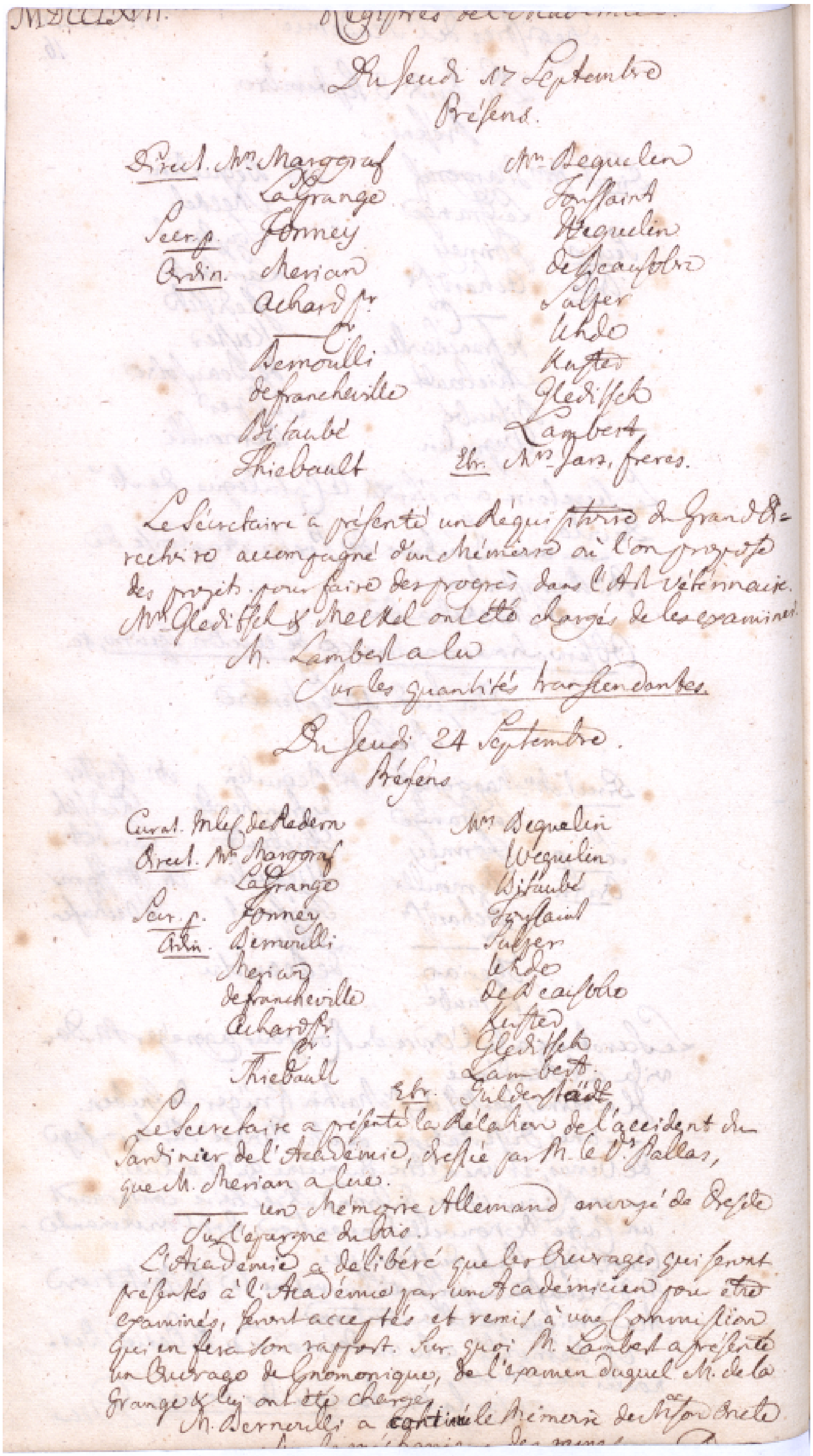
$$x \in \mathbb{Q} \Longrightarrow e^x \not\in \mathbb{Q}$$

  * Conexión entre las «cantidades trascendentes logarítmicas» y la hipérbola equilátera, en la misma forma que esa conexión se da entre las «cantidades trascendentes circulares» y la circunferencia.
  * Nuevos resultados de irracionalidad: tangente hiperbólica y logaritmos naturales.

- Lo que parece una afirmación de la trascendencia —ya no en el sentido clásico del término, sino en su sentido moderno— del número e. Resultados de irracionalidad para logaritmos hiperbólicos.
- Sobre cómo el concepto de «tangente prima» se aplica igualmente para el caso hiperbólico.
- Un último vistazo a la analogía entre las «cantidades trascendentes circulares» y las «cantidades trascendentes logarítmicas».

• **§. 89. – §. 91 (pp. 320–322)**

- Primera diferenciación moderna entre irracionales en términos de algebraicos y trascendentes.
- Conjetura de la trascendencia de las «cantidades trascendentes logarítmicas» y las «cantidades trascendentes circulares».
- Conjetura de la trascendencia de π y por ende de la imposibilidad de cuadrar el círculo.


Du Jeudi 17 Septembre

Présens.

Mr Marggraf — Mr Beguelin

La Grange — Toussaint

Formey — Wegueli

Merian — de Castillon

Achard fr. — Sulzer

Bernoulli — Kuster

de Francheville — Gleditsch

Bitaubé — Lambert

Thiebault — Etr. Mrs Jars, freres.

M. Lambert a lu

Sur les quantités transcendantes.

Du Jeudi 24 Septembre.

Présens.

Figure 4.1: Acta de las sesiones plenarias del Jueves 17 y 24 de Septiembre de 1767 celebradas en la Academia de Ciencias de Berlín. El acta del día 17 la conforma la primera parte del documento, y en en ella se puede leer justo antes del comienzo del acta del día 24: «M. Lambert ha leído Sobre las cantidades trascendentes» (en el *Archivo de la Academia de Ciencias de Berlín-Brandenburgo*).

Chapter 5

Una traducción anotada de la *Mémoire*

MEMORIA

SOBRE

ALGUNAS PROPIEDADES NOTABLES DE LAS
CANTIDADES TRASCENDENTES CIRCULARES
Y LOGARÍTMICAS[1]

POR M. LAMBERT.[2]

§. I.

Demostrar que el diámetro del círculo no es a la circunferencia como un número entero a un número entero, es algo, que apenas sorprenderá a los geómetras. Conocemos los números de *Ludolph*, las razones encontradas por *Arquímedes*, por *Metius* etc. así como un gran número de series infinitas, todas referidas a la cuadratura del círculo. Y si la suma de estas series es una cantidad racional, debemos concluir como es natural, que será o un número entero, o una fracción muy simple. Ya que, si fuera una fracción muy compuesta, ¿qué razón habría?, ¿por qué esta y no otra cualquiera?[3] Es así, por ejemplo,

[1] Trascendente en el sentido Euleriano-Leibniziano, aunque será precisamente en este trabajo donde adquiera su significado moderno (§. 89. - §. 91.). Por otro lado, con cantidades logarítmicas se refiere a las hiperbólicas dada la conexión entre la hipérbola y el logaritmo (más adelante se incide sobre esto).

[2] «Leído en 1767.
Mém. de l'*Acad.* Tom. XVII».

[3] Basándose en esta premisa y en el hecho de que algunas de las aproximaciones encontradas para el área del círculo lejos de ser sencillas son cada vez más complejas ($\frac{11}{14}$ y $\frac{355}{452}$), Lambert concluye al final de este punto que dicho área tiene que ser un número irracional puesto que, ¿qué razón habría para que siendo racional fuese una fracción muy compuesta? Aunque parece claro que lo que pretende es llamar

que la suma de la serie

$$\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{7\cdot 9}+\&c.$$

es igual a la unidad,[4] que de todas las cantidades racionales es la más simple. Mas,

la atención sobre cierto hecho que debería llevar a uno a confiar en la irracionalidad, lo cierto es que esta «prueba por simplicidad» (tomo el término de [Serfati 1992, p. 64]) parece demasiado vaga como para ser tomada en serio. Pero lo más sorprendente es que en el punto §. 2, si bien comenta que un problema como este, relacionado con la cuadratura del círculo, no se puede dejar en manos de un razonamiento de estas características, «hay sin embargo casos en los que no se pide más». La pregunta obligada es: ¿en qué casos un razonamiento como este podría ser suficiente? Parece lo opuesto a lo que se le pide a una justificación. Lo que está claro es que algo así debe ser reflejo de un modo de pensar más o menos generalizado y no un caso aislado. De hecho este tipo de pruebas por simplicidad se pueden entrever en otros autores de la época. Por ejemplo en [Bullynck 2009, p. 147] se dice que Wolfram usó falsamente el siguiente criterio de trascendencia:

$$\alpha \quad \text{algebraico} \iff \exists n\in\mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad \alpha^n\in\mathbb{Q}$$

Esto en realidad podría ser solo una nueva aplicación de este principio de simplicidad: si $\alpha^n \not\in \mathbb{Q}$ para ningún $n\in\mathbb{N}$, estamos diciendo que α no es raiz de ninguna $x^n+q=0$ (es decir que tiene todas las papeletas para ser trascendente); si no es raiz de este tipo de ecuaciones, usando dicho principio, uno podría concluir que no lo es de ninguna. [Euler 1785, p. 8] usa de manera muy clara un principio muy similar al que usa Lambert, cuando después de demostrar que $\pi\neq a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ concluye que π no puede ser expresado mediante radicales con el siguiente argumento: «No llevaré estas operaciones más allá, ya que si se diese una relación exacta [en términos de radicales], sin duda no sería tan complicada». Más aún, hay ejemplos en esa misma época que sonarían incluso más extraños, en los que se establecen resultados con la ayuda de ciertos razonamientos no matemáticos. El caso de Leibniz (ver [Español et al. 2008, pp. 185 y 186]), alguien que por cierto influyó en Lambert, como mínimo a través de Wolff, es claro cuando en una carta a este último defiende el valor $\frac{1}{2}$ para la suma $1-1+1-1+1-1+\cdots$ ya que si bien truncando esa suma en un número par de sumandos daría 0 y en número impar daría 1, al continuar la suma hasta el infinito la diferencia entre par e impar se difumina, apareciendo dichos valores con el mismo promedio, con lo que dicha suma debería ser $\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$, razonamiento que defiende ya que:

> Aunque este género de argumentación pueda verse como más metafísico que matemático, es sin embargo firme: y, por otra parte, el uso de las reglas de la verdadera metafísica (que va más allá de la nomenclatura de los términos usados) en Matemática, en Análisis, en la misma Geometría, es más frecuente de lo que la gente cree.

Razonamiento también adoptado por varios de los Bernoulli y criticado por Laplace tan tarde como en 1812, es decir, conocido y discutido [Español et al. 2008, pp. 186 y 187], [Klein 1983, pp. 307, 308]. La sorpresa que uno se puede llevar al leer cosas como estas, nos recuerdan mejor que nada los casi 300 años que nos separan.

[4]Dado que:

$$\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{7\cdot 9}+\cdots=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots=1$$

omitiendo alternativamente los términos $2, 4, 6, 8$ &c., la suma de los otros

$$\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{9\cdot 11}+\frac{2}{13\cdot 15}+\&\text{c.}$$

da el área del círculo,[5] cuando el diámetro es $= 1$. Parece entonces que, si esta suma fuese racional, debería igualmente poder ser expresada por una fracción muy simple, tal como sería $\frac{3}{4}$ o $\frac{4}{5}$ &c. En efecto, siendo el diámetro $= 1$, el radio $= \frac{1}{2}$, el cuadrado del radio $= \frac{1}{4}$, es claro que estas expresiones siendo también simples, no suponen obstáculo.[6] Y como se trata de todo el círculo, que hace una especie de unidad, & no de cualquier Sector, que de su naturaleza demandaría unas fracciones muy grandes,[7] es claro, que tampoco a este respecto debemos esperar una fracción muy compuesta. Pero como, tras la fracción $\frac{11}{14}$ encontrada por *Arquímedes*, que no da sino una aproximación, pasamos a la de *Metius*, $\frac{355}{452}$, que tampoco es exacta, & donde los números son considerablemente más grandes, debemos concluir, que la suma de esta serie, bien lejos de ser igual a una fracción simple, es una cantidad irracional.

§. 2. Por muy vago que sea este razonamiento, hay sin embargo casos en los que no se pide más. Pero estos no son el caso de la cuadratura del círculo. La mayor parte de los que se dedican a buscarla, lo hacen con un ardor, que les lleva a veces a revocar en duda las verdades más fundamentales & mejor establecidas de la geometría. ¿Se podría creer, que se encontrarían satisfechos por lo que acabo de decir? Se necesita otra cosa. Se trata de demostrar, que en efecto el diámetro no es a la circunferencia como un número entero a un número entero, esta demostración debe ser tan firme, como cualquier demostración geométrica. Y con todo esto vuelvo a decir, que los geómetras no se sorprenderán por

([Serfati 2018, p. 180 nota 32]).

[5] Leibniz había encontrado en 1673 —y de manera independiente J.Gregory y Nilakantha (ver [Berggren 1997, pp. 92, 93, 97 nota 4])— a partir de la serie infinita para el arcotangente, que el área del círculo de radio uno puede ser expresada mediante la serie:

$$\mathcal{A}_C=\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$$

Agrupando los términos de dos en dos:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_C=\frac{\pi}{4} &= \left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\cdots\\ &= \frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{9\cdot 11}+\frac{2}{13\cdot 15}+\cdots\end{aligned}$$

se obtiene precisamente el desarrollo que presenta Lambert.

[6] No suponen ningún obstáculo para que el valor del área $\frac{1}{4}\cdot\pi$ sea una *fraction fort simple* puesto que $\frac{1}{4}$ lo es; por lo tanto el problema recae en π.

[7] Si el área del círculo fuera una fracción, un sector del círculo sería una fracción de la fracción del área, y por tanto una *fraction fort grand*.

ello. Deben de estar acostumbrados desde hace mucho tiempo a no esperar otra cosa. Mas he aquí lo que merecerá más atención, & lo que será una buena parte de la Memoria. Se trata de mostrar, que *siempre que un arco de círculo cualquiera es conmensurable al radio, la tangente de ese arco le es inconmensurable*; & que recíprocamente, *toda tangente conmensurable no lo es de un arco conmensurable.*[8] He aquí de qué estar un poco más sorprendidos. Este enunciado parecería deber admitir una infinidad de excepciones, & no admite ninguna. Hay que ver todavía hasta qué punto las cantidades circulares trascendentes son trascendentes, & fuera de toda conmensurabilidad.[9] Como la demostración que voy a dar exige todo el rigor geométrico, & que por otra parte será un entramado de otros teoremas, que demandarán ser demostrados con igual rigor, estas razones me excusarán, cuando no me dé prisa por llegar al final, o cuando en el camino me detenga con lo que se presente destacable.

§. 3. Sea entonces *un arco de círculo cualquiera, pero conmensurable al radio:* & se trata de descubrir, *¿será este arco de círculo al mismo tiempo conmensurable a la tangente o no?* Imaginemos para este efecto una fracción tal, que su numerador sea igual al arco del círculo propuesto, & que el denominador sea igual a la tangente de este arco. Es claro que, sea cual sea la manera en la que se expresen este arco & la tangente, esta fracción debe ser igual a otra fracción, en la que el numerador & el denominador serán números enteros, siempre que el arco del círculo propuesto sea conmensurable a la tangente. Es claro también que esta segunda fracción debe poder ser deducida de la primera, por el mismo método, del que uno se sirve en aritmética para reducir una fracción a su mínimo denominador. Siendo conocido este método desde *Euclides*, en la 2ª prop. de su 7º libro,[10] no me detendré a demostrarlo de nuevo. Mas conviene remarcar que, mientras que *Euclides* solo lo aplica a números enteros & racionales, ¿tendré que servirme de otro método, cuando se trate de aplicarlo a cantidades, de las que se ignora si son racionales o no? He aquí entonces el procedimiento que convendrá al caso en cuestión.

[8]Lo que se propone demostrar por lo tanto es que:

$$\text{Si} \quad v \in \mathbb{Q} \Rightarrow \tan v \not\in \mathbb{Q}$$

[9]Como dice [Serfati 2018, p. 181], el término «trascendente» aquí «no tiene un significado técnico preciso [...]; simplemente significa que las cantidades involucradas son irracionales de una forma extraordinaria, más allá de cualquier estándar». El autor hace el mismo comentario en referencia a otra expresión de Lambert en otro lugar del texto, concretamente en el punto §. 81. cuando habla del número e, aunque en ese caso —como quedará debidamente comentado— parece vislumbrarse ya un significado moderno del término.

[10]El algoritmo del máximo común divisor de dos números no primos entre sí.

§. 4. Sea el radio $= 1$, y un arco de círculo cualquiera $= v$. Y tendremos las dos series infinitas bien conocidas[11]

$$\begin{aligned}\sin v &= v - \frac{1}{2\cdot 3}v^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}v^5 - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}v^7 + \&c.\\ \cos v &= 1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}v^4 - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}v^6 + \&c.\end{aligned}$$

Como en lo que seguirá daré dos series para la hipérbola que no diferirán de estas dos más que en que todos los signos son positivos, aplazaré hasta ese momento el demostrar la ley de progresión de esas series, & no lo demostaré más que para no omitir nada de todo lo que demanda el rigor geométrico.[12] Es suficiente entonces haber advertido a los Lectores de antemano.

§. 5. Ahora bien como

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v},$$

tendremos, sustituyendo estas dos series, la fracción

$$\tan v = \frac{v - \frac{1}{2\cdot 3}v^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}v^5 - \&c.}{1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}v^4 - \&c.}$$

Pondré para mayor brevedad

$$\tan v = \frac{A}{B},$$

de manera que sea

$$\begin{aligned}A &= \sin v,\\ B &= \cos v.\end{aligned}$$

[11]Lambert no utiliza la notación moderna del factorial de un número para representar productos sucesivos, que es posterior aunque no por mucho a la redacción de la *Mémoire* (la introdujo en 1808 el también alsaciano Cristian Kramp en su *Elementos de aritmética universal*; sin duda un buen ejemplo del poder simplificador de algunas notaciones).

[12]Se refiere a los desarrollos en serie del seno y el coseno hiperbólico que obtiene en este mismo trabajo. El parecido entre estos desarrollos, que no solo señala aquí, junto con otras consideraciones, le lleva a preguntarse sobre la verdadera conexión entre ambos, algo que como él mismo dice (§. 74.) había sido advertido anteriormente (1759) por Mr. de Foncenex. Dicha conexión reside en que de la misma forma que las funciones trigonométricas circulares parametrizan la circunferencia, las funciones trigonométricas hiperbólicas parametrizan la hipérbola equilátera. Lo que hace él es buscar las funciones que parametrizan la hipérbola obteniendo el coseno y el seno hiperbólico (ver [Barnett 2004] para más detalle).

He aquí ahora el procedimiento que prescribe *Euclides*.

§. 6. Dividamos B entre A; sea el cociente $= Q'$, el residuo $= R'$.
Dividamos A entre R'; sea el cociente $= Q''$, el residuo $= R''$.
Dividamos R' entre R''; sea el cociente $= Q'''$, el residuo $= R'''$.
Dividamos R'' entre R'''; sea el cociente $= Q^{IV}$, el residuo $= R^{IV}$. &c. de manera que continuando estas divisiones, se encuentren sucesivamente

$$\text{los cocientes } Q',\, Q'',\, Q''' \ldots\ldots\, Q^n,\, Q^{n+1},\, Q^{n+2} \ldots \&c.$$

$$\text{los residuos } R',\, R'',\, R''' \ldots\ldots\, R^n,\, R^{n+1},\, R^{n+2} \ldots \&c.$$

& es claro sin que lo advierta, que los exponentes n, $n+1$, $n+2$ &c. no sirven sino para indicar el número de cociente o de residuo con el que se encuentran marcados.[13] Con esto como base, he aquí lo que se trata de demostrar.

§. 7. En primer lugar, *no solamente que la división puede continuarse sin fin, sino que los cocientes seguirán una ley muy simple por cuanto*

$$\begin{aligned} Q' &= +1 : v, \\ Q'' &= -3 : v, \\ Q''' &= +5 : v, \\ Q^{IV} &= -7 : v, \quad \&c. \end{aligned}$$

& en general

$$Q^n = \pm (2n-1) : v,$$

donde el signo + es para el exponente n par[1)]*, el signo − es para el exponente n impar*[2)]*,*[14] *& que de esta manera se tendrá para la tangente expresada mediante el arco la fracción*

[13]Estas divisiones finalmente derivarán en un desarrollo en fracción continua de la tangente:

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{\frac{B}{A}} = \frac{1}{Q' + \frac{R'}{A}} = \frac{1}{Q' + \cfrac{1}{\frac{A}{R'}}} = \frac{1}{Q' + \cfrac{1}{Q'' + \frac{R''}{R'}}} = \frac{1}{Q' + \cfrac{1}{Q'' + \cfrac{1}{\frac{R'}{R''}}}} = \cdots$$

Téngase en cuenta que el primer estudio sistemático sobre fracciones continuas lo hace Euler en 1737 en [Euler 1744] (lo escribe en 1737 y se publica en 1744 en las Actas de la Academia Nacional de San Petersburgo), con lo que las herramientas que usa Lambert y de las que como se verá hace un ágil manejo son muy novedosas.

[14]Como se ve claramente aquí hay un error: el signo + corresponde al exponente impar no al par, y el signo − al par no al impar.

continua muy simple

$$\tan v = \cfrac{1}{1:v - \cfrac{1}{3:v - \cfrac{1}{5:v - \cfrac{1}{7:v - \cfrac{1}{9:v - \&c.}}}}}$$

§. 8. En segundo lugar, *que los residuos R', R'', R''' &c. se expresarán por las series siguientes, donde las leyes de progresión son igualmente muy simples:*

$$\begin{aligned}
R' &= -\frac{2}{2\cdot 3}v^2 + \frac{4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}v^4 - \frac{6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}v^6 + \&c.\\
R'' &= -\frac{2\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}v^3 + \frac{4\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}v^5 - \frac{6\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}v^7 + \&c.\\
R''' &= +\frac{2\cdot 4\cdot 6}{2\cdot\cdots\cdot 7}v^4 - \frac{4\cdot 6\cdot 8}{2\cdot\cdots\cdots\cdot 9}v^6 + \frac{6\cdot 8\cdot 10}{2\cdot\cdots\cdot 11}v^8 - \&c.\\
R^{IV} &= +\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{2\cdot\cdots\cdot 9}v^5 - \frac{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}{2\cdot\cdots\cdots\cdot 11}v^7 + \frac{6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}{2\cdot\cdots\cdot 13}v^9 - \&c.\\
&\quad \&c.
\end{aligned}$$

de manera que los signos de los primeros términos cambiarán siguiendo el orden cuater-

nario $--++$, *& que en general será*1)[15]

$$\begin{aligned}
\pm R^n &= -\frac{2^n(1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n)}{1\cdot 2\cdots(2n+1)}v^{n+1}+\frac{2^{n+1}(1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n+1))}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot\cdot(2n+3)}v^{n+3}-\&\text{c.}\\
\pm R^{n+1} &= -\frac{2^{n+1}(1\cdot 2\cdots(n+1))}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(2n+3)}v^{n+2}+\frac{2^{n+2}(1\cdot 2\cdot\cdot(n+2))}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(2n+5)}v^{n+4}-\&\text{c.}\\
\mp R^{n+2} &= +\frac{2^{n+1}(1\cdot 2\cdots(n+2))}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(2n+5)}v^{n+3}\frac{2^{n+3}(1\cdot 2\cdots(n+3)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(2n+7)}v^{n+5}+\&\text{c.}
\end{aligned}$$

[15]En lo que a los términos generales se refiere, hay que tener en consideración tres cosas:

1. La primera, además de que Lambert omite un paréntesis (problemas tipográficos recurrentes en este trabajo), es que en la tercera expresión la potencia de dos en lugar de ser 2^{n+1} debería ser 2^{n+2}.

2. La segunda tiene que ver con la alternancia en los signos. Si uno toma literalmente esas expresiones, ve que si a n se le da el valor 1 siguen la ley de formación correcta, igual que todas las demás, pero si a n se le da el valor 2 ya no se cumple (la segunda expresión, que sería $\pm R'''$, según escribe Lambert tendría la misma alternancia en los signos que la primera, que sería $\pm R''$, y en cambio tienen la opuesta). Lo que ocurre es que Lambert está pensando ya en el método de inducción, con lo que escribe estas fórmulas con la intención de empezar en $n=1$ y es así como debemos pensarlo nosotros ahora y en las demostraciones posteriores.

3. Lo último a tener en cuenta tiene que ver con las propias expresiones generales de los residuos. Cójase por ejemplo la expresión $\pm R^n$

$$\pm R^n = -\frac{2^n(1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n)}{1\cdot 2\cdots(2n+1)}v^{n+1}+\frac{2^{n+1}(1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n+1))}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot\cdot(2n+3)}v^{n+3}-\&\text{c.}$$

Para empezar, uno podría pensar que, en base al &c., los productos sucesivos que aparecen en los numeradores seguirían la sucesión $n!$, $(n+1)!$, $(n+2)!$, $(n+3)!$, $\cdots$, pero lo cierto es que no. Si uno analiza los numeradores de los tres primeros sumandos (columnas) en los términos R', R'' y R'''

$$\begin{array}{lll}
2=2^1\cdot 1! & 4=2^1\cdot 2! & 6=2^1\cdot 3\\
2\cdot 4=2^2\cdot 2! & 4\cdot 6=2^2\cdot 3! & 6\cdot 8=2^2\cdot(3\cdot 4)\\
2\cdot 4\cdot 6=2^3\cdot 3! & 4\cdot 6\cdot 8=2^3\cdot 4! & 6\cdot 8\cdot 10=2^3\cdot(3\cdot 4\cdot 5)
\end{array}$$

ve que a partir de la tercera columna ya no aparecen los factoriales puesto que se van reduciendo los multiplicandos a cada paso, algo que también ocurre en la segunda columna solo que lo que se quita es un 1 y esto no afecta multiplicativamente (aquí por lo tanto el &c. puede engañar un poco); esto también se pone de manifiesto más adelante en el propio texto. Debe tenerse en cuenta también que si uno le da a n el valor 1, la expresión resultante, R', no coincide con la dada por Lambert. Esto es porque las potencias de 2 no deberían modificar su exponente al cambiar de sumando (columna;

§. 9. Ahora bien para dar a la demostración de estos teoremas[16] toda la brevedad posible, consideremos que cada residuo R^{n+2} se encuentra dividiendo por el residuo R^{n+1}, que le precede inmediatamente, el antepenúltimo R^n. Esta consideración, hace que la demostración de la que se trata pueda ser dividida en dos partes. En la primera hay que hacer ver que; *si dos residuos R^n , R^{n+1}, que se suceden inmediatamente, tienen la forma que les he dado, el residuo R^{n+2}, que sigue inmediatamente, tendrá la misma forma.* Una vez demostrado esto, no resta más que hacer ver, en la segunda parte de la demostración, *que la forma de los dos primeros residuos es la que deben tener.* Ya que, de esta manera, es evidente que la forma de todos los siguientes se establece como por sí sola.[17]

§. 10. Comencemos entonces por dividir el primer término del residuo R^n por el primer término del residuo R^{n+1}, a fin de obtener el cociente[18]

$$\begin{aligned} Q^{n+2} &= \frac{2^n(1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n)}{1\cdot2\cdot3\cdots(2n+1)}v^{n+1} : \frac{2^{n+1}(1\cdot2\cdot3\cdots(n+1))}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n+3)}v^{n+2} \\ &= 1 : \frac{2(n+1)v}{(2n+2)\cdot(2n+3)} = (2n+3) : v. \end{aligned}$$

Y es claro que, estando el residuo R^{n+1} multiplicado por el cociente

$$Q^{n+2} = (2n+3) : v,$$

& siendo sustraído el producto del residuo R^n, debe quedar el residuo[19] R^{n+2}.

véase la tabla de arriba); es decir, deberían ponerse

$$\begin{aligned} \pm R^n &= -\frac{2^n(1\cdot2\cdot\cdots\cdot n)}{1\cdot2\cdots(2n+1)}v^{n+1} + \frac{2^n(1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n+1))}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot\cdot(2n+3)}v^{n+3} - \&c. \\ \pm R^{n+1} &= -\frac{2^{n+1}(1\cdot2\cdots(n+1))}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(2n+3)}v^{n+2} + \frac{2^{n+1}(1\cdot2\cdot\cdot(n+2))}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(2n+5)}v^{n+4} - \&c. \\ \mp R^{n+2} &= +\frac{2^{n+2}(1\cdot2\cdots(n+2))}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(2n+5)}v^{n+3} - \frac{2^{n+2}(1\cdot2\cdots(n+3))}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(2n+7)}v^{n+5} + \&c. \end{aligned}$$

[16]Demostración que va a llevar a cabo en §.10. , §.11. , §.12. y §.13.

[17]Lo que va a hacer por lo tanto es usar el método de inducción, un método que va a estar muy presente durante todo este trabajo, y que puede diferir del que usemos nosotros quizá en que él primero prueba la hipótesis de inducción y no la base (aunque dependerá de cómo lo haya aprendido cada uno). Sea como fuere, el rigor que toma el método en las manos de Lambert es el mismo.

[18]Como R^n y R^{n+1}, que es de lo que se parte, son el dividendo y el divisor respectivamente en el paso n-ésimo, para dar con el resto R^{n+2} se debe encontrar primero el cociente Q^{n+2}, y como en cualquier división entre polinomios —dividendo y divisor lo son aunque infinitos— el cociente se obtiene a partir de los primeros términos. Lo que esto deja ver, como Lambert comentará en §.14, es que demostrando los desarrollos de los residuos ya se demuestra el desarrollo de los cocientes.

[19]Ya que $R^{n+2} = R^n - R^{n+1} \cdot Q^{n+2}$, como ocurre en cualquier división. Lo que va a demostrar ahora,

§. 11. Pero para no tener que hacer esta operación para cada término separadamente & limitarnos con ello a una simple inducción, cojamos el término general de cada una de las series que expresan los residuos R^n, R^{n+1}, R^{n+2}, de manera que cogiendo el m-ésimo término de los residuos R^n, R^{n+1}, tendremos el $(m-1)$-ésimo término del residuo[20] R^{n+2}. Observado esto, los términos serán[1)][21]

$$\begin{aligned} \pm r^n &= -\frac{2^{n+m-1}(m\cdot(m+1)\cdot(m+2)\cdot\cdots\cdot(n+m-1)v^{n+2m-1}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n+2m-1)} \\ \pm r^{n+1} &= -\frac{2^{n+m}\cdot(m\cdot(m+1)(m+2)\cdot\cdots\cdot(n+m)v^{n+2m}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n+2m+1)} \\ \pm r^{n+2} &= -\frac{2^{n+m}\cdot((m-1)\cdot m\cdot(m+1)\cdot\cdots\cdot(n+m)\cdot v^{n+2m-1}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n+m+1)} \end{aligned}$$

es que haciendo esa operación se obtiene efectivamente para R^{n+2} la forma general predicha, algo que va a hacer término a término.

[20]Esto es porque al dividir el primer término entre el primer término —póngase la atención por ejemplo en el comienzo de la división cuando se divide el $\cos v$ entre el $\sin v$ en busca del primer cociente Q' y del primer resto R'— no se genera resto sino que se obtiene directamente el cociente ($\frac{1}{v}$ en este caso):

$$B = \cos v = 1 - \frac{v^2}{2!} + \frac{v^4}{4!} - \frac{v^6}{6!} + \cdots \pm \frac{v^m}{m!} \mp \cdots$$

$$A = \sin v = v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!} - \frac{v^7}{7!} + \cdots \pm \frac{v^{m+1}}{(m+1)!} \mp \cdots$$

Al dividir el segundo término entre el segundo término sí que se obtiene un resto que sería el comienzo de la serie R', o sea el primer término (pongamos R'_1):

$$R'_1 = -\frac{v^2}{2!} - \frac{1}{v}\cdot\frac{-v^3}{3!} = \frac{-2v^2}{3!}$$

Al dividir el tercero entre el tercero también se genera resto, en este caso el segundo sumando de la serie:

$$R'_2 = \frac{v^4}{4!} - \frac{1}{v}\cdot\frac{v^5}{5!} = \frac{4v^4}{5!}$$

y así sucesivamente.

[21]Además de algunas erratas en la omisión de paréntesis y en el último multiplicando del denominador de la última expresión, hay que volver hacer notar que los exponentes no deberían variar en función de m. Con estas consideraciones las expresiones deberían ser escritas como sigue:

$$\begin{aligned} \pm r^n &= -\frac{2^{n}(m\cdot(m+1)\cdot(m+2)\cdot\cdots\cdot(n+m-1))v^{n+2m-1}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n+2m-1)} \\ \pm r^{n+1} &= -\frac{2^{n+1}\cdot(m\cdot(m+1)(m+2)\cdot\cdots\cdot(n+m))v^{n+2m}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n+2m+1)} \\ \pm r^{n+2} &= -\frac{2^{n+2}\cdot((m-1)\cdot m\cdot(m+1)\cdot\cdots\cdot(n+m))\cdot v^{n+2m-1}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n+2m+1)} \end{aligned}$$

Ahora bien, puesto que debe ser

$$r^n - r^{n+1} \cdot (2n+3) : v = r^{n+2},$$

& que en efecto lo es[22]

$$\begin{aligned} r^n - r^{n+1}(2n+3) : v \quad &= \quad -\frac{2^{n+m-1} \cdot (m \cdot \cdots \cdot (n+m-1) v^{n+2m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n+2m-1)} \\ &+ \quad \frac{2^{n+m}(m \cdot \cdots \cdot (n+m) v^{n+2m}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n+2m+1)} \cdot \frac{2n+3}{v} \end{aligned}$$

$$= \frac{2^{n+m-1} \cdot (m \cdots (n+m-1))}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (2m+2m-2)} v^{n+2m-1} \cdot (-1 + \frac{2 \cdot (n+m) \cdot (2n+3)}{(2n+2m) \cdot (2n+2m+1)}$$

$$= -\frac{2^{n+m-1}(m \cdots (n+m-1))}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (2n+2m-2)} v^{n+2m-1} \cdot \frac{(2m-2) \cdot (2n+2m)}{(2n+2m) \cdot (2n+m+1)}$$

$$= -\frac{2^{n+m} \cdot ((m-1) \cdot m(m+1) \cdot \cdots \cdot (n+m) v^{n+2m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n+m+1)},$$

[22] De nuevo hay que tener en cuenta el problema en las potencias de dos además de varias erratas. Una vez corregido esto, el resultado sería:

$$\begin{aligned} r^n - r^{n+1} \cdot (2n+3) = r^{n+2} \quad &= \quad -\frac{2^{n} \cdot (m \cdot \cdots \cdot (n+m-1)) v^{n+2m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n+2m-1)} \\ &+ \quad \frac{2^{n+1}(m \cdot \cdots \cdot (n+m)) v^{n+2m}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n+2m+1)} \cdot \frac{2n+3}{v} \end{aligned}$$

$$= \frac{2^{n} \cdot (m \cdots (n+m-1))}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (2n+2m-1)} v^{n+2m-1} \cdot (-1 + \frac{2 \cdot (n+m) \cdot (2n+3)}{(2n+2m) \cdot (2n+2m+1)})$$

$$= -\frac{2^{n}(m \cdots (n+m-1))}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (2n+2m-1)} v^{n+2m-1} \cdot \frac{(2m-2) \cdot (2n+2m)}{(2n+2m) \cdot (2n+2m+1)}$$

$$= -\frac{2^{n+2} \cdot ((m-1) \cdot m(m+1) \cdot \cdots \cdot (n+m)) v^{n+2m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n+2m+1)}$$

& por tanto

$$= \pm r^{n+2}.$$

Vemos, que teniendo los residuos R^n , R^{n+1} la forma que les he dado, el residuo R^{n+2} tendrá la misma forma. No se tratará por lo tanto más, que de asegurar la forma de los dos primeros residuos R' , R'', a fin de establecer lo que esta primera parte de nuestra demostración había admitido como verdad en forma de hipótesis. Y esto es lo que será la segunda parte de la demostración.

§. 12. Recordemos para este efecto, que el primer residuo R' es el que queda al dividir el

$$\cos v = 1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}v^4 \cdots \frac{1}{1\cdots m}v^m \cdots \cdot\&\text{c}.$$

por el

$$\sin v = v - \frac{1}{2\cdot 3}v^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}v^5 \cdots \frac{1}{1\cdot\cdot(m+1)}v^{m+1} \cdots \cdot\&\text{c}.$$

Ahora bien siendo $= 1 : v$ el cociente que resulta de la división del primer término, vemos que será

$$R' = \cos v - \frac{1}{v}\cdot \sin v.$$

Multiplicando por lo tanto el término general del divisor,

$$\pm\frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(m+1)}v^{m+1},$$

por $1 : v$, & sustrayendo el producto

$$\pm\frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(m+1)}\cdot v^m,$$

del término general del dividendo

$$\pm\frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot m}\cdot v^m,$$

tendremos el término general del primer residuo R'

$$r' = \pm\frac{m\cdot v^m}{1\cdot\cdots\cdot(m+1)}.$$

Ahora bien siendo $(m+1)$ siempre un número impar, m será un número par, & el primer residuo será[23]

$$R' = -\frac{2}{2\cdot 3}v^2 + \frac{4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}v^4 - \frac{6}{2\cdot\cdots\cdot 7}v^6 + \&\text{c}.$$

[23]Fíjese que en el desarrollo en serie del $\sin v$, $(m+1)$ toma los valores $1, 3, 5 \ldots$, con lo que m tomaría los valores $0, 2, 4 \ldots$ Eso hace coincidir la alternancia en los signos que le da Lambert a r' $(\pm)$ con la que realmente tiene $(\mp)$ puesto que quedaría:

$$R' = +0 - \frac{2}{2\cdot 3}v^2 + \frac{4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}v^4 - \frac{6}{2\cdot\cdots\cdot 7}v^6 + \&\text{c}.$$

tal como habíamos supuesto.

§. 13. El segundo residuo R'' resulta de la división de

$$\sin v = v - \frac{1}{2\cdot 3}v^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}v^5 - \&\text{c.} \cdots \pm \frac{1}{1\cdot 2\cdots (m-1)}v^{m-1}$$

por el primer residuo que acabamos de encontrar[24]

$$R' = -\frac{2}{2\cdot 3}v^2 + \frac{4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}v^4 - \frac{6}{2\cdot\cdots\cdot 7}v^7 + \cdots \mp \frac{mv^m}{1\cdots (m+1)}$$

Ahora bien siendo $= -3 : v$ el cociente que resulta de la división del primer término, vemos que será

$$R'' = \sin v - \frac{3}{v}\cdot R'.$$

Multiplicando por lo tanto el término general del divisor

$$\mp\frac{mv^m}{1\cdot\cdots\cdot (m+1)},$$

por $-3 : v$, & sustrayendo el producto

$$\pm\frac{3mv^{m-1}}{1\cdot\cdots\cdot (m+1)},$$

del término general del dividendo

$$\pm\frac{1}{1\cdot\cdots\cdot (m-1)}v^{m-1},$$

el término general del segundo término será

$$\begin{aligned} r'' &= \pm\frac{v^{m-1}}{1\cdot\cdots\cdot (m-1)} \mp \frac{3mv^{m-1}}{1\cdot\cdots\cdot(m+1)} \\ &= \pm\frac{(m-2)\cdot m\cdot v^{m-1}}{1\cdot\cdots\cdot(m+1)}. \end{aligned}$$

Sustituyendo entonces por m los números pares,[25] tendremos el segundo residuo

$$R'' = -\frac{2\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}v^3 + \frac{4\cdot 6}{2\cdots 7}v^5 - \frac{6\cdot 8}{2\cdots 9}v^7 + \&\text{c.}$$

[24] Vuelve a haber una errata; la expresión debería ser:

$$R' = -\frac{2}{2\cdot 3}v^2 + \frac{4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}v^4 - \frac{6}{2\cdot\cdots\cdot 7}v^6 + \cdots \mp \frac{mv^m}{1\cdots (m+1)}$$

[25] Fíjese en el desarrollo en serie de R'.

nuevamente tal como habíamos supuesto. Así habiendo demostrado la forma de los dos primero residuos, se sigue, en virtud de la primera parte de nuestra demostración, que la forma de todos los residuos siguientes es la misma.

§. 14. Ahora ya no es necesario demostrar separadamente la ley de progresión de los cocientes Q', Q'', Q''' &c. Ya que habiendo demostrado la ley de los residuos, es por la misma demostración que un cociente cualquiera será (§. 10)

$$\pm Q^{n+2} = (2n+3) : v,$$

lo que, en virtud de la teoría de las fracciones continuas, proporciona

$$\tan v = \cfrac{1}{1:v - \cfrac{1}{3:v - \cfrac{1}{5:v - \cfrac{1}{7:v - \cfrac{1}{9:v - \cfrac{1}{11:v - 1\ \&c.}}}}}}$$

de donde vemos a su vez, que *siempre que el arco v sea igual a una parte alícuota del radio, todos estos cocientes serán números enteros crecientes en progresión aritmética.*

Y esto es lo que debemos advertir, puesto que en el teorema de *Euclides* citado antes (§. 3) todos los cocientes se suponen que son números enteros. Así hasta aquí el método que prescribe *Euclides*, será aplicable a todos estos casos, en los que el arco v es una parte alícuota del radio. Mas, aún en estos casos, se une otra circunstancia que conviene destacar.[26]

§. 15. El problema que propone *Euclides*, es *encontrar el máximo común divisor de dos números enteros, que no son primos entre sí.* Este problema es resoluble siempre que uno de los residuos R', R'', R''' &c. ... R^n se vuelva $= 0$, sin que el residuo precedente R^{n-1} sea igual a la unidad, lo que siguiendo, la 1ª Prop. del mismo libro solo ocurre cuando los dos números propuestos son primos entre sí, bien entendido que todos los cocientes Q', Q'', Q''' &c. se suponen que son números enteros. Pero acabamos de ver,

[26]En resumen, cuando los cocientes sean números enteros, se estará dentro de las condiciones impuestas por el algoritmo de Euclides. En el siguiente punto aplica dicho algoritmo a estos casos: ya que los restos nunca se anulan, esas divisiones que tienen como fin dar con el máximo común divisor nunca terminan. Además como los cocientes son números enteros, aplicando el teorema la tangente será para esos casos un número irracional.

que esta última suposición tiene lugar en el caso que aquí se trata, siempre que $\frac{1}{v}$ sea un número entero. Mas, en cuanto a los residuos R', R'', R''' &c. no hay ninguno que se vuelva $= 0$. Todo lo contrario, considerando la ley de progresión de los residuos que acabamos de encontrar, se ve, que no solamente decrecen sin interrupción, sino que decrecen más rápidamente que cualquier progresión geométrica.[27] Aunque esta continúe hasta el infinito, podemos sin embargo aplicarle la proposición de *Euclides*. Ya que, en virtud de esta proposición, *el máximo común divisor de A, B es al mismo tiempo el máximo común divisor de todo los residuos R, R', R''* &c. Ahora bien como estos residuos decrecen de manera que al final se vuelven más pequeños que cualquier cantidad asignable, en consecuencia *el máximo común divisor de A, B, es más pequeño que cualquier cantidad asignable*; lo que significa que no lo hay, & que por consiguiente siendo A, B dos cantidades inconmensurables, *la*

$$\tan v = \frac{A}{B}$$

será una cantidad irracional todas las veces que el arco v sea una parte alícuota del radio.

§. 16. He aquí pues hasta donde se limita el uso que podemos hacer de la proposición de *Euclides*. Se trata ahora de extenderlo a todos los casos en los que el arco v es conmensurable al radio. Para este efecto, & para demostrar aún algunos teoremas,[28] voy

[27] Esta comparación con las progresiones geométricas, que seguirá enfatizando, será uno de sus principales apoyos para concluir la irracionalidad de su fracción continua (más adelante se entrará en detalle sobre esta cuestión, y sobre la problemática en torno a esta comparativa).

[28] Efectivamente el siguiente paso es extender la demostración a todos los valores del arco, pero antes Lambert dedica las siguientes 9 páginas a demostrar la convergencia de esa fracción continua (§. 17. - §. 30.), algo que a primera vista encajaría mejor en el siglo XIX, una época en la que la preocupación por el rigor fue mucho mayor. No obstante, es conocido que los fundamentos también preocuparon a los matemáticos dieciochistas. Schubring en [Schubring 2005, p. 285] llama la atención sobre esto de una forma especialmente clara:

> Es un punto de vista extendido el pensar en las matemáticas del siglo XVIII como despreocupadas por los fundamentos y como interesadas únicamente en el desarrollo del análisis [...] por contra, los matemáticos estaban realmente ansiosos por aclarar conceptos básicos.

Temas como los infinitesimales, los números negativos o las series infinitas fueron ampliamente discutidos y estudiados, y es probable que en este caso Lambert se hubiese visto influido por los acontecimientos. En concreto (ver [Español et al. 2008]), hubo un debate en torno a la sumabilidad de las series divergentes en el que la serie de Leibniz jugó un papel importante. El valor $\frac{1}{2}$ para dicha serie había sido calculado de forma analítica a través del desarrollo:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

para $x = 1$, pero había dudas en cuanto a si se podría obtener la misma serie a través de otras expresiones finitas. Finalmente se encontró que podía ser obtenida a través de la expresión:

$$\frac{1+x}{1+x+x^2} = 1 - t^2 + t^3 - t^5 + t^6 - t^8 + \cdots$$

para $x = 1$, lo que daría el valor $\frac{2}{3}$ perdiéndose así la unicidad:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{2}{3}$$

Puede que Lambert —quien mantuvo contacto y correspondencia con algunos de los protagonistas— estuviese al tanto de esto y quisiera evitarse críticas, asegurándose de que su desarrollo infinito —ahora una fracción continua en lugar de una serie— efectivamente provenía de una única expresión, a saber, $\frac{\sin v}{\cos v}$. O puede que, más en general, su intención fuese la de darle a su demostración «todo el rigor geométrico» volviendo sobre sus pasos (síntesis) para dejar absolutamente claro que el desarrollo (análisis) era el correcto ([Serfati 1992, pp. 72–75] presenta esta parte por medio de dicha dicotomía; resulta interesante en este aspecto acudir a [Mahoney 2000, pp. 739–740]). En cualquier caso, hay constancia de que Lambert efectivamente tenía conocimiento acerca de estas disputas, y lo que es más interesante, sobre el caso de las fracciones continuas. En una carta enviada a Euler el 12 de Julio de 1762, después de hablarle de diferentes cuestiones escribe [Bopp 1924, p. 28]:

> Por la misma razón no tomé parte alguna en una disputa, que los Académicos residentes en Múnich han considerado apropiado empezar con los P[adres] Jesuitas. En el almanaque académico de este año, donde he dado una idea popular de los movimientos celestes, se encuentra una tabla de longitudes & latitudes de las villas de Baviera, y el cálculo de encontrar aproximadamente su distancia. Como este cálculo exige la extracción de la raíz cuadrada, creí complacer a la mayor parte de los lectores, cambiando esta extracción por dos reglas de tres. La fórmula $\sqrt{a^2+b^2} = a + \cfrac{bb}{2a + \cfrac{bb}{2a + \cfrac{bb}{2a + \&c.}}}$ desvela todo el misterio, que no es nuevo. Sin embargo es justamente sobre lo que reside la disputa, puesto que se demanda la demostración.

Uno esperaría encontrar más referencias a las fracciones continuas en esta correspondencia, puesto que Euler fue uno de los primeros en trabajarlas de manera sistemática, y dado que Lambert reconoce en [Lambert 1766/1770, p. 162] que la motivación para la búsqueda de expresiones en forma de fracción continua provino precisamente de Euler, y más concretamente de su *Analysis infinitorum* en la que aparece, en forma de ejemplo, la expresión en fracción continua de $\frac{e-1}{2}$ [Euler 1744, p. 325 Ejemplo III]. Sin embargo el resto de la correspondencia trata sobre física. Sea como fuere, no deja de ser notable que Lambert dedicase parte de la demostración a un problema de convergencia, algo que no hicieron otros (Euler en [Euler 1744] o Legendre en [Legendre I 1794], como comenta [Baltus 2003, p. 10]).

a recuperar la fracción continua

$$\tan v = \cfrac{1}{1:v - \cfrac{1}{3:v - \cfrac{1}{5:v - \cfrac{1}{7:v - 1\,\&c.}}}}$$

& haciendo $1 : v = w$, la transformaré en

$$\tan v = \cfrac{1}{w - \cfrac{1}{3w - \cfrac{1}{5w - \cfrac{1}{7w - 1\,\&c.}}}}$$

§. 17. *Pues bien, reteniendo los cocientes w, $3w$, $5w$ &c. tanto como deseemos no tendremos más que hacer la reducción, para obtener fracciones que expresarán la tangente de v tanto más exactamente cuanto mayor número de cocientes tengamos retenidos.*[29] Es así p.ej. que reteniendo 1, 2, 3, 4 &c. cocientes, se encuentran las fracciones

$$\frac{1}{w}, \quad \frac{3w}{3w^2-1}, \quad \frac{15w^2-1}{15w^3-6w}, \quad \frac{105w^3-10w}{105w^4-45w^2+1},$$

§. 18. Mas, *para hacer todas estas reducciones en orden, & para demostrar al mismo*

[29]Demostrar que dicha fracción continua es convergente a $\tan v$, consistirá en, dado un arco v, demostrar que la sucesión de fracciones que se obtiene truncando ese desarrollo infinito (lo que se llama las convergentes: $\frac{p_n}{q_n}$, $n \geq 1$):

$$\frac{1}{w} \;, \quad \cfrac{1}{w - \cfrac{1}{3w}} \;, \quad \cfrac{1}{w - \cfrac{1}{3w - \cfrac{1}{5w}}} \;, \quad \ldots$$

converge a $\tan v$. Como ejemplo, Lambert muestra las expresiones de las cuatro primeras. Por otro lado, su estrategia será la de buscar la ley de recurrencia de esas fracciones (§. 18. - §. 22.), y a partir de ella, dar con el término general dependiente únicamente de n para poder calcular el límite (§. 23. - §. 28.).

tiempo la ley de progresión que cumplen estas fracciones, pondremos primero

$$\tan v = \frac{1}{w-a} = \cfrac{1}{w - \cfrac{1}{3w-a'}} = \cfrac{1}{w - \cfrac{1}{3w - \cfrac{1}{5w-a''}}} = \&\text{c.}$$

expresando por $a, a', a'', a''' \ldots . a^n, a^{n+1}, a^{n+2} \ldots .$ &c. las cantidades que resultan de los cocientes que queramos omitir, de manera que para omitirlos no tendremos más que hacer $a, a', a'', \ldots . a^n$ &c. $= 0$.

§. 19. Ahora digo, *que haciendo $a^{n+1} = 0$, la fracción que resulta de la reducción de los cocientes que retenemos, tendrá la forma*[30]

$$\tan v = \frac{A - ma^n}{B - pa^n},$$

en la que m, n, A, B no están afectadas por a^n. Supongamos primero esta forma como verdadera, & demostremos sin dificultad que reteniendo nuevamente un cociente más, la

[30]Téngase en cuenta que aquí, como quedará claro más adelante, A y B no representan el seno y el coseno, sino que hacen la función de símbolos. Por otro lado, haciendo un abuso de lenguaje, Lambert escribe una igualdad, pero no lo es, ya que el término de la derecha representa la $(n+2)$-ésima convergente. Detallando un poco más la última aclaración:

Si $a' = 0$ dicha fórmula expresa la 2-ésmia convergente en función de a

Si $a'' = 0$ dicha fórmula expresa la 3-ésmia convergente en función de a'

$\ldots$

Si $a^{n+1} = 0$ dicha fórmula expresa la (n+2)-ésmia convergente en función de a^n

(la primera convergente se obtiene haciendo $a = 0$).

fracción resultante de la reducción, tendrá la misma forma. Puesto que[31]

$$a^n = \frac{1}{(2n+1)w - a^{n+1}} \; 1) \,,$$

no tendremos más que sustituir este valor en la forma propuesta, & se convertirá en[32]

$$\tan v = \frac{A(2n+1)w - m - A \cdot a^{n+1}}{B(2n+1)w - m - B \cdot a^{n+1}},$$

Como esta forma es la misma,[33] bastará con mostrar que será verdad para el miembro a', puesto que entonces será verdad para todos los miembros siguientes $a'', a''', a^{IV} \ldots$ &c. Ahora bien para el miembro a' se tiene

$$\tan v = \cfrac{1}{w - \cfrac{1}{3w - a'}}$$

[31]Aquí de nuevo hay un problema con los índices: désele valores a n para ver que los a^n no coinciden con las expresiones que se muestran en la fórmula del apartado §. 18. Para que haya coincidencia, las expresiones aludidas deberían escribirse así:

$$\tan v = \frac{1}{w - a'} = \cfrac{1}{w - \cfrac{1}{3w - a''}} = \cfrac{1}{w - \cfrac{1}{3w - \cfrac{1}{5w - a'''}}} = \&\text{c.}$$

Solo cambiaría que:

Si $a'' = 0$ dicha fórmula expresa la 2-ésmia convergente en función de a'

Si $a''' = 0$ dicha fórmula expresa la 3-ésmia convergente en función de a''

...

Si $a^{n+1} = 0$ dicha fórmula expresa la (n+1)-ésmia convergente en función de a^n

(la primera convergente se obtiene haciendo $a' = 0$)

[32]Hay una errata en el denominador. La expresión debería ser:

$$\tan v = \frac{A(2n+1)w - m - A \cdot a^{n+1}}{B(2n+1)w - p - B \cdot a^{n+1}},$$

[33]Nótese que

$$\begin{aligned}\frac{A(2n+1)w - m - A \cdot a^{n+1}}{B(2n+1)w - p - B \cdot a^{n+1}} &= \frac{[A(2n+1)w - m] - A \cdot a^{n+1}}{[B(2n+1)w - p] - B \cdot a^{n+1}} \\ &= \frac{A - m \cdot a^{n+1}}{B - p \cdot a^{n+1}}\end{aligned}$$

Esta expresión sería la correspondiente a $a^{n+2} = 0$.

lo que haciendo la reducción da

$$\tan v = \frac{3w - a'}{3w^2 - 1 - wa'},$$

la forma tal como la habíamos supuesto.[34]

§. 20. Habiendo entonces encontrado[35]

$$\tan v = \frac{A - ma^n}{B - pa^n}$$

$$\tan v = \frac{A(2n+1)w - m - A \cdot a^{n+1}}{B(2n+1)w - m - B \cdot a^{n+1}},$$

sustituimos nuevamente a^{n+1} por su valor

$$a^{n+1} = \frac{1}{(2n+3)w - a^{n+2}},$$

& tendremos[36]

$$\tan v = \frac{\big[A(2n+1)w - m\big] \cdot (2n+3w) - A - \big[A(2n+1)w - m\big] \cdot a^{n+2}}{\big[B(2n+1)w - p\big] \cdot (2n+3w) - B - \big[B(2n+1)w - p\big] \cdot a^{n+2}}$$

§. 21. Por lo tanto, haciendo en cada uno de estos tres valores de $\tan v$, iguales a cero los miembros a^n, a^{n+1}, a^{n+2}, tendremos la forma general de las fracciones, que se trata de encontrar.[37]

[34] Puesto que:

$$\frac{3w - a'}{3w^2 - 1 - wa'} = \frac{3w - 1 \cdot a'}{(3w^2 - 1) - w \cdot a'} \equiv \frac{A - m \cdot a'}{B - p \cdot a'}$$

Esta expresión sería la correspondiente a $a'' = 0$.

[35] La misma errata en el denominador de la segunda expresión. Debería ser:

$$\tan v = \frac{A(2n+1)w - m - A \cdot a^{n+1}}{B(2n+1)w - p - B \cdot a^{n+1}}$$

[36] Vuelve a haber una errata. Debería ser:

$$\tan v = \frac{\big[A(2n+1)w - m\big] \cdot (2n+3)w - A - \big[A(2n+1)w - m\big] \cdot a^{n+2}}{\big[B(2n+1)w - p\big] \cdot (2n+3)w - B - \big[B(2n+1)w - p\big] \cdot a^{n+2}}$$

[37] Y que se corresponderían respectivamente con la $(n+1)$-ésima, $(n+2)$-ésima y $(n+3)$-ésima convergente (con el pequeño cambio aludido anteriormente, esas fracciones estarían representando respectivamente a la n-ésima, $(n+1)$-ésima y $(n+2)$-ésima convergente).

$$\frac{A}{B},$$

$$\frac{A(2n+1)w-m}{B(2n+1)w-p},$$

$$\frac{\big[A(2n+1)w-m\big]\cdot(2n+3)w-A}{\big[B(2n+1)w-p\big]\cdot(2n+3)w-B}.$$

Estas tres fracciones que resultan de la omisión de a^n, a^{n+1}, a^{n+2}, son consecutivas, & vemos sin esfuerzo *que la tercera se encuentra mediante las dos precedentes, de manera que su numerador & su denominador pueden ser calculados separadamente.* Ya que el numerador de la segunda fracción debe multiplicarse por el cociente correspondiente a a^{n+1}, & del producto sustraerse el numerador de la primera fracción. El resto será el numerador de la tercera fracción. Su denominador se encuentra de la misma manera mediante los denominadores de las dos fracciones precedentes.

§. 22. *Para obtener ahora las fracciones mismas,*[38] no tendremos más que escribir en tres columnas los cocientes, con los numeradores & los denominadores de las dos primeras fracciones (§. 17.) & los numeradores & denominadores siguientes se encontrarán por la sencilla operación que acabamos de indicar. He aquí el patrón[39]

Cocientes	numeradores	denominadores
	1	w
$5w$	$3w$	$3w^2-1$
$7w$	$15w^2-1$ . . .	$15w^3-6w$
$9w$	$105w^3-10w$ . .	$105w^4-45w^2+1$
$11w$	$945w^4-105w^2+1$	$945w^5-420w^3+15w$
&c.	$10395w^5-1260w^3+21w$	$10395w^6-4725w^4+210w^2-1$
	&c.	&c.

Lo que da las fracciones

$$\frac{1}{w},\quad \frac{3w}{3w^2-1},\quad \frac{15w^2-1}{15w^3-6w},\quad \frac{105w^3-10w}{105w^4-45w^2+1}\quad \text{\&c.}$$

cada una de las cuales expresa más exactamente la tangente de v, que las que la preceden.[40]

[38] Se refiere a su expresión general no recurrente, dependiente únicamente de la posición n de la fracción en la sucesión. Esto es lo que va a buscar en §. 22. - §. 28.

[39] Lambert usa la palabra *type*.

[40] Esto es lo que va a probar.

§. 23. Ahora bien, a pesar de que mediante la regla que acabamos de dar (§. 21.), cada una de estas fracciones puede encontrarse por las dos que la preceden inmediatamente, *convendrá, para evitar aquí nuevamente una especie de inducción, proporcionar & demostrar la expresión general.* Comencemos antes de nada por advertir, que los coeficientes de cada columna vertical siguen una ley muy simple en la que sus factores son en parte números figurados & en parte números impares. Helos aquí descompuestos

Fracción	Cociente	Denominador
1ª		w
2ª	$5w$	$3\cdot w^2 - 1\cdot 1$
3ª	$7w$	$3\cdot 5\cdot w^3 - 2\cdot 3w$
4ª	$9w$	$3\cdot 5\cdot 7w^4 - 3\cdot 3\cdot 5w^2 + 1\cdot 1$
5ª	$11w$	$3\cdot\cdot 9w^5 - 4\cdot 3\cdot 5\cdot 7w^3 + 3\cdot 5w$
6ª	$13w$	$3\cdots 11w^6 - 5\cdot 3\cdot\cdot 9w^4 + 6\cdot 5\cdot 7w^2 - 1\cdot 1$
7ª	$15w$	$3\cdot\cdots 13w^7 - 6\cdot 3\cdots 11w^5 + 10\cdot 5\cdot 7\cdot 9w^3 - 4\cdot 7w$
&c.	&c.	&c.
Fracción	Cociente	Numerador
1ª		1
2ª	$5w$	$3w$
3ª	$7w$	$3\cdot 5w^2 - 1\cdot 1$
4ª	$9w$	$3\cdot 5\cdot 7w^3 - 2\cdot 5w$
5ª	$11w$	$3\cdot\cdot 9w^4 - 3\cdot 5\cdot 7w^2 + 1\cdot 1$
6ª	$13w$	$3\cdots 11w^5 - 4\cdot 5\cdot 7\cdot 9w^3 + 3\cdot 7w$
7ª	$15w$	$3\cdot\cdots 13w^7 - 5\cdot 5\cdot\cdot 11w^4 + 6\cdot 7\cdot 9w^2 - 1\cdot 1$
&c.	&c.	&c.

§. 24. *Esta observación nos facilita el medio para encontrar la expresión general para cualquiera de estas fracciones.* Consideremos la n-ésima de estas fracciones, & tendremos su[41]

[41] Si nos fijamos en las expresiones de los denominadores (similar razonamiento para los numeradores), vemos que:

1. El primer factor de todas ellas es un producto de impares empezando por el 1, seguido de una potencia de w:

$$1\cdot w,\quad 1\cdot 3\cdot w^2,\quad 1\cdot 3\cdot 5\cdot w^3,\quad 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot w^4,\quad \ldots\quad [1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2k-1)]\cdot w^k$$

resultando ($k = n$):

$$[1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-1)]\cdot w^n$$

2. En los segundos factores aparecen la sucesión de los números naturales (con término general k, $k \geq$

Denominador

$$= \quad w^n\,[1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-1)] - \frac{w^{n-2}}{2}\cdot[(2n-2)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-3)]$$

$$+ \quad \frac{w^{n-4}}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot[(2n-4)\cdot(2n-6)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-5)]$$

$$- \quad \frac{w^{n-6}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot[(2n-6)\cdot(2n-8)\cdot(2n-10)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-7)]$$

$$+ \quad \frac{w^{n-8}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\cdot[(2n-8)\cdot(2n-10)(2n-12)(2n-14)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots(2n-9)]$$

$-$ &c.

---

1), seguida de productos de impares empezando por el 1, y una potencia de w:

$$2\cdot 1\cdot 3\cdot w,\quad 3\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot w^2,\quad 4\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot w^3,\quad \ldots$$

lo que acaba dando:

$$[(k+1)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2k+1)]\cdot w^k = [2(k+1)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2k+1)]\cdot\frac{w^k}{2}$$

resultando ($k = n-2$):

$$[(2n-2)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-3)]\cdot\frac{w^{n-2}}{2}$$

3. En los terceros factores aparece la sucesión (el 1 no cuenta multiplicativamente) $3, 6, 10, \ldots$ (con término general $\frac{(k+2)(k+1)}{2}$, $k \geq 1$), seguida de productos de números impares empezando por 1 (saltando el 3), y una potencia de w:

$$3\cdot 1\cdot 5\cdot w,\quad 6\cdot 1\cdot 5\cdot 7\cdot w^2,\quad 10\cdot 1\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot w^3,\quad \ldots$$

lo que acaba dando:

$$[(k+2)\cdot(k+1)\cdot 1\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot\cdots\cdot(2k+3)]\cdot\frac{w^k}{2} = [(2k+4)\cdot(2k+2)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2k+3)]\cdot\frac{w^k}{2\cdot 3\cdot 4}$$

resultando ($k = n-4$):

$$[(2n-4)\cdot(2n-6)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-5)]\cdot\frac{w^{n-4}}{2\cdot 3\cdot 4}$$

Esto resulta suficiente para postular un término general.

Numerador

$$\begin{aligned}
&= w^{n-1}\cdot[1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-1)] - \frac{w^{n-3}}{2\cdot 3}\cdot[(2n-4)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-3)]\\
&+ \frac{w^{n-5}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot[(2n-6)(2n-8)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-5)]\\
&- \frac{w^{n-7}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}[(2n-8)\cdot(2n-10)(2n-12)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-7)]\\
&+ \frac{w^{n-9}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}\cdot[(2n-10)\cdot(2n-12)\cdot(2n-14)\cdot(2n-16)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-9)]\\
&- \ \&c.
\end{aligned}$$

No se trata por lo tanto más que de demostrar la universalidad.

§. 25. Esto es lo que se procurará admitiendo esta forma para la n-ésima fracción, de donde, sustituyendo[42] $(n-1)$, $(n-2)$ en lugar de n, se deduce la de la $(n-1)$-ésima & $(n-2)$-ésima. Luego se procede conforme a la regla §. 21. deduciendo tanto el denominador como el numerador de la n-ésima fracción, de las dos precedentes tal como las acabamos de encontrar por la primera operación. Y con ello debe reproducirse la forma de la n-ésima fracción, tal como la acabamos de proporcionar. Es claro que este proceso lleva a establecer, que si dos fracciones consecutivas tienen esta forma, la que las sigue, también la tendrá, & que por consiguiente, teniendo esta forma las fracciones de la tabla precedente, que son las primeras, se seguirá, que todas las siguientes también la tendrán.

§. 26. Así pues, si queremos atenernos al término general, para abreviar esta demostración, habrá que calcular no obstante separadamente el del numerador & el del denominador, no por otra razón que para simplificar el cálculo. Pues por lo demás ambos se calcularán siguiendo la misma regla (§. 21.). Comencemos por el *denominador*, & tomando el m-ésimo término de su expresión general para la n-ésima fracción, habrá igualmente que coger el m-ésimo término para la $(n-1)$-ésima fracción, pero solo coger-

[42]Por si el lenguaje que usa no fuese claro: echando mano de la expresión del denominador n-ésimo, obtiene los denominadores $(n-1)$-ésimo y $(n-2)$-ésimo sustituyendo en dicha expresión la n por $n-1$ y $n-2$. Ahora que ya tiene las tres expresiones, lo que va a ver es que aplicando la regla dada en §. 21. ambos miembros coinciden, es decir:

$$q_n = (2n-1)w\cdot q_{n-1} - q_{n-2}$$

emos el $(m-1)$-ésimo término para la $(n-2)$-ésima fracción.[43] Se ve que es necesario actuar de esta manera con respecto a las dimensiones o exponentes de la letra w.

§. 27, Ahora bien el m-ésimo término de la n-ésima fracción para el denominador es[44]

$$M = \frac{w^{n-2m+2} \cdot [(2n-2m+2)\cdot(2n-2m)\cdot(2n-2m-2)\cdot\cdots\cdot(2n-4m+6)]\cdot[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-2m+1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2m-2)}$$

de donde, sustituyendo $(n-1)$ en lugar de n, se encuentra el m-ésimo término de la $(n-1)$-ésima fracción

$$M' = \frac{w^{n-2m+1} \cdot [(2n-2m)\cdot(2n-2m-2)\cdot\cdots\cdot(2n-4m+4)]\cdot[1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-2m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2m-2)}$$

Sustituyendo $(n-2)$ en lugar de n, & $(m-1)$ en lugar de m, se encuentra el $(m-1)$-ésimo término de la $(n-2)$-ésima fracción

$$M'' = \frac{w^{n-2m+2} \cdot [(2n-2m)\cdot(2n-2m-2)\cdot\cdots\cdot(2n-4m+6)]\cdot[1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-2m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2m-4)}$$

Ahora bien por la regla §. 21. debe ser

$$M = (2n-1)w \cdot M' - M''$$

lo que hace que podamos liberar estas tres expresiones de todos los factores, que les son

[43] Lo que va a hacer ahora, por lo tanto, es demostrar, término a término, que las expresiones generales cumplen la relación dada en §. 21, es decir:

$$q_n^{(m)} = (2n-1)w \cdot q_{n-1}^{(m)} - q_{n-2}^{(m-1)}$$

para los denominadores (Lambert usa, por supuesto, otra notación: M, M', M'') y:

$$p_n^{(m)} = (2n-1)w \cdot p_{n-1}^{(m)} - p_{n-2}^{(m-1)}$$

para los numeradores (en este caso usa N, N', N'' para los términos). Prestando un poco de atención a los denominadores (lo mismo con los numeradores) de la tabla del punto §. 22, se ve claro que el número de término que hay que coger en la $(n-2)$-ésima fracción es uno menos que en las dos restantes, algo que está relacionado con la potencia de w como comenta a continuación.

[44] Es un ejercicio sencillo llegar a este término general observando las expresiones de §. 24.

comunes, poniéndolos $= P$. Por lo tanto tendremos[45]

$$\begin{aligned}
+M &= \frac{P \cdot w \cdot (2n-2m+2)\cdot(2n-2m+1)}{(2m-2)\cdot(2m-3)} \\
+M' &= \frac{P\cdot(2n-4m+4)}{(2m-2)\cdot(2m-3)} \\
-M'' &= P\cdot w.
\end{aligned}$$

O haciendo

$$\frac{P}{(2m-2)\cdot(2m-3)} = Q,$$

será[46]

$$\begin{aligned}
+M &= Qw\cdot(2n-2m+2)\cdot(2n-2m+1) \\
+M' &= Q\cdot(2n-4m+2) \\
-M'' &= Qw\cdot(2m-2)\cdot(2m-3).
\end{aligned}$$

De aquí, multiplicando, tendremos[47]

$$\begin{aligned}
(2n-1)wM' &= Qw\cdot(4n^2-8mn+6n+4m-4) \\
-M'' &= Qw\cdot(4m^2-10m+6):
\end{aligned}$$

de donde

$$(2n-1)wM' - M'' = Qw(4n^2-8nm+6n+4m^2-6m+2).$$

Pero asimismo

$$M = Qw\cdot(2n-2m+2)(2n-2m+1) = Qw(4n^2-8nm+6n+4m^2-6m+2).$$

Por lo tanto siendo estos dos valores iguales, vemos que es

$$M = (2n-1)w\cdot M' - M'',$$

[45]Usando la notación del factorial, ese factor común sería:

$$P = \frac{w^{n-2m+1}(2n-2m)(2n-2m-2)\cdots(2n-4m+6)\cdot(2n-2m-1)!}{(2m-4)!}$$

La introducción de P, y en el siguiente paso, de Q, no tiene otro objetivo que el de simplificar los cálculos (lo mismo para el caso del numerador).

[46]Hay una errata en la segunda expresión que debería ser:

$$+M' = Q\cdot(2n-4m+4)$$

[47]Los dos puntos de la segunda expresión son tipográficos; nada tienen que ver con la división.

& que por consiguiente la forma, que hemos dado al término general es tal como debe ser.

§. 28. Pasemos ahora al *numerador*. El m-ésimo término del numerador de la n-ésima fracción debe ser

$$+N = \frac{w^{n-2m+1} \cdot [(2n-2m) \cdot (2n-2m-2) \cdot \cdots\cdots (2n-4m+4)] \cdot [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots\cdot (2n-2m+1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cdots\cdots (2m-1)}$$

de donde, sustituyendo $(n-1)$ en lugar de n, tendremos el mismo m-ésimo término para la $(n-1)$-ésima fracción,

$$+N' = \frac{w^{n-2m} \cdot [(2n-2m-2) \cdot (2n-2m-4) \cdot \cdots\cdot (2n-4m+2)] \cdot [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots\cdots (2n-2m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cdots\cdots (2m-1)}$$

Y sustituyendo $(n-2)$, $(m-1)$, en lugar de n, m, tendremos el $(m-1)$-ésimo término de la $(n-2)$-ésima fracción,

$$-N'' = \frac{w^{n-2m+1} \cdot [(2n-2m-2) \cdot (2n-2m-4) \cdot \cdots\cdot (2n-4m+4)] \cdot [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots\cdots (2n-2m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cdots\cdots (2m-3)}$$

Por lo tanto, poniendo los factores comunes a estas tres expresiones $= P$, tendremos[48]

$$\begin{aligned} +N &= \frac{Pw \cdot (2n-2m) \cdot (2n-2m+1)}{(2m-1) \cdot (2m-2)} \\ +N' &= \frac{P \cdot (2n-4m+2)}{(2m-1) \cdot (2m-2)} \\ -N'' &= Pw, \end{aligned}$$

o haciendo $P = Q \cdot (2m-1) \cdot (2m-2)$, será

$$\begin{aligned} +N &= Qw \cdot (2n-2m) \cdot (2n-2m+1) \\ +N' &= Q \cdot (2n-4m+2) \\ -N'' &= Qw \cdot (2m-1) \cdot (2m-2). \end{aligned}$$

Pero deber ser

$$N = (2n-1)w \cdot N' - N'',$$

entonces, sustituyendo los valores encontrados, tendremos

$$\begin{aligned} (2n-1)wN' &= Qw \cdot (4nn - 8nm + 2n + 4m - 2) \\ -N'' &= Qw(4m^2 - 6m + 2), \end{aligned}$$

[48] Ahora P sería:

$$P = \frac{w^{n-2m}(2n-2m-2)(2n-2m-4)\cdots(2n-4m+4) \cdot (2n-2m-1)!}{(2m-3)!}$$

de donde

$$(2n-1)wN' - N'' = Qw(4n^2 - 8nm + 2n + 4m^2 - 2m).$$

Ahora bien el mismo valor resulta de

$$N = (2n-m)\cdot(2n-2m+1)\cdot Qw.$$

Se sigue entonces de aquí, que la forma del término general es tal como debe ser.

§. 29. Cojamos pues las expresiones generales que hemos dado en §. 24. & dividamos la del denominador por su primer término,[49] & tendremos la serie[50]

$$1 \quad - \quad \frac{w^{-2}}{2}\cdot\frac{2n-2}{2n-1} + \frac{w^{-4}}{2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{(2n-4)\cdot(2n-6)}{(2n-1)\cdot(2n-3)} - \frac{w^{-6}}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot\frac{(2n-6)\cdot(2n-8)(2n-10}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}$$

$$+ \quad \frac{w^{-8}}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\cdot\frac{(2n-8)\cdot(2n-10)\cdot(2n-12)\cdot(2n-14)}{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot(2n-5)(2n-7)} - \&\text{c.}$$

lo que, sustituyendo $v = w^{-1}$, & poniendo $n = \infty$, da[51]

$$1 - \frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{2\cdot3\cdot4} - \frac{v^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \&\text{c.}$$

que es el coseno de v, & por consiguiente el denominador del que nos hemos servido (§. 5.) para encontrar los cocientes w, $3w$ &c.

---

[49]Establecidos entonces los términos generales para el numerador y el denominador, la estrategia de Lambert es la siguiente:

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n/q_n^{(1)}}{q_n/q_n^{(1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \tan v$$

ya que (punto §. 29.):

$$\frac{q_n}{q_n^{(1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \cos v$$

y ya que (punto §. 30.):

$$\frac{p_n}{q_n^{(1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sin v$$

[50]Falta un paréntesis en el tercer sumando:

$$1 \quad - \quad \frac{w^{-2}}{2}\cdot\frac{2n-2}{2n-1} + \frac{w^{-4}}{2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{(2n-4)\cdot(2n-6)}{(2n-1)\cdot(2n-3)} - \frac{w^{-6}}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot\frac{(2n-6)\cdot(2n-8)(2n-10)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}$$

$$+ \quad \frac{w^{-8}}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\cdot\frac{(2n-8)\cdot(2n-10)\cdot(2n-12)\cdot(2n-14)}{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot(2n-5)\cdot(2n-7)} - \&\text{c.}$$

[51]Dado que los coeficientes que acompañan multiplicativamente a las sucesivas potencias de w, tienden a 1 cuando $n \to \infty$ (ténganse en cuenta que el concepto de convergencia uniforme aún no había hecho su aparición en esta época —habría que esperar aproximadamente un siglo— así que esta justificación es del todo rigurosa para las cánones de su tiempo).

§. 30. Dividamos ahora la expresión general del numerador (§. 24.) por el mismo primer término del denominador, & tendremos la serie

$$\begin{aligned} w^{-1} \quad & - \quad \frac{w^{-3}}{2\cdot 3}\cdot\frac{2n-4}{2n-1}+\frac{w^{-5}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{(2n-6)\cdot(2n-8)}{(2n-1)\cdot(2n-3)} \\ & - \quad \frac{w^{-7}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{(2n-8)\cdot(2n-10)\cdot(2n-12)}{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot(2n-5)} \\ & + \quad \&\text{c.} \end{aligned}$$

Lo que ahora da para $n=\infty$, la serie

$$v-\frac{1}{2\cdot 3}v^3+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}v^5-\&\text{c.}$$

que es $=\sin v$, & por lo tanto el numerador, del que nos hemos servido[52] §. 5.

§. 31. Vemos además de este modo, *que, por muy grande que pueda ser el primer término de las dos fórmulas generales* (§. 24.) *el segundo término, & aún más los siguientes, serán no solamente más pequeños, sino más pequeños que la* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\cdot 3}$, $\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$ *&c. parte del primer término.*[53] Mas, sustituyendo n sucesivamente por 1, 2, 3, 4 &c. hasta el infinito, *el primer término*, siendo el producto de los números impares $1\cdot 3\cdot 5\cdot 7$&c. *crecerá más rápidamente que cualquier progresión geométrica creciente;*[54] vemos además *que, aunque se sustraiga el término* 2, 4, 6 *&c., eso no impide que la suma de los términos crezca más rápidamente que cualquier progresión geométrica creciente.*[55] Y hago aquí esta observación, porque haré uso de ella en el resto de esta Memoria. A continuación lo que se presenta en primer lugar.

§. 32. Se trata *de determinar la ley, según la cuál las fracciones*

$$\frac{1}{w},\quad \frac{3w}{3w^2-1},\quad \frac{15w^2-1}{15w^3-6w},\quad \&\text{c.}$$

[52]Aquí se cierra la segunda parte de la demostración, pero antes de entrar en la última parte —la referente a la irracionalidad— y luego de ciertas consideraciones (§. 31.), Lambert va a buscar el desarrollo en serie de la tangente a partir de su expresión en fracción continua (§. 32. - §. 37.).

[53]De la primera y segunda fórmula alternativamente.

[54]Nótese que:

$$\frac{n!}{a^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$$

con $a\neq 0$ (usando Stirling por ejemplo).

[55]Precisamente por lo observado en el primer párrafo de este mismo punto.

aproximan el valor de la tangente.[56] Para ello, no tendremos más que sustraer cada una de la que le sigue, & los residuos serán

$$\frac{1}{w\cdot(3w^2-1)},\quad \frac{1}{(3w^2-1)\cdot(15w^3-6w)},\quad \&c.$$

Estos residuos hacen ver cuán mayor es cada una de las fracciones que la que la precede. Pero hagamos ver en general que *todos los numeradores son* $=1$*, & que todos los denominadores son el producto de los de las dos fracciones cuya diferencia viene indicada por estos residuos.*

§. 33. Para ello, retomemos las tres fórmulas generales que hemos dado en §. 21. & que son

$$\frac{A}{B},$$

$$\frac{A(2n+1)w-m}{B(2n+1)w-p},$$

$$\frac{\big[A(2n+1)w-m\big](2n+3)w-A}{\big[B(2n+1)w-p\big](2n+3)w-B}.$$

Ahora, sustrayendo el primero del segundo, el residuo será

$$=\frac{Ap-Bm}{B\cdot[B(2n+1)w-p]}.$$

Pero el numerador de este residuo es el mismo que resulta de la sustracción

$$\frac{A}{B}-\frac{m}{p}=\frac{Ap-Bm}{B\cdot p}.$$

Ahora siendo $\frac{m}{p}$ la fracción que precede a la fracción $\frac{A}{B}$, vemos que el numerador de todos estos residuos es el mismo, & que el denominador es el producto de los de las fracciones, cuya diferencia viene indicada por estos residuos. Por lo tanto, al empezar por una de las fracciones $\frac{m}{p}$ cualquiera, los residuos serán

$$\frac{1}{p\cdot B},\quad \frac{1}{B\,[B(2n+1)w-p]}\quad \&c.$$

[56] La frase termina aquí con un signo de interrogación que se ha decidido omitir para mejor comprensión del texto.

§. 34. Observemos ahora, *que siendo todos estos residuos sumados a la primera fracción, que se pone como base, la suma expresará siempre la tangente de* v, *de manera que en general será*[57]

$$\tan v = \frac{m}{p} + \frac{1}{p \cdot B} + \frac{1}{B \cdot [B(2n+1)w - p]} + \text{\&c.}$$

& por consiguiente

$$\begin{aligned}
\tan v &= \frac{1}{w} + \frac{1}{w(3w^2-1)} + \frac{1}{(3w^2-1)\cdot(15w^3-6w)} + \text{\&c.}\\
\tan v &= \frac{3w}{3w^2-1} + \frac{1}{(3w^2-1)(15w^3-6w)} + \text{\&c.}\\
\tan v &= \frac{15w^2-1}{15w^3-6w} + \frac{1}{(15w^3-6w)\cdot(105w^4-45w^2+1)} + \text{\&c.}\\
\text{\&c.}
\end{aligned}$$

Vemos por lo tanto por lo que hemos dicho (§. 31.) *que todas estas series son más convergentes, de lo que lo es cualquier progresión geométrica decreciente.* Sea p.ej. $v = w = 1$, & la tangente de este arco será $= 1,55740772 \cdot\cdot\cdot\cdot$

$$= 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{9\cdot 61} + \frac{1}{61\cdot 540} + \frac{1}{540\cdot 5879} + \frac{1}{5879\cdot 75587} + \frac{1}{75587\cdot 1147426} + \text{\&c.}^{1)}$$

Y para todo arco $v < 1$, tendremos una serie incluso más convergente.

§. 35. Hagamos ahora $w = \omega : \varphi$, $v = \varphi : \omega$, de manera que φ, ω sean números enteros cualesquiera, primos entre sí. *No tendremos más que sustituir estos valores, &*

[57]En realidad esto responde a un marco más general. Dada una determinada fracción continua:

$$f = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}}$$

esta se puede ver como:

$$f = \frac{p_1}{q_1} + \left(\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1}\right) + \left(\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2}\right) + \cdots$$

será

$$\tan\left(\frac{\varphi}{\omega}\right) = \cfrac{\varphi}{\omega - \cfrac{\varphi\varphi}{3\omega - \cfrac{\varphi\varphi}{5\omega - \cfrac{\varphi\varphi}{7\omega - \cfrac{\varphi\varphi}{9\omega - \ \&c.}}}}}$$

§. 36. Luego *las fracciones que aproximan*[58] *el valor de la* $\tan\dfrac{\varphi}{\omega}$ *serán*

$$\frac{\varphi}{\omega}, \quad \frac{3\omega\varphi}{3\omega^2-\varphi^2}, \quad \frac{15\omega^2\varphi-\varphi^3}{15\omega^3-6\varphi^2\omega}, \quad \frac{105\omega^3\varphi-10\omega\varphi^3}{105\omega^4-45\omega^2\varphi^2+\varphi^4}, \quad \&c.$$

de manera que siendo dos de estas fracciones consecutivas cualesquiera

$$\frac{m}{p},$$

$$\frac{A}{B},$$

la que le sucede será

$$\frac{A(2n+1)\omega - m\varphi^2}{B(2n+1)\omega - p\varphi^2}.$$

§. 37. Finalmente *las diferencias de estas fracciones serán*

$$\frac{\varphi^3}{\omega(3\omega^2-\varphi^2)}, \quad \frac{\varphi^5}{(3\omega^2-\varphi^2)\cdot(15\omega^3-6\omega\varphi^2)}, \quad \&c.$$

& la

$$\tan\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\varphi}{\omega} + \frac{\varphi^3}{\omega(3\omega^2-\varphi^2)} + \frac{\varphi^5}{(3\omega^2-\varphi^2)\cdot(15\omega^3-6\omega\varphi^2)} + \quad \&c.$$

Ahora yo digo que esta tangente no será jamás conmensurable al radio, cualesquiera que sean los números enteros ω, φ.

[58] Lambert utiliza el adjetivo «approchantes». Al hacer referencia a las fracciones convergentes de una fracción continua, se podría haber optado por usar el plural del término, hoy común, «convergente», pero se ha decidido no hacerlo por considerar que apelaba a un concepto, el de convergencia, aún no plenamente desarrollado en la época. Bien es cierto que Lambert sabe que esas fracciones «convergen» a la tangente —y téngase esto en cuenta— pero usar dicho término podría sonar anacrónico. Por otro lado, el término «aproximante» (traducción literal), en español tiene un significado concreto alejado del significado de convergencia (según la RAE: «Dicho de una consonante: Que se articula de forma similar a las fricativas, pero con una abertura más amplia de los órganos fonatorios y sin ruido de fricción»). De ahí que se haya traducido como «que aproximan».

§. 38. Para demostrar este teorema,[59] pongamos

$$\tan\frac{\varphi}{\omega} = \frac{M}{P},$$

de manera que M, P, sean cantidades expresadas de cualquier forma, incluso, si queremos por sucesiones decimales, lo que podrá hacerse siempre, aunque M, P, sean números enteros, ya que no tendremos más que multiplicar uno & otro por alguna cantidad irracional.[60] Podemos incluso, si lo deseamos, suponer, $M = \sin\frac{\varphi}{\omega}$, $P = \cos\frac{\varphi}{\omega}$, como hemos hecho más arriba (§. 5.). Y es claro que, aunque la $\tan\frac{\varphi}{\omega}$ fuese racional, no tendría que pasar siempre lo mismo con el $\sin\frac{\varphi}{\omega}$ & el $\cos\frac{\varphi}{\omega}$.

§. 39. Ahora bien la fracción

$$\frac{M}{P}$$

expresando exactamente la tangente de $\dfrac{\varphi}{\omega}$, debe dar todos los cocientes w, $3w$, $5w$ &c.

[59] Desde este punto hasta §. 51 el texto está dedicado a la prueba de irracionalidad, y para dicha prueba, Lambert utiliza el método de reducción al absurdo partiendo de un $v \in \mathbb{Q}$ y suponiendo que también $\tan v \in \mathbb{Q}$. Apoyado en esta suposición, construye una sucesión de números reales (usando nuestro lenguaje) R', R'', R''', $\ldots$, R^n, $\ldots$, tales que $R^n = D \cdot r^n$ —donde los r^n son números enteros no nulos y donde $D \not\subset \mathbb{Q}$ es fijo— y tal que $R^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. De esta forma, necesariamente $D = 0$, contradiciendo su irracionalidad.

[60] El significado de esta frase es que, siendo la tangente el cociente entre el seno y el coseno, independientemente de la naturaleza de ambos —«aunque sean números enteros»— siempre se podrá transformar dicho cociente en una fracción en la que numerador y denominador «sean cantidades expresadas de cualquier forma, incluso, si queremos por sucesiones decimales», multiplicando ambos por una cantidad irracional. Pero analicemos más de cerca la frase. La palabra que usa Lambert y que aquí se ha traducido como «sucesiones» es «suits», una palabra que puede referirse a algo finito —una sucesión de acontecimientos— o infinito, que es el sentido que él mismo le da cuando trata con las series (= sucesión de sumas). ¿Pero a qué se está refiriendo aquí cuando habla de «sucesiones decimales»? Parece que a algo infinito porque si se multiplicaran esos enteros por decimales finitos, se obtendrían decimales finitos que así mismo se transformarían de inmediato en fracciones, volviendo al caso de numerador y denominador enteros. Para evitar esto habría que elegir una sucesión infinita (no periódica) de decimales —irracionales—, que es de hecho lo que hace. Esto parece señalar que Lamert pensaba los irracionales (al menos π en este caso) como formados por infinitos decimales en acto. Una prueba más clara la tenemos en la ya citada parte V de [Lambert 1766/1770]. Allí asocia cada convergente de la fracción continua, que son infinitas, a una aproximación decimal de π que llama «números Ludolphianos» (en esta *Mémoire* también hace referencia a ellos justo al comienzo) —no π —lo que muestra una clara conciencia de π como formado por una cantidad infinita actual de decimales, resultado de no truncar en ningún paso la fracción continua, algo en sí mismo notorio, y que es representante del punto de inflexión (1600-1800) entre el considerar los decimales como meros útiles de aproximación en el estudio de ciertas magnitudes (900-1600) con S. Stevin como representante más tardío, a ser el objeto de estudio mismo (1750-1950) [Ferreirós 2015, pp. 146-149].

que en el caso presente son

$$+\frac{\omega}{\varphi}, \quad -\frac{3\omega}{\varphi}, \quad +\frac{5\omega}{\varphi}, \quad -\frac{7\omega}{\varphi}, \quad + \quad \&c.$$

§. 40. Luego, si la $\tan\frac{\varphi}{\omega}$ es racional es claro, que M será a P como un número entero μ a un número entero[61] π, de manera que si μ, π, son primos entre sí, será

$$M : \mu = P : \pi = D,$$

& D será el máximo común divisor de M, P. Y como recíprocamente

$$\begin{aligned} M : D &= \mu, \\ P : D &= \pi, \end{aligned}$$

vemos que M, P suponiéndose cantidades irracionales, su máximo común divisor será igualmente una cantidad irracional, más pequeña, cuanto más grandes sean los cocientes[62] μ, π.

§. 41. He aquí por lo tanto *las dos suposiciones de las que habrá que mostrar la*

[61]Es claro que Lambert no está usando aquí la letra π como representante de la razón entre la circunferencia y su diámetro, aunque dicho símbolo ya había sido usado antes con este propósito (por primera vez) por William Jones en 1706, si bien es cierto que la popularidad se la da en gran medida Euler al incluirlo en su *Introductio in analysin infinitorum* de 1748 (ver [Cajori 1893, pp. 8–13] para más detalle). No resulta extraño de todos modos, que un autor de la época no utilizara una notación que apenas empezaba a cuajar (hay pensar que la información no fluía como hoy en día, importante detalle que no debemos obviar), aunque no deja de ser curioso que de entre todas las posibles letras hubiera escogido precisamente esa. No obstante, Lambert en [Lambert 1766/1770] reserva el símbolo π para la razón entre la circunferencia y el diámetro (por ejemplo en p. 147).

[62]En resumen, lo que tenemos es que pudiendo expresar la tangente como

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{M}{P}$$

con $M \not\in \mathbb{Q}$ y $P \not\in \mathbb{Q}$, y suponiendo además que $\tan v \in \mathbb{Q}$, existirán dos números enteros μ y π tales que

$$\tan v = \frac{M}{P} = \frac{\mu}{\pi}$$

y por lo tanto un $D \not\in \mathbb{Q}$ tal que $\mu \cdot D = M$ y $\pi \cdot D = P$, con lo que:

$$\frac{M}{D} = \mu \in \mathbb{Z} \qquad \text{y} \qquad \frac{P}{D} = \pi \in \mathbb{Z} \tag{5.1}$$

incompatibilidad. Dividamos primero[63] P por M, & el cociente debe ser $= \omega : \varphi$. Pero como $\omega : \varphi$ es un número fraccionario, dividamos φP por M, & el cociente ω será φ-tupla de $\omega : \varphi$. Es claro que podremos dividirlo por φ, cuando se quiera. Aquí no será necesario, puesto que es suficiente que sea un número entero. Habiendo por lo tanto obtenido el cociente ω dividiendo φP por M, sea el residuo $= R'$. Este residuo será igualmente φ-tupla de lo que habría sido, & que tendremos en cuenta. Ahora, como $P : D = \pi$, es un número entero, $\varphi P : D = \varphi\pi$ también será un número entero. Finalmente $R' : D$ será también un número entero. Ya que, puesto que

$$\varphi P = \omega M + R',$$

será

$$\frac{\varphi P}{D} = \frac{\omega M}{D} + \frac{R'}{D}.$$

Pero

$$\begin{aligned} \varphi P : D &= \varphi\pi, \\ \omega M : D &= \omega\mu, \end{aligned}$$

por lo que

$$\varphi\pi = \omega\mu + \frac{R'}{D},$$

lo que da

$$\frac{R'}{D} = \varphi\pi - \omega\mu = \text{número entero},$$

que pondremos $= r'$, de manera que

$$\frac{R'}{D} = r'.$$

Por lo tanto el residuo de la primera división tendrá de nuevo a D como divisor, que es el máximo común divisor de[64] M, P.

[63] Aquí es donde Lambert empieza, paso a paso (§. 41 y §. 42), la construcción de la sucesión a la que se aludía antes, lo que finalizará con una propuesta de término general (§. 43) y su demostración (§. 44.). Como los pasos que sigue no aparecen del todo claros en el texto, se seguirán paralelamente en las notas.

[64] **Paso 1:**

Si $\tan\dfrac{\varphi}{\omega} = \dfrac{M}{P}$,

$$\tan\frac{\varphi}{\omega} = \frac{M}{P} = \frac{1}{\dfrac{P}{M}} = \frac{1}{\dfrac{\omega}{\varphi} + \dfrac{{}^1R}{M}}$$

donde ${}^1R$ es el residuo de la primera división (ese que dice Lambert que hay que tener en cuenta. Por

§. 42. Pasemos ahora a la segunda división. El residuo R' siendo φ-tupla de lo que sería si hubiéramos dividido P, en lugar de φP, por M, habrá que tenerlo en cuenta en esta segunda división, dividiendo φM, en lugar de M, por R', a fin de encontrar el segundo cociente, que es $= 3\omega : \varphi$. Pero, para evitar de nuevo aquí el cociente fraccionario, dividamos $\varphi^2 M$ por R', para obtener el cociente 3ω, número entero. Sea el residuo $= R''$, & será

$$\varphi^2 M = 3\omega R' + R'',$$

por lo que dividiendo entre D,

$$\frac{\varphi^2 M}{D} = \frac{3\omega R'}{D} + \frac{R''}{D}.$$

Pero

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^2 M}{D} &= \varphi^2 m = \text{número entero}, \\ \frac{3\omega R'}{D} &= 3\omega r' = \text{número entero}, \end{aligned}$$

por lo que

$$\varphi^2 m = 3\omega r' + \frac{R''}{D},$$

lo que da

$$\frac{R''}{D} = \varphi^2 m - 3\omega r' = \text{número entero},$$

que pondremos $= r''$, de manera que sea

$$\frac{R''}{D} = r''.$$

---

otro lado, la razón por la cual en la anterior expresión —así como en las que vendrán en los siguientes pasos— aparece un $+$ donde debería haber un $-$, es que el signo está contenido en ${}^1R$, y por consiguiente en el R' que aparecerá más abajo. Al final de este proceso se verá cómo se tiene en cuenta este signo). Ahora multiplicando por φ en el lugar adecuado:

$$\frac{1}{\varphi \cdot \frac{P}{M}} = \frac{1}{\omega + \frac{{}^1R \cdot \varphi}{M}} = \frac{1}{\omega + \frac{R'}{M}}$$

se obtiene que $\varphi P = \omega M + R'$, y por lo tanto:

$$\begin{cases} R' = \varphi P - \omega M \\ \\ \frac{R'}{D} = r' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La segunda igualdad (el carácter entero de $\frac{R'}{D}$), se obtiene directamente de dividir la primera igualdad entre D y de tener en cuenta (5.1).

Por lo tanto el máximo común divisor de M, P, R', lo es de nuevo del segundo residuo[65] R''.

§. 43. Sean los siguientes residuos $\cdots R'''$, R^{IV} $\cdots\cdots R^n$, R^{n+1}, R^{n+2} $\cdots$, que corresponden a los cocientes φ-tuplas $\cdot\cdot$ 5ω, 7ω $\cdots$ $(2n-1)\omega$, $(2n+1)\omega$, $(2n+3)\omega$ $\cdots$, & se trata de demostrar en general, que si dos residuos consecutivos cualesquiera R^n, R^{n+1}, que se siguen inmediatamente, tienen de nuevo a D por divisor, el residuo siguiente R^{n+2} lo tendrá igualmente, de manera que si, haciendo

$$\begin{aligned} R^n : D &= r^n, \\ R^{n+1} : D &= r^{n+1}, \end{aligned}$$

r^n, r^{n+1} son números enteros, tendremos también [que][66]

$$R^{n+2} : D = r^{n+1},$$

[será] un número entero. He aquí la demostración.

---

[65]**Paso 2:**
Ahora, lo mismo que se ha hecho con $\frac{M}{P}$ se hará con $\frac{R'}{M}$, pero hay que tener en cuenta que este no es el residuo de la fracción continua que define a la tangente, puesto que es el resultado de multiplicar $\frac{{}^1R}{M}$, que sí es el residuo de dicha fracción continua, por φ. Por eso se multiplica el denominador M por φ:

$$\frac{R'}{M\cdot\varphi} = \frac{{}^1R\cdot\varphi}{M\cdot\varphi} = \frac{1}{\dfrac{M\cdot\varphi}{{}^1R\cdot\varphi}} = \frac{1}{\dfrac{3\omega}{\varphi} + \dfrac{{}^2R}{R'}}$$

para volver de nuevo a la fracción continua. Ahora ${}^2R$ es el residuo de la segunda división, y se repite el proceso del paso 1 multiplicando por φ en el lugar adecuado:

$$\frac{1}{\dfrac{M\varphi^2}{R'}} = \frac{1}{\dfrac{M\varphi\cdot\varphi}{{}^1R\varphi}} = \frac{1}{3\omega + \dfrac{{}^2R\cdot\varphi}{R'}} = \frac{1}{3\omega + \dfrac{R''}{R'}}$$

Así, $\varphi^2 M = 3\omega R' + R''$ obteniendo de la misma forma dos igualdades:

$$\begin{cases} R'' = \varphi^2 M - 3\omega R' \\ \\ \dfrac{R''}{D} = r'' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

de donde de nuevo la segunda se deduce directamente de la primera sin más que dividir entre D, y teniendo en cuenta que tanto $\frac{M}{D}$ como $\frac{R'}{D}$ son números enteros.

[66]Hay una errata; la expresión debería ser:

$$R^{n+2} : D = r^{n+2},$$

§. 44. Dividiendo $\varphi^2 R^n$ por R^{n+1}, el cociente será[67] $(2n+1)\omega =$ número entero, & siendo el residuo $= R^{n+2}$, será

$$\varphi^2 R^n = (2n+1)\omega \cdot R^{n+1} + R^{n+2},$$

luego dividiendo por D,

$$\frac{\varphi^2 \cdot R^n}{D} = \frac{(2n+1)\omega \cdot R^{n+1}}{D} + \frac{R^{n+2}}{D}$$

Pero

$$\begin{aligned}\frac{\varphi^2 R^n}{D} &= \varphi^2 r^n = \text{número entero},\\ \frac{(2n+1)\omega \cdot R^{n+1}}{D} &= (2n+1)\omega r^{n+1} = \text{número entero},\end{aligned}$$

por lo que

$$\varphi^2 r^n = (2n+1)\omega \cdot r^{n+1} + \frac{R^{n+2}}{D},$$

lo que da

$$\frac{R^{n+2}}{D} = \varphi^2 \cdot r^n - (2n+1)\omega \cdot r^{n+1} = \text{número entero} = r^{n+2}.$$

Y esto es lo que había que demostrar.

§. 45. Ahora hemos visto que r', r'' son números enteros (§. 41. 42.) por lo tanto también r''', r^{IV}, $\cdots\cdots r^n \cdots\cdots$ &c. hasta el infinito serán números enteros. Entonces todos los residuos indistintamente R', R'', $R''' \cdots\cdots R^n \cdots$ &c. hasta el infinito tendrán a D como divisor común. Encontremos ahora el valor de estos residuos expresado a través de M, P.

§. 46. Para este efecto cada división nos proporciona una ecuación, en la que

$$\begin{aligned}R' &= \varphi P - \omega M,\\ R'' &= \varphi^2 M - 3\omega \cdot R',\\ R''' &= \varphi^2 R' - 5\omega \cdot R'',\end{aligned}$$

Mas observemos que, en el caso del que se trata, los cocientes ω, 3ω, 5ω &c. son alternativamente positivos & negativos, & que los signos de los residuos se suceden en el orden

[67] Hay un problema con los índices ya que, si por ejemplo, $n=1$, se obtendría $\varphi^2 R' = 3\omega \cdot R'' + R'''$ en lugar de la expresión correcta $\varphi^2 R' = 5\omega \cdot R'' + R'''$. El término general para el cociente debería ser por lo tanto $(2n+3)\omega$ (téngase en cuenta a lo largo de este punto y en §. 46).

$- - ++$. Por lo tanto estas ecuaciones se transforman en[68]

$$\begin{aligned} R' &= \omega M - \varphi P, \\ R'' &= 3\omega R' - \varphi^2 M, \\ R''' &= 5\omega R'' - \varphi^2 R', \\ R^{IV} &= 7\omega R''' - \varphi^2 R'', \\ &\&\text{c.} \end{aligned}$$

Y en general

$$R^{n+2} = (2n-1)\omega \cdot R^{n+1} - \varphi^2 R^n.$$

De donde vemos que cada residuo se encuentra, mediante los dos precedentes, de la misma forma que los numeradores & denominadores de las fracciones que aproximan el valor de[69] $\tan \frac{\varphi}{\omega}$. (§. 36.)

§. 47. Haciendo entonces las sustituciones que indican estas ecuaciones, a fin de expresar todos estos residuos por medio de M, P, tendremos

$$\begin{aligned} R' &= \omega M - \varphi P, \\ R'' &= (3\omega^2 - \varphi^2)M - 3\omega\varphi \cdot P, \\ R''' &= (15\omega^3 - 6\omega\varphi^2)M - (15\omega^2\varphi - \varphi^3)P, \\ &\&\text{c.} \end{aligned}$$

Y siendo estos coeficientes de M, P los numeradores & denominadores de las fracciones

---

[68] Aquí es donde se tienen en cuenta los signos.

[69] Queda construida entonces, una sucesión de números reales R', R'', R''', $\ldots$, R^n, $\ldots$, definida por:

$$\begin{cases} R' = \omega M - \varphi P \\ R'' = 3\omega R' - \varphi^2 M \\ R^{n+2} = (2n+3)\omega R^{n+1)} - \varphi^2 R^{n)} \ , \ n \geq 1 \end{cases}$$

y una de números enteros no nulos r', r'', r''', $\ldots$, r^n, $\ldots$, relacionada con la anterior de la siguiente forma:

$$R^n = D \cdot r^n \ , \ n \geq 1$$

con $D \not\in \mathbb{Q}$.

El último paso es demostrar que esa sucesión converge a cero (§. 47. - §. 51.).

encontradas arriba para la $\tan\frac{\varphi}{\omega}$, (§. 36.), vemos también que se cumplirá

$$\frac{M}{P} - \frac{\varphi}{\omega} = \frac{R'}{\omega P},$$

$$\frac{M}{P} - \frac{3\omega\varphi}{3\omega^2-\varphi^2} = \frac{R''}{(3\omega^2-\varphi^2)\cdot P},$$

$$\frac{M}{P} - \frac{15\omega^2\varphi-\varphi^3}{15\omega^3-6\omega\varphi^2} = \frac{R'''}{(15\omega^3-6\omega\varphi^2)P},$$

&c.

§. 48. Pero[70]

$$\frac{M}{P} = \tan\varphi.$$

Entonces[71] (§. 37. 34.)

$$\frac{M}{P} - \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\varphi^3}{\omega(3\omega^2-\varphi^2)} + \frac{\varphi^5}{(3\omega^2-\varphi^2)\cdot(15\omega^3-6\omega\varphi^3)} + \&c.$$

$$\frac{M}{P} - \frac{3\omega\varphi}{3\omega^2-\varphi^2} = \frac{\varphi^5}{(3\omega^2-\varphi^2)\cdot(15\omega^3-6\omega\varphi^2)} + \&c.$$

Por lo que

$$\frac{R'}{\omega P} = \frac{\varphi^3}{\omega(3\omega^2-\varphi^2)} + \frac{\varphi^5}{(3\omega^2-\varphi^2)\cdot(15\omega^3-6\omega\varphi^2)} + \&c.$$

$$\frac{R''}{(3\omega^2-\varphi^2)P} = \frac{\varphi^5}{(3\omega^2-\varphi^2)\cdot(15\omega^3-6\omega\varphi^2)} + \&c.$$

$$\frac{R'''}{(15\omega^3-6\omega\varphi^2)P} = \frac{\varphi^7}{(15\omega^3-6\omega\varphi^2)\cdot(105\omega^4-45\omega^2\varphi^2+\varphi^4)} + \&c.$$

[70] Hay una errata. Debería ser:

$$\frac{M}{P} = \tan\frac{\varphi}{\omega}.$$

[71] Hay una errata en la primera expresión. Debería de ser:

$$\frac{M}{P} - \frac{3\omega\varphi}{3\omega^2-\varphi^2} = \frac{\varphi^5}{(3\omega^2-\varphi^2)\cdot(15\omega^3-6\omega\varphi^2)} + \&c.$$

De esta manera todos los residuos se encontrarán mediante la serie de las diferencias (§. 37.)

$$\begin{aligned}\tan\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\varphi}{\omega} &+ \frac{\varphi^3}{\omega(3\omega^2-\varphi^2)} + \frac{\varphi^5}{(3\omega^2-\varphi^2)(15\omega^3-6\omega\varphi^2)} \\ &+ \frac{\varphi^7}{(15\omega^3-6\omega\varphi^2)(105\omega^4-45\omega^2\varphi^2+\varphi^4)} \\ &+ \&c.\end{aligned}$$

omitiendo los primeros términos 1, 2, 3, 4 &c., & multiplicando la suma de los siguientes por el primer factor del denominador del primer término que se retiene, & por[72] P.

§. 49. Ahora bien esta sucesión de diferencias es más convergente que cualquier progresión geométrica decreciente (§. 34. 35.). Por lo tanto los residuos R', R'', R''' &c. decrecen de tal manera que al final terminan siendo más pequeños que cualquier cantidad asignable.[73] Y como cada uno de estos residuos, teniendo a D como común divisor, es un

[72]En resumen, recordando que:

$$\frac{M}{P} = \mathcal{S} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{p_0}{q_0}}_{\mathcal{S}_1} + \left(\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_0}{q_0}\right)}_{\mathcal{S}_2} + \left(\frac{p_2}{q_2}-\frac{p_1}{q_1}\right)}_{\mathcal{S}_3} + \left(\frac{p_3}{q_3}-\frac{p_2}{q_2}\right)}_{\mathcal{S}_4} + \cdots$$

donde $\mathcal{S}_n$ es la suma parcial n-ésima de la serie infinita $\mathcal{S}$ convergente a $\frac{M}{P}$ definida a partir de su fracción continua, se tiene que:

$$\frac{M}{P} - \frac{p_n}{q_n} = \mathcal{S} - \mathcal{S}_n$$

y por lo tanto:

$$\frac{R'}{\omega P} = \mathcal{S}-\mathcal{S}_1, \quad \frac{R''}{(3\omega^2-\varphi^2)P} = \mathcal{S}-\mathcal{S}_2, \quad \frac{R'''}{(15\omega^3-6\omega\varphi^2)P} = \mathcal{S}-\mathcal{S}_3 \quad \cdots \quad \frac{R^{n)}}{F_n P} = \mathcal{S}-\mathcal{S}_n \quad \cdots$$

de donde $R^n = (\mathcal{S}-\mathcal{S}_n)P\cdot F_n$, siendo F_n el primer factor del denominador de la convergente n-ésima de $\tan\frac{\varphi}{\omega}$, $n \geq 1$.

[73]Es probable que el que esté leyendo estas líneas se esté haciendo la misma pregunta que se hizo el autor de este trabajo: ¿por qué el que $\mathcal{S}-\mathcal{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ con más rapidez que cualquier progresión geométrica decreciente, implica que $R^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$? En esta igualdad:

$$R^n = (\mathcal{S}-\mathcal{S}_n)P\cdot F_n$$

hay un factor, F_n, nada despreciable ($F_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$). ¿Está tan claro que esa convergencia de $\mathcal{S}-\mathcal{S}_n$ a cero sea lo suficientemente rápida como para «llevarse a F_n por delante» y así concluir que $R^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$? Uno parece verse llevado a intentar probar que $(\mathcal{S}-\mathcal{S}_n)$ (A_n para simplificar la escritura; P no afecta pues es una constante) converge efectivamente más rápido que cualquier progresión geométrica decreciente y que F_n no, es decir, que converge más despacio de lo que lo haría una progresión geométrica creciente, múltiplo de D, se sigue que este divisor común D es más pequeño que cualquier cantidad asignable, lo que hace que $D = 0$, & lleve a la consecuencia, de que $(M : P)$ es una cantidad inconmensurable a la unidad, o irracional.[74]

---

razonamiento que parece estar implícito en su afirmación, pero no nos llevaría a ningún lado. ¿Cuál es la situación entonces? A la luz de posteriores resultados sobre fracciones continuas, Christopher Baltus en [Baltus 2003] analiza el caso (agradezco al profesor Baltus su amable trato, su reflexión sobre el tema, y el haberme facilitado el trabajo con el que pude dar respuesta a mi duda). Grosso modo, lo que hace es estudiar la rapidez con la que convergen las tres sucesiones intervinientes analizando las razones entre términos consecutivos (lo hace término a término pues cada A_n es en sí una serie infinita aunque aquí se expresará en términos globales). La relación entre estas razones es:

$$\frac{R^{n+1}}{R^n} = \frac{A_{n+1}}{A_n} \cdot \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

donde, como prueba:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{F_{n+1}}{F_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

y donde:

$$\frac{R^{n+1}}{R^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

lo que lleva a que:

$$R^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Estas últimas cuatro relaciones, lo que nos vienen a decir es que a pesar de que la sucesión F_n converge a infinito (y rápidamente de hecho), la sucesión R^n converge a cero dada la «supremacía» de A_n sobre F_n, tal y como había afirmado Lambert. Ahora bien, volviendo a lo que parece decir Lambert, la afirmación:

> R^n converge a cero porque $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ más rápido que una progresión geométrica decreciente

es engañosa, dado que $\frac{F_{n+1}}{F_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, es decir, la sucesión F_n no converge a infinito más despacio de lo que lo haría una progresión geométrica creciente; lo hace más rápido, puesto que dada una tal progresión:

$$a,\ a^2,\ a^3, \ldots, a^n,\ a^{n+1}, \ldots$$

con $|a| > 1\,, a \neq 0$:

$$\frac{a^{n+1}}{a^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a < \infty$$

¿Cómo interpretar por lo tanto sus palabras? Pues una de dos: o se equivocó pero acertó, en una de esas felices uniones entre error y acierto, o simplemente con esas palabras apelaba a una más que suficiente rápida convergencia a cero de A_n, algo que por otro lado no es, al menos siguiendo el camino trazado por Baltus, en absoluto trivial.

[74] Es decir, dado que:

$$\begin{aligned} R^n &= D \cdot r^n \\ R^n &= (\mathcal{S} - \mathcal{S}_n) P \cdot F_n \end{aligned}$$

§. 50. Por lo tanto *siempre que un arco de círculo* $= \dfrac{\varphi}{\omega}$ *sea conmensurable al radio* $= 1$, *o racional, la tangente de este arco será una cantidad inconmensurable al radio, o irracional.* Y recíprocamente *ninguna tangente racional lo es de un arco racional.*[75]

§. 51. Ahora bien siendo la tangente de 45° racional, igual al radio, se sigue que el arco de 45° grados, & por lo tanto el arco de 90°, 180°, 360° grados, es inconmensurable al radio. Por lo tanto *la circunferencia del círculo no es al diámetro como un número entero a un número entero.* He aquí este teorema en forma de corolario de otro teorema infinitamente más universal.[76]

§. 52. Ciertamente, podemos tener motivos para estar sorprendidos por esta absoluta universalidad. Además de que nos hace saber hasta qué punto las cantidades circulares son trascendentes, nos hace ver también, *que las tangentes racionales & los arcos racionales no se distribuyen por toda la circunferencia del círculo, como si estuvieran colocadas al azar, sino que tiene que haber un cierto orden, & que este orden impide que se encuentren jamás.* Este orden merece, sin duda, ser conocido en más detalle. Veamos entonces hasta donde será posible determinar las leyes. Esto es a lo que llevarán los teoremas siguientes.[77]

---

y que, por lo que afirma Lambert y que se acaba de discutir, $R^n = (\mathcal{S} - \mathcal{S}_n)P \cdot F_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, se sigue necesariamente que $D = 0$ puesto que todos los r^n son números enteros no nulos, lo que es una contradicción ya que recordemos que $D \not\in \mathbb{Q}$.

[75]Dos comentarios. El primero es que este resultado ya aparece anunciado en 1719 en la *Mémoire sur la quadrature du cercle, & sur la mesure de tout Arc, tout Secteur, & tout Segment donné* de Thomas Fantet de Lagny, aunque sin demostración [Brezinski 1991, p. 95, 96]. Desconozco si Lambert era conocedor de este hecho aunque me inclinaría por el «no», habida cuenta de que no parece que tuviese problemas a la hora de citar fuentes —lo hace al citar a Foncenex (ver §. 74.) y lo hace al reconocer que Euler fue su motivación hacia las fracciones continuas— y el nombre de Lagny no aparece. Es cierto que Lambert en [Lambert 1766/1770, p. 146] hace referencia a los 127 decimales de la aproximación de π que da Lagny precisamente en este trabajo, pero es posible que solo se estuviese haciendo eco de una dato que, por otro lado, era ampliamente conocido. Lo segundo a comentar es que el inverso del teorema que demuestra Lambert no cierto, es decir:

$$\tan v \not\in \mathbb{Q} \quad \not\Longrightarrow \quad v \in \mathbb{Q}$$

ya que hay arcos irracionales donde la tangente es irracional. De hecho, todo arco de la forma $v = \frac{k\pi}{n} \not\in \mathbb{Q}$ cumple que $\tan v \not\in \mathbb{Q}$ (excepto para los valores obvios de $v = \pm\pi\,, \pm\frac{\pi}{4}$) [Calcut 2006].

[76]En un lenguaje más nuestro: como $\tan\frac{\pi}{4} = 1 \in \mathbb{Q}$, entonces $\frac{\pi}{4} \not\in \mathbb{Q}$ con lo que:

$$\pi \not\in \mathbb{Q}$$

He aquí la primera demostración de la irracionalidad de π.

[77]Lambert empieza a extraer —desde §. 53. a §. 71.— una serie de propiedades para la tangente que acaban justificando la introducción del concepto de *tangente prima* (§. 60.), y que —en base a su definición—, *«Recuerdan de alguna forma a los números primos …»* (§. 62.). Parece que hace esto para

§. 53. En primer lugar sabemos que, *si dos tangentes son racionales, la tangente de la suma & la de la diferencia de sus arcos son igualmente racionales.* Ya que[78]

$$\operatorname{tang}(\omega+\varphi)=\frac{t\omega+t\varphi}{1-t\omega\cdot t\varphi},$$

$$\operatorname{tang}(\omega-\varphi)=\frac{t\omega-t\varphi}{1+t\omega\cdot t\varphi}.$$

§. 54. De ahí se sigue, *que si una tangente es racional, la tangente de un múltiplo cualquiera de su arco*[79] *será igualmente racional.*

§. 55. Pero al contrario, *si una tangente es racional*[1)],[80] *ninguna parte alícuota de su arco tendrá una tangente racional.* Ya que siendo el arco propuesto múltiplo de cada una de sus partes alícuotas, es claro que si la tangente de una de sus partes alícuotas fuese racional, la tangente sería racional (§. 54.).

§. 56. *Si la tangente de cada uno de dos arcos conmensurables entre sí es racional, la tangente del máximo común divisor de estos dos arcos será igualmente racional.* Sean ω, φ los dos arcos propuestos. Pues bien, siendo conmensurables, ω será a φ como un número entero m a un número entero n. Sean estos números m, n, primos entre sí, & la unidad será su máximo común divisor. Haciendo por lo tanto

$$\omega=m\psi,$$

$$\varphi=n\psi,$$

& el arco ψ será el máximo común divisor de los arcos ω, φ. Ahora yo digo que la $\operatorname{tang}\psi$ será racional. Sea $m>n$, & sustrayendo n de m tantas veces como se pueda, sea el último

mostrar de alguna forma *«... lo que reduce infinitamente la posibilidad de encontrar un arco racional, cuya tangente sea igualmente racional»* (§. 68.), es decir, para mostrar de una forma heurística quizá, el hecho de que la tangente de un arco racional no pueda ser racional, que es lo que viene de demostrar en la primera parte de este trabajo. Estas mismas propiedades que extrae para la tangente se pueden extender al coseno (§. 70.) pero no así al seno (§. 71.).

[78] Téngase en cuenta de ahora en adelante, que Lambert escribe **tang** o **t** indistintamente para la tangente.

[79] Está pensando en múltiplos enteros (ver §. 62.).

[80] Es claro, como se extrae fácilmente del razonamiento expuesto por Lambert en las siguientes líneas, que aquí hay un error: debería decir irracional.

resto $= r$, todas las[81] $\operatorname{tang}(m-n)\psi = t(\omega-\varphi)$, $\operatorname{tang}(m-2n\psi) = t(\omega-2\varphi)$, &c. $\operatorname{tang} r\psi$, serán racionales (§. 53.). Sustráigase r de n tantas veces como se pueda, sea el último residuo $= r'$. Sustráigase ahora r' de r tantas veces como se pueda, sea el último residuo r'' &c. Y continuando de esta manera, siendo los números m, n primos entre sí, llegarán a un residuo $= 1$ (*Euclid.* Pr. I. Livr. VII.). Pero por el §. 53. todas las tangentes[82]

$$\begin{array}{llcr} t(m-n)\psi, & t(m-2n)\psi & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & tr\psi, \\ t(n-r)\psi, & t(n-2r)\psi & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & tr'\psi, \\ t(r-r')\psi, & t(n-2r')\psi & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & tr''\psi, \\ \quad \&c. & & & \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot & t\psi, \end{array}$$

serán racionales. Por lo tanto &c.

§. 57. Es claro que de esta forma (§. 53.), dadas dos tangentes racionales cualesquiera, se pueden conocer todas estas tangentes por medio de $\operatorname{tang}\omega$, $\operatorname{tang}\varphi$ sin que se conozcan los arcos, ¿encontraremos si sus arcos son conmensurables entre sí? Ahora bien si los arcos no lo son, la tarea no tendrá fin.

§. 58. *Si dos partes alícuotas de un arco cualquiera tienen tangentes racionales, digo que la tangente del máximo común divisor de estas dos partes alícuotas será igualmente racional.* Este teorema se sigue inmediatamente del precedente (§. 56.). No hay más que recordar, que dos arcos ω, φ, que son partes alícuotas de un arco A, son conmensurables entre sí.

§. 59. De la misma manera, *si tantas partes alícuotas de un arco A, como queramos, tienen tangentes racionales, la tangente del arco, que es el máximo común divisor de estas*

[81] Aquí hay una errata. Como se puede comprobar fácilmente, debería ser:

$$\operatorname{tang}(m-n)\psi = t(\omega-\varphi),\ \operatorname{tang}(m-2n\cancel{\psi})\psi = t(\omega-2\varphi),\ \&c.\ \operatorname{tang} r\psi$$

[82] Hay una errata en la segunda columna de la tercera fila. Debería ser:

$$\begin{array}{llcr} t(m-n)\psi, & t(m-2n)\psi & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & tr\psi, \\ t(n-r)\psi, & t(n-2r)\psi & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & tr'\psi, \\ t(r-r')\psi, & t(r-2r')\psi & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & tr''\psi, \end{array}$$

partes alícuotas, será igualmente racional. Tomemos dos de estas partes alícuotas ω, φ, & sea su máximo común divisor $= \psi$, & la tang ψ será racional (§. 56. 58.). Pero siendo ψ parte alícuota de los arcos ω, φ, que son partes alícuotas del arco A, es claro que ψ será parte alícuota del arco A, & que en lugar de los arcos ω, φ, se puede sustituir ψ, comparando ψ con alguna de las otras partes alícuotas del arco A propuesto. Continuaremos encontrando su máximo común divisor, cuya tangente será igualmente racional. &c.

§. 60. Llamamos *tangente prima* a toda tangente racional, que lo sea de un arco, del que ninguna parte alícuota tenga una tangente racional.

§. 61. Tal es por ejemplo la tangente de 45°. Ya que, dado n un número entero cualquiera, toda tang $(45 : n)^{\text{o}}$ será una de las raíces de la ecuación

$$\begin{aligned} 0 = 1 - nx \quad &- \quad n \cdot \frac{n-1}{2} x^2 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} x^3 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdot x^4 \\ &- \quad n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdot \frac{n-4}{5} x^5 - \&c. \end{aligned}$$

cuyos coeficientes son los mismos que los de la fórmula binomial de *Newton*, & cuyos signos cambian siguiendo el orden $- - + +$. Mas, para todo número entero n, todos estos coeficientes son números enteros, & toda

$$\text{tang}\left(\frac{45^{\text{o}}}{n}\right) < 1.$$

Por lo tanto, si una o más de una de las tang $(45^{\text{o}} : n)$ fuese racional, sería una *fracción* racional < 1, & si así fuera, no todos los coeficientes podrían ser números enteros. Pero lo son. Por lo tanto &c.[83]

---

[83]Tomemos como referencia la fórmula de la tangente del ángulo múltiple:

$$\begin{aligned} \tan na \quad &= \quad \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \tan^{2k+1} a}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k} \tan^{2k} a} = \\ &= \quad \frac{\binom{n}{1}\tan a - \binom{n}{3}\tan^3 a + \binom{n}{5}\tan^5 a - \binom{n}{7}\tan^7 a + \cdots}{1 - \binom{n}{2}\tan^2 a + \binom{n}{4}\tan^4 a - \binom{n}{6}\tan^6 a + \binom{n}{8}\tan^8 a + \cdots} \end{aligned}$$

La razón de que aparezcan los números combinatorios del binomio de Newton como dice Lambert, es que esta fórmula se decuce a partir de la fórmula de Moivre:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

desarrollando el término de la izquierda (usando el binomio de Newton), igualando parte real e imaginaria y dividiendo convenientemente [Maor 2013, pp. 154, 155]. Llamando $a = \frac{45}{n}$ se tiene que $\tan na = 1$, con

§. 62. *Dada una tangente prima cualquiera, solo los múltiplos de su arco tienen tangentes racionales, con exclusión de todos los arcos que le son conmensurables.* Dada $\operatorname{tang}\omega$ prima, & m, n, siendo primos entre sí, supongamos que la tang $\left(\frac{m}{n}\omega\right)$ pudiera ser racional. Ahora bien siendo el arco $\left(\frac{\omega}{n}\right)$ el máximo común divisor de los arcos ω, & $\left(\frac{m\omega}{n}\right)$, la tangente de $\frac{\omega}{n}$ será racional (§. 56.). Pero siendo $\frac{\omega}{n}$ una parte alícuota de ω, la $\operatorname{tang}\omega$ no sería prima. Yendo esto en contra de la hipótesis, vemos que ninguna tang $\left(\frac{m}{n}\omega\right)$ podrá ser racional. Por lo tanto solo quedan los múltiplos de ω, cuyas tangentes serán racionales (§. 54.).[84] He aquí la razón, por la que este tipo de tangentes merecen el nombre de primas. Recuerdan de alguna forma a los números primos, por cuanto solo sus múltiplos son números enteros, &c.

§. 63. *Dadas dos tangentes primas, digo que sus arcos son inconmensurables entre sí.* Ya que sean $\operatorname{tang}\omega$, $\operatorname{tang}\varphi$ primas, & supongamos que los arcos ω, φ pudieran ser conmensurables entre sí. Serán por lo tanto como un número entero m a un número entero n. Luego

$$\varphi = \frac{m\omega}{n}.$$

Entonces (§. 62.)[85] $\frac{\omega}{n}$, parte alícuota de ω, tendrá una tangente racional lo mismo que

---

lo que el numerador y el denominador de la expresión de arriba tienen que ser iguales:

$$\binom{n}{1}\tan a - \binom{n}{3}\tan^3 a + \binom{n}{5}\tan^5 a - \cdots = 1 - \binom{n}{2}\tan^2 a + \binom{n}{4}\tan^4 a - \cdots$$

Pasando todo al primer miembro se obtiene la ecuación que escribe Lambert, sin más que poner $x = \tan a$. En cuanto a por qué Lambert concluye que $\tan(45:n)$ no puede ser una raíz de esa ecuación al ser todos los coeficientes enteros, es algo que se puede concluir de lo que se llama «teorema de la raíz racional» —en realidad un resultado elemental— que impone restricciones a las raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros. Dado un polinomio:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

donde todos los coeficientes son naturales, si $\frac{p}{q}$ con p y q coprimos es una raíz, entonces p es divisor del término independiente a_0 y q divisor del término principal a_n. Pero en el caso de Lambert $a_0 = a_n = 1$, con lo que dicha fracción debería ser igual a 1, lo cual no es posible ya que nuestra fracción $\frac{p}{q}$ no es otra cosa, por hipotesis, que $\tan(45:n) < 1$.

[84] Es decir: por §. 54. sabíamos que los múltiplos enteros proporcionaban tangentes racionales, y ahora sabemos que —si la tangente es prima— esto no ocurre con submúltiplos (en realidad con múltiplos racionales en general). Esta similitud con los números primos que menciona Lambert, es lo que le lleva a llamarlas tangentes *primas*.

[85] Esta llamada al punto §. 62. hace referencia, no al resultado principal que es el que está en cursiva, sino a la primera parte del razonamiento allí contenida. En concreto, dado que las tangentes de $\frac{m\omega}{n}$ $(=\varphi)$ y ω son racionales por hipótesis, la de $\frac{\omega}{n}$ también por ser el máximo común divisor (§. 56.) (análogo

$\frac{\varphi}{m}$ parte alícuota de φ. Por tanto $t\varphi$, $t\omega$, no serán primas. Yendo esto en contra de la hipótesis, es claro que los arcos ω, φ no podrán ser conmensurables entre sí.

§. 64. *Así todos los arcos de las tangentes primas son inconmensurables entre sí.* Ya que, por el teorema precedente, lo son dos a dos, combinados de una forma cualquiera.

§. 65. *Dada una tangente racional cualquiera, que no sea prima, digo que su arco será un múltiplo del de una tangente prima.* Ya que esta tangente, por muy racional que sea, no siendo prima, no puede ser más que porque hay partes alícuotas de su arco, cuyas tangentes son racionales. Sean estas partes alícuotas $\frac{\omega}{m}$, $\frac{\omega}{n}$, $\frac{\omega}{p}$, $\frac{\omega}{q}$ &c. donde se suponen en número finito. Ahora bien, como las cogemos todas, es preciso que la que es el máximo común divisor de todas las otras también se encuentre entre ellas, mientras que por §. 59. la tangente es igualmente racional. Que sea $\frac{\omega}{r}$, digo que tang $\frac{\omega}{r}$ es prima. Ya que, si ella no fuese prima, las tangentes de algunas de las partes alícuotas de $\left(\frac{\omega}{r}\right)$ serían racionales. Ahora bien siendo estas partes alícuotas de $\left(\frac{\omega}{r}\right)$ igualmente partes alícuotas del arco propuesto ω, es claro que ya estarían incluidas en las partes alícuotas $\frac{\omega}{m}$, $\frac{\omega}{n}$, $\frac{\omega}{p}$ .... $\frac{\omega}{r}$, & por consiguiente $\frac{\omega}{r}$ sería igualmente su máximo común divisor. Así $\frac{\omega}{r}$ sería medida de sus partes alícuotas. Siendo esto absurdo, vemos que tang $\frac{\omega}{r}$ es prima. Ahora bien ω es un múltiplo de $\frac{\omega}{r}$. Por lo tanto &c.

§. 67.[86] He aquí por lo tanto *todas las tangentes racionales ordenadas en ciertas clases.* O son ellas mismas primas, o descienden, por así decir, en línea recta de una tangente prima, puesto que solo los múltiplos de arcos con tangentes primas tienen tangentes racionales (§. 62.). Ahora bien,[87] si no hubiese más que una sola tangente prima, todas las tangentes racionales se derivarían de ella, & todos sus arcos serían conmensurables entre sí. Pero dista mucho, de que haya solo una tangente prima. Ya que debería ser más pequeña que cualquier cantidad asignable. Démosle, para demostrar esto, una magnitud finita $= \tan\varphi$. Es claro que habrá tangentes racionales más pequeñas que $\tan\varphi$. Si estas tangentes son primas, $\tan\varphi$ no será la única que sea prima. Si no son primas, derivarán

para φ) de ahí el sentido de esta línea.

[86]Hay una errata en la numeración. Debería ser §. 66.

[87]Lo que prueba a continuación es que hay infinitas tangentes primas. Dice Lambert que de haber solo una ($\tan\varphi$) esta sería más pequeña que cualquier cantidad asignable, pues como explicará, siempre hay una tangente prima por debajo –en magnitud— de otra tangente previamente fijada. Esto prueba no solo que no hay una sola —que es con lo que empieza las siguientes líneas— sino que hay **infinitas** (ver siguiente nota).

de una o de varias tangentes primas, por cuanto sus arcos serán múltiplos de los de estas tangentes primas (§. 65.). De esta forma hay más de una, más de 2, 3, 4, &c. tangentes primas. Y siempre que se suponga un número finito, se encontrará de la misma forma que hay más. He aquí otra manera de encontrar un número infinito.[88]

§. 67. Sean dos tangentes primas $t\omega$, $t\varphi$. En primer lugar ellas serán racionales, & sus arcos serán inconmensurables entre sí (§. 64.). Dados m, n, números cualesquiera primos entre sí, & $(m\omega + n\varphi)$ será un arco inconmensurable tanto a ω como a φ. Mas la tangente será racional (§. 62. 53.).[89] Ahora bien el arco $(m\omega + n\varphi)$ no siendo múltiplo, ni de ω ni de φ, la tang $(m\omega + n\varphi)$ será o ella misma prima, o derivará de una tangente prima, necesariamente diferente de $t\omega$, $t\varphi$. Ahora bien, variando los números m, n, de todas las formas posibles, de manera que siempre sean primos entre sí, se encontrará tantos arcos $(m\omega + n\varphi)$ inconmensurables tanto entre sí como entre los arcos ω, φ, & que por consecuencia no son ni múltiplos los unos de los otros, ni de ω, φ. Por lo tanto sus tangentes, que son todas racionales, derivarán por igual de tangentes primas, diferentes las unas de las otras.

§. 68. He aquí lo que reduce infinitamente la posibilidad de encontrar un arco racional, cuya tangente sea igualmente racional. Ya que siendo los arcos de todas las tangentes primas inconmensurables entre sí, se sigue que, cuando sea posible encontrar una tangente prima, cuyo arco fuese conmensurable al radio, esta será la única, puesto que los arcos de todas las otras tangentes primas serían necesariamente inconmensurables al radio.[90] Mas, por lo que hemos visto más arriba,[91] también esta única es excluida de la posibilidad de tener su arco racional.

[88] Esta otra manera es de hecho bastante antigua, al menos tanto como lo son los Elementos de Euclides, donde el autor demuestra usando el mismo razonamiento que «los números primos son más que cualquier cantidad asignada de números primos» [Heath II 1908, p. 412]. Euclides es muy cuidadoso con el lenguaje y evita cualquier referencia al infinito en acto (eludiendo afirmaciones del estilo «hay infinitos números primos»), tabú en el mundo griego, pero aunque el formato que toma en manos de Lambert es el mismo («Y siempre que se suponga un número finito, se encontrará de la misma forma que hay más»), para el suizo supone, ni más ni menos, «... otra manera de encontrar un número infinito». No se puede afirmar con certeza, pero parece indicar no solo la aceptación del infinito en acto en Lambert, sino el hecho de que para él un infinito potencial presupone ya un infinito en acto. Ambas cosas no son baladí si tenemos en cuenta la época. Cantor se cansará de hacer ver esta misma idea (ver [Bermúdez 2009, pp. 432, 448, 450, 462, 469]).

[89] En realidad el hecho de que sea racional es únicamente debido a que lo son las tangentes de ω y φ, tal como se establece en §. 53. La referencia a §. 62 sobraría.

[90] Puesto que en caso contrario serían conmensurables entre sí, lo que contradice §. 64.

[91] Se refiere a §. 50.

§. 69. Siendo la tangente de 45º prima (§. 61.) & encontrándose en las tablas trigonométricas,[92] haré notar además en forma de corolario, que esta es la única tangente prima, & al mismo tiempo la única tangente racional que se encuentra allí. La razón es, que todos los arcos cuyas tangentes se marcan en estas tablas, son conmensurables entre sí, sin que se encuentre allí otro múltiplo de 45º, que no sea el ángulo de 90º, cuya tangente es infinita.

§. 70. Observaré también, que siendo racional el coseno de un ángulo ω cualquiera, el coseno de un múltiplo cualquiera es igualmente racional.[93] Esta circunstancia hace, que el mismo razonamiento que hemos expuesto en relación a las tangentes, pueda, con unos pocos cambios, ser aplicado a los cosenos. Se encontrarán *cosenos primos* como hemos encontrado *tangentes primas*, & los arcos de los cosenos primos serán igualmente inconmensurables entre sí; de manera que, cuando sea posible encontrar un coseno primo cuyo arco sea racional, este sería de nuevo el único que se pudiera encontrar, visto que análogamente los arcos de todos los otros cosenos primos serían irracionales.

§. 71. Esto no es lo mismo para los senos,[94] puesto que siendo un $\sin\omega$ cualquiera racional, no hay en general más senos racionales que $\int 3\omega$, $\int 5\omega$, $\int 7\omega$ &c.; pero los $\sin 2\omega$, $\int 4\omega$, $\int 6\omega$ &c. no lo son siempre, a menos que $\cos\omega$ sea también racional, de manera que si uno quiere encontrar también aquí *senos primos*, habrá que hacerlo de otra forma, a la que lo hemos hecho en relación a las tangentes.

§. 72.[95] Mas, sin detenerme en ello, volveré a la fracción continua, encontrada más

[92]Entiendo que se está refiriendo a sus tablas trigonométricas de [Lambert 1768/1770].

[93]Se desprende de la fórmula del ángulo múltiple para el coseno. El razonamiento que aplica aquí al coseno, no se puede trasladar —como explica en el siguiente punto (§. 71.)— al seno. Sin entrar en detalles, todo se desprende de las fórmulas del ángulo múltiple, que dicho sea de paso, eran conocidas desde Viète [Boyer 1968, p. 393].

[94]Lambert usa «sin» y «$\int$» indistintamente para representar el seno.

[95]Aquí únicamente se hace alguna observación, a mayores de las establecidas, sobre las convergentes de la fracción continua de $\tan v$. También se obtiene la fracción continua para la $\cot v$.

arriba

$$\tan v = \cfrac{1}{\omega - \cfrac{1}{3\omega - \cfrac{1}{5\omega - \cfrac{1}{7\omega - \cfrac{1}{9\omega - 1\ \&c.}}}}}$$

Hemos visto que todas las fracciones

$$\frac{1}{\omega}, \quad \frac{3\omega}{3\omega^2 - 1}, \quad \frac{15\omega^2 - 1}{15\omega^3 - 6\omega}, \quad \&c.$$

que proporciona, no aproximan el valor de la tangente de v, sino por defecto en tanto que son todas más pequeñas que esta tangente. Pero, como debe ser posible encontrar fracciones similares, que, aproximando a la tangente, lo hagan por exceso, me puse a investigarlo. Me limitaré aquí de nuevo a dar la fracción continua, que contiene alternativamente & las unas & las otras. Aquí está[1)]

$$\tan v = \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{(\omega - 1) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(3\omega - 2) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(5\omega - 2) + \cfrac{1}{1 + \ \&c.}}}}}}}$$

Esta fracción continúa hasta el infinito, de manera que los cocientes son

$$0, \quad (\omega - 1), \quad 1, \quad (3\omega - 2), \quad 1, \quad (5\omega - 2), \quad 1, \quad (7\omega - 2), \quad 1, \quad (9\omega - 2)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 1, \quad ((2n+1)\omega - 2), \quad 1 \quad \&c.$$

Y las fracciones que aproximan el valor de la $\operatorname{tang} v$, son

$$\frac{1}{\omega - 1}, \quad \frac{1}{\omega}, \quad \frac{3\omega - 1}{3\omega^2 - \omega - 1}, \quad \frac{3\omega}{3\omega^2 - 1}, \quad \frac{15\omega^2 - 3\omega - 1}{15\omega^3 - 3\omega^2 - 6\omega + 1},$$

$$\frac{15\omega^2 - 1}{15\omega^3 - 6\omega}, \quad \&c.$$

La primera, 3^{me}, 5^{me}, 7^{me} &c. son más grandes que $\operatorname{tang} v$, & la 2^{me}, 4^{me}, 6^{me} &c, son más pequeñas, & las mismas que hemos encontrado más arriba (§. 22.). No me detendré en dar la demostración, visto que esta fracción continua puede encontrarse de la misma manera, en la que hemos encontrado aquella de la que nos hemos servido hasta el momento, & que es mucho más simple. Observaré entonces solamente, que siendo el primer cociente aquí $= 0$, no tendremos, para eliminarlo, más que girar la fracción de manera que exprese la cotangente de v, puesto que

$$\cot v = \frac{1}{\operatorname{tang} v}.$$

Así tendremos

$$\cot v = \cfrac{1}{(\omega - 1) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(3\omega - 2) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(5\omega - 2) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(7\omega - 2) + \cfrac{1}{1 + \ \&c.}}}}}}}}$$

§. 73. Comparemos ahora *las cantidades trascendentes circulares con las cantidades logarítmicas* que les son análogas.[96] Sea e el número, cuyo logaritmo hiperbólico[97] es $= 1$.

[96]Es a partir de este momento y hasta el punto §. 78. donde Lambert analiza la conexión entre las funciones trigonométricas circulares y las hiperbólicas (aunque seguirá mostrando dicha conexión en los puntos siguientes), que en realidad adquieren este nombre en el *Opuscula ad res physicas et mathematicas pertinentium* (1757-1762) de Vincenzo de Riccati (Lambert usará estos nombres por primera vez en *Observations trigonometriques* de 1768). Dicha relación según Lambert ha de existir, no solo por la clara similitud entre sus desarrollos en serie que muestra en este mismo punto, sino porque un simple cambio de variable, a saber, $u = v\sqrt{-1}$, nos permite pasar de unas a otras (§. 74.). «Más aquí se trata de ver hasta qué punto esta afinidad puede ser expuesta independientemente de las cantidades imaginarias» (§. 75.), y dicha afinidad resulta ser que de la misma manera que unas (las f.t.circulares) parametrizan la circunferencia, las otras (las f.t. hiperbólicas) parametrizan la hipérbola equilátera (§. 78.), una idea que acredita a «Mr. *de Foncenex*» (§. 74.). En §. 78. se demuestra este hecho (para más detalle remito a [Barnett 2004] que volverá a ser citado en los siguientes puntos). A mayores, usando la similitud entre cierta fracción continua obtenida en este mismo punto §. 73. con la de $\tan v$, concluye aplicando algunas propiedades de las fracciones continuas que no explicita, que «x y e^x no serán jamás dos cantidades racionales al mismo tiempo» (§. 74.), es decir:

$$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow e^x \not\in \mathbb{Q},$$

generalizando el resultado al que había llegado por primera vez Euler en 1737/1744 ($e \not\in \mathbb{Q}$) [Euler 1744]. Lambert comenta esto de nuevo en §. 81.

[97]Con logaritmo hiperbólico se está refiriendo a lo que nosotros llamamos logaritmo natural. Euler lo

Y sabemos, que si en las dos series de las que nos hemos servido más arriba (§. 4.)

$$\begin{aligned}\sin v &= v - \frac{1}{2\cdot 3}v^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}v^5 - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}v^7 + \&c.\\ \cos v &= 1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}v^4 - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}v^6 + \&c.\end{aligned}$$

todos los signos se toman positivos, se transforman en

$$\begin{aligned}\frac{e^v - e^{-v}}{2} &= v + \frac{1}{2\cdot 3}v^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}v^5 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}v^7 + \&c.\\ \frac{e^v + e^{-v}}{2} &= 1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}v^4 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}v^6 + \&c.\end{aligned}$$

Ahora bien, tratando estas dos últimas series de la misma manera que hemos tratado las dos primeras (§. 4. & suiv.[98]) la operación no diferirá más que en los signos, que para el caso presente serán todos positivos. Como nos podemos convencer de ello sin dificultad, no entraré en detalles. Será por lo tanto[1)]

$$\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} = \cfrac{1}{1:v + \cfrac{1}{3:v + \cfrac{1}{5:v + \cfrac{1}{7:v + \cfrac{1}{9:v + \cfrac{1}{11:v + \cfrac{1}{13:v\ \&c.}}}}}}}$$

§. 74. Y como

$$\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} = \frac{e^{2v} - 1}{e^{2v} + 1},$$

aclara en el Capítulo 7 de su *Introductio in Analysin Infinitorum*:

> Cuando se escoge esta base [la base e] los logaritmos se denominan naturales o hiperbólicos. Se usa este último término ya que la cuadratura de la hipérbola se puede expresar a través de estos logaritmos.

[Euler I 1748, p. 97].

[98] Abreviatura de «suivants» (siguientes).

vemos que haciendo $2v = x$, tendremos

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \cfrac{1}{2 : x + \cfrac{1}{6 : x + \cfrac{1}{10 : x + \cfrac{1}{14 : x + \cfrac{1}{18 : x + \&c.}}}}}$$

de donde se extrae

$$\frac{e^x + 1}{2} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 : x + \cfrac{1}{6 : x + \cfrac{1}{10 : x + \cfrac{1}{14 : x + \&c.}}}}}$$

o bien[99]

$$\frac{e^x - 1}{2} = \cfrac{1}{(2 : x)1 + \cfrac{1}{6 : x + \cfrac{1}{10 : x + \cfrac{1}{14 : x + \cfrac{1}{18 : x + \&c.}}}}}$$

Vemos que estas expresiones ofrecen consecuencias similares a las que hemos deducido más arriba de la fórmula

$$\operatorname{tang} v = \cfrac{1}{\omega - \cfrac{1}{3\omega - \cfrac{1}{5\omega - \&c.}}}$$

[99]Hay una errata. Debería ser:

$$\frac{e^x - 1}{2} = \cfrac{1}{(2 : x)-1 + \cfrac{1}{6 : x + \cfrac{1}{10 : x + \cfrac{1}{14 : x + \cfrac{1}{18 : x + \&c.}}}}}$$

Se encontrará también aquí que v & e^v, igual que x & e^x no serán jamás cantidades racionales al mismo tiempo. Así que no me pararé a reiterar la deducción. Se trata más bien de interpretar las fórmulas que acabamos de exponer. Observo entonces, que deben tener, en relación a la hipérbola equilátera, un significado totalmente análogo al que tiene la fracción

$$\operatorname{tang} v = \cfrac{1}{\omega - \cfrac{1}{3\omega - \&c.}}$$

en relación al círculo. Ya que, además de que sabemos que las expresiones

$$e^u + e^{-u}$$

$$e^u - e^{-u}$$

haciendo $u = v\sqrt{-1}$, dan las cantidades circulares[100]

$$\begin{aligned} e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}} &= 2\cos v, \\ e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}} &= 2\sin v \cdot \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Mr. *de Foncenex* ha hecho ver también de una manera muy simple & muy directa, cómo esta afinidad se encuentra comparando simultáneamente el círculo & la hipérbola equilátera con un mismo centro & un mismo diámetro. Véase *Miscell. Societ. Taurin.* Tom. I. p. 128. suiv.[101]

§. 75. Pero aquí se trata de ver hasta dónde puede desarrollarse esta afinidad independientemente de las cantidades imaginarias.[102] Sea por lo tanto C el centro, CH

[100] Hay una errata en la segunda fórmula. Debería ser:

$$\begin{aligned} e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}} &= 2\cos v \\ e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}} &= 2\sin v \cdot \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

[101] El artículo en cuestión es *Réflexions sur les quantités imaginaries.*

[102] Empieza aquí la prueba de dicha analogía comentada ya antes. A este respecto es necesario hacer unos comentarios. En primer lugar decir que Lambert incluye en la última página una figura con todos los datos que trata en el texto; la misma se incluye aquí también al final. En segundo lugar un comentario sobre la notación: cuando escribe, por ejemplo, $\cot\varphi^2$, se está refiriendo en realidad a $(\cot\varphi)^2$. Y en último lugar, algo que comenta más adelante, casi al final del punto §. 77. pero que sería bueno tener en cuenta desde el principio: el argumento de las funciones circulares, el ángulo (circular), está definido a partir de la circunferencia. Ya se mida en grados o radianes (pensemos en radianes), su valor depende de una circunferencia. ¿Cuál sería el análogo en el caso de la hipérbola? La idea es cambiar el argumento de las f.t.c. y hacerlas depender del área definida por el ángulo y la circunferencia (ANCA en el dibujo

el eje, CA el semi-diámetro de la hipérbola equilátera AMG & del círculo AND, CF la asíntota, AB perpendicular al eje, & al mismo tiempo la tangente común al círculo & a la hipérbola. Trácense desde el centro C dos rectas CM, Cm, infinitamente próximas la una de la otra, & bájense los puntos de intersección M, m, N, n, sobre el eje de ordenadas MP, mp, NQ, nq. Finalmente sea el radio AC$=1$. Hagamos el ángulo MCA$=\varphi$, & sea[103]

de Lambert) en vez de por el ángulo (MCA$=\varphi$). Si representamos dicho ángulo por v y como se dijo antes pensamos en radianes, el arco de circunferencia que define medirá $v \cdot r = v$ (Lambert piensa en una circunferencia de radio 1) . Siendo este el caso, el área del sector circular determinado por dicho ángulo tendrá un valor de:

$$ANCA = \frac{vr^2}{2} = \frac{v}{2} \quad , \quad \text{de donde} \quad v = 2 \cdot ANCA$$

De esta forma el argumento de las f.t.c es el doble del área del sector circular que determinan como puntos de la circunferencia, y por lo tanto en completa analogía, el argumento de las f.t.h. será el doble del área del sector hiperbólico que determinan como puntos de la hipérbola:

$$u = 2 \cdot AMCA$$

[103]Lambert no detalla ninguno de los cálculos representados en la tabla. Algunos son directos mientras que otros (en [Barnett 2004, p. 22] se puede ver un ejemplo) requieren más elaboración y consciencia por parte del lector moderno, del uso e interpretación de las diferenciales en la época. Por ejemplo, la expresión $\frac{d\xi}{d\eta}$ (ver §. 76.) representa para Lambert un cociente, que es a lo que se corresponde en realidad la definición de diferencial en el cálculo leibniziano, de donde surge dicha expresión como manera de denotar la derivada.

para la hipérbola	para el círculo
la abscisa CP$=\xi\cdot\quad\cdot\quad\cdot$	$\cdots$ CD$=x$
la ordenada PM$=\eta\cdot\quad\cdot\quad\cdot$	$\cdots$ QN$=y$,
el segmento AMCA$=u:2\cdot\quad\cdot$	$\cdot\cdot$ ANCA$=v:2$
& será	
$\mathrm{tang}\,\varphi=\dfrac{\eta}{\xi}\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$	$\cdot\cdot\ \mathrm{tang}\,\varphi=\dfrac{y}{x}$,
$1+\eta\eta=\xi\xi=\eta\eta\cdot\cot\varphi^2\quad\cdot$	$\cdot 1-yy=xx=yy\cdot\cot\varphi^2$,
$\xi\xi-1=\eta\eta=\xi\xi\cdot\mathrm{tang}\,\varphi^2\quad\cdot$	$\cdot 1-xx=yy=xx\ \mathrm{tang}\,\varphi^2$,
$\mathrm{CM}^2=\xi^2+\eta^2=\xi^2(1+\mathrm{tang}\,\varphi^2)$	$\cdot\mathrm{CN}^2=x^2+y^2=x^2(1+t\varphi^2)$,
$=\dfrac{1+t\varphi^2}{1-t\varphi^2}$	$=\dfrac{1+t\varphi^2}{1+t\varphi^2}=1.$
Por lo tanto	
$+du=d\varphi\cdot\left(\dfrac{1+t\varphi^2}{1-t\varphi^2}\right)=\dfrac{dt\varphi}{1-t\varphi^2}$	$\cdot+dv=d\varphi=\dfrac{dt\varphi}{1+t\varphi^2}$,
$+d\xi=\dfrac{t\varphi\cdot dt\varphi}{(1-t\varphi^2)^{3:2}}\cdot\quad\cdot\quad\cdot$	$\cdot-dx=\dfrac{t\varphi\cdot dt\varphi}{(1+t\varphi)^{3:2}}$,
$+d\eta=\dfrac{dt\varphi}{(1-t\varphi^2)^{3:2}}\cdots$	$\cdot+dy=\dfrac{dt\varphi}{(1+t\varphi)^{3:2}}$,
$\xi=\dfrac{1}{\sqrt{(1-t\varphi^2)}}\cdots$	$\cdot\cdot\ x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t\varphi^2}}$,
$\eta=\dfrac{t\varphi}{\sqrt{(1-t\varphi^2)}}\cdots$	$\cdot\cdot\ y=\dfrac{t\varphi}{\sqrt{1+t\varphi^2}}$,
Por lo tanto	
$+d\xi:du=\eta\ \cdots\cdot$	$\cdot-dx:dv=y$,
$+d\eta:du=\xi\ \cdots\cdot$	$\cdot+dy:dv=x$,
$+d\xi=d\eta\cdot\mathrm{tang}\,\varphi\ \cdot\cdot$	$\cdot-dx:dy=\mathrm{tang}\,\varphi$.

§. 76.[104] Como el ángulo φ es el mismo para la hipérbola & para el círculo, se sigue de las dos últimas ecuaciones que

$$\mathrm{tang}\,\varphi=d\xi:d\eta=-dx:dy=\eta:\xi=y:x.$$

De esta forma los ángulos Mmp, Nnq, son iguales. Lo que da

$$\mathrm{M}m:\mathrm{N}n=d\xi:-dx=d\eta:dy.$$

Y los triángulos característicos M$m\mu$, N$n\nu$, son semejantes.[105] Finalmente, como C$nq=$ Cmp, & N$nq=$ Mmp, será Cnq+N$nq=$ Cmp+M$mp=90^{\mathrm{o}}$. Trazando entonces la normal

[104] En este punto se hacen notar algunas similitudes entre el círculo y la hipérbola.

[105] La igualdad entre Mmp y Nnq, parece ser, teniendo en cuenta la relación anterior, en base a la semejanza con CMP y CNQ respectivamente, los cuales comparten el ángulo φ.

mV, será[106] Vmq + Mmq = 90º, por lo que Vmq = Cmq. Así la normal mV prolongada hasta el eje AC, es igual a Cm, justo como en el círculo la normal Cn es igual a Cn.[107] He aquí por lo tanto aquello en que se basa todo lo que hay de real en las comparaciones que hemos hecho entre el círculo & la hipérbola.[108]

§. 77. Seguidamente, si para la hipérbola queremos expresar ξ, η mediante u, se encontrará fácilmente, que empleando las series infinitas su forma debe ser[109]

$$\begin{aligned} \xi &= 1 + Au^2 + Bu^4 + Cu^6 + \&c. \\ \eta &= au + bu^3 + cu^5 + du^7 + \&c. \end{aligned}$$

Ya que, haciendo $u = 0$, se tiene $\xi = 1$, $\eta = 0$. Además, tomando u infinitamente pequeño, ξ aumentará como u^2, & η aumentará como u, puesto que el ángulo en A es recto, & el radio osculador de la hipérbola en A es =AC. Además, tomando u negativo, todos los valores de ξ serán iguales que para los u positivos, de donde se sigue, que la abscisa ξ debe expresarse mediante las dimensiones pares de u. Y tomando u negativo, los valores de η serán los mismos, pero negativos. Por lo tanto η debe expresarse mediante las dimensiones impares de u. No falta por lo tanto más que determinar los coeficientes. Esto es para lo que nos servirán las dos fórmulas encontradas más arriba

$$d\xi : du = \eta,$$

$$d\eta : du = \xi.$$

Tendremos pues, diferenciando la primera serie

$$d\xi : du = 2\text{A}u + 4\text{B}u^3 + 6\text{C}u^5 + \cdots\cdots + \mu \cdot \text{M}u^{\mu-1}$$

que debe ser $= \eta$, entonces

$$d\xi : du = au + bu^3 + cu^5 + \cdots\cdots + m \cdot u^{\mu-1}$$

[106] Hay una errata. Debería ser: «Vmp + Mmp = 90º, por lo que Vmp = Cmp».

[107] Aquí hay un errata. Debería ser: «justo como en el círculo la normal en n es igual a Cn».

[108] Pasa a tratar el quid de la cuestión (§. 77. y §. 79.).

[109] Piénsense $\xi \equiv \xi(u)$ y $\eta \equiv \eta(u)$ como funciones de u. Aunque no lo dice, es probable que se esté apoyando en el desarrollo de Taylor en torno al 0 tanto de $\xi(u)$ como de $\eta(u)$ («... tomando u infinitamente pequeño ...» dice en las siguientes líneas, y explicita que «... haciendo $u = 0$, se tiene $\xi = 1$, $\eta = 0$»). Lo que hace que en la primera aparezcan sólo las potencias pares y en la segunda las impares, es que la primera función es par y la segunda impar (como comenta más adelante) dado que la abscisa no varía si el argumento es negativo (significa esto que el área cae debajo del eje de abscisas) pero la ordenada cambia de signo, es decir:

$$\xi(-u) = \xi(u) \qquad y \qquad \eta(-u) = -\eta(u)$$

Por lo tanto, comparando términos

$$\begin{aligned}
2\mathrm{A} &= a,\\
4\mathrm{B} &= b,\\
6\mathrm{C} &= c,\\
&\&c.\\
\mu\mathrm{M} &= m.
\end{aligned}$$

Pero, diferenciando η, debe también ser $d\eta : du = \xi$, por lo que

$$\begin{aligned}
d\eta : du &= a + 3bu^2 + 5cu^5 + \cdots\cdots (\mu-1)\cdot mu^{\mu-2}\\
&= 1 + \mathrm{A}u^2 + \mathrm{B}u^4 + \cdots\cdots\cdots \mathrm{L}\cdot u^{\mu-2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, comparando términos

$$\begin{aligned}
q &= 1,\\
3b &= \mathrm{A},\\
5c &= \mathrm{B},\\
&\&\mathrm{c}.\\
(\mu-1)m &= \mathrm{L}.
\end{aligned}$$

Mediante estas ecuaciones tendremos

$$\begin{aligned}
a &= 1,\\
\mathrm{A} &= \frac{1}{2}a = \frac{1}{2},\\
b &= \frac{1}{3}\mathrm{A} = \frac{1}{2\cdot 3},\\
\mathrm{B} &= \frac{1}{4}b = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4},\\
c &= \frac{1}{5}\mathrm{B} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},\\
\mathrm{C} &= \frac{1}{6}c = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6},\\
&\&\mathrm{c}.\\
m &= \frac{1}{(\mu-1)}\mathrm{L} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdot(\mu-1)},\\
\mathrm{M} &= \frac{1}{\mu}\cdot m = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots\mu}.
\end{aligned}$$

De este modo será

$$\xi = 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4}u^4 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}u^6 + \&\text{c.}$$

$$\eta = u + \frac{1}{2\cdot3}u^3 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}u^5 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}u^7 + \&\text{c.}$$

He aquí por lo tanto la abscisa ξ, & la ordenada η, expresadas mediante la letra u, que es el doble del área del segmento hiperbólico AMCA. Ahora se sabe que si en lugar de u, tomamos v, que es el doble del segmento circular ANCA, la abscisa x, & la ordenada y, ambas circulares, son[110]

$$x = 1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4}v^4 - \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}v^6 + \&\text{c.}$$

$$y = v - \frac{1}{2\cdot3}v^3 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}v^5 - \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}v^6 + \&\text{c.}$$

dos series, que por la forma no difieren de las dos precedentes mas que por el cambio alternativo de los signos.

§. 78. Y como (§. 73.)

$$\frac{e^u + e^{-u}}{2} = 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4}u^4 + \&\text{c.}$$

$$\frac{e^u - e^{-u}}{2} = u + \frac{1}{2\cdot3}u^3 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}u^5 + \&\text{c.}$$

vemos que

$$\xi = \frac{e^u + e^{-u}}{2},$$

$$\eta = \frac{e^u - e^{-u}}{2},$$

& que por consiguiente estas cantidades expresan la abscisa ξ =CP, & la ordenada η =PM de la hipérbola.

[110] Hay una errata en la segunda fórmula. Debería ser:

$$x = 1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4}v^4 - \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}v^6 + \&\text{c.}$$

$$y = v - \frac{1}{2\cdot3}v^3 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}v^5 - \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}v^7 + \&\text{c.}$$

§. 79.[111] Y como $\eta : \xi = \text{tang}\,\varphi$, vemos también que

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}},$$

por lo tanto por el §. 81.[112]

$$\text{tang}\,\varphi = \cfrac{1}{1 : u + \cfrac{1}{3 : u + \cfrac{1}{5 : u + \cfrac{1}{7 : u + \cfrac{1}{9 : u + 1\ \&c.}}}}}$$

Y como la misma tangente es también

$$\text{tang} v = \text{tang}\,\varphi = \cfrac{1}{1 : v - \cfrac{1}{3 : v - \cfrac{1}{5 : v - \cfrac{1}{7 : v - \cfrac{1}{9 : v - 1\ \&c.}}}}}$$

vemos que se encuentra esta tangente por estas dos fracciones continuas, que por la forma no difieren mas que en los signos: no se trata sino de emplear u = 2AMCA, cuando se usa la primera, en lugar de emplear v = 2ANCA, para tener la misma tangente mediante la segunda. He aquí pues la analogía que teníamos que encontrar independientemente de, & sin incorporar las, cantidades imaginarias.

§. 80. Ahora podremos extraer en términos muy claros la consecuencia, que *el área del sector hiperbólico AMCA, así como la del sector circular ANCA correspondiente, será una cantidad irracional o inconmensurable al cuadrado del radio AC, siempre que el ángulo φ, que es el que forman uno & el otro de los dos sectores con el centro C, tenga una tangente racional, & que recíprocamente esta tangente será irracional siempre que uno de los dos sectores sea una cantidad racional.*[113]

---

[111] Un nuevo apunte a esta analogía: $\tanh u = \tan v$.

[112] Resulta extraña esta llamada a un punto posterior, teniendo en cuenta además que es algo que aparece en la última parte de §. 73. (la única diferencia es el argumento de las funciones).

[113] Nuevos resultados de irracionalidad en base a que $\tanh u = \tan v$. Se concluye por una lado que:

$$\text{Si } \tan\varphi \in \mathbb{Q} \Rightarrow u, v \not\in \mathbb{Q}$$

§. 81. Hay una consecuencia absolutamente similar a hacer en relación a la fracción continua[114] (§. 74.)

$$\frac{e^u+1}{2}=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2:u+\cfrac{1}{6:u+\cfrac{1}{10:u+\cfrac{1}{14:u+\cfrac{1}{18:u+\ \&c.}}}}}}$$

que se transforma en

$$\frac{e^u+1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{-2:u+\cfrac{1}{-6:u+\cfrac{1}{-10:u+\ \&c.}}}}$$

& de donde se extrae para u negativo

$$\frac{e^u+1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2:u+\cfrac{1}{6:u+\cfrac{1}{10:u+\cfrac{1}{14:u+\ \&c.}}}}}$$

Estas fracciones nos hacen conocer *hasta qué punto la irracionalidad del número* $e = 2,718281828459045235360 28\cdots$ *es trascendente, por cuanto ninguna de sus potencias ni*

y por otro lado, una condición suficiente para la irracionalidad de la tangente hiperbólica:

$$\text{Si } u \text{ o } v \in \mathbb{Q} \Rightarrow \tan v = \tanh u \notin \mathbb{Q}$$

[114]Dicha consecuencia es —como queda escrito al final de este punto— un nuevo resultado de irracionalidad, en este caso para los logaritmos naturales:

$$\text{Si } u \in \mathbb{Q} \Rightarrow \ln u \notin \mathbb{Q}$$

ninguna de sus raíces es racional.[115] Ya que u & e^u no podrán ser al mismo tiempo una cantidad racional. No obstante siendo u el logaritmo hiperbólico de e^u, se sigue, que *todo logaritmo hiperbólico racional lo es de un número irracional*, & que recíprocamente *todo número racional tiene un logaritmo hiperbólico irracional.*

§. 82. Pero veamos ahora lo que e^u & e^{-u}, significan en la figura. Volvamos para este efecto al §. 78. donde encontramos las dos fórmulas

$$\xi = \frac{e^u + e^{-u}}{2},$$

$$\eta = \frac{e^u - e^{-u}}{2},$$

entonces tomando la suma & la diferencia, será

$$e^u = \xi + \eta,$$

$$e^{-u} = \xi - \eta.$$

Pero las asíntotas CF, CS, formando entre ellas un ángulo recto, que el eje CH corta en dos partes iguales, darán

$$\begin{aligned} \xi &= \mathrm{CP} = \mathrm{PS} = \mathrm{PR}, \\ \eta &= \mathrm{PM}, \end{aligned}$$

con lo que

$$\xi + \eta = \mathrm{SM},$$

$$\xi - \eta = \mathrm{MR},$$

& por tanto

$$e^u = \mathrm{SM},$$

$$e^{-u} = \mathrm{MR},$$

de donde se ve al mismo tiempo que

$$e^u \cdot e^{-u} = \mathrm{SM} \cdot \mathrm{MR} = 1$$

[115] De nuevo como ya hizo al principio del trabajo en el punto §. 2. (y de hecho en más lugares), Lambert vuelve a usar una expresión del estilo «hasta qué punto la irracionalidad de cierta cantidad es trascendente». El caso es que al contrario de los casos citados, aquí da una idea de lo que significa esto: «por cuanto ninguna de sus potencias ni ninguna de sus raíces es racional», lo que en particular significa que $e^n \neq q$, con q racional, es decir, e deja de ser raíz de una amplia variedad de ecuaciones algebraicas. Implícita en esta frase —aplíquese una «prueba por simplicidad» al estilo de la que él mismo usa al principio del artículo— encontramos por lo tanto una conjetura de trascendencia para e.

Se ve además, que mientras que

$$e^u = \mathrm{SM},$$

$$e^{-u} = \mathrm{MR},$$

$$\mathrm{AB} = 1,$$

será, tomando logaritmos,

$$u = \log\frac{\mathrm{SM}}{\mathrm{AB}} = \log\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{MR}}.$$

Y como u, e^u, no podrían ser racionales al mismo tiempo, vemos lo mismo en relación al área del sector AMCA$=\frac{1}{2}u$, & las ordenadas SM, MR.

§. 83.[116] Tenemos también (§. 75.) la diferencial

$$du = \frac{d\,\mathrm{tang}\varphi}{1 - t\varphi^2},$$

cuya integral resulta ser[117]

$$2u = \log\frac{1 + t\varphi}{1 - t\varphi} = \log .\mathrm{tang}.(45^{\mathrm{o}} + \varphi) = \mathrm{l.tang}\,\mathrm{SCM},$$

o bien

$$2u = -\log\frac{1 - t\varphi}{1 + t\varphi} = -\mathrm{l.tang}(45^{\mathrm{o}} - \varphi) = -\mathrm{l.tang}\,\mathrm{RCM}.$$

Cojamos la primera de estas fórmulas

$$2u = \log\left(\frac{1 + t\varphi}{1 - t\varphi}\right),$$

& nos pondrá en la situación de hallar también en relación a los sectores hiperbólicos lo que hemos visto que era la *tangente prima*, en relación a los sectores circulares. He aquí como.

§. 84. Consideremos en primer lugar que el sector hiperbólico AMCA aumenta con el ángulo φ =MCA, de manera que termina siendo infinito, cuando $\varphi = 45^{\mathrm{o}}$. Es por lo tanto claro que dado uno de estos sectores, se pueden encontrar otros, que sean múltiplos cualesquiera, & partes cualesquiera, o que lo sobrepasen en una cantidad cualquiera. No obstante a cada uno de estos sectores le corresponde un ángulo MCP, mediante el cual se forma, & siendo la tangente de este ángulo $= \varphi$, y el sector $= \frac{1}{2}u$, acabamos de ver que

$$2u = \log\frac{1 + t\varphi}{1 - t\varphi}.$$

[116] Lo que va a hacer ahora (§. 83. - §. 87.) es mostrar cómo el concepto de *tangente prima* se aplica igualmente para el caso hiperbólico. El punto §. 87 enuncia todos los teorema derivados pero traducidos al caso hiperbólico, lo cuál muestra una nueva conexión entre las f.t.circulares y las f.t.hiperbólicas.

[117] Lambert usará tanto «log» como «l.» para denotar el logaritmo.

§. 85. Sean ahora $\frac{1}{2}u$, $\frac{1}{2}u'$, $\frac{1}{2}u''$, tales que el tercero sea la suma de los dos primeros. Sean además φ, φ', φ'' los ángulos correspondientes. Y será

$$2u = \log\frac{1+t\varphi}{1-t\varphi},$$

$$2u' = \log\frac{1+t\varphi'}{1-t\varphi'},$$

$$2u'' = \log\frac{1+t\varphi''}{1-t\varphi''}.$$

Como entonces

$$\frac{1}{2}u'' = \frac{1}{2}u' + \frac{1}{2}u,$$

de la misma forma

$$\log\frac{1+t\varphi''}{1-t\varphi''} = \log\frac{1+t\varphi'}{1-t\varphi'} + \log\frac{1+t\varphi}{1-t\varphi},$$

lo que da

$$\frac{1+t\varphi''}{1-t\varphi''} = \frac{1+t\varphi'}{1-t\varphi'} \cdot \frac{1+t\varphi}{1-t\varphi},$$

de donde se sigue

$$t\varphi'' = \frac{t\varphi + t\varphi'}{1+t\varphi\cdot t\varphi'},$$

& recíprocamente por la diferencia

$$t\varphi' = \frac{t\varphi'' - t\varphi}{1-t\varphi\cdot t\varphi''}.$$

Estas dos fórmulas no difieren más que en los signos en relación a las que hemos encontrado para los sectores, o los arcos circulares, & nos dejan igualmente concluir, que *si las tangentes que corresponden a dos sectores hiperbólicos, son racionales, las tangentes que corresponden al sector igual a la suma & la diferencia de estos dos sectores serán igualmente racionales.*

§. 86. Esta sola proposición basta para hacer ver que todo lo que hemos dicho más arriba (§. 52 ... 71.) en relación al círculo, se aplicará igualmente a la hipérbola. No tenemos más que servirnos de una manera abreviada de hablar, llamando *tangente de un sector hiperbólico* cualquiera ACMA, la tangente del ángulo ACM, que es =AT, siendo el radio AC= 1. A continuación hay que observar que todos los sectores de los que se trata aquí, deben tener el eje AC como origen común, como lo tienen los sectores MCAM, mCAm. Así por ejemplo el sector mCM no tocando al eje, hay que sustituirlo por otro que sea igual, & que sea contiguo al eje AC, si queremos tener el ángulo φ y la tangente que le corresponde. Es claro que esta observación no es necesaria cuando se trata del círculo, puesto que cualquier diámetro del círculo puede ser considerado como eje.

§. 87. Es por lo tanto en este sentido, que diré que *la hipérbola tiene una infinidad de tangentes primas*, que *los sectores de todas estas tangentes primas son inconmensurables entre sí & a la unidad*, que *siendo prima la tangente de un sector, no tiene más tangentes racionales que las de los múltiplos de ese sector*: Que *toda tangente racional es o ella misma prima, o su sector es un múltiplo de un sector cuya tangente es prima.* &c. Como la demostración de estos teoremas no serán sino una repetición de los que he dado para el círculo, los omitiré tanto más cuanto que no he añadido estos teoremas, sino para hacer ver de nuevo en este punto la analogía que hay entre el círculo & la hipérbola equilátera.

§. 88.[118] Comparemos de nuevo simultáneamente el sector circular ANCA, & el sector hiperbólico AMCA. Mr *de Foncenex*, en la Memoria citada más arriba (§. 74.) ha hecho ver, que empleando las cantidades imaginarias, estos dos sectores resultan estar en la razón 1 a $\sqrt{-1}$, que es puramente imaginaria. Ahora bien, ¿cuál será la razón real? Esto es lo que encontraremos expresando uno de estos sectores mediante el otro. Para

[118] Lambert vuelve una última vez a la analogía entre las f.t.circulares y las hiperbólicas. En [Barnett 2004, p. 24] se puede leer:

> El mismo Foncenex no había ido más allá en explorar esta "afinidad" que concluir que, ya que $\sqrt{x^2 - r^2} = \sqrt{-1}\sqrt{r^2 - x^2}$, "los sectores circulares y los [sectores] hiperbólicos que corresponden a la misma abscisa están siempre en la proporción de 1 a $\sqrt{-1}$". Es este uso del radio imaginario para pasar del círculo a la hipérbola lo que parece que intentó evitar Lambert.

Esto es de lo que trata este punto. En cualquier caso no es baladí hacer un matiz. Sin duda Lambert vive en una época histórica concreta, y de esa forma debemos entender este tipo de esquivas en el uso de los complejos. Pero como persona individual, con una personalidad y un pensamiento concreto, y de hecho con una mentalidad abierta, Lambert fue una persona «sin ningún miedo a lo imaginario» [Engel et al. 1895, p. 145, 146] a diferencia de sus contemporáneos, como lo corrobora su conjetura sobre la esfera de radio imaginario (ver capítulo sobre su biografía). Una muestra de esa lucha interna, por otro lado recurrente en varios autores desde la primera aparición de los imaginarios, entre el carácter absurdo de lo imaginario —en lo que a su existencia se refiere— y su utilidad, aparece reflejada en carta a Kant: «El signo $\sqrt{-1}$ representa un no-ente que no es pensable, y sin embargo puede muy bien emplearse para encontrar teoremas» (la referencia de F. Engel y la carta a Kant, de José Ferreirós).

este efecto emplearemos las dos series[119]

$$v = t\varphi - \frac{1}{3}t\varphi^3 + \frac{1}{5}t\varphi^5 - \frac{1}{7}t\varphi^7 + \&c.$$

$$t\varphi = v - \frac{1}{3}u^3 + \frac{2}{15}u^5 - \frac{17}{315}u^7 + \&c.$$

que se encuentran fácilmente mediante las fórmulas diferenciales dadas más arriba (§. 75.). Sustituyendo entonces el valor de la segunda de estas series en la primera, tendremos, luego de reducir,

$$v = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{2}{3}u^5 - \frac{244}{315}u^7 + \&c.$$

& recíprocamente

$$u = v + \frac{2}{3}v^3 + \frac{2}{3}v^5 + \frac{244}{315}v^7 + \&c.$$

Estas dos series no difieren más que en relación a los signos, teniendo los mismos coeficientes & exponentes. Si en la primera de estas series ponemos

$$u = v\sqrt{-1},$$

obtenemos

$$v = \sqrt{-1} \cdot \left(v + \frac{2}{3}v^3 + \frac{2}{3}v^5 + \frac{244}{315}v^7 + \&c.\right) \quad 1)$$

lo que significa

$$v = u\sqrt{-1}.$$

Por lo tanto, mediante un sector hiperbólico imaginario, se obtiene un sector circular imaginario, & recíprocamente.

§. 89. Todo lo que acabo de hacer ver sobre las cantidades trascendentes circulares & logarítmicas, parece basarse en principios mucho más universales, pero que no están todavía suficientemente desarrollados. He aquí sin embargo lo que podrá servir para dar alguna idea. No es suficiente haber encontrado que estas cantidades trascendentes son

[119]Hay una errata. Debería ser:

$$v = t\varphi - \frac{1}{3}t\varphi^3 + \frac{1}{5}t\varphi^5 - \frac{1}{7}t\varphi^7 + \&c.$$

$$t\varphi = u - \frac{1}{3}u^3 + \frac{2}{15}u^5 - \frac{17}{315}u^7 + \&c.$$

irracionales, es decir inconmensurables a la unidad.[120] Esta propiedad no les es única.[121] Ya que, además de que hay cantidades irracionales que se pueden formar al azar, & que de ese modo apenas son de la competencia del análisis, hay todavía una infinidad de otras que llamamos *algebraicas*:[122] & tales son todas las *cantidades irracionales radicales*, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$ &c. $\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ &c. & todas las *raíces irracionales de las ecuaciones algebraicas*, como por ejemplo las de las ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= xx - 4x + 1, \\ 0 &= x^3 - 5x + 1, \\ &\&\text{c.} \end{aligned}$$

Llamaré a las unas & a las otras *cantidades irracionales radicales*, & he aquí el teorema, que creo que se puede demostrar.[123]

---

[120] Lo primero que hay que hacer notar, es que el término «trascendente» aún no tiene aquí el significado moderno, puesto que no sería necesario —desde ese punto de vista moderno— demostrar que una cantidad trascendente es irracional; lo es por definición.

[121] El segundo punto clave es entender bien esta frase. Lo que Lambert está diciendo es que hay ciertas cantidades —las «trascendentes»— que por su especial naturaleza no están suficientemente bien representadas bajo la etiqueta «irracional», lo que le lleva a plantear una distinción entre irracionales. ¿Pero en qué términos?

[122] He aquí los términos:

cantidades «formadas al azar» vs. cantidades algebraicas

Ahora bien, para Lambert —tal y como deja claro en las líneas siguientes— las cantidades algebraicas ya no son aquellas que pueden ser expresadas mediante una combinación finita de operaciones algebraicas, siguiendo la tradición Leibniziana y Euleriana —una idea basada, podríamos decir, en un marco teórico clásico que podría ser resumido en dos palabras: «ser expresable»—, sino cantidades que son raíces de ecuaciones algebraicas. Por lo tanto, esas cantidades «formadas al azar», «trascendentes» en el sentido clásico del término —y en base al marco teórico clásico, «no expresables»—, son las cantidades que no son raíces de ecuaciones algebraicas. En consecuencia, el término trascendente adquiere aquí su significado moderno, con lo que la distinción entre irracionales que plantea Lambert es la moderna:

cantidades trascendentes vs. cantidades algebraicas

[123] Dos comentarios. El primero es una llamada a ser cauto ya que a pesar del entusiasmo que se puede sentir al ver cómo Lambert distingue entre algebraicos y trascendentes en el sentido moderno de los términos, todo parece indicar que aunque explícitamente identifica algebraicos con raíces, implícitamente sigue identificando algebraicos con radicales, es decir, con la idea clásica de «expresables». Lo que ocurre es que usa como vara de medir para hacer la clasificación la idea «de ser raíz» y no la de «ser expresable» porque es más simple y manejable (esta idea también se expresa en [Serfati 2018, pp. 182, 183], aunque la interpretación que doy en esta nota parece diferir de la que da el autor en esas mismas páginas). La llamada de atención más clara en esta dirección es el cambio de nombre que le da a los

§. 90. Digo entonces *que ninguna cantidad trascendente circular & logarítmica podrá ser expresada a través de cantidad irracional radical alguna, que se relacione con la misma unidad, & en la que no entre ninguna cantidad trascendente.*[124] Este teorema parece deber demostrase para las cantidades trascendentes dependientes de

$$e^x,$$

donde el exponente es variable, mientras que las cantidades radicales supongan exponentes constantes.[125] Así por ejemplo[126] dado un arco de círculo racional o conmensurable al

algebraicos: «Llamaré a las unas & las otras *cantidades irracionales radicales...*», justo el nombre que les da a las cantidades que son explícitamente radicales. La segunda llamada de atención es histórica, siendo muy probable que Lambert se estuviese moviendo en la (para nosotros) vieja idea de que toda ecuación es resoluble por radicales, sentir general en la época hasta finales del XVIII, y que por lo tanto estuviese identificando «raíz» con «expresable por radicales» ([Sorensen 2010, p. 2] y en concreto [Sorensen 2010, chapter 4: pp. 66, 29–32]. Esto también se comenta en [Ayoub 1980, p. 262] donde se dice que aparentemente nadie sospechaba que, en concreto, la ecuación de grado 5 no pudiese ser resoluble. Más aún, comenta en base a la aprobación (vaga) de la Royal Society y la de Cauchy y la reacción de Lagrange, que la comunidad matemática no estaba preparada para aceptar dicho resultado, de ahí la no aceptación general del trabajo de Ruffini [Ayoub 1980, pp. 271, 272]). El segundo comentario es que independientemente de esto, ese teorema «que creo que se puede demostrar» es una conjetura clara de trascendencia en el sentido moderno del término.

[124]En base a lo dicho en las notas precedentes, esto es una conjetura de trascendencia para el tipo de cantidades que él llama «circulares» y «logarítmicas», entre las que se encuentran e y π. Por si hiciese falta más aclaración, Lambert en una carta a Holland le dice que:

> La forma en la que he demostrado esto [la irracionalidad de π], se puede extender hasta demostrar que las magnitudes circulares y logarítmicas no pueden ser raíces de ecuaciones racionales.

(citado en [Cantor IV 1908, p. 447, nota 6]; traducido por José Ferreirós).

[125]Al haber tenido dificultades con la comprensión de este párrafo y con su traducción, se indica a continuación el texto original:

> Ce théoreme semble devoir être démontré de ce que les quantités transcendentes dépendent de
>
> $$e^x,$$
>
> où l'exposant est variable, au lieu que les quantités radicales supposent des exposans constans.

La razón de ser de esta afirmación, tal y como se ha traducido, podría venir motivada de lo que Lambert ha demostrado anteriormente, a saber, que las potencias racionales de e no pueden ser racionales. La generalización sería la no algebraicidad, de ahí la afirmación. De hecho, un primer paso hacia este resultado lo muestra en el siguiente párrafo para la tangente, el otro tipo de cantidades trascendentes que incluye en el enunciado del teorema que acaba de enunciar.

[126]Para respaldar su conjetura, demuestra el siguiente caso particular: $\tan v \neq \sqrt{q}$ con v y q racionales. La conclusión es que $\tan v$ (con v racional) no es un irracional cuadrático.

radio, la tangente, que hemos visto que es irracional, no podrá ser una raíz cuadrada de una cantidad racional. Ya que si el arco propuesto es $= \omega$, & hacemos $\operatorname{tang} \omega = \sqrt{a}$, tendremos

$$t\omega^2 = \frac{\int \omega^2}{\cos \omega^2} = \frac{1 - \cos 2\omega}{1 + \cos 2\omega} = a,$$

de donde se sigue

$$\cos 2\omega = \frac{1-a}{1+a},$$

ahora bien siendo esta cantidad racional, se sigue que el arco 2ω es irracional, lo que es contrario a la hipótesis, es claro que haciendo $\operatorname{tang} \omega = \sqrt{a}$, la cantidad a no podrá ser racional, & que por lo tanto la tangente de un arco racional cualquiera no es una raíz cuadrada de una cantidad racional.

§. 91. Una vez demostrado este teorema en toda su universalidad, se seguirá que la circunferencia del círculo no pudiendo ser expresada por cantidad radical alguna, ni por cantidad racional alguna, no habrá manera de determinarla por construcción geométrica alguna. Ya que todo lo que se puede construir geométricamente corresponde a las cantidades racionales & radicales;[127] & aunque dista mucho de que estas últimas puedan construirse en general.[128] Es claro que será lo mismo para todos los arcos de círculos donde la longitud o los dos puntos extremos vengan dados, sea por cantidades racionales, sea por cantidades radicales. Ya que, si la longitud del arco es dada, habrá que encontrar sus dos puntos extremos, empleando la cuerda, el seno, la tangente, o cualquier otra línea recta que, para poder construirse, será siempre dependiente o reducible a una de las lineas que acabo de nombrar. Pero si la longitud del arco viene dada por cantidades racionales o radicales, estas líneas serán trascendentes, & con ello irreducibles a cantidad racional o radical alguna. Será lo mismo si los puntos extremos del arco vienen dados, con ello quiero decir por cantidades racionales o radicales. Ya que, en este caso, la longitud del arco será una cantidad trascendente: lo que quiere decir irreducible a cantidad racional o radical alguna, & por ello no admite ninguna construcción geométrica.[129]

---

[127] Justo aquí Lambert conecta la (conjeturada) trascendencia de π con la imposibilidad de cuadrar el círculo: no se puede cuadrar el círculo porque requeriría que π pudiese construirse geométricamente, lo cual no ocurre porque es trascendente. [Serfati 2018, 183] resume así lo acertado y pionero de este razonamiento:

> El procedimiento aquí descrito es precisamente el que ofrecerán Wantzel, después Hermite y luego Lindemann. Lambert aparece aquí como un visionario irreprochable.

[128] Es decir, todo lo que es construible es algebraico, pero no al revés ([Serfati 2018, 183]).

[129] Para terminar el trabajo, Lambert deja más claro que nunca que el término «trascendente» denota cantidades que no son raíces de ecuaciones, y que ser trascendente implica no ser construible.

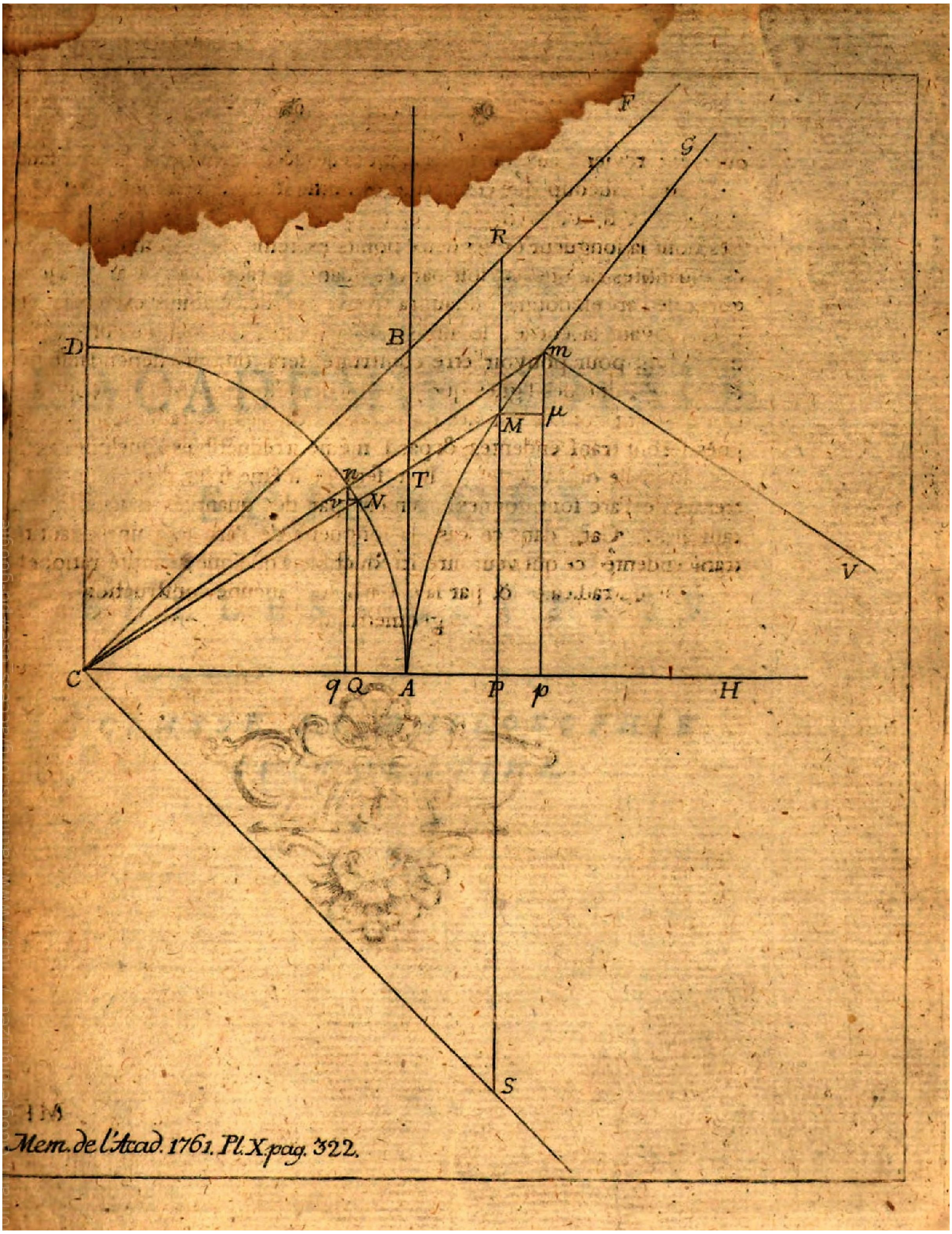


Figure 5.1: Lambert incluye esta figura al final de su artículo, y es la que usa en la parte del trabajo en la que muestra la parametrización de la hipérbola equilátera.

Part III

From Legendre to Liouville

The influence of Lambert's work and the reconception of irrational numbers

Chapter 6

The state of irrationals until the turn of the century

It is probable that the number π is not even included among algebraic irrationals, that is to say it cannot be the root of an algebraic equation with a finite number of terms with rational coeficients; but, it seems so difficult to prove rigorously this proposition.

- Legendre, *Éléments de géométrie.*

6.1 Introduction

With the advances concerning π obtained in his *Mémoire*, Lambert settled in a rigorous way —conspicuously rigorous, actually, considering the eighteenth-century standards— the longstanding problem of the commensurability of the circumference of the circle and its diameter. Certainly, the denouement was as expected, and in fact most of the mathematicians had already assumed the conclusion in practice. However, some wake-up calls had arisen about the necessity of making it clear and now the problem was closed.

Besides the result itself, there were other valuable issues included, both in his proof and his final reflections, which at first glance would be relevant due to the doors they opened. Among these, I would bring out the following: the procedure —continued fractions, that firstly used systematically by Euler and now by Lambert seemed to claim a place in irrationality-related subjects— and the appearance of the modern concept of transcendence and its connection with the circle-squaring problem.

As we will see, none of these promising research lines were exactly developed in this direction during the second half of the century. The very scant impact of Lambert's work —Lambert himself being a quite unknown scholar, outside the German area, not long after his death—[1] and the lack of interest by serious savants in the classic problem were partially responsable for this situation. In addition, some of the old-ongoing projects, mainly the study of the roots of algebraic equations, rapidly became mainstream thanks to certain analytical tools, particularly the aforementioned continued fractions which found a fertile field of application in this branch of mathematics. It was in this sense that irrationals had presence at that age, inasmuch as there was an ever-increasing interest in analysing roots of algebraic equations, which were the main source for irrational quantities.

In spite of this general deviation from which might be thought of as the natural consequence of concrete studies about irrationals —firstly Euler and secondly Lambert— there was an 18th-century mathematician who did receive some of Lambert's influence in this respect. In his *Éléments de géométrie*,[2] Legendre classifies as Lambert had done before, irrationals in terms of «being root» instead of in terms of «being expressible», and gives a new proof of the irrationality of π that highly simplifies that of Lambert's. Moreover, he provides the next most important step towards the elucidation of π by proving the non-rationality of its square. We include in this chapter an annotated translation of these Legendre's contributions.

6.2 The interest in the general

Having in mind the results obtained by Euler and Lambert about irrationality, it would be tempting to think that their consequences and potentially entailed results occupied

[1]We will have time for delving into this issue throughout these two chapters by drawing on different sources, but let us quote in this respect what Montferrier comments in [Montferrier II 1836, p. 161]:

> The modern historians of mathematics hardly mention Lambert's name, and this name, while it is celebrated in Germany, would be virtually unknown in France, where he is not a foreigner at all, if a scholarly lexicographer had not recently repaired this inconceivable neglect in a remarkable note.

As for this «scholarly lexicographer», I must confess that I do not know who Montferrier is referring to. If he is supposed to be French, the closest to Montferrier's dicctionary, following Max Steck's *Bibliographia Lambertiana* [Steck 1970, p. 64], is Servois, who wrote a quite long article about Lambert in [Michaud et al. XXIII 1819, pp. 46–51]. By the way, in this article Servois finds a place to include as one of Lambert's relevant results «the celebrated proof» of the irrationality of π. In any case, he comments that to be honest, it should be said that this proof has gained in elegance and, above all, simplicity, after passing through the hands of Legendre (at p. 48).

[2][Legendre I 1794].

a major place in the 18th-century research lines. Lambert had ended his paper setting the clue to tackle the circle-squaring problem, namely, to demonstrate the transcendence (in the modern sense of the term) of π. He himself had given an important step forward in the case of the number e by proving that none of its natural powers were rational. Continued fractions had acted successfully and seemed to rise as the main tool to carry out the next movements, but things happened in a different way.

The interest we attribute to these fundamental questions is the reflection of a different epoch. Continued fractions were, actually, the driving force for transcendence-related problems but more than half a century later, and virtually no serious mathematicians were really interested in the classic problem. Furthermore, the treatment of irrational numbers was, so to speak, more general, putting almost completely aside the study of concrete quantities like e or π until well into the first half of the 19th century. The terminology used at that period, placing all these quantities under the same label without making distinctions —«irrationals» ≡ «surds»— reinforces this last idea. Therefore, contrary to what might be expected, Lambert's important results form an isolated, hardly-influential contribution towards shedding some light on speculative questions about irrationals.

Let us take, for instance, a look at [Euler 1770]. In 1770, Euler had published a book in German thas was translated shortly after into French by Jacob Bernoulli as *Éléments d'algèbre* in which some valuable additions made by Lagrange were included. It was not long before an English translation of this book came out and in the advertisement of his additions, Lagrange writes:[3]

> The geometricians of the last century paid great attention to Indeterminate Analysis [...] but Bachet and Fermat alone can properly be said to have added any thing to what Diophantus himself has left us on that subject [...] In the present century, this branch of analysis has been almost entirely neglected; and except M. Euler, I know no person who has applied to it [...]

Trying to advance in this direction was what led him to write these additions in which continued fractions play an important role:[4]

> The theory of continued fractions is one of the most useful in arithmetic, as it serves to resolve problems with facility, which, without its aid, would be almost unmanageable; but it is of still greater utility in the solution of indeterminate problems, when integer numbers only are sought [...] As it is not to be found in the chief works on

[3] [Euler 1770, pp. 463, 464].
[4] [Euler 1770, p. 464].

> arithmetic and algebra, it must be little known to mathematicians; and I shall be happy, if I can contribute to render it more familiar to them.

Aside from arithmetic with the focus on integer numbers, and more in connection with algebra, he writes that:

> At the end of this theory, which occupies the first Chapter, follow several curious and entirely new problems, depending on the truth of the same theory, but which I thought proper to treat in a distinct manner, in order that their solution may become more interesting. Among these will particularly be remarked a very simple and easy method of reducing the roots of equations of the second degree to Continued Fractions, and a rigid demonstration, that those fractions must necessarily be always periodical.

Maybe one would expect to find in the treatment of this analytical tool he undertakes after this advertisment, at least one reference to the use made by Lambert in his attempts to uncover the nature of π as an important application of continued fractions. However, just the names of Viéte and Ludolph appear, and in connection with the decimal approximations of this constant and the way to pass from its expresion by means of decimals to the corresponding continued fraction.[5] In addition, the usefulness of continued fractions is emphasised again, now in connection with the rational approximations of π, in the brief «Scholium» bringing particularly into focus the name of Euler —but in a general way— as well as those of Wallis, Horrox, Huygens and Johann Bernoulli, but no trace of Lambert and his connection with π.

There is no doubt that Lagrange knew both Lambert's and Euler's results of irrationality —he in fact chaired the meeting in which Lambert read his *Mémoire* before the members of the Academy,[6] and also quotes Euler's paper on continued fractions— but these results did not turn out to be relevant enough to receive mention, otherwise he would have done so. Clearly one of the strong interest was in the theory of equations, but the approach to the study of this theory came from an approximative perspective rather than from a theoretical one,[7] and from the general, inasmuch as it was framed in a distinctive general vision of mathematics:[8]

[5] [Euler 1770, 472].

[6] See the report of the Berlin Academy of Science included at the end of the Chapter 4 in this dissertation.

[7] Certainly, Lagrange gives a step towards a more theoretical and conceptual approach with his «rigid demonstration, that those fractions must necessarily be always periodical», by establishing the connection between periodic continued fractions and quadratic irrationals (see below), but this must be seen as an isolated case.

[8] The quote from [Fraser 2003, p. 324].

> It is important to appreciate the distinctive philosophical character of eighteenth-century algebraic analysis, understood within the larger historical and intellectual evolution of mathematical analysis. The algebraic calculus of Euler and Lagrange was rooted in the formal study of functional equations, algorithms, and operations on variables. The values that these variables received, their numerical or geometrical interpretation, was logically of secondary concern.

Therefore, interest was paid to the general instead of the particular, and to the formal tools rather than the objects, so the studies of concrete cases as those concerning e or π —Lambert's proof included— were virtually overlooked and considered as mere curiosities.

These aspects are even clearly reflected in Charles Hutton's dictionary, a ten-year project carried out by an influencial mathematician in Britain, above all in connection with the dissemination of his discipline.[9] The first edition of this dictionary was published in 1796, and it is quite insightful with regard to the reception of Lambert's ideas about irrationals. Firstly, throughout [Hutton I 1796] and [Hutton II 1796] there are entries for many scholars who deserve to be included from Hutton's point of view. This is not the case for Lambert. Let us bring into focus that Hutton did know Lambert because the savant is mentioned in [Hutton I 1796, p. 161] in his long entry devoted to Astronomy, but the Alsatian —German for Hutton— does not appear in connection either with π or with irrationals at large.[10]

There is no reference, for instance, when he defines «circle»,[11] where several approximations for π (he uses c instead of π) are presented along with some of the most common names like van Ceulen or de Lagny who achieved great practical advances. Or at the entry devoted to «continued fractions»[12] in which he gives the usual introductory history similar to that by Lagrange[13] by quoting Brounker, Huygens or Euler. Hutton curiously complains that:[14]

> This subject is perhaps capable of much improvement, though it has been rather neglected, as very little use has been made of it, except, by those authors, in approximating to the value of Fractions, and ratios, that are expressed in large numbers.

[9] For more details see [Wardhaugh 2017].

[10] In the second edition of 1815 [Hutton 1815] Hutton includes an entry for Lambert (we will analyse this second edition in the next chapter bringing out some differences with respect to the first one).

[11] [Hutton I 1796, p. 284–286].

[12] [Hutton I 1796, p. 507–508].

[13] A more complete description can be seen in [Montucla III 1802, pp. 308–316] but with the same negative result as far as the appearance of the name of Lambert is concerned.

[14] [Hutton I 1796, p. 507].

But this tool had turned out to be powerful in hands of Euler and Lambert, not just in the domain of approximative tasks, but in theoretical issues about the nature of certain irrationals. In the following lines, actually, π appears again but precisely as an example of the aforementioned use of continued fractions:

$$\pi = 3.1415926535 \quad \rightsquigarrow \quad \pi = \frac{31415926535}{10000000000} \quad \rightsquigarrow \quad \pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \& \ddots}}}}$$

this last expression obtained by applying «the same as to find the greatest common measure...».[15] To be precise, Hutton quotes Euler's chapter on continued fractions included in his *Introductio*, where Euler is not so exhaustive about the irrationality of e as he is in [Euler 1744], a less-known work, so it seems reasonable that this result might go unnoticed by him.[16] But the same occurred with π:[17]

> It is commonly supposed that the diameter and circumference of a circle are Incommensurable to each other; at least their commensurability has never been proved.

Which seems a clear evidence that Hutton did not even know Lambert's *Mémoire*.[18]

In any case, there are other details that, although more subtle than the direct appearence of certain names, point towards a lack of interest in irrational-related subjects from a more theoretical point of view in this period. The use of the terminology is one of them and provides us some clues about the state of irrationals. Lambert had opened the way to deal with different irrational quantities in a more operative way than before by using algebraic equations as framework, reserving the term «transcendence» to special irrationals like π

[15] [Hutton I 1796, p. 507].

[16] Furthermore, remember that Euler did not claim explicitly the irrationality of e.

[17] [Hutton I 1796, p. 629].

[18] This lack of knowledge seems to have lasted because in [Hutton 1815] Hutton includes the name of Legendre in conection with the irrationality of π and π^2 —by the way, Hutton makes reference to them as «numbers»— but no trace of Lambert in this issue (the name of Legendre is not included in the 1796 edition, which is more reasonable than the absence of Lambert taking into account that Hutton's dictionary was written just three years later that Legendre's *Éléments de géométrie*). Furthermore, Hutton in spite of this addition keeps mistakenly the former quote in this new edition, namely:

> It is commonly supposed that the diameter and circumference of a circle are Incommensurable to each other; at least their commensurability has never been proved.

or e, but this new classification did not have impact at all. Instead, mathematical works are plenty of references to the expressibility of certain quantities by the usual algebraic means, using the term «irrational» as synonymous with «surds», that is to say, expressible by radicals.[19] A clear case is that of Hutton, who in fact does not include π in his entries «irrational» or «transcendence» (this last one defined by means of the old yardstick of expressibility),[20] but also other influential works as such as Klügel's dictionary.

In this dictionary,[21] the key entries as far as our analysis is concerned, are «Irrational», «Cyclotechnie», and «Kettenbruch» (continued fraction). The entry on «Irrational» defines it as:[22]

> a relational concept, for magnitudes such that one cannot be composed from equal parts of the other, like the diagonal of a square or of a cube to the side of one or the other.

The «arithmetic of irrational magnitudes» has to do with the comparison of the different kinds of such magnitudes, and of them composed with rational ones. And here he mentions Euclid and starts discussing the contents of Elements, Book X. Then he talks about a method of Fermat to eliminate irrationals from an equation, and in this context we find:[23]

> The most difficult cases in mathematics and its applications are those in which one finds transcendental magnitudes of a different kind from circular and logarithmic functions, and when one has to develop or to combine series, under the condition of convergence.

There is apparently no other mention of transcendence (clearly based upon the classic idea of expressiblility) nor of π.

The term «Cyclotechnie» is defined as:[24]

> the collection of methods for the numerical determination of the circumference, the arcs from the corresponding lines, the lines from the arcs, and from each other, when the relations between the corresponding arcs are given. It is based on the corresponding formulas of cyklometrie and goniometrie, which contain the relations between these magnitudes

[19] Actually this was the standard use of this terms in this period [Molk 1909, p. 138 note 22].
[20] See for example [Hutton 1815, pp. 332, 604–605].
[21] I thank José Ferreirós the translations and comments about Klügel's dictionary.
[22] [Klügel II 1805, p. 949].
[23] [Klügel II 1805, pp. 953–954].
[24] [Klügel I 1803, p. 644].

He goes on to discuss the work of Archimedes, then Apollonius, Vieta, Ludolph, Snellius, Huygens, Wallis, Brouncker's series, Newton, Euler, Gregory, and then Sharp, Machin, Lagny and Bega, to end by concluding:[25]

> In fact the circumference of the circle has been calculated much more precisely than it may ever be necessary for the practical use. For that, the first ten or twelve decimal places are more than enough [...] It cannot help at all, to find the value of the circumference even more precisely, since a few hundred ciphers are always an insignificant addition compared with the infinitely many that still remain.

Here follows another section on goniometric formulas, and then a long section on chords, where Euler and his formulas are mentioned, but the more theoretical work of Lambert is not mentioned.

«Kettenbruch», continued fractions, is also an important entry.[26] The last numbered subsection[27] gives a history of continued fractions which emphasizes the role of Euler (after mentioning Brouncker, Wallis, Huygens), and then among others La Grange on numerical approximation, as well as Lambert in [Lambert 1766/1770][28] but without mentioning his paper about π.

The general impression is that mathematicians in this period are heavily oriented towards problems and methods of calculation, general formulas and numerical approximation, while the orientation taken by Lambert in 1761/1768 was of a clearly more theoretical and/or logical tendency.[29] In this he was accompanied by some of the greatest mathematicians of the age (Euler, d'Alembert, Legendre), but in a sense this kind of result seems pioneering, a little too early for this time, falling more squarely within the general orientation of mathematics from (say) 1825 onwards. In this respect, it is insightful what A. von Braunmühl writes in [Cantor IV 1908, pp. 447–448] after naming some authors and their connection with π:

> Lambert's contemporaries however seem either to have missed his work, or to have ignored the significance of the step that he made by establishing the knowledge of the nature of number π by means of this exact proof, otherwise it would not have happened that even Euler repeats in 1771 his rather unfruitful speculations about

[25] [Klügel I 1803, p. 659]

[26] [Klügel III 1808, pp. 43–87].

[27] [Klügel III 1808, subsection 66, p.85].

[28] The volume 2 on the transformation of fractions into continued fractions.

[29] As for the importance of Lambert in the field of logic see [Hintikka et al. 2019], when he is claimed to have been without doubt «the greatest 18th-century logician».

> the possibility or impossibility of squaring the circle, which he had linked already in the *Introductio*[30] with the solution of transcendental equations such as $s = \cos s$, $s = \sin 2s$, etc. The whole nature of Lambert's proof procedure, with its goal of absolute exactness, remained thus quite outside of the sphere of activity of their contemporaries, directed almost exclusively to the formal expansion of mathematics, and so it becomes understandable that it could be ignored.[31]

Resuming the issue of the terminology, if the old theoretical framework was still being used, it was due to the fact that the focus was being placed on the formalistic part of the theory of equations, instead of the more conceptual one, a part of mathematics that takes a special boost in the 19th century, but that did not reach a mature state until well into the century. Since the great advances made by Italians in the 16th century, one of the main problems with which Algebra was occupied, was in trying to overcome the mark got by Scipione del Ferro, Tartaglia and Cardano, so that dealing with roots of algebraic equations was one of the main worries. It was, above all, following this line of research that continued fractions were developed; it was for this task that they found a rich field of action, mainly providing methods to approximate roots of equations; and it was in this sense that irrational quantities were considered at that time. Therefore, it might be said that Algebra was the main driving force for the study of irrational numbers due to algebraic equations being the main source for them.

In the 18th century, the most remarkable contributions to the theory of equations came from the investigations made by Euler, Bezout, Waring and Lagrange.[32] The latter mathematician came up with a completely new use of continued fractions to find approximations for irrational roots of algebraic equations, a method that shortly became a classic,[33] and wrote a highly influential work in 1771, *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, whose main goal was to get the solution of the quintic, a solution that he, like the rest of his contemporaries, thought existed.[34] Actually, the general opinion regarding the nth degree polonomial equation was that it could be solved by using the usual algebraic means.

---

[30] Considerationes cyclometricae, Acad. Petrop. XVI, p. 160 ff (note by A. von Braunmühl).

[31] I thank José Ferreirós for the translation.

[32] [Ayoub 1980, p. 253].

[33] [Montucla III 1802, p. 316]; [Brezinski 1991, p. 117].

[34] In [Ayoub 1980, p. 262] the author writes: «Did no one suspect that the solution of the quintic was impossible? Apparently not until 1799 when RUFFINI published his book on the theory of equations». To the contrarty, [Gray 2018, p. 85] comments that «Lagrange was the first to suspect that the quintic might not be solvable by radicals». In any case, the general vision was that this equation could be solved by radicals.

As for the irrational numbers, this assumption implies a complete match between «algebraic» numbers and «algebraically expressible» numbers, so a change of theoretical framework did not seem to be necessary. Lambert's operative reason seems too weak as to banish almost a century of tradition using the terminology of expressibility. In this sense, a complete turning point took place with the publication of Ruffini's work in 1799 about the impossibility of solving the quintic by the usual algebraic means. Now, «algebraic» and «expressible» was never going to be the same, so that the «algebraic», taking into account the theoretical framework offered by algebraic equations with a strong presence in this period, would end up taking on its modern role, although not as soon as maybe would be expected.[35]

But what can we draw of utility for the irrational numbers from this secondary investigations? I would mainly bring into light two fruitful ideas: the first idea —not so fruitful perhaps as the second one— has the origin in Lagrange's *Additions au Mémoire sur la Resólution des équations numériques* dated 1770, and more concretely in the next claim:[36]

> Now I claim that the continued fraction which expresses the value of x will always be necessarily periodic.

As we mentioned in a previous chapter, Euler had already proved that every periodic continued fraction was actually the root of a second-degree algebraic equation. Now Lagrange turned this one-direction claim into an equivalence:

$$x = \text{periodic continued fraction} \Leftrightarrow x \text{ is a quadratic irrational}$$

and therefore, into a characterization for quadratic irrationals. The next natural step would be to ask about cubic irrationals and more generaly nth-irrationals, as well as possible options to try to characterise them in order to get deeply into the understanding of algebraic numbers and, by negation, of transcendental numbers. The search for such methods is actually what Lagrange draws attention to later, «a research that seems to me very noteworthy so that Geometers should be occupied with it».[37] In any case, despite the undoubted theoretical interest of this idea for irrationals —Hermite will rescue it in the next century— it would turn out to be a long-term project, such a long-term project

[35]It should be said that, to some extent, the real turning point came with Abel (1824), due to the scant influence of Ruffini's work (the influence of Ruffini's work —as well as others— in connection with our subject, will be analysed in the next chapter).

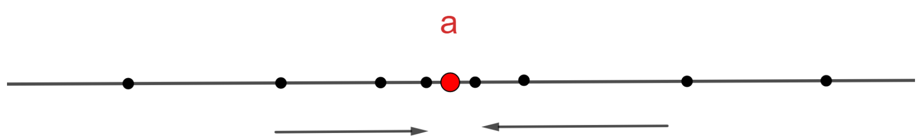
[36][Lagrange II 1867, p. 606].

[37][Lagrange II 1867, p. 622].

that in some aspects it is still an ongoing research line.[38]

It is the second idea —coming back to the previous question— which I think is more interesting, among other things because it paved the way towards a more abstract and modern vision of irrationals, and from a historical point of view, it has the advantage of allowing one to grasp one of the representative differences between the 18th and the 19th Centuries: the different treatment of infinite processes as tools and as objects.[39] Certainly, some infinite processes like infinite series had been used as tools to approximate irrationals, but the introduction of continued fractions —with a strong superiority in this sense as Euler explains in his [Euler 1744]— and the new methods devised in order to cope with roots of algebraic equations —as that by Lagrange— put these tools in the center of the scene as far as the possibility of grasping irrationals is concerned. Letting a be an irrational number, the panorama can be summarised, following Lagrange, in this way:

- a can be expressed by means of an infinite continued fraction.
- By truncating this infinite expression step by step, «we shall have this series of fractions converging towards the quantity a ...».[40]
- These fractions represented by Lagrange as $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$ and so on, «will be alternately less and greater than the quantity a».[41]



This representation, in which a is the limit of a certain succession of rationals, is truly close to the idea of thinking an irrational number as defined by means of a succession of convergents, that is to say, of thinking the general structure behind —a succession— as properly an object instead of a mere tool, exactly the next step taken by mathematicians

[38] See [Dasaratha et al. 2014, pp. 1, 2].

[39] In order to delve into this distinction between tools and objects as far as infinitary processes are concerned see [Ferreirós 2015, Chaper 8].

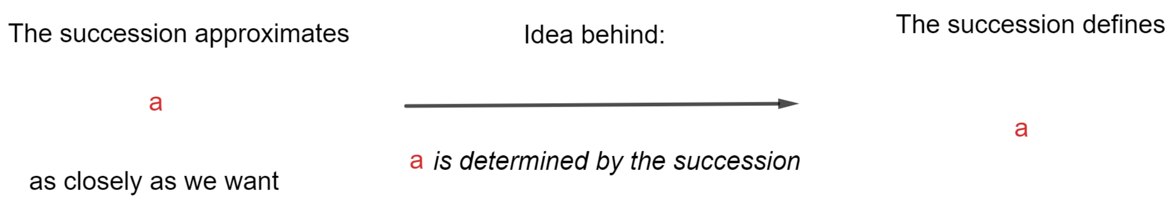
[40] [Euler 1770, p. 476]. These fractions are what we now adequately call «convergents».

[41] [Euler 1770, p. 480].

in the context of irrational numbers (around 1870). This idea does not arise necessarily from continued fractions, but I want to make it clear that their clear success in this issue underpinned the idea of determing irrationals by means of successions. Just to put an example showing that in this century these aspects were being widely discused, something that would pave even more the way towards this modern vision that will take place in the next century, let us quote D'Alembert's entry *Limit* in the *Encyclopédie*:[42]

> The limit never coincides [with the quantity], or never becomes equal to the quantity of which it is the limit; but the former always approaches it closer and closer, and differs from it by as little as one wishes.

Anyway, it is important to take into account that in reality there is a subtle but enormous difference between these two conceptions that actually epitomises the difference of visions between centuries with an abstract vision of mathematics as yardstick. One thing is to use certain numerical values in order to approximate a quantity —a totally practical vision— and a highly different thing is to use an infinite set of objects to define a number, even if the underlying idea that leads from one conception to the other seems obvious.[43]



So, although mathematicians had all the ingredientes to develop a theory of irrational numbers, the overcoming of the involved epistemological obstacles[44] and the break with

[42] In [Schubring 2005, p. 211].

[43] In [Brezinski 1991, p. 127] the author, making reference to [Condillac 1798, chapter XII], says that «Condillac used continued fractions to define irrational numbers» which I think must be nuanced, because Condillac does not define irrational numbers by means of continued fractions —in the style of Méray, Cauchy, Weierstrass or Cantor— but rather he makes it clear that these numbers are determined by them. As I tried to explain before, this is a subtle but big and important difference (it might be insightful to take into account that Condillac himself comments that he is following Lagrange, who does not leave this practical vision).

[44] As for instance the acceptance of the actual infinity letting to jump towards the limit: «The limit never coincides [with the quantity]...».

this so to speak practical tradition will not take place until the second half of the 19th century, a century with more abstract expectations.

6.3 Legendre's proof of irrationality of π

In the middle of this general vision of mathematics, a new contribution to the study of concrete irrationals appears in the work of Legendre, important and influent mathematician in Paris and member of its Academy from 1795. In his *Éléments de géométrie* first published in 1794, he takes the baton of Lambert's *Mémoire* and gives the next natural step towards the elucidation of the nature of π by proving that π^2 cannot be a rational number. But moreover, when after this proof he lays out his opinion about π, he conspicuously draws on what will end up to be the modern theoretical framework that had been firstly introduced by Lambert: algebraic as representative of «being root» instead of «being expressible by finite algebraic means»:

> It is probable that the number π is not even included among algebraic irrationals, that is to say, it cannot be the root of an algebraic equation with a finite number of terms with rational coeficients; but it seems so difficult to prove rigorously this proposition.[45]

This is probably the first clearly modern expression in the classical period about what an algebraic number is, but in spite of the high influence Legendre's work had it did not produce a quick change in the terminology or in the use of the new theoretical framework as far as the algebraic numbers are concerned; rather, mathematicians kept using the «to be expressible» as a yardstick to deal with irrationals. To the contrary, this influence did cause that Legendre appears in old works —also in modern accounts about π— as the first option to write about the irrationality of π due to the simplicity of his proof, virtually eclipsing Lambert's own work about the issue.

Legendre's *Éléments* had a clear educational objective, and it was for this reason that the author tackled the problem around π. Lambert's demonstration being difficult to follow, he decided to search for another way to prove its irrationality. In this context, the first edition is more insightful than others because Legendre makes explicit the reason why he gives a different demonstration:

[45] [Legendre I 1794, pp. 303–304].

> We already know one proof of this proposition that has been given by Lambert in the Memoirs of Berlin, year 1761; but, as this proof is long and difficult to follow, we have tried to shorten and simplify it.

According to him the problem does not lie in that Lambert's proof is not rigurous enough as later authors will claim,[46] but rather in the difficulty of the proof; that is why the first edition[47] is more interesting than the others in which the reference to Lambert is reduced to a footnote at the end of the proof: «This proposition was first demostrated by Lambert, in the Memoirs of Berlin, *anno* 1761». The overal idea of Legendre's proof can be easily grasped by means of the following outline:

- Legendre introduces an infinite series represented by $\varphi(z)$ as a departure point.
- From this series he obtains an expression in continued fraction for $\frac{a}{z} \cdot \frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)}$ that he calls $\psi(z)$.
- By comparing both expressions and putting $\frac{1}{2}$ as a concrete value for z, Legendre gets the continued fraction for the tangent.
- Then, Legendre proves two lemmas —the second lemma being weaker than the first one— about the irrationality of certain continued fractions.
- The milestone comes with the theorem, in which he proves the irrationality of the tangent, due to the fact that its continued fraction falls under the conditions of the second lemma.
- Finally, Legendre reflects about the option that π is not a root of an algebraic equation using the term «algebraic» in a clearly modern way, and gives a step forward by proving that $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$ (again, by means of the second lemma).

The differences and similarities between Lambert's and Legendre's proofs are quite clear. For instance, Lambert's proof is conspicuously longer, among other things because he dedicates ten pages to prove rigurously the convergence of the continued fraction of the tangent, something that Legendre did not. Legendre, on the other hand, is more general: he establishes some irrationality-related results that will be applied to the concrete case of the tangent, and Lambert deals in every moment just with the tangent. Interestingly, there is another difference that epitomizes the two main methodological approaches: whilst Lambert does not hide his cards and shows from the very outset his ideas —he starts out

[46] We have already commented this issue in a previous chapter.

[47] Also the second edition. I could not consult the third one, but from the fourth edition onwards, the reference to Lambert already appears in a footnote.

with a continued fraction that he deduces in a constructive and intuitive way, a clearly heuristic aproach— Legendre brings an infinite series into being apparently out of nothing in order to deduce the needed expression for the tangent, and uses general results for his benefit. Whilst Legendre seems in some steps «to efface his tracks like a fox», Lambert acts with an overwhelming level of detail, which likely is why Glaisher wrote:[48]

> Although Legendre's method is quite as rigorous as that on which it is founded, still, on the whole, the demonstration of Lambert seems to afford a more striking and convincing proof of the truth of the proposition.

Although we run into the other face of the coin:[49]

> his investigation, however, is given in such detail, and so many properties of continued fractions, now well known, are proved, that it is not very easy to follow his reasoning, which extends over more that thirty pages.

In any case, there is an important similarity apart from the fact that they both use the same method (continued fractions): the rigorous style that turns their proofs into undeniable justifications about the irrationality of π for their age, and in esence for ours.

What follows is an anotated translation of Legendre's proof contained in the first edition of his *Éléments de géométrie* (1794). Although there already exists an English translation of Legendre's *Éléments*,[50] we have deemed important to include our own in this dissertation, among other things, because there is no notes in the just mentioned English translation. Besides, the relevance and the influence of this demonstration justify its presence.

6.3.1 «NOTE VI. Where it is proved that the ratio of the circunference to the diameter cannot be expressed in integer numbers»

We already know one proof of this proposition that has been given by Lambert in the Memoirs of Berlin, year 1761; however, as this proof is long and difficult to follow, we have tried to shorten and simplify it. Here we have the result of our investigations.

---

[48] [Glaisher 1871, p. 12]. See Chapter 4 for a brief but more detailed exposition of the main features of Lambert's proof.

[49] [Glaisher 1871, p. 12].

[50] I refer to [Legendre II 1830] (this is the second edition) which I also took into account to elaborate mine.

Let us consider the infinite series[51]

$$1+\frac{a}{z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z\cdot z+1}+\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{a^3}{z\cdot z+1\cdot z+2}+\text{etc}$$

and let us suppose that $\varphi(z)$ stands for the sum.[52] Putting $z+1$ in place of z, $\varphi(z+1)$ will in like manner be the sum of the series

$$1+\frac{a}{z+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z+1\cdot z+2}+\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{a^3}{z+1\cdot z+2\cdot z+3}+\text{etc.}$$

Substract the one of these series from the other term by term, and we shall have $\varphi(z)-\varphi(z+1)$ for the sum of the remainder, which will be

$$\frac{a}{z\cdot z+1}+\frac{a^2}{z\cdot z+1\cdot z+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^3}{z\cdot z+1\cdot z+2\cdot z+3}+\text{etc.}$$

But this remainder can be put under the form

$$\frac{a}{z\cdot z+1}\cdot\left(1+\frac{a}{z+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z+2\cdot z+3}+\text{etc.}\right);$$

and then it is reduced to $\frac{a}{z\cdot z+1}\varphi(z+2)$. Hence, generally, we shall have

$$\varphi(z)-\varphi(z+1)=\frac{a}{z\cdot z+1}\varphi(z+2).$$

Divide this equation by $\varphi(z+1)$; and, to simplify the result, let ψ be a new function of z such that $\psi(z)=\frac{a}{z}\cdot\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)}$; now instead of $\frac{\varphi(z)}{\varphi(z+1)}$, we may put $\frac{a}{z\psi(z)}$, and $\frac{(z+1)\psi(z+1)}{a}$ instead of $\frac{\varphi(z+2)}{\varphi(z+1)}$. This substitution being made, we shall have $\psi(z)=\frac{a}{z+\psi(z+1)}$.[53] But by successively inserting $z+1$, $z+2$, etc.,

[51] Using our modern notation, this series should include brackets in certain places (take this into account in the rest of the writting):

$$1+\frac{a}{z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z\cdot(z+1)}+\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{a^3}{z\cdot(z+1)\cdot(z+2)}+\text{etc.}$$

[52] Legendre writes $\varphi:z$ to make reference to that φ is a function of z. For the sake of clarity I decided to make the change in the text.

[53] The process is as follow. Putting:

$$\psi(z)=\frac{a}{z}\cdot\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)}$$

in place of z, there will result $\psi(z+1) = \dfrac{a}{z+1+\psi(z+2)}$, $\psi(z+2) = \dfrac{a}{z+2+\psi(z+3)}$, etc. Hence the value of $\psi(z)$ may also be expressed in continued fraction:

$$\psi(z) = \cfrac{a}{z + \cfrac{a}{z+1+\cfrac{a}{z+2+\text{etc.}}}}$$

Reciprocally this continued fraction, prolonged to infinity, has for its sum[54] $\psi(z)$, or its equal $\dfrac{a}{z} \cdot \dfrac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)}$, and this sum, developed into its two ordinary series, is

$$\frac{a}{z} \cdot \frac{1 + \dfrac{a}{z+1} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a^2}{z+1 \cdot z+2} + \text{etc.}}{1 + \dfrac{a}{z} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a^2}{z \cdot z+1} + \text{etc.}}$$

---

we obtain:

$$\frac{1}{\psi(z)} = \frac{z}{a} \cdot \frac{\varphi(z)}{\varphi(z+1)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{z \cdot \psi(z)} = \frac{\varphi(z)}{\varphi(z+1)} \tag{6.1}$$

and from this last expression:

$$\frac{\varphi(z+2)}{\varphi(z+1)} = \frac{(z+1) \cdot \psi(z+1)}{a} \tag{6.2}$$

Now, as Legendre says, dividing this equation by $\varphi(z+1)$, and using (6.1) and (6.2), we get:

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(z)}{\varphi(z+1)} - 1 = \frac{a \cdot \varphi(z+2)}{z \cdot (z+1) \cdot \varphi(z+1)} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{a}{z \cdot \psi(z)} - 1 = \frac{a \cdot (z+1) \cdot \psi(z+1)}{z \cdot (z+1) \cdot a} = \frac{\psi(z+1)}{z} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{a}{z \cdot \psi(z)} = 1 + \frac{\psi(z+1)}{z} \Longleftrightarrow \frac{z \cdot \psi(z)}{a} = \frac{1}{1 + \dfrac{\psi(z+1)}{z}} \\
&\Longleftrightarrow \quad \psi(z) = \frac{a}{z + \psi(z+1)}
\end{aligned}$$

[54] A claim that he does not justify as Lambert did with his continued fraction.

Now suppose $z = \dfrac{1}{2}$, the continued fraction will become[55]

$$\cfrac{2a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\text{etc.}}}};$$

in such a way that all the numerators, except the first, will be equal to $4a$, and that its denominators will form the series of odd numbers 1, 3, 5, 7, etc. The value of this continued fraction may therefore also be expressed by[56]

$$2a \cdot \frac{1+\dfrac{4a}{2\cdot 3}+\dfrac{16a^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\dfrac{64a^3}{2\cdot 3\cdot\cdot 7}+\text{etc.}}{1+\dfrac{4a}{2}+\dfrac{16a^2}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{64a^3}{2\cdot 3\cdots 6}+\text{etc.}}.$$

[55] Since:

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{1}{2}\right) &= \cfrac{a}{\frac{1}{2}+\cfrac{a}{\left(\frac{1}{2}+1\right)+\cfrac{a}{\left(\frac{1}{2}+2\right)+\ddots}}} = \cfrac{2a}{1+\cfrac{2a}{\left(\frac{1}{2}+1\right)+\cfrac{a}{\left(\frac{1}{2}+2\right)+\ddots}}} \\ &= \cfrac{2a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{2a}{\left(\frac{1}{2}+2\right)+\ddots}}} = \cfrac{2a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\ddots}}} = \cdots\end{aligned}$$

[56] Just to put an example:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{(z+1)(z+2)} \equiv \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}} = \frac{a^2}{\frac{2\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2}} = \frac{4a^2}{2\cdot 3\cdot 5} = \frac{16a^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

which is the third term of the numerator.

But these series are known, and it is known that representing by e the number whose hyperbolic logarithm is 1, the foregoing expression is reduced to[57]

$$\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}\cdot\sqrt{a};$$

so that we shall have in general

$$\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}\cdot 2\sqrt{a}=\cfrac{4a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\text{etc.}}}}$$

From this, two principal formulas are derived according as a is positive or negative. First let $4a=x^2$, we shall have[58]

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\text{etc.}}}}$$

[57]Putting $x^2=4a$ as he also put later, we obtain $x=2\sqrt{a}\,,\ x\sqrt{a}=2a$ and therefore:

$$\begin{aligned}2a\cdot\frac{1+\frac{4a}{2\cdot3}+\frac{16a^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{64a^3}{2\cdot3\cdot\cdot7}+\cdots}{1+\frac{4a}{2}+\frac{16a^2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{64a^3}{2\cdot3\cdots6}+\cdots} &= \sqrt{a}\cdot\frac{1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots}{1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots}=\sqrt{a}\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\\ &= \sqrt{a}\cdot\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}\end{aligned}$$

[58]Since $x=2\sqrt{a}$ y $x\sqrt{a}=2a$, we get:

$$\begin{aligned}\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}\cdot\sqrt{a}=\cfrac{2a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\ddots}}} \iff \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} &= \cfrac{2a\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\ddots}}}=\\ &= \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\ddots}}\end{aligned}$$

Next let $4a = -x^2$, due to[59]

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = \sqrt{-1} \cdot \tan x,$$

we shall have[60]

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \text{etc.}}}}}$$

This is the formula that will be the base for our demonstration. But first of all it is necessary to prove the two following lemmas.

[59] By means of Euler's formulas:

$$\begin{aligned} e^{xi} + e^{-xi} &= 2\cos x \\ e^{xi} - e^{-xi} &= i \cdot 2\sin x \end{aligned}$$

we obtain:

$$i \cdot \tan x = i \cdot \frac{2\sin x}{2\cos x} = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}}$$

[60] If $4a = -x^2$, then $2\sqrt{a} = ix$ and therefore:

$$\begin{aligned} \frac{e^{2\sqrt{a}} - e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}} + e^{-2\sqrt{a}}} \cdot 2\sqrt{a} \quad &= \quad \cfrac{4a}{1 + \cfrac{4a}{3 + \cfrac{4a}{5 + \ddots}}} \iff \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} \cdot ix = \cfrac{-x^2}{1 + \cfrac{-x^2}{3 + \cfrac{-x^2}{5 + \ddots}}} \\ &\iff \quad \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} \cdot i = \cfrac{-x}{1 + \cfrac{-x^2}{3 + \cfrac{-x^2}{5 + \ddots}}} \\ &\iff \quad \tan x = -\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} \cdot i = \cfrac{x}{1 + \cfrac{-x^2}{3 + \cfrac{-x^2}{5 + \ddots}}} \end{aligned}$$

LEMMA I. *Let,*

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + etc.}}},$$

be a continued fraction prolonged to infinity in which all the numbers m, n, m', n', etc. are positive or negative integers. If the component fractions $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, etc, are all supposed to be less than unity,[61] *I say that the total value of the continued fraction will be an irrational number.*

Firstly I say that this value will be less than unity. In effect, without lessening the generality of the continued fraction, we can suppose all the denominators n, n', n'', etc. to be positive:[62] now if we take just one single term of the proposed series, we shall have by hypothesis $\frac{m}{n} < 1$. If we take the first two, because of $\frac{m'}{n'} < 1$, it is clear that $n + \frac{m'}{n'}$ is greater than $n - 1$: but m is less than n; and since they are both integers, m will also be less than $n + \frac{m'}{n'}$. Hence the value which results from the two terms

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n'}}$$

is less than unity. Calculate three terms of the proposed continued fraction; and in the first place, as we have just seen, the value of the part

$$\cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n''}}$$

[61] Reading the proof, it is clear that he is speaking about absolute values, that is to say $|\frac{m^{(i)}}{n^{(i)}}| < 1$ (see also [Baltus 2003, p. 8]).

[62] Since if any of them is negative, let us put $n' = -j$, then:

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{-j + \cfrac{m''}{n'' + \ddots}}} = \cfrac{m}{n + \cfrac{-m'}{j + \cfrac{-m''}{n'' + \cfrac{m'''}{n''' + \ddots}}}} \equiv \cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \ddots}}}$$

will be lesser than unity. Call this value ω, and it is clear that $\dfrac{m}{n+\omega}$ will be even less than unity: hence the value which results from the three terms:

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''}}}$$

is less than unity. By continuing the same reasoning, we shall see that, whatever number of terms of the proposed continued fraction be calculated, the value resulting from them is less than unity; hence the total value of this continued fraction prolonged to infinity is also less than unity. It cannot be equal to unity except in the single case where the proposed fraction had the form[63]

$$\cfrac{m}{m+1-\cfrac{m'}{m'+1-\cfrac{m''}{m''+1-\text{etc.}}}}$$

In every other case it will be less.

This being proved, if we deny the value of the proposed continued fraction to be irrational, let us suppose that it is equal to a rational number, and let $\dfrac{B}{A}$ be this number, B and A being whatever integers; we shall the have

$$\frac{B}{A}=\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\text{etc.}}}}$$

[63]If we calculate the convergents $\frac{p_n}{q_n}$ of this continued fraction we shall obtain:

$$\begin{aligned}\frac{p_1}{q_1} &= \frac{m}{m+1}\\ \frac{p_2}{q_2} &= \frac{mm'+m}{(mm'+m)+1}\\ \frac{p_3}{q_3} &= \frac{mm'm''+mm'+m}{(mm'm''+mm'+m)+1}\\ &\dots\end{aligned}$$

that is to say $q_n = p_n + 1$, and hence:

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_n}{p_n+1}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{p_n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

because if $n^{(j)}>0$, then $m^{(j)}>0$ and in this case $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Let C, D, E, etc. be indeterminate [quantities], such that

$$\frac{C}{B} = \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \cfrac{m'''}{n''' + \text{etc.}}}}$$

$$\frac{D}{C} = \cfrac{m''}{n'' + \cfrac{m'''}{n''' + \cfrac{m^{IV}}{n^{IV} + \text{etc.}}}}$$

and so on to infinity. These different continued fractions have all their terms less than unity, their values or sums $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, $\frac{E}{D}$, etc. will be less than unity, following what we have just proved above, and thus we shall have $B < A$, $C < B$, $D < C$, etc; in such a way that the serie A, B, C, D, E, etc. goes on decreasing to infinity. But the combination of the continued fraction we are treating of gives

$$\frac{B}{A} = \cfrac{m}{n + \cfrac{C}{B}}; \quad \text{whence results} \quad C = mA - nB,$$

$$\frac{C}{B} = \cfrac{m'}{n' + \cfrac{D}{C}}; \quad \text{whence results} \quad D = m'B - n'C,$$

$$\frac{D}{C} = \cfrac{m''}{n'' + \cfrac{E}{D}}; \quad \text{whence results} \quad E = m''C - n''D,$$

etc.

And, since the two first numbers are integer by hypothesis, it follows that all the others C, D, E, etc., which were so far indeterminate, are also integer numbers. Now it implies a contradiction to suppose that an infinite series A, B, C, D, E, etc. can be at once decreasing and composed of integer numbers; because besides no one of the numbers A, B, C, D, E, etc. can be zero, since the proposed continued fraction goes on to infinity, the sums represented by $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, etc. must always be something. Hence the hypothesis that the sum of the proposed continued fraction is equal to a rational quantity $\frac{B}{A}$ cannot stand; hence this sum is necessarily an irrational number.

LEMMA II. *The same things being established, if the component fractions* $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$,

$\frac{m''}{n''}$, *etc. are of whatever magnitude at the beginning of the series, but after a certain interval they are constantly less than unity, I say that the proposed continued fraction, always supposing that it tends to infinity, will have an irrational value.*

For if, reckoning from $\frac{m'''}{n'''}$, for example, all the fractions $\frac{m'''}{n'''}$, $\frac{m^{IV}}{n^{IV}}$, $\frac{m^V}{n^V}$, etc. to infinity, are less than unity; then by lemma 1, the continued fraction

$$\cfrac{m'''}{n''' + \cfrac{m^{IV}}{n^{IV} + \cfrac{m^V}{n^V + \text{etc.}}}}$$

will have an irrational value. Call this value ω, and the continued fraction will become

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \omega.}}}$$

But if we successively put

$$\frac{m''}{n''+\omega} = \omega', \quad \frac{m'}{n'+\omega'} = \omega'', \quad \frac{m}{n+\omega''} = \omega''',$$

it is clear that, ω being irrational, all the quantities ω', ω'', ω''', must be so likewise. But ω''' the last of these is equal to the proposed continued fraction; hence the value of this fraction is irrational.

Now we can, resuming our subject, prove this general proposition.

THEOREM.

If an arc is commensurable with the radius, its tangent will be incommensurable with the same radius.

In effect, let $= 1$ be the radius, and let $x = \frac{m}{n}$ be the arc, m and n being integer numbers, the formula found above will give, making the substitution,

$$\tan\frac{m}{n} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n - \text{etc.}}}}}$$

Now this continued fraction falls under lemma II; since it is clear that the denominators $3n$, $5n$, $7n$, etc. increase continually, whilts the numerator m^2 continues of the same magnitud, the component fractions will be or will soon become less than unity; hence the value of $\tan\frac{m}{n}$ is irrational; therefore; *if the arc is commensurable with the radius, its tangent will be incommensurable.*
From this it turns out as immediate consequence the proposition which is the object of this note. Let π be the semicircumference of which the radius is 1; if π were rational, the arc $\dfrac{\pi}{4}$ would also be, and by consequence its tangent should be irrational: but the tangent of the arc $\dfrac{\pi}{4}$ is known on the contrary to be equal to the radius 1; therefore π cannot be rational. Hence *the ratio of the circumference to the diameter is an irrational number.*[64]
It is probable that the number π is not even included among algebraic irrationals, that is to say it cannot be the root of an algebraic equation with a finite number of terms with rational coeficients; but it seems so difficult to prove rigorously this proposition; we can only show that the square of π is also an irrational number.
In effect if in the continued fraction which expresses $\tan x$, we put $x = \pi$, since $\tan\pi = 0$, we must have[65]

$$0 = 3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \cfrac{\pi^2}{9 - \text{etc.}}}}$$

[64] Just here is where the reference to Lambert from the fourth edition onwards (I repeat that I could not consult the third edition) appears as a footnote.

[65] Just taking into account that every continued fraction is a limit and that this limit does not change if we overlook a few terms. A less rigurous way of justifying it, but very much connected with the style of the epoch, would be to take into account that when a continued fraction is inverted «it goes up a position». Just to put an example ([Euler I 1748, p. 315]):

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{11 + \cfrac{12}{29 + \ddots}}}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{11 + \cfrac{12}{29 + \cfrac{30}{55 + \ddots}}}}$$

and since $\dfrac{1}{\frac{1}{0}} = 0$, the result is immediate.

But if π^2 were rational, and we had $\pi^2 = \frac{m}{n}$, m and n being integers, there would result from it[66]

$$3 = \cfrac{m}{5n - \cfrac{n}{7 - \cfrac{m}{9n - \cfrac{m}{11 - \text{etc.}}}}}$$

Now it is visible that this continued fraction falls also under lemma II; hence its value is irrational and cannot be equal to 3. Therefore *the square of the ratio of the circumference to the diameter is an irrational number.*

6.4 Conclusion

As far as irrational numbers are concerned, the period just analysed —from Lambert's *Mémoire* to 1800 (aprox.)— can be sumarised by reference to these two ideas: continued fractions and theory of equations. The use of this powerful tool provided mathematicians a way to get closer to irrationals through increasingly accurate approximations. These approximatios that came from successions (convergents of continued fractions) were still that, «tools» to approximate irrationals, but their success in this task would eventually turn them into the perfect «object» in order to define irrationals abstractly.

The study of the roots of equations directed the attention to the general by trying to find an adequate formula for them, so that works devoted to the study of concrete constants, like that by Lambert, were virtually overlooked. As a consequence, some of the ideas included had no presence at all, as the new classification of irrationals proposed by him in modern terms as «algebraical» and «transcendental», moving from the classic theoretical framework to manage irrationals inherited from Leibniz and Euler —«to be expressible»— to the new one —«to be root»—. One notable exception is that of Legendre, who gives a step forward in the problem of understanding π, proposing his own demonstration of its irrationality —notably simpler but not so self-contained and complete as that by Lambert—[67], proving the irrationality of π^2, and putting forward a precise and modern definition of what an algebraic number is, inherited from Lambert.

Just at the end of this period (1799), a highly important result published by Ruffini and later improved by Abel, that —as we will see— will have a strong influence along

[66] We get to this expression by multiplying successively up and down by n to eliminate the denominator.
[67] There is no proof of convergence, as we already noticed above.

with Liouville's proof of the existence of transcendental numbers, makes its appearance. The classic theoretical framework is no longer adequate enough to classify irrationals which provokes that the old terminology is replaced —although quite slowly— by their modern meaning.

Chapter 7

Heirs of the classical view. Perspectives in the first decades of the 19th century

> *In mathematics, we call* transcendent quantities *those whose theoretical generation involves infinity [...] These are, for example, the number π [...] and the number e.*
>
> - Montferrier, *Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées.*

7.1 Introduction

As one could expect, the new century did not bring a sudden and abrupt change in the events. Although the 19th century left behind the first-ever profound study of «special» irrationals (e and π), a new terminology giving signs of an awareness of the advantage of differenciating between irrationals drawing on equations, and an ever-more defined view of irrationals as aproximations of rationals, the steps forward given to materialise these ideas in the first decades were timid.

As we shall see through different historical sources, not even the result rolled out by Ruffini in 1799 about the impossibility of algebraically solving the quintic could avoid the inertia. Let us now take into consideration that this claim brought into light the limitations of algebraic language: that this language is not sufficient to encompass all roots of algebraic equations. Taking into account the long-standing worries about algebra as a discipline and the paradigm of what had been considered implicitly as algebraic in the field of quantities (roots), an explicit change in the theoretical framework seemed to be required. To the contrary, mathematicians kept using the old theoretical framework, the difficulty of accepting Ruffini's result being a clear sign, and just from Liouville's investigations onwards it is possible to see a clear change. In connection with the terminology, Lambert seems to have exerted no direct influence, although he might have had an indirect influence through Legendre, Lacroix, Fourier, Dirichlet and Liouville. The aformentioned situation did not let his new classification onto the scene, and when eventually these new ideas started to be accepted, it was actually Liouville who apparently boosted its use.

Focusing on irrationality-related issues, the study of concrete quantities continues to be a minority field of study. In conjuction with infinite processes, algebra like in the previous century sought the best possible way to aproximate irrationals in general. In this line, Lambert's *Mémoire* and therefore his complex analysis of π and e was mainly overlooked —taking even more into account that it would end up replaced by the easier proof by Legendre— having his achievement however an increasing presence in sources. The efforts made in the context of approximations, will give to Liouville the idea to obtain his theorem on the existence of transcendental numbers, and help the view of irrationals as defined by sets of rationals to be established, giving rise to the first complete theories of real numbers.

7.2 Some previous considerations. Implications of Ruffini's «theorem»

As it was shown previously, continued fractions were a fruitful tool for the study of solutions of algebraic equations during the 18th century. They were a key approach in order to characterize the solutions of quadratic equations (Euler and Lagrange), and turned out to be such a powerful tool to attain aproximations of irrational roots. Mathematicians will take up these ideas achieving new results in the field.

In any case, in the 18th century as in the previous ones, the first worry of algebra was to get to grips with an algebraic solution for the quintic. Lagrange was one of those who contributed to the subject, making important advances to previous strategies designed to tackle the problem, but the solution of the quintic seemed to resist all attempts. Anyway, «in spite of past failures in solving the quintic, LAGRANGE still harbors the hope that a careful analysis of his method will achieve the goal», an impression shared by his contemporaries,[1] so it is understandable the reaction produced by Ruffini's claim that the quintic was actually unsolvable.

[1] See [Ayoub 1980, p. 262].

As far as irracionals are concerned, let us make it clear that the situation was —as it was defended in previous chapters— that, although the introduction of a new language motivated a distinction between that which is algebraic and that which is not, in the field of quantities the background idea still remained (as it had always been) equations and their roots. Therefore, Ruffini's claim that the quintic was not solvable broke this implicit yet strong link between algebraically expressible quantities —those which were explicitly called «algebraic»— and roots.[2]

$$\text{Root} \equiv \underbrace{\text{algebraic}}_{\text{modern and implicit meaning}} \equiv \begin{cases} \text{expressible} \equiv \underbrace{\text{algebraic}}_{\text{classical and explicit meaning}} \\ \\ \text{non-expressible} \equiv \underbrace{\text{transcendental}}_{\text{classical and explicit meaning}} \end{cases}$$

In this new context, not only numbers like π or e transcended algebra, something widely accepted, but also other quantities that had long been considered embraced by algebra because they were roots of equations. So, what should be considered as algebraic and what as non-algebraic? In other words, what to consider as algebraic and what as transcendental? Everything seems to indicate that it was the classical terminology which was broadly used during most of the first half of the century —and actually up to its last decades.

While trying to find out why, one comes across different possible, often over-lapped, reasons. Tradition, for instance, was a powerful reason to continue throughout centuries considering the classical ruler and compass constructions as synonymous with geometrical exactness or to keep being restrictive about what a number should be. In our case, algebraic language had been for more than a century what decided what algebraic is and is not, and the fact that someone (Lambert) had proposed to tweak the meaning was not going to give rise to a generalised change without a good reason. But, was there such a good reason? Was it really necessary to change the theoretical framework?

Although basing on previous analysis it seems clear that there was a conscious awareness that certain quantites could not be roots of algebraic equations, however, there was yet no proof of this fact, so the theoretical framework based on the idea of expressibility —the possibility or otherwise of being expressed by means of a finite combination of classic algebraic operations— was enough to cover all existing options.[3] Furthermore, it is

[2] Compare this diagram with that included in section 8.3 of the next chapter.

[3] Besides, the concept of «function» became one of analysis' core concepts by Euler's influence, and in this context the Eulerian classification in terms of language was very manageable and convenient, a

quite probable that the difficulty of accepting Ruffni's work made it even less practical to make any modification at all: if there is an algebraic formula for all roots, why change? Ruffini came to publish five different versions of his theorem between 1799 and 1813, but with no impact. Noticeably, in spite of all his efforts, «the search for an algebraic solution of the quintic remained an attractive problem to a generation of young and aspiring mathematicians» such as Abel, Jacobi or Galois, who actually at first had thought they had found a solution.[4] It appears quite clear that the mathematical scaffolding of the «proof» itself was an intrinsic reason for this lack of acceptance,[5] but there is an extrinsic justification having to do with breaking off from heavily rooted ideas. Even after Abel's definitive proof:

> a handful of mathematicians continued to doubt or dispute the validity of the result that the general quintic was algebraically unsolvable. Their doubt was largely founded in an incomplete induction that equations were to be solvable; and their attitude toward ABEL'S proof ranged from ignorance to indifference.[6]

But it is not only that certain ideas concerning a particular line of research —the search for an algebraic solution for the quintic— were challenged, but rather that which was being put in question was mathematics' construction-based approach, the classical paradigm: a paradigm that «considers the only real solution to a problem to be a construction of a solution and considers an impossibility result as a metastatement».[7]

Let us think that from Greeks, mathematics (geometry) had to do with what to construct and how to do it. This is actually the philosophy underlying a deductive-based system as that devised by them: to build up theorems —literally due to the fact that most of them dealt with geometric constructions— from certain tools considered as valid

classification that spread across other fields. Very interestingly, the very title of Ruffini's work shows this influence: *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto* (*General theory of equations in which it is shown that the algebraic solution of the general equation of degree greater than 4 is impossible*)

[4] [Sorensen 2010, p. 97], who also writes at [Sorensen 2010, p. 90] that:

> it should take further publications, notably by the young ABEL, before this validity [of Ruffini's claim] would be accepted by the broad international community of mathematicians.

Ruffini himself complains about the very scant influence of his work (see [Ayoub 1980, p. 269]).

[5] Abel, who had not heard about Ruffini's proofs before his own publications in 1824 and 1826 [Sorensen 2010, p. 122], wrote in 1828 that Ruffini's memoir «is so complicated that it is difficult to judge the validity of his reasoning», adding that «It seems to me that his reasoning is not always satisfying» (in [Ayoub 1980, p. 274]).

[6] [Sorensen 2010, p. 128].

[7] [Lützen 2009, p. 389].

(axioms, etc). It is not the case, however, that there was not an awareness of the existence of constructions that could not be undertaken. Certainly, we can find in Euclid's *Elements* proofs by contradiction including geometric figures that actually cannot be constructed,[8] but these kind of impossibility results do not seem to have been representative cases of the constructive general perspective —from the «positive» or «direct» meaning of the term— that Greeks' heirs draw from their mathematical practice. This constructive and direct vision become inherent to mathematical practice.

The degeometrization process developed in the mid 17th century, seems to have accentuated this idea of a constructive and direct approach. In this line Gauss comments critically:[9]

> It is the character of the mathematics of modern times (in contrast to Antiquity) that with our symbolic language and terminology we possess a lever, by which the most complex arguments are reduced to a certain mechanism. Thereby the science has won infinitely in richness, but in beauty and solidity how the trade is usually practiced, it has lost just as much. How frequently that lever is applied in a merely mechanical way, although the authorization to do so implies in most cases certain tacit assumptions. It is my request that, by every use of the calculus, by any application of concepts, one should always remain aware of the original conditions, and never consider the products of the mechanism as a property beyond that explicit authorization.

The introduction and development of these new algebraic methods provided a more operative framework: that which can be expressed by means of algebra, that is to say, algebraically constructed, will be a licit mathematical «object», although it must be emphasized that this algebraic construction should be finite to be considered as licit. This does not mean that infinite processes were not accepted —quite the contrary they played a central role in mathematics being succesfully applied for different purposes— but from the classical epistemological perspective they were considered as nothig more than «tools».

The circle-squaring problem studied in this thesis, along with its effects over π as a number transcending algebra follows this tendency, and in fact the continuous attempts to come up with its solution seems to point in this direction. Something similar occurs with Ruffini's «theorem» about the impossibility of solving algebraically general equations, a result still framed in a period that in several aspects (surds, infinite processes as tools instead of objects, etc) had not yet break off from the classical constructive paradigm.

[8] The Prop. 10 in Book III is a clear example.

[9] In a letter to Schumacher (cited in [Ferreirós 2007 b, p. 244]).

The change towards the acceptance of these kind of ideas will come with the appearance of more impossibility results (boosted by profound changes in the mathematical mentality[10]): the impossibility of expressing certain integrals in finite terms (Liouville); the existence of non-algebraic numbers accompanied by proofs of transcendence (Liouville, Cantor, Hermite, Lindemann); or the works by Abel and Galois. The new century will question some well-established ideas, like for instance negligent uses of infinite series (Abel); different values for infinite sums depending on the order of the terms (Dirichlet); or the appearance of anomalous functions (Weierstrass), all this paving the way for the rupture with the classical paradigm that will take place in the second half of the 19th century.

This feeling of link with classical thoughts in these first decades is also clearly reflected in the treatement of irrationals, not only from the terminological point of view as we have just mentioned, but also in connection with how mathematicians handled them. Dictionaries, textbooks and history-of-mathematics books seem to reveal no conspicuous changes in comparison with the 18th century. However there is the widespread influence of Legendre's *Éléments de géométrie* translated into Spanish (1807), English (1822), and German (1822), and this is a first-rate mathematician, not like Hutton or Barlow —some of the authors studied in the next section—, or even Klügel.

7.3 A slow pushing forward. A source-based study

Let us start by taking a look at Peter Barlow's dictionary published in 1814.[11] As far as the items we are interested in are concerned, the first stop would be the entry «CONTINUED *Fractions*» due to its connection with irrationality-related issues, in which he says that:[12]

> [continued fractions] are a certain species of fractions extremely useful in various arithmetical and indeterminate problems, in the reduction of ratios, the extraction of roots, &c.

Barlow featured the usual brief outline of continued fractions before moving on to enumerate some of their properties. Lord Brounker and Wallis were the first in using this tool:

[10] This aspect will be analyzed in more detail in the next chapter.

[11] Peter Barlow (1776–1862) was an British mathematician and physicist. He was elected throughout his life member of several institutions: the *Imperial Academy of Brussels*, the *French Académie des Sciences*, the *Royal Society* and the *Astronomical Society* (see [Clerke 2004] for more detail).

[12] There is no numeration in [Barlow 1814], so I shall try to be as exact as possible in the writing of items.

> but neither of these able mathematicians appear to have had any knowledge of the most important properties and advantages of the theory they were investigating.

Huygens, he contines to say, «was the first who applied continued fractions to any useful purpose» —in astronomy, as well as J. Bernoulli—, Euler had «very profound and elegant essays and disquisitions in the Petersburgh Transactions», and Lagrange and Legendre gave a step forward to this theory in their works. There is no specific comment of their «extremely useful» application to the understanding of some concrete quantities, nor Lambert's role in this respect. Actually, the properties analysed thereafter by Barlow, show—so to speak— a more practical approach focused on aproximation:

- Prop. 1. *To reduce any proposed rational Fraction to a continued Fraction.*
- Prop. 2. *To reduce any given continued Fraction to a Series of converging Fractions.*
- Prop. 3. *To extract the Square Root of any given integer Number, not an exact square, by continued Fractions.*

It is not the case that Lambert was not recognised. In fact, Barlow dedicates an entry[13] to this «eminent mathematician and astronomer», about whom he says at the end that:

> Most of his mathematical pieces were published in a collected form by himself in three volumes, in which every branch of mathematical science has been enriched with his improvements and additions.

The issue seems rather to be that this kind of mathematics concerning the understanding of irrationals from a more concrete and profound perspective were both far away from mainstream and less interesting to mathematicians. Actually, the general view of irrationals reflected in Barlow's dictionary is quite classical, the one-line entry devoted to irrationals being very suggestive: «IRRATIONAL, *Number*, the same as SURD». As for the entry labeled as «SURD», the classification made by Barlow is quite interesting because it showcases what we have already mentioned in previous chapters, namely, the implicit connection between irrationals and roots, and the classical division in terms of language. Surd, Barrow writes:

> in *Arithmetic* and *Algebra*, denotes the root of any quantity; when that quantity is not a complete power of the dimension required; thus $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{7}$, &*c*. are surds or irrational quantities.

[13] Labeled as «LAMBERT (John Henry)».

The aforementioned surds would be what he calls *Simples*, in opposition with *Compounds*, that is to say, finite combination of radicals such as $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ or $\sqrt{3+\sqrt{3}}$. Moreover, Barlow makes another distinction, in this occasion between *finite* and *continued*, these last ones being of the form:

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\&c.}}}$$

«the infinite sum of which is always determinable by means of a certain equation» —following (implicitly) Euler and Lagrange—. But this kind of incommensurable quantites are not the only ones, so it is necessary to be more precise:

> We have defined a surd to be the root of some quantity which is not a perfect power of the dimension required by the index of the root; the common definition, *viz.* that it is a quantity incommensurable with unity is not sufficently explicit, as this includes exponential and logarithmic quantities.

Quantities, these last ones, defined as «trascendental»:

> TRANSCENDENTAL, is a term applied to any equation, curve or quantity, which cannot be represented or defined by an algebraical equation of a finite number of terms, with numeral and determinate indices.
> TRANSCENDENTAL *Quantities*, therefore, include all exponential, logarithmic, and trigonometrical lines, because there is no finite algebraical formulae by which these quantities can be expressed.

Therefore, we find anew the classical theoretical framework based on language, instead of that proposed by Lambert and used by Legendre in terms of being roots of algebraic equations.

This classification does not also appear in [Klügel IV 1823], another interesting and influential dictionary. We have already discussed Klügel's dictionary in previous chapters, and therefore we shall just include a brief commentary about this 1823-edition (under the editorship of Mollweide) that indeed includes some interesting adds in connection with our subject matter.[14] As for the circle squaring problem, and more concretely as for how the length of the circle can be found, he comments that since the series to be employed have been determined:

> so we can say with right that the quadratur of the circle has been found in the analytical sense. A geometrical construction is however not yet discovered, and it seems difficult to be able to do it.[15]

[14] I want to thank Prof. José Ferreirós for his comments about Klügel's dictionary.
[15] [Klügel IV 1823, p. 64].

Actually, he makes it clear his position by comparing this classical problem with the attempts to transform metals into gold, without knowing chemistry, and to build a perpetuum mobile, without knowing mechanics.[16] Which deserves to be pointed out is the explicit acknowledge of continued fractions as a useful tool in order to clarify the nature of certain numbers. In this line Lambert is credited by having offered a formal proof of the irrationality of π in his *Mémoire*.[17]

The classical treatment of irrationals we have just seen in Barlow's dictionary is by no means an isolated perspective, but rather the common thread. We find the same ideas in Montferrier's *Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées* published in two volumes (1835, 1836), although with some interesting additions.[18] He dedicates a long entry in [Montferrier I 1835, pp. 368–386] to explain continued fractions, about which he says are so important, above all, as tools in the science of numbers, at the end of which the name of Lambert does show up as one of the promoters in the development of this theory,[19] althought still with no mention of their applicability in the study of numbers like e or π. However, it turns out to be very interesting what Montferrier says in this entry[20] around $\sqrt{2}$. The first thing he points out is the two different ways which a quantity can be generated. The first way would be by means of one of the primitive and elementary modes of generation:

$$A + B = C,\ A \times B = C,\ A^B = C$$

this way of construction being that which provides us the particular *nature* of this quantity:

> for instance, the diagonal of a square whose side is the *unity*, is equal to $\sqrt{2}$, and this expression or this number $\sqrt{2}$ lets us know the nature of the diagonal whose magnitude is inconmensurable with regard to the unity.[21]

And the second way is by using universal modes of generation, which gives us the *measure*:

[16] [Klügel IV 1823, p. 76].

[17] [Klügel IV 1823, pp. 96, 101]. Let us add that this dictionary will be an important historical source in this period, concretely in Germany, which some important names in connection with irrationality-related subjects will draw on. Two especially relevant examples are Dirichlet who refers Klügel's dictionary in his historical article on the Hindous, and Lindemann who makes reference to this dictionary in his celebrated paper about the transcendence of π. In this sense, Klügel's dictionary could have been a transmitter of Lambert's role in irrationality-related issues, above all in Germany.

[18] M. Sarrazin de Montferrier (1792–1863) was member of numerous academic institutions in his time, between them the *Royal Academy of Sciences* in Paris, and wrote several dictionaries and works (see [Quérard 1836, pp. 458–459] for more detail).

[19] [Montferrier I 1835, p. 385].

[20] [Montferrier I 1835, pp. 378, 379].

[21] [Montferrier I 1835, p. 378].

> But if we want to evaluate this magnitude, that is to say, if we want to measure it with the quantity taken by *unity*, we can find numbers whose magnitudes are as close to $\sqrt{2}$ as we want by means of either the arithmetical operation of extracting roots, or by expanding $\sqrt{2}$ in series with Newton's binomial, or by using other procedures [...] Continued fractions offer us precisely a universal-technical mode of generation, whence the extreme importance of these fractions derives; importance that modern geometers do not yet seem to have completely grasped.[22]

Therefore, Monteferrier distinguises «two points of view perfectly different»:[23] the *nature* and the *measure* of a quantity, studied by means of different tools, or in a more modern language, the object and the tool.

Before continuing with Montferrier's *Dictionnaire*, it would perhaps be appropiate to make a brief digression due to the fact that, as far as this distinction is concerned, Montferrier is relying heavily on another work, as he himself comments: Wronski's *Philosophie de la technie algorithmique* (1815–1817). Wronsky (1776–1853) who was Polish by birth, spent most of his time in Paris where «from the very beginning [...] managed to antagonize the mathematical establishment in a way that led to his total marginalization». Publications like his «refutation» of Lagrange's theory of Analytic Functions, contributed to get him isolated.[24] However, there are some aspects of his philosophical and mathematical discourse that turn out to have interest with regard to the subject treated in this chapter.

Wronski expounds his ideas across several works, and in this way we can also see his reflections in [Wronski 1821]. He divides the development of mathematics into four periods, the last one having been founded by Newton and Leibniz, a period characterised by the invention of universal instruments to generate quantities:

> Finally, in the fourth period, which is that of the modern Mathematics, and which was founded by Newton and Leibnitz, this universal generation of quantities, so long unknown, was revealed to man in the calculation of fluxions or, what amounts to

[22][Montferrier I 1835, p. 378, 379]. Besides —as Montferrier emphasises— continued fractions along with Newton's binomial, have the advantage of showing a law in this generation. The extraction of the square root gives rise to 1.4..., 1.41..., 1.414..., 1.4142..., with no apparent law, but the continued fraction brings into light a clear general term:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

[23][Montferrier I 1835, p. 379].

[24]See [Wagner 2014] where a short biography of Wronsky is included.

> the same thing, in the differential calculus [...] Unfortunately, notwithstanding this apparent productiveness, a single universal instrument, namely, the usage of series, determined by the theorem of Taylor, was, for a long time, the only powerful means of the modern Mathematics. Even in the present day, many celebrated geometers do not know, or cannot employ, more than this single instrument. Nevertheless, immense advances have been made in this new career; Lagrange, by means of his theorem, has extended this universal usage of series to the resolution of equations, and has thus given it a new aspect; Euler, who first perceived its insufficiency, has introduced, by means of his new continual fractions, a second universal instrument.[25]

This very division in the development of mathematics gives rise to another one inside mathematics itself between *Theory* and *Techny* (sic), about which he says:

> In fact, the three first periods of the cultivation of these sciences at first developed the simple individual existence of quantities; and therein lies the object of the theory. But the fourth period, particularly in its last part, since the theorem of Taylor has already led to establish the generation, and particularly the universal generation of quantities; and therein lies the object of the techny.[26]

Interestingly, these ideas led Wronski to make an essential distinction between quantities, a distinction between *nature* (object) and *measure* (tool) inherited from the 18th century, that epitomised the still practical-oriented approach towards quantities, a perspective that will not be overcome until the second half of the century:

> Individual quantities, or the isolated modes of their existence, manifestly form a part of the reality of the entities in which these quantities are in some sort embodied; for example, the root of the number two, viz $\sqrt{2}$ is found, it may be so said, embodied in the relation of the side to the diagonal of every square. But, this is not the case in the universal generation of quantities; the instruments of this generation cannot make a part of the reality of entities, because in this reality all is already produced, that is to say, the generation itself is there already achieved, and consequently the instruments have disappeared.[27]

Let us say in passing that, with respect to this second «universal instrument», namely, continued fractions, Wronski does bring into light the central place that Lambert (along with Euler) occupies in their development, asserting that «After Euler and Lambert, geometers have done nothing but reproduce the respective procedures of those», and quoting

[25] [Wronski 1821, pp. 7, 8].

[26] [Wronski 1821, p. 11]

[27] [Wronski 1821, p. 12]. More concrete explanations about these distinctions can be found for example in [Wronski 1811, p. 4bis], where he puts the example of the logarithm.

some of Lamert's works, particularly his *Mémoire*.[28] In any case, no mention again to how both Euler and Lambert used this tool in order to partially elucidate the nature of e and π.

Coming back to Montferrier, it is possible to see through some selected entries how the classical view of irrationals emerged again. The term «incommensurable» continues to be the representative of such different numbers as $\sqrt{2}$ or π because they cannot have a common measure with unity,[29] even though they are essentialy different, although taking the expressibility as a yardstick. For instance, he says that:

> We call *irrational numbers* those numbers generated by the second branch of the powers' algorithm $\sqrt[B]{C} = A$ (*See.* ALGÈBRE, n° 28) when these numbers are inconmensurable with unity (*See.* INCOMMENSURABLE) *See.* RACINE.[30]

Following his reference, one sees that in «ALGÈBRE n° 28» radical quantities are defined as those with the general form $\sqrt[B]{C}$, about which he comments in a final remark that «they are called *irrational numbers*»;[31] and when he defines «RADICAL», he writes:

> We give the name of *radical* to the sign $\sqrt{}$ by means of which roots of quantities are designated, and therefore we call *radical quantities* those which are affected by this sign. Then $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{(a^2+b^2)}$, etc, are radical quantities.[32]

So it is quite clear that one is assuming the link: irrationals $\equiv$ radicals.[33]

As for the «special» irrationals, we trace in what sense they are special across different entries. In the entry labeled as «CIRCLE», specifically when he deals with the problem of calculating the ratio between the diameter and the circunference, Montferrier says that «This ratio being tanscendent, as we shall see later on, elementary geometry cannot solve the problem except by approximations».[34] What is the sense of this claim?

From then onwards, he expounds the usual historical review by quoting different authors

[28] [Wronski II 1816/1817, p. 613].

[29] [Montferrier II 1836, p. 107].

[30] [Montferrier II 1836, 147].

[31] [Montferrier I 1835, p. 54].

[32] [Montferrier II 1836, p. 410].

[33] In any case, although all seems to indicate that Montferrier effectively uses these two terms indistinctively, he is not definitively clear, as we can see in the entry «SURD» [Montferrier II 1836, p. 506]:

> A *surd* number is the same as an *irrational* or an *inconmensurable* number, like $\sqrt{2}$. This word has become old.

[34] [Montferrier I 1835, p. 311].

who have contributed to the search of approximate values for π, as he himself represents this ratio: Archimedes, Metius, Ludolph van Ceulen, Lagny and one 155-decimal approximation found in a manuscript at the Ratclif library at Oxford, before moving on to show the analytical point of view of this search with different infinite expressions like that obtained by Leibniz. At this point, Montferrier includes one expression by Johann Bernoulli:[35]

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{log\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$$

including logarithmic functions. But:

> in order to obtain the theoretical expression of a number (that which constitutes its nature), nothing more should be employed than entirely-*primitive elementary* functions (addition, product, powers and their inverses).[36]

And in this spirit, he continues to say:

> M. Wronski comes to the beautiful expression[37]
>
> $$\frac{1}{2}\pi = \frac{\infty}{\sqrt{-1}}\left\{(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} - (1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}}\right\}$$
>
> that does not effectively contain more than primitive functions and that reveals the entirely-transcendent nature of this famous number.

This quote makes it clear in what sense «this famous number» transcends algebra, insofar as its analytical expression involves infinity, a claim nothing to do (at least explicitly) with not being a root of an algebraic equation.

In any case, the entry where he defines the term «transcendent» clears up any possible doubt concerning the above terminology and can be used as the model definition in this period (and earlier as we saw in previous chapters):

> In mathematics, we call *transcendent quantities* those whose theoretical generation involves infinity [...] These are, for example, the number π [...] and the number e.[38]

Therefore we have the following classification —based explicitly on the expressibility framework— that will be in fact the common thread during most of this century, and that was actually the general view of irrationals during the previous one:[39]

$$\underbrace{\text{irrational}}_{\text{expressible}} \quad vs \quad \underbrace{\text{transcendental}}_{\text{non-expressible}}$$

---

[35][Montferrier I 1835, p. 315]. This expression is also included in [Barlow 1814] in the entry «*Quadrature and Rectification of the Circle*».

[36][Montferrier I 1835, p. 315].

[37]We include the deduction of this formula in the Appendix C.

[38][Montferrier II 1836, p. 564].

[39]The case of Euler is clear.

Let us say, before moving on to another author, that Montferrier seems to be much better informed with regard to Lambert's work than other contemporary scholars, and that he includes some similar reflections like those made by Lambert. Firstly, he dedicates a reasonably long entry to him in which it is said that Lambert provided «the celebrated proof of the inconmensurability of the ratio between the circunference and the diameter»,[40] but the most interesting part appears in his entry «QUADRATURE OF THE CIRCLE (*Geom.*)».[41]

Montferrier says again that Lambert in his *Mémoire*, and after him Legendre in his *Élémens de géométrie*, proved the absolute imposibility of finding two numbers expressing the ratio between the circumference and the diameter, whereupon there just remains to be seen how π can be expressed: either by means of «simple irrationals» or by means of a combination of irrational numbers, and in this last case, if it could be constructed geometrically, due to the fact that irrational numbers can be constructed as long as they do not overcome the second degree. Interestingly, Montferrier is taking the baton from Lambert and Legendre, connecting as Lambert did the circle-squaring problem with the nature of π through algebraic equations of second degree,[42] such as Wantzel will rigorously prove decades later, although, as it has been proved, the new distinction between irrationals proposed by Lambert in 1768 kept being unsuccessful.

In his entry dedicated to the problem of the quadrature of the circle, Montferrier relies on what probably was the main source of dissemination of this subject-matter around the period: Montucla's *Histoire des Recherches sur la quadrature du cercle*. Montferrier does not specify which edition he is using, whether it was the original published in 1754 or the more recent edition launched in 1831 from the hand of Lacroix with several additions of his own;[43] however, its influence could well have been one of the reasons he was so well-informed about the role played by Lambert in this story. In fact in one of these additions,[44] after commenting that all seems to indicate that squaring the circle is

[40][Montferrier II 1836, p. 162].

[41]Particularly [Montferrier II 1836, p. 397].

[42]Drawing on Wronski's «primitive» expression for π:

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{\infty}{\sqrt{-1}} \left\{ (1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} - (1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} \right\}$$

Montferrier concludes the impossibility of making such a geometrical construction because «the radicals entering in the generation of this number are of *infinite* order» [Montferrier II 1836, p. 397].

[43][Domingues 2008, p. 19]. The taste that Lacroix had towards history can be also recognised in some of his textbooks, as we shall see.

[44]«ADDITIONS to the page 110» in [Montucla 1831, pp. 277, 278].

impossible, Lacroix writes:

> Several other difficulties of the same kind seem to lead to the same conclusion, and it is considered true that, in the same way that there are quantities called *irrationals* that cannot be expressed in finite terms by means of integer or fractional numbers, there exists another kind of quantites that cannot be expressed by means of a finite number of terms not only rational, but also irrational. These last ones are called *transcendents* [...] What is positive about the latter quantities is the proof by which Lambert (*Mémoire de l'Acad. de Berlin* year 1761, p. 265) set up that *the ratio of the circumference with the diameter is an irrational number.* In note IV of his *Élémens de géométrie*, M. Legendre, abridging this proof, has shown that *the square of this same ratio is also an irrational number* [...] It still remains to be known, what the higher powers can be, if there exists some rational ones among them.[45]

In any case, this information was already included in his *Histoire des mathématiques* (1802),[46] and even so several authors neglected Lambert's research as we have proved and as we will see. Again, in order to understand this situation it will be necessary to take again into account the context. First of all, in that epoch there was not obviously the same quick interchange of knowledge between scholars as today, and the fact that one book had included recent investigations was not a guarantee of dissemination. Moreover, although Montucla's research was one of a kind in the field of history at that time, a valuable source with which some interested person could go beyond the usual accounts, it was not so easily accessible like others, and at the same time it was too expensive to be affordable to a general public.[47] And secondly, we once again run into the scarce interest towards the circle-squaring problem studied from a theoretical point of view. The study of the number π and the research carried out in order to advance in its understanding was inextricably connected with one geometrical problem that, at that time, was widely considered as impossible. Let us draw again on Peter Barlow's dictionary to summarise the issue:

> The quadrature of the circle, in particular, is a problem which has engaged the attention of mathematicians from the earliest period to the present time, though it is now generally considered to be impossible and is perhaps but seldom attempted,

[45] We will resume this very paragraph a little bit later making some additional commenataries, so we will just bring out at this point how the classical theoretical framework appears (very clearly) again, which underpins the idea that mathematicians keep thinking in terms of language (to be expressed by means of finite combinations of classical algebraic operations) instead of in terms of equations (to be root of an algebraic equation), and that the particular role played by Lambert concerning π is put in its place.

[46] Concretely in [Montucla IV 1802, p. 630, 634]. It was Lalande who published this volume as well as the fourth upon the death of Montucla in 1799 [Doublet 1914, p. 221].

[47] [Doublet 1914, p. 221].

> except by novices who are not sufficiently acquainted with the difficulty and the almost infinite number of ways in which it has been attempted.[48]

This situation, along with the lack of interest in more intrinsic studies about special irrationals attached to a conceptual approach still to come, is from my point of view one of the main reasons for the scant presence in general sources of the 18th-century research undertaken on π.

Certainly, the very long history of π was inherent to the longstanding problem of the quadrature of the circle, outside the domain of interest of mathematicians at that time, but from the 18th century onwards, the number e starts to gain step by step a prominent place in analysis:

> For a while the new number was regarded as a kind of curiosity; then Saint-Vincent's successful quadrature of the hyperbola brought the logarithmic function and the number e to the forefront of mathematics. The crucial step came with the invention of calculus, when it turned out that the inverse of the logarithmic function —later to be denoted by e^x— is equal to its own derivative. This at once gave the number e and the function e^x a pivotal role in analysis.[49]

This might be one reason why we can observe throughout this century an inclusion in mathematical texbooks of the research undertaken about the nature of this number, although this is not massive at all.[50] For instance, we find that this issue has no place in the two-volume book *Cours de mathématiques* by Charles Bossut published in 1800. In fact, the general presentation of irrationality-related issues is quite poor. He presents Brounker as the inventor of continued fractions and brings out his role in their application to find «the so close ratio of the circumference of the circle to the diameter»,[51] but nothing about Lambert's role. Moreover, when he deals with the approximate calculation of this ratio, and after presenting some famous examples like those by Archimedes and Metius, and

---

[48][Barlow 1814] in his entry: «QUADRATURE». In the same line and just to put one more example: [Montferrier I 1835, p. 315].

[49][Maor 1994, p. 183].

[50][Lützen 1990, p. 79] quotes Liouville around 1840 in the following terms:

> One proves in the elements [this Euclidean term was generally used to refer to the curriculum of the introductory university and polytechnical courses] that the number e, the base of the Neperian logarithm, does not have a rational value.

In any case this proof has no presence in some mathematical textbooks as for instance: *Cours de mathématiques* by Charles Bossut (1800), *Cours d'analyse* by Cauchy (1821) or *Cours d'analyse de l'École polytechnique, Tome second* by Sturm (1877).

[51][Bossut I 1800, p. xv].

upon commenting that other mathematicians have provided other ones, he writes that «it has not been yet possible to assign the exact and rigorous ratio of these two lines».[52] Certainly, it has not been yet possible, and it will not actually be possible, because of Lambert's proof! [53]

A very easy proof for the irrationality of e, perfectly adequate and appropriate to educational purposes, appears in Stainville's *Mélanges d'analyse algébrique et de géométrie* (1815). In the first lines of the foreword, he says that the main goal of the book is to develop some issues of algebraic analysis susceptible to be simplified, and in [Stainville 1815, pp. 339–341] he conspicuously fullfils his objective by including an elementary proof originally devised by Fourier that will become of reference.[54] In order to grasp the simplicity of Fourier's reasoning, let us include the main points of it.

Based on the well-known infinite expansion for e, if we suppose that it is a rational number, let us say a fraction $\frac{m}{n}$ with no common divisors between m and n, we would have:

$$\frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots$$

Now, by multiplying both members by $n!$, we obtain:

$$(n-1)! \cdot m = A + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$$

where both $(n-1)! \cdot m$ and A are integer numbers. But:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \quad &< \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots \\ &= \quad \frac{1}{(n+1)-1} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

and therefore:

$$A + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$$

[52] In [Bossut II 1800, p. 112].

[53] Let us add that Bossut also wrote a well-received book on history of mathematics, *Histoire générale des mathématiques, depuis leur origine jusqu'à l'année 1808* (in two volumes; the relevant one here is [Bossut II 1810]), in wich Lambert is quoted several times, but in connection with astronomy. Once again, nothing about his studies on π and e.

[54] [Serfati 1992, p. 125]. Actually, Stainville at the end of this demonstration comments that «This proof has been communicated to me by M. Poinsot, who has told me to have it from M. Fourier» ([Stainville 1815, p. 341]). Apparently, Fourier did not leave writen traces of his proof, an oral transmision being one possible option [Verdier 2008, p. 3].

cannot be an integer number. This is the contradiction because this sum is nothing but $(n-1)! \cdot m$.

As we have mentioned above, the inclusion of this proof in mathematical textbooks was not immediate, maybe because of the scarce dissemination of Stainville's book at that time,[55] but we find an interesting case in Lacroix's *Complément des Élémens d'algèbre: à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations (6ª édition)* (1835). It is worth reading what Lacroix has to say, because as well-informed about the history of his discipline, he is more precise in quoting those authors who played an important role in the understanding of irrationality. Moreover, in this book it is possible to see, perhaps even more clear than in other works, the implicit connection between the two theoretical frameworks used to classify irrationals: that based on algebraic language and that based on roots of equations.

First of all, we make a distiction between this edition and earlier ones because of the news included in it as far as Lambert's role in the development of continued fractions and the study of irrationality is concerned. For instance, when Lacroix deals with continued fractions in an article that is «with some few changes, the additions made by Lagrange to Euler's Algebra»,[56] although he refers to the advances made by Lambert before Lagrange[57] —an inclusion worth mentioning due to the fact that the usual accounts neglect Lambert— there is no comment about their application to the irrationality of both π and e.[58] By contrast in this sixth edition, Lacroix writes, upon setting out «some other transformations of fractions» as the title of the item states, and after quoting Lagrange in the application of these «some other transformations» to the establishment of the irrationality

[55] See [Verdier 2008, p. 3].

[56] [Lacroix II 1801, p. 204]. Lagrange's exposition on continued fractions was the reference about this subject.

[57] See [Lacroix II 1801, p. 246].

[58] The same happens in the following editions up until the sixth.

of the number e (among other expressions),[59] that:

> Lambert has already been occupied with the same subject, particularly with the ratio of the circumference to the diameter (*Mémoires de l'Académie de Berlin* année 1762, page 265.)[60]

At the end of the book, in «NOTE D», he includes —as was customary according to Liouville's words— the proof of the irrationality of e, and more concretely, the «so simple» demonstration appeared in *Mélanges d'Analyse* by Stainville, whereupon he writes:[61]

> Lambert has additionaly proved (*Mém. de l'Acad. de Berlin,* 1761, p. 315) that all powers of this number with rational exponents are irrationals; and he had proved before, that the number π was also not rational (same vol., p. 297). Legendre, in the note IV of his *Elements of Geometry*, has extended this exclusion to the second power of the same number. Finally, M. Lejeune Dirichlet, has already long time ago communicated to me one note in which he symplifies, by means of a formula given by Legendre, that concerning the powers of the number e.
> It is, by the way, quite probable that these numbers cannot be expressed in a finite way, by radicals, being part of these quantities that we call *transcendental* in order to distinguish them from irrationals.

Firstly, I would like to bring out the inclusion of this brief (however quite complete) account of the state of irrationality. What I could observe by studying historical sources is that expositions about the research around special irrationals at that time do not go beyond this one. Certainly, Lambert's proof is quite difficult to follow, and although Legendre's contribution to this subject was much more accessible, it continued to be too

[59] Lacroix is relying heavily on Lagrange, and more concretely as he himself says (without including explicitly the title of Lagrange's paper) on his paper *Essay d'analyse numérique sur la transformation des fractions* published in the *Journal de l'École Polytechnique* (1797). In this work, Lagrange, who draws on some of Lambert's ideas about transformation of fractions —in fact at the end of this work he credits Lambert to be the first in proposing them—, proves that the expresion:

$$\frac{m}{a} \pm \frac{n}{ab} \pm \frac{p}{abc} \pm \cdots$$

yields an irrational number if $m < a+1$, $n < b+1$, $p < c+1$, and so on. As a particular case, $e^{\frac{1}{i}}$, $\sin\frac{1}{i}$ and $\cos\frac{1}{i}$ with i an integer number (this is Lagrange's notation) would be irrationals, because their infinite expantions after substituting the argument by $\frac{1}{i}$, fall within the aforementioned conditions. Let us add that, this would not be enough to prove the irrationality of π, due to the fact that although $\cos\pi = 0 \in \mathbb{Q}$, this would just entail that $\pi \neq \frac{1}{i}$ with i an integer number, which is obvious since $\pi > 1$.

[60] [Lacroix VI 1835, p. 298].

[61] See [Lacroix VI 1835, p. 370–371].

difficult as to be included in elementary textbooks.[62] But there is not even place to (at least) general comments about these demonstrations. Maybe, the little interest in the circle-squaring problem might also to have prevented expositions of its irrationality from appearing in mathematical textbooks in this period.

The second thing that I would want to point out has to do with terminology. Take into account that Lacroix is speaking explicitly about Legendre's role in this story by fowarding the reader to note IV of his *Elements of Geometry*. Keeping this in mind, let us review Legendre's reflections at the end of this note IV:

> It is probable that the number π is not even included among algebraic irrationals, that is to say it cannot be the root of an algebraic equation with a finite number of terms with rational coefficients.

And let us compare it with the last paragraph included in the aforementioned Lacroix's text:

> It is by the way quite probable that these numbers cannot be expressed in a finite way, by radicals, being part of these quantities that we call *transcendental* in order to distinguish them from irrationals.

I think that it is clear Lacroix is relying heavily on Legendre's reflections, and that he is «reading» them taking algebraic language as a yardstick instead of the root property as Legendre did. From my perspective, this comparison allows one to see, even more clear than in other sources, what has been defended across this thesis, namely the fact that although mathematicians used explicitly algebraic language as theoretical framework when they spoke about «transcendental» quantities or numbers, they have the underlying idea that transcendence implied the impossibility of being roots of equations. Few authors used the modern theoretical framework during this period until the impulse given by key figures like Liouville, Lambert and Legendre being the only ones I found.

Lastly, it is interesting to emphasise the reference to Dirichlet. He had already showed interests in irrationality-related issues early on, when he dealt with the subject of the irrationality of π in the trial lecture he had to deliver in Breslau (1827).[63] In [Dirichlet 1889–1897,

[62] Prof. José Ferreriós observed to me that Crelle in his third German edition of Legendre's *Éléments de Géométrie* (1837), complained about there being no appropiate proof of irrationality of π similar to the easy one by Fourier of the irrationality of e.

[63] This was one of the three tasks Dirichlet had to comply with to qualify as a university lecturer (see [Elstrodt 2007, p. 9]).

pp. 361–363] there is a fragment of what might have been this lecture —«On the quadrature of the circle»— in which he refers to Lambert's work, and the lecture was supposed to include an in-depth analysis of it, according to his own words.[64] Unfortunatly, I did not find trace of this in-depth analysis anywhere.[65]

In the neighbouring decades up to the sixth edition of Lacroix's book, there seems to have been a slow rebirth of the interest for the number π in connection with some new mathematical results, most notably those by Wantzel and Liouville, culminating with the work of Lindemann —and as far as the number e is concerned, earlier with the work of Hermite— and a change in the use of the theoretical framework. It was in this period when the view of irrational numbers changed drastically from tools to objects.

7.4 Conclusion

As we shall see through this chapter, as far as irrationality-related issues are concerned, 19th century can be naturaly divided into two main periods appropriately labeled as the classical period and the modern period. The first part, that which we have analyzed in this chapter, was little bit more than the consequence of the natural inertia inherited from the 18th century view. This is the reason why these first dedaces could be labeld as «classical».

The infinite processes so successfully developed by Euler, Lambert and Lagrange in order to delve-into the nature of some quantities, kept being used above all with the objective of approximating roots of equations. Lambert himself seems to have not occupaid his well-deserved position in this first period in connection not only with the role he played in the development of contined fractions, but also concerning his research about π and e. Both the lack of interest about the cirle-squaring problem from a theoretical point of view, and Fourier's conspicously simple proof of the irrationality of e, are likely to have provoked this situation. Besides, one of the most notable parts of Lambert's demonstration, that which has to do with convergence, was out of the mathematical discussion in this period as to be fully appreciated.

Finally, the more functional way of distinguishing between irrationals by using roots of equations as a yardstick instead of algebraic language has no effect at all either, not even after the consequences of Ruffini-Abel's theorem, presumably the difficulty of accepting such a revolutionary result having much to do with it. However, the implicit connection

[64] I want to thank Prof. José Ferreirós for his comments about this lecture.

[65] The figure of Dirichlet will be studied in more detail in the next chapter.

between these two theoretical frameworks —quantities expressed by a finite combination of classical algebraic operations vs quantities to be roots of algebraic equations— is still present. In addition, we keep seeing a widely spread view of irrational numbers as surds that is characteristic of the 18th-century perspective, reflection of a lack of maturity in the understanding of these numbers.

Chapter 8

Towards an abstract and complete view of irrationals

> *We may, perhaps, be allowed to designate by the terms arithmetical and transcendental the two classes of irrational quantities between which the theorem of M. Liouville has taught us to distinguish.*

- Henry Smith, *On the present state and prospects of some branches of pure mathematics.*

8.1 Introduction

The classical view concerning irrationals which we could witness in the previous chapter, starts to change (although slowly) from the 1840s. We will not just find an acceptance of irrational numbers as licit mathematical objects with the establishment of the first complete theories of real numbers, but also a maturity displayed with both the recognition of the differences between irrationals materialized with the change of theoretical framework —to be root vs not to be root (of algebraic equations)— and an in-depth study of these characteristics applied to concrete cases like e and π.

This predilection for an arithmetical approach, which will increase the interest for questions to a large extent overlooked before, can be framed in a change of paradigm in which this tendency towards more speculative and abstract issues will become the internal motor of mathematics. Whether motivated by educative purposes, like the solid foundations of analysis by Cauchy, or simply «by the honour of the human spirit» like the arithmetization programme boosted in Germany, mathematics will drastically change its face.

In this context and with regard above all to questions concerning transcendental numbers, we will come across, on the one hand, Liouville's work —probably motivated to some extent by educational purposes as well as by his own interest in more especulative investigations— and his circle of influence (Wantzel, Hermite, Lindemann); and on the other hand, intimately connected with the characteristic purist movement in Germany, the emergence of algebraic number theory and its culmination with Dedekind's work.

8.2 The conceptual approach in mathematics. The impact of arithmetization and the emergence of algebraic number theory

If there exists a feature epitomizing 19th-century mathematics —above all mid 19th-century mathematics— it would likely be the rigor and worry about purity and foundational issues. Certainly, as we have pointed out elsewhere following Schubring's call for attention, the widespread idea of the 18th century as an uncritical period about itself (as for mathematics) is a misconception. If we were to trace long back, we would find sharp debates about infinitesimals, divergent series, logarithms of negative numbers, and many more, but the diference with respect to the 19th-century approach is so overwhelming that it is easy to overlook these attempts to clarify dark mathematical issues.

Trying to bring to light some of the possible reasons which motivated this change, one could argue that after systematizing the emergent analysis with treatises like that by Euler, with the power and efficiency of techniques displayed therein, the interest started to be directed to their validity from an internal point of view. A reflection of these distinctive perspectives can be grasped through[1] Lagrange's opinion to D'Alembert in 1781 about the situation of 18th-century mathematics:

> It seems that the mine is almost too deep already, and unless new seams are discovered, it will be necessary to abandon it sooner or later. Physics and chemistry now offer riches that are more brilliant and easier to exploit.

In contrast to Abel's (1826):

> I will apply all my strength to bringing light to the great darkness that unquestionably exists in analysis. It totally lacks any plan and system, so it is really very strange that it is studied by so many and worst of all, that it is not treated rigorously at all. There are very few theorems in the higher analysis which have been proved

[1] The two following quotes in [Alexander 2006, pp. 720–721].

> with convincing rigor....It is very strange that after such a procedure there exist only few of the so-called paradoxes.

From a different angle, in the context of the educational reforms undertaken in France and later on in Germany, mathematicians, from their duties as teachers, led themselves to the necessity of replanning their discipline and attempting to get it grounded above solid and clear principles, especially concerning analysis.[2] In this respect, the main figure is Cauchy with his *Cours d'analyse* (1821) where he gave a new step forward in the efforts of ruling doubtful elements out of analysis basing it on the concept of limit, revitalizing «the idea that all mathematics could be set on such rigorous foundations».[3]

In any case, although this undertaking partially reached its objective, there were still some basic theorems supporting the theory (like the intermediate value theorem) that needed for rigorous proof. It was this necessity which led mathematicians to get profoundly into the concept of continuity of real numbers, helping an arithmetical approach rises to dominance.[4] But the predominant role of arithmetic along with the strong inclination towards speculative and purist mathematics is, above all, a German distinctive, having its breeding ground in a philosophical-oriented intellectual atmosphere, strengthened around the influent figure of Gauss with his *Disquisitiones arithmeticae*[5] (1801) and the reception and spread of these ideas by Dirichlet.

This conceptual-oriented approach is rooted in the neohumanist movement of the mid 18th century.[6] As a reaction against eighteenth-century's values, a call for returning to the classic studies, motivated mainly by historians and philologists, was heralded, a change that came hand in hand with a re-evaluation of both the role played by the faculty of philosophy with regard to the classical ones (theology, law and medicine) and the necessity of incorporating active investigation into universities. Two centers played the role of pioneers: Göttingen, founded in 1737, marking «an abrupt break with this longstanding tradition by inverting the status of its theological and philosophical faculties», then plac-

[2][Katz 2008, p. 765].

[3][Cauchy 1821, p. vii]. Cauchy's book was to some extent a reaction against the presentation of analysis in the line of Lagrange's *Théorie Des Fonctions Analytiques* (1797), later on assumed (at least in part) by Lacroix's *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (see [Katz 2008, pp. 765–767]).

[4]Quite interestingly, Dedekind, connecting with the aforementioned link with educational purposes, tells us at the very beginning of his *Continuity and irrational numbers*, that what led him to develop his «cuts» was «the lack of a truly scientific fundation of arithmetic» he felt while teaching differencial calculus in Zürich (see [Dedekind 1872, p. 88]).

[5]As it is customary we will be referring to this work as D.A.

[6]As for this movement, above all connected with mathematics, I have relied particularly on [Ferreirós 2007 b] (specially interesting pp. 245–246).

ing itself as the prototype of the modern university;[7] and Halle with F. A. Wolf, «who is regarded as founder of the new 'scientific' philology and of the university seminar».[8]

The materialization of this new understanding of what the university should look like will be noticeable across the 19th century with the incorporation of this new «philosophy» into new centers. It is in this very line that Jacobi and Neumann set up one of the first mathematical-physical seminars in Königsberg (1834), inspired by the seminar Jacobi attended in Berlin run by the philologist August Boeckh; and that later on Kummer, Weierstrass and Kronecker created in Berlin the first seminar devoted to mathematics.[9] But the mathematics treated in this seminar, and in German universities at large, was far from being utilitarian, so to speak. We have already pointed out the reaction against the past century as one of the reasons, to which it would be possible to add the consequences of French occupation as one of the driving force to the turn:

> It was precisely during this Napoleonic era that Germany developed a cultural identity that it would maintain throughout much of the 19th century and which created a *cognitive framework* that shaped the development of science in Germany.[10]

But not least importantly, the fact that mathematics was placed at the faculty of philosophy, «dominated by history, philology and philosophy, then living its golden age in Germany»,[11] created the perfect enviroment in which pure and speculative mathematics flourished. In this respect [Ferreirós 2007 b, p. 251] writes that:

> To comply with neohumanist and university level expectations, mathematics had to

[7] See [Rowe 2018, pp. 3–4] (quote at p. 4).

[8] [Ferreirós 2007 a, p. 5].

[9] See [Begehr et al. 1998, p. 11] (in David E. Rowe's chapter: *Mathematics in Berlin, 1810–1933*), [Begehr et al. 1998, p. 42] (in Herbert Pieper's chapter: *Carl Gustav Jacob Jacobi*) and [Ferreirós 2007 a, p. 33].

[10] [Jahnke 1993, p. 266]. In this very line [Ferreirós 2007 a, p. 5] says that:

> The German states undertook parallel reforms, but some of them, especially in Prussia, did not simply copy the French model. On the contrary, they tried to forge their own peculiar model.

And it seems to me that the famous claim by Jacobi in a letter to Legendre (1830) epitomizes perfectly these differences of stance towards mathematics. I allow myself to quote it:

> It is true that in Mr. Fourier's opinion the principal aim of mathematics is its public utility and the explanation of natural phenomena; but a philosopher such as himself should have known that the only aim of science is the honour of the human mind, and that under this title a question about numbers is worth as much as a question about the system of the world.

[Begehr et al. 1998, p. 46] (in Herbert Pieper's chapter: *Carl Gustav Jacob Jacobi*).

[11] [Ferreirós 2007 a, p. 6].

> be "elevated to the dignity of a well-ordered philosophical science," turning it into a true system of pure science. The best way to do it was, of course, to orient their investigations toward pure mathematical topics, and to rework the basis of their discipline with the aim of systematizing it.

A clear example of the philosophy of this movement can be seen in the context of the rise of the so-called algebraic analysis around 1800 in Germany.[12] This emergent branch of mathematics, that could be generally defined as the algebraic treatment of functions, had Euler's *Introductio* (1748) as model. Strongly boosted by the degeometrization process, it reached high relevance from the mid 18th century onwards, specially with Lagrange's *Théorie des fonctions analytiques* (1794), being also positively received by the English.[13] But the importance algebraic analysis would come to acquire in Germany would even place it at the core of the educational system:

> In the wake of Humboldt's educational reforms, algebraic analysis became the scientific background for the mathematical syllabus of the Gymnasium. In contemporary pedagogical discussions this was not so much justified by its fertility in applications to analytic geometry and physics, but, rather, by the inner harmony and coherence of the whole theory.[14]

This is the point, namely: the importance does not lie on the practical value, but instead on the belonging to a «purely spiritual world».[15]

Algebraic analysis was highly influential in Germany and continued to be so beyond 1810. But the impact of number theory, in the wake of Gauss's D.A., created a new stream of ideas that eventually would relegate algebraic analysis in favour of a «purely arithmetical» approach to analysis.[16] Gauss himself, who had first-hand knowledge about

[12] I forward the reader principally to [Jahnke 1993].

[13] In their case partially as a reaction against the predominance of synthetic geometry [Fraser 2003, p. 325].

[14] [Jahnke 1993, p. 279].

[15] [Jahnke 1993, p. 281]. I steem very ilustrative of this emphasis on speculative-oriented approach boosted in Germany in comparison with France, the fact that:

> Although in the syllabus of 1812, the so-called Süvern syllabus, applications played a considerable role, they were more and more repressed with the course of time and in 1834 analytic geometry was even officially removed from the syllabus.

[Jahnke 1993, p. 279], whilst in France: «The year after its publication [Cauchy's *Course d'analise*], the École Polytechnique changed the curriculum to reduce its emphasis on foundations» [Cauchy 1821, p. viii] (in the translator's preface the reader is forwarded to Lützen's *The foundation of analysis in the 19th century*, p. 160).

[16] In this respect see [Ferreirós 2007 b].

the deep changes on the classical idea of space, ascribed a superior ontological status to numbers (as products of our minds), epitomized in the motto «God arithmetizes». With regard to this arithmetization process and its influence in Germany, Rowe writes:

> Underlying this was an explicitly stated doctrine that Gauss himself had articulated, namely that the number concept alone was the true font of all firm mathematical knowledge. Kummer, who deeply admired Gauss, was a firm advocate of the view that number was a pure idea grounded in human thought —or as a good Hegelian would say, Mind. Accordingly, other branches of mathematics, in particular geometry and mathematical physics, were to be regarded either as inferior or, at the very least, subordinate to those that had been arithmetized [...] Arithmetization was also a step toward professional autonomy. As such, it reflected a quite general tendency to liberate purely mathematical research from applications to other disciplines. Many mathematicians in Germany identified with this trend, which was by no means exclusively associated with the Berlin tradition: two of its leading proponents were Dedekind and Hilbert. Still, the Berlin mathematicians were very much in the forefront of the program to build mathematics on the foundations of the number concept.[17]

One of the paths taken by arithmetic was the study of expressions of the form:

$$a_0 + a_1\zeta + \cdots + a_{n-2}\zeta^{n-2}$$

where ζ is a complex nth root of 1 and all of coeficients are integer numbers. The motivation to study such mathematical objects came from the fact that they turned out to be very useful in the analysis of certain results in classical arithmetic. A conspicuous example is that by Euler, who used them in order to prove that 27 is the only cube that exceeds a square by 2 (a Fermat's statement). This is equivalent to prove that $y = 3$, $x = 5$ is the only solution of the equation:

$$y^3 = x^2 + 2$$

Without delving into details, we shall say that the key step taken by Euler, lies on factorizing this expresion:

$$y^3 = x^2 + 2 = (x - \sqrt{-2})(x + \sqrt{2})$$

and considering both $(x - \sqrt{-2})$ and $(x + \sqrt{-2})$ «*as if they were integers*», assuming that «they have gcd 1, and therefore, since their product is a cube, they are cubes themselves».[18]

[17] [Rowe 2018, p. 17].

[18] Both quotes in [Dedekind 1876, p. 21], where the reader will find a more detailed account.

This kind of examples, showing fruitful incursions of these expressions into what we could call classical arithmetic, stirred up a rigurous analysis trying to clarify their nature. If they behave like integers, they should be ruled by unique prime factorization, so attemps were directed to check this fundamental property, with the result of extending the concept of «integer».

The first step forward was taken by Gauss, who demonstrated in his *Theoria residuorum biquadraticorum* (1832) that numbers of the form $x + y\sqrt{-1}$ —what we currently represent as $\mathbb{Z}[i]$— have a divisibility theory like $\mathbb{Z}$, but there were still serious doubts surrounding these prospective integers. Let us take in consideration in this respect Lamé's announcement of his «proof» of Fermat's Last Theorem at the Paris Academy meeting of March 1, 1847, which on the other hand, shows how this problematic extended to other countries (France in this case). As Liouville pointed out, the implicit assumption, that which claimed unique factorization for complex numbers of the form $x + \alpha^j y$, was by no means obvious. Actually, as Liouville himself will realize by reading Kummer's work, this assumption was not correct.[19] Kummer, who was a devoted follower of Gauss's arithmetic approach, had tried to generalize reciprocity laws first studied in D.A. [Ferreirós 2007 a, p. 95] says that:

> reciprocity laws were one of the main topics in so called "higher" number theory during the 19th-century, and, according to Kummer in 1850, the most interesting open problem.

And it was actually these attempts what led Kummer to realize that unique factorization failed in some cases. As it is well known, Kummer found the way to fix the failure of unique prime factorization by postulating «ideal» prime numbers such that unique decomposition was reestablished,[20] «ideals» that will undergo a change of image in Dedekind's hand in his 1871 appendix to the *Vorlesungen* (here we shall follow above all [Dedekind 1876]).

We have therefore an emergent theory lacking in coherence, and what is relevant in connection with this thesis is that this disconnected comprehension of what a good definition of «integer» embracing expressions of the aforementioned form should be, would give rise

[19] See [Katz 2008, pp. 715–716].

[20] One should note how this kind of methods, namely, the introduction of ideal elements in mathematics, fit with the speculative orientation of 19th-century German mathematics, particularly with the formal one, as expressed by [Jahnke 1993, p. 279] in connection with algebraic analysis. Kummer, who «stressed more the formal and calculational aspect of mathematics, than its conceptual side» [Ferreirós 2007 a, p. 33], is a clear example of this tendency.

with Dedekind to the awareness that the adequate way to deal with them is by means of roots of equations. More clearly: instead of treating them separately, it will be used the property of «being roots of equations» with certain specified coefficients as the unified condition, I mean, as a definition. In any case, this will only happen in the last part of the century. In this first part, there was a limited knowledge about algebraic numbers, although the research put into focus the necessity of studying them, and on the other hand the treatment was classic, making reference to them by means of expressions like «complex numbers composed from third roots of unity» to denote the subject matter.[21] There is a contrast between the more classic approach, which was based on a formula or explicit expression, and the new viewpoint which had to focus on a characteristic property (to be the root of an equation of a certain kind, i.e. a number being related in a certain way –via sums with integer coefficients– with its own powers). This contrast was regarded as characteristic of the period, and Dirichlet became famous as one of its most prominent proponents (others were Riemann, Dedekind, etc.).

In these first decades of what will be called algebraic number theory, it is particularly important the role played by two mathematicians: Dirichlet and Liouville. It is not only their own research on the subject, but also their influence over later generations. Dirichlet himself can be seen as the link between Gauss and these later generations as far as the spread of the arithmetic-oriented approach of mathematics is concerned. A great admirer of Gauss:

> We know that Dirichlet studied the Disquisitiones arithmeticae several times during his lifetime, and we may safely assume that he was the first German mathematician who fully mastered this unique work.[22]

In connection with the questions about irrationality treated in this thesis, it is quite interesting that Dirichlet studied in Paris, getting in touch with mathematicians who had dealt to some extent with this subject. Studying in Paris was an obvious election for someone deeply interested in mathematics, taking into account that German curriculum was still very basic, and that Paris concentrated the elite of mathematics at that time. We find personalities like Laplace, Legendre, Fourier, Cauchy or Lacroix in the period Dirichlet carried out his studies, and it is known that he soon impressed them.

At this point, it might be relevant to remember the role played by some of these mathematicians (Legendre, Lacroix, Fourier) in their efforts to either delve into the nature of

[21] [Ferreirós 2007 a, p. 98].

[22] As for Dirichlet's biography, I have relied on [Elstrodt 2007] (quote at p. 5). I also forward the reader to the more recent book [Merzbach 2018].

some special irrationals or to divulgate for educational purposes by means of textbooks some of their properties (above all in the case of e), as well as their knowledge about Lambert and his research. Taking into account that when Dirichlet came back to Germany in order to take over a post in Breslau, he chose as theme of his trial lecture the irrationality of π by Lambert, it is tempting, and I think reasonable, to see a direct influence.

Along with this, although Dirichlet had a large variety of interests, even in physics due to Fourier's and Poisson's influence,[23] his favorite subjects were topics in number theory, which he taught in his university lectures.[24] In this way, Dirichlet's mathematical ideas, among them probably his own investigations both about special irrationals like π, and about what later will be called algebraic numbers, reached mathematicans who cosidered Dirichlet as their mentor, such as Eisenstein, Kummer, Kronecker, Weierstrass, or Dedekind[25] and who will have a relevant role in the study of irrational and algebraic numbers.

8.3 The period of change. Liouville's circle of influence

Summarising, this study of the first half of the 19th century reveals that the state of research around special irrationals and the recognition of the role played by Lambert, was rather similar to the previous century. There are explicit references to Lambert in this story, but the general impression is that his work was virtually neglected. On the other hand, as some authors had denounced mathematicians did not make the most of the properties of continued fractions, as they were primarily used for general problems.

I would say that this situation changes around the 40's onwards, above all, around the key figure of Joseph Liouville. Not only his own investigations but also his influence through his *Journal de Mathématiques Purs et Appliquées*, his lectures in different French institutions and his international academic relationships gave a definitive boost to the development of the understanding of special irrationals. In his journal, such an important work to the history of the irrationality as Wantzel's *Recherche sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut être résolu par la règle et le compas* (1837) would be published, and some of the most relevant figures in the history of transcendece

[23][Elstrodt 2007, p. 6].

[24][Elstrodt 2007, p. 17].

[25][Ferreirós 2007 a, pp. 26, 32, 38 note 1]. [Elstrodt 2007, p. 2] says in relation with Gauss, Jacobi and Dirichlet that «virtually all leading German mathematicians of the second half of the nineteenth century were their disciples, or disciples of their disciples» and that this «holds true to a special degree for Jacobi and Dirichlet [...]».

would have close academic (and friendship) relationship with him, such as Hermite.

Although the most famous work by Liouville regarding irrational numbers is that from 1844 (and subsequent modifications) where he proves the existence of transcendental numbers, there is another important paper with title *Mémoire sur la classification des transcendantes, et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients*, published in 1837 in his journal.[26] I would like to draw attention to it for the following reason: in this writing, Liouville proposes to change the theoretical framework from algebraic language to roots of equations. He is clear from the very beginning:[27]

> The six fundamental operations of arithmetic, namely, subtraction, multiplication, division, the raising to integer and positive powers, the extraction of roots [...] give rise to the most elementary algebraic functions, but they are far from including all quantites encompassed under this last denomination. Effectively, the word *algebraic function*, in the sense attributed nowadays by geometers, is applied to every quantity determined by an equation of any degree where the coefficients are rational functions of the independent variable.

Nevertheless, as Liouville points out, it is known that in spite of the «reiterated efforts made by the greatest geometers», there are equations unsolvable by radicals:

> we have to conclude that algebraic functions are of two kinds, one expressible and the other one inexpressible by combination of radicals.[28]

If this was not sufficient, Lioville is even more clear when getting into the subject:[29]

> I call algebraic function of x every function u that can be considered as root of an equation of this kind
>
> $$Pu^n + Qu^{n-1} + \cdots + Ru + S = 0$$
>
> [...] In the introductions to this theory laid out in elementary books, every function whose variable x is connected with constants only by addition, substraction, multiplication, division, powers with positive exponents, extraction of roots is considered algebraic, that is, every function finitely expressed by means of these six operations [...] but the converse is not true, because the roots of the major part of this kind of equations
>
> $$Pu^n + Qu^{n-1} + \cdots + Ru + S = 0$$

[26] It was read in the Paris Academy of Sciences 8th June 1835.
[27] [Liouville 1837, p. 56].
[28] Both quotes from [Liouville 1837, p. 57].
[29] Concretely in [Liouville 1837, pp. 63–64].

> are not expressed in this way [...] Within these two classes of algebraic functions, the functions of one the classes are expressible while the functions of the other class are not; but in the investigations in integral calculus, both kinds of functions have more or less the same properties, and there is rarely the advantage of [...] representing them by these different notations.

Although Liouville is speaking within a functional context —in fact the interest of this paper falls outside number theory, being focused on integral calculus—[30] the similarities with the more concrete context of numbers are obvious, so I would say that this was a catalyst towards the use of the modern theoretical framework when referring to numbers, taking even more into account the projection of the *Journal de Liouville*.

$$\text{Root} \equiv \text{algebraic} \equiv \begin{cases} \text{expressible} \\ \\ \text{non-expressible} \end{cases} \qquad vs \qquad \text{non-Root} \equiv \text{transcendental}$$

Let us add that Lambert seems to not have had any direct influence in Liouville in this respect,[31] and that rather coincidently, Liouville quotes Lambert in this very work, but in connection with an astronomical problem.[32]

What we do know is that in the mathematical correspondence with Dirichlet, the name of Lambert shows up in some occasions. For instance in a letter dated 1840, Dirichlet writes to Liouville that, after six months of research, he can say that the theory of abelian transcendental functions:

> has also a link with one branch of analysis which so far, had not been very cultivated, and that in its current state reduces almost only to the so celebrated theorem by Lambert about the irrationality of π and its square.[33]

[30] From [Lützen 1990, p. 351]:

> While struggling with the theory of differentiation of arbitrary order, Liouville began to develop another theory for which he is usually hailed as the founder: the theory of integration in finite terms. He published 11 papers on the subject in the period from 1833 to 1841 [...] The main objective of Liouville's theory is to decide if a given indefinite integral can be expressed as a finite expression involving only algebraic, logarithmic, and exponential functions.

[31] In any case, it seems more than plausible to establish an indirect influence through Legendre's work.

[32] Liouville refers to one Lambert's paper published in 1767 in the *Mémoires de Berlin* without being explicit. This paper is likely to be *Solution générale et absolue du problème de trois corps, moyennant des suites infinies* where as the title suggests, Lambert shows that this classic problem can be solved by using infinite series.

[33] [Tannery 1910, p. 7].

Firstly, I would like to point out that Dirichlet seems to be ascribing Lambert to have proved the irrationality of π^2. This is not an isolated case as we shall see later in this very chapter,[34] but it sounds strange to me due to the fact I did not find any trace of such a proof in Lambert's *Mémoire*. Certainly, it could be possible that I had overlooked this important fact in my analysis, but this would be likely mentioned by Legendre in his famous note, and so probably by other authors later, but they did not. Taking into account the high level of these mathematicians, it would be difficult to justify this claim drawing on a mistake, but I must confess that I do not have any well-based explanation.[35]

On the other hand, I struggle with pinning down what Dirichlet is referring to with this «branch of analysis which so far, had not been very cultivated», but I would suggest that he had in mind some kind of prospective set of analytical tools in order to study irrationals, and more specifically, special irrationals. In any case, these topics were likely the subject of discussions between the two friends, and the enormous influence of both of them, ensures a wide spread of these new ideas, changes in the use of the terminology,[36] and also a more than probable contact with Lambert's work for young mathematicians.[37] Let us take into account the high influence, not only of Liouville's journal, but also the so called Crelle's Journal, described in [Begehr et al. 1998, p. 30] in the folowing terms:

> The success was threefold: in terms of the readership and the support he got among the scientists; in the moral and sometimes financial support from the authorities; and in the quantity and quality of the proposed articles which rolled in from all over the world.

These journals would help to span across the mathematical community such innovative ideas, and they would also play a big part in the increasing professionalization of mathematicians, which is also a key factor in the developments we are reviewing.

---

[34]Other examples I have come across are Picard, Hermite, and Smith.

[35]In reality, Smith was the first example that I found claiming Lambert as having proved this theorem, followed by Picard and Hermite. Further on, reading some parts of the correspondence between Dirichlet and Liouville, I realized that the German declared the same, being the earliest case that I found after Legendre's *Éléments de géométrie* so far. I will take the risk of launching the hypothesis that in his deep analysis of Lambert's proof included in his trial lecture, Dirichlet might have generalized or adapted Lambert's method attaining this proof, in such a way that he considered the irrationality of π^2 as a «Lambert demonstration». Unfortunatly, as I have already noted, there are no traces of this in-depth analysis anywhere.

[36]With regard to the concept of algebraic number, [Elstrodt 2007, p. 25] says that it «was introduced by Dirichlet in a letter to Liouville», but I did not find a clear reference to this concept in the indicated letter (in [Kronecker (ed.) I 1889, pp. 621–623]).

[37]Dedekind, who will establish the theory of algebraic numbers, was introduced into their study by Dirichlet [Ferreirós 2007 a, p. 83].

The influence of Liouville, with respect to the aforementioned comments, seems clear in Wantzel, another key figure in this story. In 1837, Wantzel publishes *Note sur les nombres incommensurables* with the objective of proving a theorem about numbers, analogous to that which had been proved by Liouville for functions, and that was supposed to appear in an unpublished work of Libri, but:

> Due to the fact that this last geometer has not published anything on this subject, we have treated this question of number theory giving it a little more extension.[38]

At the end of this paper he writes that this study can give rise to a similar classification of numbers than that made by Liouville in the field of functions, something that Wantzel undertakes in *Classification des nombres incommensurables d'origine algébrique* (1843). Wantzel opens the paper with the following words:[39]

> This work aims to show that the extraction of roots of diverse degrees gives rise to essentialy-different incommensurable numbers, and that, when solving numerical equations of degree greater than two, we obtain new irrational quantities that cannot be expressed by radicals.

Taking into consideration that he is classifying incommensurable numbers of algebraic origin, from which we find these «new» inexpressible quantities, the algebraicity comes from being roots of equations rather than being expressible by finite combinations of algebraic operations.

I would like to bring out that Abel's theorem was a powerful reason to use roots of equations as a yardstick in order to classify irrationals, and that both Liouville and Wantzel were brilliant mathematicians, something that makes it reasonable for them to know and accept this so controversial result. Actually, Wantzel himself provides a new proof of this fact in his *De l'impossibilité de résoudre toutes les équations algébriques avec des radicaux* (1845). But, as we have mentiond elsewhere, this recognition was far from being unanimous. Let us summarize this issue by quoting some insightful words by Wantzel with this respect, included in the aforementioned paper:[40]

[38][Wantzel 1837, p. 151]. One of the results treated by Wantzel is that:

$$A\sqrt{a}+B\sqrt{b}+C\sqrt{c}+\cdots$$

cannot be a «commensurable» number K, if a, b, c, etc, are not squares, A, B, C, etc, being any rational quantities (Wantzel's notation; in the same page).

[39][Wantzel 1843, pp. 117–118].

[40]Wantzel quoted in [Cajori 1918, p. 340].

> Although his (Abel's) demonstration is at bottom exact, it is presented in a form too complicated and so vague that it is not generally accepted.[41]

This lack of acceptability emerges because of the underlying confrontation with the classical paradigm of mathematics, a rejection also suffered by another mathematical landmark, Wantzel's *Recherches sur le moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas* (1837). With regard to this last work:[42]

> The history of mathematics is full of contributions that were later acknowledged for their importance but were overlooked at the time of their publication. In many cases such results were overlooked because they were published in obscure places or because they were controversial at the time of publication [...] In fact, Wantzel's proof was published in the second volume (1837) of Liouville's *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, which along with Crelle's *Journal* was the leading mathematics journal of the time (indeed the only other specialized mathematics journal was *The Cambridge Mathematical Journal*, founded in 1837). Published in Paris, still considered the mathematical capital of the world, Liouville's *Journal* contained papers by most of the leading French mathematicians and many foreigners as well. So Wantzel's paper was in fact published in a place with a very high impact for the day. And Wantzel's result was far from controversial.

Lützen points towards another reason, that actually in general terms could be used as an argument in order to shed some light on the little interest by mathematicians towards π and its twin geometrical problem:[43]

> The obscurity of the author, and the fact that some of his contemporaries considered the result to be known, or even demonstrated, may have contributed to this neglect, but of even greater importance was that the result was not considered an important mathematical result at the time it was published. In the constructive and quantitative paradigm, which still dominated large parts of mathematics during the first half of the 19th century, an impossibility result such as the one proved by Wantzel was not considered an important result *within* mathematics but rather a meta-result *about* mathematics, in this case about the impotence of a particular method of construction.

As far as the circle-squaring problem is concerned, the aforecited Wantzel's theorem pointed directly at the direction to be followed, namely, to demonstrate that π is not a root of an algebraic equation. But this kind of proofs, highly important from our point

[41] I forward the reader to Sorensen's work for an in-depth study of the issue.
[42] [Lützen 2009, p. 377].
[43] In [Lützen 2009, p. 391].

of view, could have been seen as both lacking interest —because of some reasons already put forward— and even as meta-results —following Lützen's exposition— showing «the impotence» of a certain algebraic language to encompass all roots of equations.

In this line, Liouville himself seems to not at first have given the well-deserved importance to his theorem of the existence of transcendental numbers, although his stance rapidly changed around 1851 with the publication of the third version of its proof. Moreover, Lützen writes that «the importance of this discovery was immediately recognized by his contemporaries», so we can expect to find an increasing acceptance of the use of the modern theoretical framework, and a more open-minded disposition to deal with π and e from a more number-theoretical perspective.[44] In this line, as we shall see later, we find Weierstrass, who was very much involved in their dissemination, and he even simplified the Hermite-Lindemann method. Under his direct or indirect influence, the interest in this topic increased, and so some other mathematicians put their interest on this issue providing new demonstrations of the transcendence of e and π. In [Hobson 1913, p. 53], for instance, we find the names of Stieltjes, Hilbert, Hurwitz, Gordan, Mertens and Vahlen, most of whom, by the way, falling directly within the influence of German mathematics, although there are also eminent examples abroad as Picard in France, Smith in UK or Echegaray in Spain.[45]

Very interestingly, this theorem takes its motivation from Liouville's research around the number e, boosted by educational interests. What led Liouville to his theorem was his attemps of proving the transcendence of this number motivated by some correspondence between Cristian Goldbach and Daniel Bernoulli and helped by Lambert's and Lagrange's techniques. Actually, the first proof published in 1844 relied on continued fractions as one could expect, but a more easy demonstration appears in 1851 without drawing on this analytical tool.[46] Due to the importance of this theorem for this story, let us detail the steps of this last version.[47]

Firtsly: What condition must a number fulfill to be algebraic? The first part of this

[44][Lützen 1990, pp. 513, 525] (quote at p. 513).

[45]The reader will find in Appendix D a brief comment about Echegaray's contribution.

[46]Liouville had proved before that neither e nor e^2 can satisfy a second-degree equation (he published these results in his *Journal* in 1840). All his investigations led him even to think that π was trascendental, writting down in a note that π was not the root of an algebraic equation, although «he soon discovered a mistake and crossed out the note» [Lützen 1990, pp. 79–80, 513–526] (quote at p. 526).

[47]One can read this proof directly from the original [Liouville 1851] or in [Lützen 1990, pp. 523–525]. An especially clear exposition of this proof can be seen in [Hobson 1913, pp. 44–46].

proof aims to find this condition. Let

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

be a polynomial with integer coefficients and let $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ be its roots. Let us put $r = x_i$ for some $i \in \{1, 2, \cdots n\}$. Besides, let us suppose that $\left\{\frac{p_l}{q_l}\right\}$ is a succesion of rational numbers converging to r such that they are all different from x_i for all $i \in \{1, 2, \cdots n\}$. The first thing to take into account is that:

$$\frac{p_i}{q_i} - r = \frac{a_n p_i^n + a_{n-1}p_i^{n-1}q_i + \cdots + a_0 q_i^n}{q_i^n a_n \left(\frac{p_i}{q_i} - x_1\right)\left(\frac{p_i}{q_i} - x_2\right)\cdots\left(\frac{p_i}{q_i} - x_{n-1}\right)}$$

This equality comes from the fact that:

$$P\left(\frac{p_i}{q_i}\right) = a_n\left(\frac{p_i}{q_i}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p_i}{q_i}\right)^{n-1} + \cdots + a_0$$

so:

$$q_i^n \cdot P\left(\frac{p_i}{q_i}\right) = a_n p_i^n + a_{n-1}p_i^{n-1}q + \cdots + a_0 q_i^n$$

and therefore:

$$1 = \frac{q_i^n \cdot P\left(\frac{p_i}{q_i}\right)}{q_i^n \cdot P\left(\frac{p_i}{q_i}\right)} = \frac{a_n p_i^n + a_{n-1}p_i^{n-1}q + \cdots + a_0 q_i^n}{q_i^n \cdot a_n \left(\frac{p_i}{q_i} - x_1\right)\left(\frac{p_i}{q_i} - x_2\right)\cdots\left(\frac{p_i}{q_i} - x_n\right)}$$

Now, by passing the last term of the denominator to the first member as a product, we obtain the searched for equality. Now, due to the fact that $\frac{p_l}{q_l} \xrightarrow[l\to\infty]{} r$, we have:

$$\left(\frac{p_l}{q_l} - x_1\right)\left(\frac{p_l}{q_l} - x_2\right)\cdots\left(\frac{p_l}{q_l} - x_{n-1}\right) \xrightarrow[l\to\infty]{} (r - x_1)(r - x_2)\cdots(r - x_{n-1})$$

and therefore, we can assume that for all the fractions $\frac{p_l}{q_l}$ the product:

$$\left(\frac{p_l}{q_l} - x_1\right)\left(\frac{p_l}{q_l} - x_2\right)\cdots\left(\frac{p_l}{q_l} - x_{n-1}\right)$$

and therefore:

$$a_n\left(\frac{p_l}{q_l} - x_1\right)\left(\frac{p_l}{q_l} - x_2\right)\cdots\left(\frac{p_l}{q_l} - x_{n-1}\right)$$

is less than some fixed possitive number A. Besides:

$$\mid a_n p_i^n + a_{n-1}p_i^{n-1}q_i + \cdots + a_0 q_i^n \mid \geq 1$$

because:

$$a_n p_i^n + a_{n-1} p_i^{n-1} q_i + \cdots + a_0 q_i^n = q_i^n \cdot P\left(\frac{p_i}{q_i}\right) \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

Putting these three things together, the conclusion is that if r is an algebraic number, for every succesion converging to it, there must exist a positive integer number A such that:

$$\mid \frac{p_i}{q_i} - r \mid > \frac{1}{Aq_i^n}$$

Secondly: To find a number that does not fulfill this last condition. Let us consider the following number:

$$r = \frac{b_1}{c^{1!}} + \frac{b_2}{c^{2!}} + \frac{b_3}{c^{3!}} + \cdots + \frac{b_i}{c^{i!}} + \cdots$$

where all b_i are less than c fulfilling that $\exists i_0$ such that $\forall i \geq i_0, b_i \neq 0$. Let us consider the following succesion of rational numbers converging to r:

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{b_1}{c^{1!}} + \frac{b_2}{c^{2!}} + \frac{b_3}{c^{3!}} + \cdots + \frac{b_i}{c^{i!}}$$

We have that:

$$\begin{aligned} x - \frac{p_i}{q_i} &= \frac{b_{i+1}}{c^{(i+1)!}} + \frac{b_{i+2}}{c^{(i+2)!}} + \cdots \\ &< c\left(\frac{1}{c^{(i+1)!}} + \frac{1}{c^{(i+2)!}} + \cdots\right) \\ &< \frac{2c}{q_i^{(i+1)}} \end{aligned}$$

It is clear that regardless the value of A and n, if we take i big enough we will have:

$$\frac{2c}{q_i^{(i+1)}} < \frac{1}{Aq_i^n}$$

and therefore the relation:

$$\mid \frac{p_i}{q_i} - r \mid > \frac{1}{Aq_i^n}$$

does not hold for every fraction of this concrete succesion.

8.4 From the reception of Liouville's work to Dedekind's work on algebraic numbers

Following what has been writen above about the immediate acceptance of this result, its quick reception can be traced outside the French borders. In Germany, Georg Cantor is a distinguished case. In a letter to Dedekind dated 29 November 1873, Cantor puts forward the question whether it is possible to coordinate $\mathbb{N}$ with $\mathbb{R}$ (he does not use this notation, but (n) and (x) respectively). Dedekind reacts by acknowledging that he is not able to solve the problem:

> He remarked that the problem was not worthy of much effort, for it had no practical interest, but he formulated and proved in detail the theorem that the collection of all algebraic numbers was, in later terminology, denumerable.[48]

Cantor replies by telling that even if this result might not deserve much attention:

> it would be beautiful to be able to answer: for instance, assuming that the answer is no, that would provide a new proof of the theorem of Liouville about the existence of transcendental numbers.[49]

Very noticeable is also the fact that Cantor is using the term «transcendental» to make reference to non-roots of algebraic equations, when not even Liouville, like most of his contemporaries, did so in his writings,[50] this use being also made public in the paper when he proves that the collection of algebraic numbers is denumerable:[51]

> If we combine the content of these two last paragraphs, we will have obtained with it a new proof of the theorem, first proved by Liouville, that in each given interval $(\alpha, \cdots, \beta)$ there exist infinitely many transcendental numbers, that is to say, non-algebraic.

Moreover, Cantor seems to consider the recent investigations around e and π as issues of high interest, as it is possible to witness in letter to Dedekind dated 28 January 1874 dealing with Hermite's proof of the transcendence of e, where Cantor uses again the term

[48] In [Ferreirós 2007 a, p. 178].

[49] Dated 2 December 1873 (in [Ferreirós 2006, p. 167]).

[50] [Serfati 2018, p. 186]. Weierstrass in a letter to Paul du Bois-Reymond dated December 15, 1874 writes ([Bölling 1997, p. 69]; bold is mine):

> What would you say of a function which is always continuous by real values of the argument, has no maximum or minimum, and despite this regular behabiour is so capricious [sic] that it has no determinate differential quotient when the argument is an ***algebraic* number (that is, root of an algebraic [equation] with rational coefficients)**, but on the contrary behaves fully reasonably [vernünftig] as soon as the argument has a transcendental value?

The fact that Weierstrass felt the necessity of specifying to Paul du Bois-Reymond —a great expert in analysis— what one means by «algebraic number», supports the vision that this terminology was not still widely used as far as in the 1870s (I thank Prof. Ferreirós the observation).

[51] See [Bermúdez 2009, p. 78].

«transcendental» in its modern meaning;[52] and in his *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten* (1882) where Cantor says that it is still an open question «of eminent interst» to know if π is algebraic or «transcendental».[53]

It should be noted that around this period, a publication of high importance in connection with these issues came out, namely, Dedekind's second edition of Dirichlet's *Vorlesungen über Zahlentheorie* (1871). Dedekind had chosen to include his theory of ideals —his research on algebraic numbers— into the edition of Dirichlet's lectures, in order to ensure a wide spread and acceptance, but the inmediate acknowledgement obtained by this contribution was much below Dedekind's expectations.[54] In any case, Cantor was among these few mathematicians who read carefully this work, which should be taken into consideration in relation with both his aforementioned acceptance of transcendental mathematical results and his use of the modern terminology. For instance, in [Dedekind 1871, p. 436], after claiming that the collection of all algebraic numbers is a field, he opens a note to write:

> To my knowledge it was Liouville who first proved that there are so-called *transcendental* numbers in addition to the algebraic ones [...] It is conjectured that Ludolph's number π is such a transcendental number, but even just the special case that it is impossible to square the circle has to this day not yet been established.

What we can draw from this quote is that the modern theoretical framework, that which puts the focus on roots of equations instead of the idea of expressibility, was not new at that time, as well as the use of the term «transcendental» to make reference to non-roots of equations. We find here a clear classification within irrationals —roots vs non-roots— in terms of «algebaic» vs «transcendental». In this way, one could expect to find between the aforementined Liouville's definition and this Dedekind's comment, both a step-by-step chage in the theoretical framework and a change in the use of the terminology. In fact, the definition of what an algebraic number should be for Dedekind was clearly explained in his writings:

> A number θ is called an algebraic number if it satisfies an equation:
>
> $$\theta^n + a_1\theta^{n-1} + a_2\theta^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\theta + a_n = 0$$
>
> with finite degree n and rational coefficients $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$.[55]

[52] [Ferreirós 2006, p. 176].
[53] [Bermúdez 2009, p. 140].
[54] See the letter that Dedekind wrote (as reply) to Lipschitz in 1876 included in [Dedekind 1876, p. 45].
[55] [Dedekind 1876, p. 53].

As it was noted elsewhere, what motivated Dedekind to develop his theory of algebraic numbers, was his attempts to generalise Kummer's work in a more appropriate way.[56] Without delving into details,[57] in order to carry out this enterprise it was necessary a good definition embracing the aforementioned expressions of the form $a_0 + a_1\zeta + \cdots + a_{n-2}\zeta^{n-2}$. It was trying to extract the characteristic property of these expressions, that is to say, that which according to Dedekind *defined* their nature, that he proposed the above definition.[58] Anyway, it would be reasonable to ask if Liouville could have influenced Dedekind's definition in some way. Let us take into account that Dedekind knew Liouville's ideas at least through Dirichlet influence, and that Liouville is clear about why the old theroretical framework should be avoided: the theory itself and Ruffini-Abel's theorem. I do not have any direct evidence of such a transmision, but it seems clear that the idea of getting rid of expressible quantities (in the above context) in favour of roots of equations, was more or less «in the air».[59]

As one can read in [Ferreirós 2007 a, p. 94] with regard to algebraic number theory:

> The theory of algebraic integers, which emerged in the period 1830-1871, gives a perfect example of the typical 19th-century orientation toward pure mathematics in Germany. The problems studied here had no practical application, they were pursued purely for knowledge's sake.

This tendency towards more speculative issues seem to have been to some extent a common thread in the German mathematical community. In this line, one of the 19th-century milestones was to have set up a rigorous account of irrational numbers, passing from considering them as mere tools —the usual 18th-century perspective— to proper mathematical objects.[60] The motivation of such investigations came from the necessity of grounding some mathematical results:

---

[56] Kronecker also developed a theory of algebraic numbers around 1858 (not published until 1882). Both mathematicians were very worried about finding a completely satisfactory foundation to Kummer's ideal numbers, but their style was highly different (see for instance [Ferreirós 2007 a, pp. 38, 96]).

[57] See [Dedekind 1876] for more details (particularly p. 39).

[58] It would be insightful to note how well this approach fits with Dedekind's style. In Ferreirós's words: «the fundamental principle that particular forms of representation ought to be avoided in favor of abstract concepts» [Ferreirós 2007 a, p. 100].

[59] Ferreirós noted to me that Dedekind used to say that the basic concepts of his theory of numbers had a strong link with his algebraic ideas, so Dedekind was maybe led independently of Lioville to his definition, among other things, by taking into account new results as Ruffini-Abel's theorem, along with, obviously, the own necessities of the theory he was establishing.

[60] This has already been a well-studied subject, so I will not include more than a brief indication, forwarding the reader to [Ferreirós 2007 a, pp. 117–144] (it is Chapter IV: *The Real Number System*) for a deeper account.

> The constant use of numerical conditions, and the notion of limit, made possible an important step forward in the elimination of the obscurities and inconsistencies of the calculus of the 18th-century. But, of course, absolute rigor had not been attained. Some basic theorems of an *existential character* still lacked an adequate foundation. Examples are the intermediate value theorem —if a continuous function takes positive and negative values at both ends of an interval, *there is* a real number in the interval which is a zero of the function; the theorem that, given a monotonically increasing and bounded sequence of real numbers, *there is* a unique real number that is the limit of the sequence; or the principle that, given an infinite sequence of embedded intervals of $\mathbb{R}$, *there is* at least one real number that belongs to all those intervals [...] What was needed was a satisfactory theory of the real numbers, establishing the continuity (completeness) of $\mathbb{R}$.[61]

The achievements of German mathematicians in this respect with the theories of Weierstrass, Cantor and Dedekind were overwhelming, but the tendency towards pure mathematics, a reflection of a changing era, was shared to a greater or lesser extent by other countries, specially in France.

A non-German key figure in these efforts for establishing a rigorous theory of irrational numbers was Charles Méray, who was the first in publishing a coherent real number system in his *Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données* (1869).[62] Let me bring to light that it is not all that strange that he had reached the same conclusions.[63] Take into account that the idea of drawing on rational numbers to know, even approximatly, irrational numbers had since long been implicit in all kind of mathematical sources. The development of continued fractions came just to emphasize this, and after a long, slow period in the changing of mentalities, it bore its fruits.

As all the rest of the three aforementiond mathematicians, his foundational studies about irrational numbers grew out of trying to make precise certain aspects of mathematical analysis,[64] and he was also very worried about fundamental issues as he himself relates, crediting mathematical analysis as «not only the "queen" of mathematics, but also the more abstract of all sciences». In fact, after recognising that he was initially «captivated» by geometry, having «literally devoured Chasles' *Géométrie supérieure*» when he was

[61] [Ferreirós 2007 a, p. 118].

[62] [Dugac 1970, p. 339].

[63] [Ferreirós 2007 a, p. 119] brings out that the work of Méray did not exert an influence on the three German authors.

[64] See [Dugac 1970, p. 338].

seventeen years old, he says:[65]

> But I soon realised that geometry is but a myth as *pure* science, nothing but the *application of analysis to the study of geometric facts*, whereupon I was only focused on analysis. It seemed to me lamentable for its incoherence, its procedures, and its complete lack of rigour, and my main efforts have tended to make it so natural, clear and rigorous as any question of elementary algebra.

What is important in connection with the subject treated in this thesis is the fact that from this new modern point of view, rational numbers were no longer a tool to approximate irrationals, but rather a mathematical object adequate to define them.

I would like to point out, coming back to Liouville, how much influence he had in mathematics, not only by means of his *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, or through his international contacts, but also as professor and guide to emerging young students, «who later were to form the next generation of the French scientific community».[66] [Lützen 1990, p. 97] writes that «among mathematicians, Liouville seems to have been the one who was best informed about the development of his science outside of Paris»

For the purpose of this study, Hermite is a particularly interesting case. «One of his protégés», he was very much in contact with Liouville, to such an extent that in the discussions of mathematical subjects, he tried to offset the loss of Dirichlet in 1859 with him.[67] Very interestingly, as far as this influence on Hermite's research about e (and maybe also concerning π) is concerned, from this period onwards Liouville seems to have been quite focused on number theory, and also in his courses in *Collège de France* where he presents his recent investigations about transcendental numbers and e to his students,[68] which also assured a more that probable dissemination of these ideas. It is therefore not strange at all that Hermite had taken the reigns from Liouville, attempting to demonstrate the open problem left out by his mentor, in his case with absolute success in his award-winning *Sur la fonction exponentielle* (1873).[69]

[65]Quotes in [Dugac 1970, p. 334].

[66]See [Lützen 1990, pp. 69, 81] (quote at p. 81).

[67][Lützen 1990, pp. 80, 227] (quote at p. 80).

[68]See [Lützen 1990, p. 202, 234], who refers to the content of Liouville's course *Sur diverses questions d'analyse* given in the first semester of 1864–1865.

[69]See [Hermite III 1905–1917, pp. 150–182]. At this respect, Hermite refers to the steps forward given by Liouville, I mean, to his proof of the existence of transcendental numbers (he does not use the term in this paper) and his proofs concerning the impossibility for e and e^2 to be quadratic irrationals [Hermite III 1905–1917, pp. 161–162].

As for one possible influence of Lambert, Hermite shows wherever he can his debt with him,[70] speaking for instance about «Lambert's continued fraction»[71] for $\tan x$, or claiming in his *Extrait d'une lettre de Mr. Ch. Hermite à Mr. Borchardt sur quelques approximations algébriques* (1873), after writting that he will not venture to investigate the transcendence of π, that «all I can is redo what has already been done by Lambert, but in a different way», whereupon he presents a new proof of the irrationality of π^2 (and therefore as an immediate consequence, a new proof of the irrationality of π).[72] Moreover, Hermite uses clearly the modern theoretical framework such as Lambert had suggested before,[73] although it seems more plausible from my point of view to recognise here the influence of Liouville anyway.

It is quite revealing what Picard says in [Hermite I 1905–1917, p. xxx], namely, that «the interest ascribed to such a fundamental number as e, gave [...] an immense value to the proof of its transcendence», which appears to show an increased interest, at least around the last part of the 19th century, in these sort of issues, formerly disregarded. In this sense, Hermite himself was a key driving force in the dissemination of this subject matter, not only in France but also abroad, where these investigations were enthusiastically received and used by the likes of figures such as Smith and Lindemann.

Smith was a foremost mathematician of his time, although lesser known today as he deserved, above all in his own country, possibly because his main interest lay in number theory, far from English mathematical mainstream.[74] «Smith's wide contacts on the Continent also gave him a far broader perspective than most of his colleagues»,[75] helping

---

[70] See [Serfati 1992, pp. 152–154] for more details.

[71] [Hermite III 1905–1917, p. 94].

[72] See [Hermite III 1905–1917, p. 146]. Picard says in the preface to the first volume of Hermite's collected works that his proof of the incommensurability of π^2:

> maybe led him to dream an instant about deducing by means of this kind of considerations the transcendence of π ([Hermite I 1905–1917, p. xxxii]).

In relation with what we have commented above, let me bring into light that both Picard (in this very page) and Hermite in his *Sur la fonction exponentielle*, credit Lambert to have proved the irrationality of π^2 —something that will be repeated by Henry Smith as we shall see— but as far as I know Lambert did not. More surprisingly, Hermite in *Sur la fonction exponentielle* writes that Lambert was the maker of the only proof of the irrationality of π an its square given so far, overlooking Legendre's *Note* in his *Elements of Geometry* [Hermite III 1905–1917, p. 154].

[73] This is clear for instance in *Lettres sur la théorie des nombres* ([Hermite I 1905–1917, p. 131]) or once again in his *Sur la fonction exponentielle* (more concretly in [Hermite III 1905–1917, 161, 162]).

[74] As for the figure of Henry Smith, I rely heavily on [Fauvel et al. 2014, Chapter II].

[75] [Fauvel et al. 2014, p. 249].

to bring him up-to-date about some of the most recent investigations that most of his fellow countrymen would lose sight of. As far as irrationality-related issues are concerned, this can be seen reflected in the invitation in September 1873 for Hermite to speak about the irrationality of e in the 43rd meeting of the British Association for Advancement of Science held in Bradford, where he presents «a new demonstration of Lambert's theorem, where just integral calculus intervenes, hoping that it is entirely elementary».[76]

Smith's own account and opinion about this branch of Arithmetic were published in his *On the present State and Prosperts of some Branches of Pure Mathematics* (1876).[77] Getting into the subject, [Smith 1894, p. 181] writes about Liouville's achievement of having proved the existence of quantites that cannot be the roots of algebraic equations:

> a proposition that certainly required the proof which it has received from him, although it might easily seem incredible *á priori* that such irrational quantites should not exist.

He goes on to make an explicit distinction between roots and no-roots, as it started to be common in France and Germany, by using the modern concept of transcendence:

> We may, perhaps, be allowed to designate by the terms arithmetical and transcendental the two classes of irrational quantities between which the theorem of M. Liouville has taught us to distinguish.

Whereupon he declares that:

> it becomes a problem of great interest to decide to which of these two classes we are to assign the irrational numbers, such as e and π, which have acquired a fundamental importance in analysis.

Curiously, Smith does not use the term «algebraic» to refer to roots of equations, as it was used by other authors, but that of «arithmetic», maybe because he considered this

[76] In [Fauvel et al. 2014, p. 250]:

> Hermite talked on the irrationality of e; presumably his newly discovered proof of the transcendence of e would have been too technical for such a general audience.

The contents of the talk can be seen directly in the *Report of the British Association for the Advancement of Science*, 43th meeting, pp. 22–23, 1873. The talk is also included in [Hermite III 1905–1917, 127–130] (quote at p. 128)

[77] Originally published in *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. viii, pp. 6–29. I will be referring to [Smith 1894, pp. 166–190].

last term to be a more appopriate representative of the field it was included in (arithmetic).[78] Moving forward, Smith, making an explicit recognition of Lambert's important contributions, writes:

> To Lambert, the eminent Berlin mathematician of the last century, the first great step in this direction is due. He showed that neither π nor π^2 is rational; with regard to e he was even more successful, for he was able to prove that no power of e, of which the exponent is rational, can itself be rational.

Just here, Smith opens a footnote with a very insightful information. Firstly, he brings into focus differences in mathematical texbooks as far as the inclusion of demonstrations of the irrationality of e and π in UK are concerned —in the same line argued across this chapter above all in connection with France— by saying that:

> A different method of proving the incommensurability of e [than that by Lambert] (depending on exponential series)[79] has found its way into many elementary treatises [...] The theorems as to the incommensurability of π and π^2 are excluded from English text-books; the only exception that occurs to me being Sir David Brewster's English edition (Edinburgh, 1824) of the Geometry of Legendre, where Legendre's reproduction of the demonstration of Lambert is given in Note iv. p. 239.

But even more interesting is the implications that this lack of information had according to him in the UK concerning the circle-squaring problem:

> The exclusion of these theorems is a matter of regret; for they constitute the only 'short method with the circle-squarers'; and perhaps the extraordinary prevalence within the United Kingdom of the form of delusion known as circle-squaring may partly arise from the appearence of an 'ipsi dixerunt'[80] on the part of mathematicians, which is certainly suggested by the omision in elementary works of any rigorous demonstration of the irrationality of π.

It could be expected, drawing on Smith's own words, that this kind of investigations were not very popular in Britain at that time, which would probably entail a lack of knowledge about the role played by Lambert is this field, and a delay in the use of some terminology,

[78] Prof. Ferreirós suggested to me in the context of the *Congreso Bienal de la Real Sociedad Matemática Española (Sesión especial en Historia de las Matemáticas)* (Santander, del 4 al 8 de febrero de 2019), that one possible reason might come from the view, at that time, of arithmetic as the paradigm of pureness instead of algebra.

[79] He is likely referring to Fourier's proof.

[80] 'They said'.

increasingly more accepted in other countries.[81] He closes this footnote by remembering Hermite's demonstrations of the irrationality of both π and π^2, and saying that with this last exception, «the theory of the quadrature of the circle rests to-day where Lambert left in the year 1761».

Around the same period Smith presented his paper, he met Lindemann in Oxford seemingly spending some time discussing the circle-squaring problem.[82] In Germany, Lindemann had been proposed to attack the problem by the so powerful technique of continued fractions, based on its success in the hands of Liouville, but during the winter of 1876/1877 he had been in Paris visiting Hermite who taught him how he had employed integration of real functions in order to prove the transcendence of e.[83] Hermite's influence was decisive in the subsequent development due to the fact that years later, Lindemann, by using the techniques learned from his stay in Paris, proved that:

$$\text{If}\, x \neq 0\, \text{is a complex algebraic number} \Longrightarrow e^x \not\in \mathbb{Q}$$

and due to the fact that:

$$e^{i\pi} = -1 \in \mathbb{Q}$$

the number π has to be transcendental.[84]

Klein, who was the first in receiving the proof from Lindemann for publication, asked Cantor for his opinion. He then replies that:[85]

> I do not hesitate about the correctness of his result, and I think that it can be applied in the demonstration of the transcendence of $\log x$, when x is algebraic.

Although realising that there were some gaps in Lindemann's proof, but susceptible to be overcome anyway.[86] Cantor sends the manuscript to Weierstrass who reacts very positively, soliciting Lindemann's permision in order to present this achievement to the Berlin Academy. Weierstrass finally presents the proof on 22 June 1882, whereupon

[81] The way in which he presents the distinction between irrationals, «We may, perhaps, be allowed to designate...», might be considered as a signal indicating a non yet widely accepted terminology. In any case, as I was suggested during my conference in Oxford (Research in Progress 2020, The Queen's College, Oxford), more data would be required (I am very grateful for all the comments I was given).

[82] [Fauvel et al. 2014, p. 250]. He read the paper on 9 November 1876.

[83] See [Fritsch 1984, p. 165].

[84] The paper is [Lindemann 1882 a].

[85] Dated 8th June 1882. I want to thank Carlos Gómez Bermúdez for his commentaries about Cantor's correspondence in this issue that, on the other hand, prove that Cantor did trust on the correctness of Lindemann's demonstration in contrast to [Fritsch 1984, p. 172].

[86] In letter to Klein dated 13th June 1882.

Lindemann himself broke the news to Hermite who did the same at the Paris Academy on 10th July 1882. He finishes the letter with the main results:[87]

> » The number π, the ratio of the circumference of the circle to the diameter, is a transcendental number.
> » Neperian logarithms of all rational numbers, excluding unity, and of all algebraic numbers, are transcendental numbers.

With this he was putting an end to the circle-squaring problem, one of the long-lasting open problems in mathematics.

The results of Hermite and Lindemann were rapidly hosted,[88] and there are few doubts about the important role played by Lindemann and his writing in the subsequent interest put on this issue, and on the establishment of the the modern concept of transcendence, as can be witnessed in the increasing number of papers published on the subject.[89] These works of the last part of the 19th century served as base in order to set up a theory of transcendental numbers on its own, a theory that as expressed by Carl Ludwig Siegel —a former student of Frobenius and Landau in Göttingen— in the preface of his book *Transcendental Numbers* (Princeton, 1949), «so late as» in 1946 was still lacking:

> This booklet reproduces with slight changes a course of lectures delivered in Princeton during the Spring term 1946. It would be misleading to call it a theory of transcendental numbers, our knowledge concerning transcendental numbers being

[87][Lindemann 1882 b, p. 74].

[88]Numerous examples in Germany are given in [Fritsch 1984, p. 172]. As for UK, it is interesting to read *Encyclopaedia Britannica*, Ninth edition, Volume XXII, pp. 436–437, 1887. It is said that «Lindemann, following exactly in Hermite's steps, accomplished the desired result» of proving that π «cannot be a root of a rational algebraic equation» (the term «transcendental» still not being used). By the way, Lambert's role in connection with the solution of the circle-squaring problem is emphasised, adding that «This incontestable result had no effect, apparently, in repressing the π-computers».

[89]Some examples would be the following:

- Markoff, A. A., Proofs of the transcendence of the numbers e and π, St. Petersburg 1883 (russ).
- Cailler, C., Sur la transcendance de "e", *Assoc. Franc. 2°II Congrès de Marseille*, pp. 83–90 (1892).
- Gordan, P., Sur la transcendance du nombre e, *Acad. Sci (Paris)* 116, pp. 1040–1041 (1893).
- Hilbert, D., Über die Transzendenz der Zahlen e und π, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* 1893.
- Hurwitz, A., Beweis der Transzendenz der Zahl e, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* 1893.
- Mertens, R. E., Über die Transzendenz der Zahlen e und π, *Sitzgsberg. Akad. Wiss. Wien* 105, pp. 839–855 (1896).

narrowly restricted. The text deals with a few special transcendency problems of some interest, but it is more than a mere collection of scattered examples, since it involves a method which might be useful in the search of more general results.

8.5 Conclusion

The first part of the 19th century lived a sharp change in the field of mathematics, having Germany as its main protagonist from the 1830s. The tendency towards a purist and conceptual approach, motivated pure mathematics to be on the core of research, Gauss, Dirichlet and Jacobi being the most influential of this first generation of pure mathematicians.

As for both questions about irrationality and the reception of Lambert's work, Dirichlet was of great importance. Having got in contact with people so connected as we have seen with this topic as Legendre, Fourier or Lacroix in his first stages of his mathematical career, Dirichlet got into the subject in his trial lecture. These ideas, along with his attempts to generalise Gauss and Kummer's work in the context of the emergence of algebraic number theory, had an impact in later generations. Kummer, Kronecker and Dedekind, among others, would work on the same topics, developing a satisfactory theory of algebraic numbers where the property of being root of an equation is the departure point, relegating in this context the old idea of expressibility.

Liouville was also a central figure in this change. His own research, bringing into light the interest for the study of concrete special irrationals and proposing modern changes in theoretical frameworks, boosted by his enormous influence, can be seen as the main motor of dissemination of these new ideas. The necessities of 19th-century analysis that derived in a complete and rigorous theory of real numbers were accompanied by more concrete research that, step-by-step, helped to form a deeper understanding of irrationals. His impact can be clearly seen in such key figures in this field as Hermite, and following this same line, in Lindemann, all of them, as they showed explicitly or implicitly in their works, in debt to Johann Heinrich Lambert.

Conclusions and Future Lines of Research

As stated in **the first part of the thesis**, specifically in Chapter 1, despite what at first glance could seem enormous advances around π in the last decades of the 16th century —especially the calculations by Ludolph van Ceulen— chances are there would not be a theoretical intention in it. As we have pointed out, it was a time when there was still strong reluctance to letting agents external to geometry venture into it; the use of decimals was still in too much of an embryonic state to think that properties of real numbers were investigated through their decimal expansions; and in reality, the problem of interest in this respect, the squaring of the circle, is purely geometric (as it was generally seen). Rather it seems that the objective, as noted in the introduction, was more mundane, namely, «Banishing imagined quadratures», to paraphrase Fray Martín Sarmiento.[90]

With the development of analytical methods that had arisen in the last decades of the previous century (Viète), the perspective around special irrationals was beginning to change. The application of analysis to geometric problems —keep in mind the squaring of the circle— gives rise to formal expressions for π, but infinite formal expressions. It is in this context that the concept of transcendence by Leibniz's hand arises, albeit in a broad sense (applied to curves, equations, etc.); and it is in this sense that such formal expressions transcend algebra, as they cannot be expressed finitely through usual algebraic operations.[91]

The introduction of analysis changed the perspective with respect to the previous stage, as explained in Chapter 2. Now, the interest was focused on said formal expressions, and

[90][Rodríguez et al. 2006, p. 363]. Until this moment the most accurate approximations for π had been achieved by Tsu Ch'ung-chih (430–501), obtaining 3.1415926 and 3.1415927 as excess and deficit values [Boyer 1968, p. 224].

[91]I am referring to infinite expressions like Wallis' infinite product or Leibniz's infinite series, this last one discovered independently by J. Gregory, and Nilakantha much earlier in India (see section 1.3).

therefore (although this process was slow) on the constants they represented, and that is how we began to see an interest directed towards a deeper understanding of π, the special irrational of the moment, but also towards other constants. Everything seems to indicate that a first line of inquiry was, this time, trying to study the decimal expansions —works that generally begin with Wallis in 1685— thus trying to extract some information about the constants themselves,[92] but Euler's work on continuous fractions included in chapter 18 of his *Introductio* —an abridged study of his more detailed *De fractionibusis continuis dissertatio* of 1744— was a change of direction that became tremendously fruitful.[93]

The situation now is that there is a very distinct and fruitful way to not only approximate, but to analyze irrationals, namely, continued fractions, and Euler himself in his [Euler 1744] even gives the first demonstration of the irrationality of a special irrational (e). But it is also interesting to note —again in that article— Euler's use of the concept of transcendence in the context of an analysis of continuous fractions. While Euler does not refer to what he means by transcendent quantities, the distinction he makes between irrational and transcendental quantities leads us to think of a distinction different from the present one, and indeed of one made in the line of tradition.[94] The interpretation, to which we had referred in the introduction, suggests that, in fact, Euler thought of the distinction between irrational vs transcendental in modern algebraic vs transcendental terms, something that seems like a common denominator at the time: while the theoretical framework in which these authors explicitly moved alluded to expresability as a yardstick in algebra, implicitly, the property that had always embodied algebra was the property of being the root of an equation.

In the second part of the thesis, specifically in Chapter 3, we have analysed the figure of Lambert from a human and scientific perspective. It is very surprising that without being born in an environment prone to study, he developed such a strong dedication to knowledge from such a young age, a dedication that would in fact accompany him to his last days. The wide variety of topics on which he researched shows the complexity of his character, a complexity that was also felt in his personal relationships, although, as Lagrange would say, «when one had managed to know him thoroughly, one could not help but hope for him all the esteem and friendship he deserved».[95]

92 As it has already been pointed out, such is the case with Goldbach, Daniel Bernoulli and Euler, and apparently also with Lambert, who had had in mind these ideas before undertaking his proof (Lambert had published some few works concerning this issue).

93 I am referring to [Euler 1744].

94 Such is the interpretation proposed by [Petrie 2012].

95 In [Lalanne 1882, pp. 334, 334].

Chapters 4 and 5 have been devoted to analyzing the work in which, among other things, Lambert performs the first demonstration of the irrationality of π.[96] Lambert, who carefully read, like many others, Euler's *Introductio*, says in part V of his [Lambert 1766/1770][97] that Euler's developments in continuous fraction motivated him to seek the development of the tangent he uses in his Mémoire, and that it is the one he uses for his demonstration of the irrationality of π. As documented in Chapter 4, there have been opinions about a potential problem in that demonstration, a problem that came to be solved by the proof Legendre offered years later (to which it will be immediately referred). The interpretation given here is that by analyzing the problem in said demonstration, this claim is not actually sustained when taking into account the time in which it takes place, our opinion being more on the side of Pringsheim (it is not necessary to add anything; in fact the rigor shown by Lambert is exceptional) than that of Rudio (there are gaps that come to be filled by Legendre); and that most of these opinions are more than likely based on the misconception that Lambert makes its demonstration in [Lambert 1766/1770].

For the natural question of what kind of influence Lambert had, the answer is that it was small, not only among his contemporaries, but also among mathematicians who lived several decades later (even if the situation gradually improved). The exception, from the same century, is in Legendre and his *Éléments de Géométrie* from 1794, a work included in **the third part of this thesis**, specifically chapter 6. Especially useful, as mentioned, is the first edition, since Legendre includes a comment that no longer appears after the fourth, one which positions him among those who see no problems in the demonstration of Lambert beyond its diculty and its extension. The study that has been made of Legendre's proof reveals clear differences from Lambert's, especially in its simplicity. However, Legendre is not as clear in his conduct as Lambert is, or as rigorous, but in any case our interpretation is that for the expectations of the time, it is perfectly valid, and certainly more affordable, although we are on Glaisher's side when he says that Lambert's demonstration «seems to afford a more striking and convincing proof of the truth of the proposition».[98]

There is, answering the question posed in the introduction, a continuity with regard

[96] [Lambert 1761/1768].

[97] In this respect I draw on Elías Fuentes Guillén's translation. It will be included in the forthcoming book by Elías and myself: *Dilucidando π. Irracionalidad, trascendencia y cuadratura del círculo en Johann Heinrich Lambert (1728–1777)*, College Publication.

[98] [Glaisher 1871, p. 12].

to Lambert: the tool is the same —continued fractions—, and Legendre makes use of the modern theoretical framework which states that to be algebraic is to be a root of an equation. In fact Legendre gives the first clear and modern definition of what an algebraic number is.[99] Besides, the continuity is seen in the fact that Legendre generalizes Lambert's proof by using his method in order to demonstrate the irrationality of π^2, something that in itself should be taken as an advantage with respect to the proof of Lambert. This is a small contribution towards the transcendence of π in the modern sense of the term, and this is how Legendre also saw it.

Although, as Serfati says, the 18th century is the century for demonstrations of irrationality, it can not be said that it is the century of irrationality. Interest in these questions, from a point of view that goes beyond the search for increasingly-accurate approaches, is almost non-existent. Continued fractions, on the other hand, were used not to deepen the comprehension of special irrationals, but to find ways to get to the roots of the equations —the primary objective of algebra— as quickly and efficiently as possible. In fact, in this sense, continued fractions were very effective, and there is little doubt about the role they played in the conception of the irrational number as defined through successions. However, it must be emphasized, that although this idea is very attractive from a modern point of view, it is not the view of this era, an era still embedded in the «science of quantities, or the science that seeks the means to measure them».

Taking all this into consideration, as well as the period during which results on the nature of irrationals start to be obtained (transcendental results, complete theories), the question we posed in the introduction was quite natural: what happened in between?

The nineteenth century opened with an announcement by Ruffini (1799), whose impact, at least in theory, is made quite clear in this story. Ruffini with his announcement about the impossibility of solving the quintic equation via radicals, draws attention to the fact that not every root can be expressible. The fact is that the idea of expressibility, which had been taken explicitly as a measurer of mathematics, is no longer sufficient to grasp what had always been considered the quintessential part of that which is algebraic: the roots. But in reality, this had no repercussions. It was not only the fault of Ruffini's own work (difficulty, correctness, etc.), but also of the frontal assault on the classical paradigm that it entailed. We continue to see then how the term «algebraic» keeps being used well into the century, as a synonym for something expressible, such as is extracted from the

[99] It is, at least, the first modern and clear definition we have found.

study included in Chapter 7.[100]

To a large extent these first decades of the century were not a step forward from the previous one, but certainly, there is a noticeable change beginning to happen. Lambert's name begins to appear in historical documents such as dictionaries or textbooks in connection with his demonstration of the irrationality of π. Later on, new demonstrations of irrationality appear, such as Fourier's beautiful demonstration collected in Stainville's book on number e (1815),[101] a number that, thanks to the impulses of analysis, begins to take center stage. In any case, the main objective seems to be rather educational, that is to say something that can be brought into the classroom of the newly reformed educational institutions.[102] Optimism is also reduced if we analyze, as has been done, the role of continued fractions. In fact, some authors complained about the little use made of them, which in terms of special irrationals, in most cases, did not even go beyond the typical descriptions of how to express numbers as π in the form of continued fraction by means of its decimals (something quite basic and surpassed).

Especially interesting in the first half of the century were the figures of Dirichlet and Liouville, not just for their own work, but for their enormous influence. Dirichlet's stay in Paris in the 1820s and his contact with the main protagonists in terms of irrationality, seems relevant to us. Keep in mind that he was in close contact with Legendre, Fourier, and Lacroix, and that upon his arrival in Breslau he decided to dedicate his trial lecture [Probevorlesung] as a university lecturer to Lambert's work on the irrationality of π. It seems more than plausible to conjecture that the young Dirichlet was influenced by these authors when choosing this topic for his lesson. Note also that, years later, Lacroix himself comments in his *Complément des Élémens d'algèbre* (1835), that Dirichlet had sent him a note simplifying the proof of the irrationality of the powers of the number e. This proves that, at least in certain advanced circles, these questions were beginning to spark interest, and the atmosphere of change in regards to rigor that this new century is experiencing, explains to a certain extent this interest towards more speculative questions that will ultimately lead to the constitution of complete theories of irrational numbers.

[100] Contrary to what one seemingly draws from [Serfati 2018, p. 214]: «After Lambert, an *algebraic number* is simply a root of an algebraic equation with rational coefficients (or integers, which is the same)».

[101] I am referring to [Stainville 1815].

[102] An interesting remark (noted to me by Prof. José Ferreirós) is that August Leopold Crelle in his third German edition of *Éléments de Géométrie* (1837), complained about there being no appropiate proof of irrationality of π similar to the easy one by Fourier of the irrationality of e, being desirable the search for one easier demonstration.

Dirichlet's maxim to put concepts in the place of formulas is also picked up by Liouville, very much in the same direction, when he clearly states the need to change the theoretical framework and begin to take equations and their roots as a way to measure that which is algebraic.[103] In any case, despite the fact that some authors such as Wantzel join the charge, we have serious doubts that this theoretical framework, and in particular modern terminology, was used more or less systematically until the last decades of the century, being in fact Dedekind, with his work more than any other author, the one who definitively established this use.[104] It is in the last chapter of the thesis, chapter 8, where these questions are discussed.

If the 18th century can be classified as the century for demonstrations of irrationality, the 19th century would be that of demonstrations of transcendence. The illustrious protagonist in this field is Liouville, not only, as mentioned, because of his own contribution, but also because of his influence. It was around the 1840s that he began to deal with these questions regarding the main objective of demonstrating the transcendence of e, which was what finally led him to prove that neither e nor e^2 are quadratic irrationals. In his book,[105] Lützen comments that Liouville picks up this theme after his reading of the correspondence between Goldbach and Daniel Bernoulli edited by Fuss, and that will be what would eventually lead him to his famous demonstration. But, it does not make it entirely clear if Lambert had anything to do with it, beyond commenting that he followed the idea that the Swiss had applied in demonstrating the irrationality of e and π.[106] What is clear is that the publication of these works in his Journal; the classes he gave in which he explained his results on special irrationals; and his network of contacts, brought these interests, and probably Lambert himself, to the attention of many mathematicians.

Such is the case of Hermite in the first place, who demonstrates the transcendence of e in 1873 (he does not use the term in this paper), resolving the problem left by his teacher, and who does not miss the opportunity to show his debt to Lambert: «all I can is redo what has already been done by Lambert, but in a different way».[107] And following is Lindemann, who after spending a winter in Paris with Hermite, performs the proof of the transcendence of π (1882), closing the problem of squaring the circle (he did so using the term «transcendental»).

[103] I am referring to [Liouville 1837].
[104] See [Dedekind 1871] and [Dedekind 1876].
[105] [Lützen 1990].
[106] It seems quite reasonable to think that Liouville knew and read Lambert's *Mémoire*.
[107] [Hermite III 1905–1917, p. 146].

Possible Future Lines of Research

The result of this doctoral research is not intended, of course, to close the subject, and in this spirit we outline possible improvements that could be carried out in future research:

- We believe that a detailed biography of Lambert would be a great contribution to the field of the history of science in general, although we anticipate, as already noted, that it would not be a project «suitable for cowards».
- Regarding the use of the terms «algebraic» and «transcendental», a good way to see in more detail when they began to be used with more confidence would be to try to study how they were progressively included into elementary textbooks, from, say, the 1840s, when Liouville proposed the change in the theoretical framework discussed above. This would give a more reliable idea regarding the development of these terms.
- As stated in the last chapter, in the last decades of the nineteenth century a rapid acceptance of the results of transcendence was arising, results which were then simplified, leading to new publications. On the other hand, in 1949, Carl Ludwing Siegel comments in his book *Transcendental Numbers* that the knowledge we have of transcendence is too restricted to speak of a theory of transcendental numbers.[108] It would be interesting to know how events unfolded from the 19th century up to that point, and at what point one can talk about a theory of transcendental numbers.
- Finally, to our knowledge there is no annotated publication, at least in terms of a modern version, of the Hermite and Lindemann proofs. A detailed analysis of them would shed light not only on the authors themselves, but also on a more global point of view on the era itself (methods, etc.). We can certainly agree that the historical interest is undeniable.

[108] See section 8.4.

Conclusiones y Futuras Líneas de Investigación

Como se ha expuesto en **la primera parte de la tesis**, concretamente en el capítulo 1, a pesar de lo que a primera vista pudiesen llevar a pensar los enormes avances calculísticos en torno a π llevados a cabo en las últimas décadas del XVI —especialmente por Ludolph van Ceulen— lo más probable es que no hubiese una intención teórica en ello. Como hemos apuntado, es una época en la que aún hay fuertes reticencias a dejar que agentes externos a la geometría incursionen en ella; el uso de los decimales aún está en un estado embrionario como para pensar que se investigaban propiedades de los números reales en general, a través de sus expansiones decimales; y realmente el problema de interés a este respecto, la cuadratura del círculo, es puramente geométrico (así era visto en general). Más bien parece que el objetivo, como se apuntaba en la introducción, era más mundano, a saber: desterrar cuadraturas imaginadas, parafraseando a Fray Martín Sarmiento.[109]

La perspectiva en torno a los irracionales especiales, empieza a cambiar a mediados del siglo XVII con el desarrollo de los métodos analíticos que habían surgido, precisamente, en las últimas décadas del siglo anterior (Viète). La aplicación del análisis a los problemas geométricos —concretemos en la cuadratura del círculo— deriva en expresiones formales para π, pero en expresiones formales infinitas. Es en este contexto en el que surge el concepto de «trascendencia» de la mano de Leibniz, aunque con un sentido amplio (aplicado a curvas, ecuaciones, etc); y es en este sentido en el que dichas expresiones formales trascienden al álgebra, en tanto que no pueden ser expresadas de forma finita a través de las operaciones algebraicas usuales.[110]

[109][Rodríguez et al. 2006, p. 363]. Hasta ese momento las mejores aproximaciones de π se debían al chino Tsu Ch'ung-chih (430–501) quien había obtenido 3.1415926 y 3.1415927 como valores por defecto y exceso [Boyer 1968, p. 224].

[110]Me refiero a expresiones como el producto infinito de Wallis o la suma infinita de Leibniz, esta última descubierta independientemente tanto por J. Gregory, como por Nilakantha mucho antes en la India (ver sección 1.3).

La introducción del análisis cambió la perspectiva con respecto a la etapa anterior, tal y como se explica en el capítulo 2. Ahora, el interés se centraba en dichas expresiones formales, y por ende (aunque este proceso fue lento) en las constantes que representaban, y es así como empezamos a ver un interés dirigido hacia una comprensión más profunda de π, el irracional especial del momento, pero también hacia otras constantes. Todo parece indicar que una primera línea de investigación fue, ahora sí, intentar estudiar las expansiones decimales —trabajos que en general empiezan con Wallis en 1685— tratando así de extraer alguna información sobre las propias constantes,[111] pero el trabajo de Euler sobre fracciones continuas incluido en el capítulo 18 de su *Introductio* —un estudio abreviado de su más detallado *De fractionibus continuis dissertatio* de 1744— supuso un cambio de dirección que se tornó tremendamente fructífero.[112]

La situación es que ahora hay una vía distinta y que parece muy fructífera para analizar, no solo aproximar, irracionales, las fracciones continuas, y el propio Euler en su [Euler 1744] da la primera demostración de irracionalidad de un irracional «especial» (e). Pero también resulta interesante —concretando de nuevo en el mencionado artículo— el uso que hace Euler del concepto de trascendencia en el contexto de un análisis sobre las fracciones continuas. Si bien Euler no hace referencia a lo que entiende por cantidades trascendentes, la distinción que él hace entre irracionales y trascendentes, lleva a pensar en una distinción distinta de la actual, y de hecho en la línea de la tradición.[113] La interpretación a la que hemos aludido en la introducción, apunta a que de hecho Euler pensaba en la distinción «irracional» vs «trascendente» en los términos modernos «algebraico» vs «trascendente», algo que por otro lado parece un denominador común en la época: si bien el marco teórico en el que se movían explícitamente estos autores aludía a la expresabilidad como vara de medir lo algebraico, implícitamente la propiedad que siempre había encarnado a lo algebraico era la propiedad de ser raíz de una ecuación.

En **la segunda parte de la tesis**, concretamente en el capítulo 3, hemos analizado la figura de Lambert desde una perspectiva humana y científica. Sorprende sobremanera el que sin haber nacido en un entorno proclive al estudio hubiese desarrollado desde tan joven tan fuerte dedicación por el saber, una dedicación que de hecho lo acompañaría

[111] Como se ha señalado ya, tal es el caso de Goldbach, Daniel Bernoulli y Euler, y al parecer, también de Lambert, quien habría tenido estas ideas en mente antes de llevar a cabo su demostración (Lambert había publicado algún trabajo sobre el estudio de los decimales).

[112] Me refiero a [Euler 1744].

[113] Tal es la interpretación de [Petrie 2012].

hasta sus últimos días. La gran variedad de temas sobre los que investigó da muestra de la complejidad del personaje, una complejidad que también se dejó sentir en sus relaciones personales, aunque, como diría Lagrange, «cuando se había logrado conocerlo a fondo, uno no podía evitar concebir para él toda la estima y amistad que merecía».[114]

Los capítulos 4 y 5 se han dedicado a analizar el trabajo en el que, entre otras cosas, Lambert realiza la primera demostración de la irracionalidad de π.[115] Lambert, que leyó con cuidado, como muchos otros, la *Introductio* de Euler, dice en la parte V de su [Lambert 1766/1770][116] que sus desarrollos en fracción continua lo motivaron para buscar el desarrollo de la tangente que usa en su *Mémoire*, y que es la que usa para su demostración de la irracionalidad de π. Como se ha documentado en el capítulo 4, ha habido opiniones acerca de un posible problema en dicha demostración, problema que vino a ser solventado por la que ofreció Legendre años después (y a la que se aludirá de inmediato). La interpretación que aquí se da es que analizando dicha demostración esa afirmación no se sostiene, teniendo en cuenta además la época en la que se lleva a cabo, estando nuestra opinión más del lado de Pringsheim (no es necesario añadir nada; de hecho el rigor que muestra Lambert es «realmente excepcional») que de Rudio (hay lagunas que vienen a ser solventadas por Legendre); y por otro lado, que es más que probable que la mayoría de esas opiniones estén basadas en la idea equivocada de que Lambert hace su demostración en [Lambert 1766/1770].

A la pregunta natural de qué tipo de influencia tuvo este trabajo de Lambert, la respuesta es que poca, no solo entre sus contemporáneos, sino también entre los matemáticos que vivieron varias décadas después (aunque la situación fuese «mejorando» paulatinamente). La excepción en su mismo siglo la tenemos en Legendre y sus *Éléments de Géométrie* de 1794, trabajo que se encuadra ya en **la tercera parte de la tesis**, y concretamente en el capítulo 6. Especialmente útil, como se comentó, resulta la primera edición puesto que Legendre incluye un comentario que no aparece ya a partir de la cuarta, y que lo posiciona entre los que no ven problema alguno en la demostración de Lambert más allá de su dificultad y su extensión. El estudio que se ha hecho de la prueba de Legendre, revela claras diferencias con respecto a la de Lambert, especialmente su sencillez. Eso sí, Legendre no es tan claro en su proceder como lo es Lambert ni tan riguroso, pero en

[114]En [Lalanne 1882, pp. 334, 334].
[115]Me refiero a [Lambert 1761/1768].
[116]A este respecto hago uso de la traducción de Elías Fuentes Guillén que estará incluída en el libro de próxima publicación por el autor de esta tesis y por él mismo: *Dilucidando π. Irracionalidad, trascendencia y cuadratura del círculo en Johann Heinrich Lambert (1728–1777)*, College Publication.

cualquier caso nuestra interpretación es que para los cánones de la época es perfectamente válida, y ciertamente más asequible, aunque estamos del lado de Glaisher cuando dice que la demostración de Lambert «parece ofrecer una prueba más notable y convincente de la verdad de la proposición».[117]

Sí hay, respondiendo a la pregunta planteada en la introducción, una continuidad con respecto a Lambert: la herramienta es la misma, las fracciones continuas, y Legendre hace uso del marco teórico «moderno» según el cual ser algebraico es ser raíz de una ecuación. De hecho Legendre da la primera definición clara y moderna de lo que es un número algebraico.[118] A mayores, la continuidad se ve en el hecho de que Legendre generaliza con su método el resultado de Lambert demostrando la irracionalidad de π^2, algo que de por sí debe tomarse como una ventaja con respecto a la demostración de este último. Esta es una pequeña aportación hacia la «trascendencia» de π en el sentido moderno del término, y así lo veía también Legendre.

Si bien como dice Serfati el siglo XVIII es el siglo de las demostraciones de irracionalidad, no es que podamos decir que es el siglo de la irracionalidad. El interés sobre estas cuestiones, desde un punto de vista que fuese más allá de la búsqueda de aproximaciones cada vez más certeras, es casi inexistente. Las fracciones continuas por otro lado se usaban no para profundizar en la compresión de irracionales especiales, sino para buscar formas de llegar a las raíces de las ecuaciones —principal objetivo del álgebra—, de la manera más rápida y eficaz posible. De hecho, en este sentido las fracciones continuas fueron muy eficaces, y hay pocas dudas sobre el papel que jugaron en la visión del número irracional como definido a través de sucesiones. Hay que enfatizar, sin embargo, que aunque esta visión sea muy atractiva desde un punto de vista moderno, no es la visión de esta época, una época aún embebida en la «ciencia de las cantidades, o la ciencia que busca el medio para medirlas».

Teniendo todo esto en consideración, así como las fechas en las que se empiezan a obtener resultados profundos sobre la naturaleza de los irracionales (resultados de trascendencia, teorías completas), la pregunta que planteábamos en la introducción resulta bastante natural: ¿qué pasó entremedias?

El siglo XIX se abre con un anuncio por parte de Ruffini (1799) cuya repercusión, al menos en teoría, resulta clara en esta historia. Ruffini con su anuncio acerca de la im-

[117] En [Glaisher 1871, p. 12].

[118] Es al menos la primera que hemos encontrado nosotros.

posibilidad de resolver por radicales la quíntica, llama la atención sobre el hecho de que no toda raíz puede ser expresable. El hecho es que la idea de expresabilidad, que se había tomado explícitamente como vara de medir lo algebraico, ya no es suficiente para captar lo que siempre se había considerado como la quinta esencia de lo algebraico: las raíces. Pero el caso es que esto no tuvo ninguna repercusión; ya no solo fue «culpa» del propio trabajo de Ruffini (dificultad, corrección, etc), sino también de los ataques frontales al paradigma clásico que suponía. Seguimos viendo entonces cómo el término algebraico se sigue usando, hasta bien entrado el siglo, como sinónimo de algo expresable, tal y como se extrae del estudio que se incluye en el capítulo 7.[119]

Aunque en gran medida estas pimeras décadas de siglo no supusieron un avance con respecto al anterior, ciertamente sí que se empieza a notar un cambio. El nombre de Lambert empieza a aparecer en documentos históricos como diccionarios o libros de texto en conexión con su demostración de la irracionalidad de π. A mayores, aparecen nuevas demostraciones de irracionalidad como la bella demostración de Fourier recogida en el libro de Stainville sobre el número e (1815),[120] número que gracias al impulso del análisis empieza a tomar protagonismo. En cualquier caso, el objetivo principal parece que era más bien educativo, es decir, el poder llevarlo al aula de las recién reformadas instituciones educativas.[121] El optimismo también se reduce si analizamos, como se ha hecho, el papel de las fracciones continuas. De hecho algunos autores, si bien alababan sus propiedades, se quejaban del poco jugo que se les sacaba, cuyo recorrido en materia de irracionales especiales en la mayoría de los casos no iba más allá de las típicas descripciones de cómo expresar números como π en forma de fracción continua por medio de sus decimales, algo bastante básico (y superado).

Especialmente interesante en la primera mitad de siglo nos han parecido las figuras de Dirichlet y de Liouville, no solo por sus propios trabajos, sino por su enorme influencia. La estancia de Dirichlet en París en los años 20, y su contacto con los principales protagonistas en materia de irracionalidad, nos parece relevante. Téngase en cuenta que entabla contacto cercano con Legendre, Fourier y Lacroix, y que llegado a Breslau decide dedicar su Lección inaugural como profesor al trabajo de Lambert sobre la irracionalidad de π.

[119] Al contrario de lo que parece extraerse de [Serfati 2018, p. 214]: «After Lambert, an *algebraic number* is simply a root of an algebraic equation with rational coefficients (or integers, which is the same)».

[120] Me refiero a [Stainville 1815].

[121] Una nota interesante (que me ha comentado el Prof. José Ferreirós), es que el propio Crelle en su 3ª edición alemana de los *Éléments de Géométrie* (1837), se queja de que una demostración de este estilo no existe para π, siendo deseable por lo tanto la búsqueda de una más sencilla (ver la sección 4.1 para una discusión más detallada sobre dichas demostraciones).

Nos parece más que plausible el conjeturar que el joven Dirichlet se vio influenciado por estos autores a la hora de escoger este tema para su lección. Téngase en cuenta además que el propio Lacroix recogió años después en su libro *Complément des Élémens d'algèbre* (1835), que tiempo atrás Dirichlet le había enviado una nota simplificando la prueba de irracionalidad de las potencias del número e. Esto prueba que al menos en ciertos círculos avanzados estas cuestiones empezaban a interesar, y el ambiente de cambio hacia el rigor que vive este nuevo siglo, explica en cierta medida este interés hacia cuestiones más especulativas, cuestiones que finalmente derivarán en la constitución de teorías completas para el número irracional.

La máxima de Dirichlet de poner conceptos en el lugar de las fórmulas, muy en esta dirección, también la recoge Liouville cuando pone de manifiesto de manera clara la necesidad de cambiar de marco teórico y empezar a tomar las ecuaciones y sus raíces como vara de medir de lo algebraico.[122] De todos modos, a pesar de que algunos autores como Wantzel se suman al cambio, tenemos serias dudas de que este marco teórico, y en concreto la terminología moderna, fuera usado de manera más o menos sistemática hasta las últimas décadas de siglo, siendo en realidad Dedekind con su trabajo, más que otro autor, el que sentase definitivamente este uso.[123] Es en el último capítulo de la tesis, en el capítulo 8, donde se han analizado estas cuestiones.

Pero si el siglo XVIII puede catalogarse como el siglo de las demostraciones de irracionalidad, el siglo XIX sería el de las demostraciones de trascendencia. El ilustre protagonista en este terreno es Liouville, no solo, como se dijo, por su propia aportación, sino por su influencia. Es en torno a los años 1840 que se empieza a ocupar de estas cuestiones, teniendo como objetivo principal demostrar la trascendencia de e, que fue lo que finalmente le llevó a demostrar que ni e ni e^2 son irracionales cuadráticos. Lützen en su libro[124] comenta que Liouville retoma este tema después de su lectura de la correspondencia entre Goldbach y Daniel Bernoulli editada por Fuss, y que será lo que finalmente lo llevaría a su célebre demostración, pero no deja del todo claro si Lambert tuvo algo que ver en ello, más allá de comentar que seguía la idea que el suizo había aplicado en la demostración de la irracionalidad de e y π.[125] Lo que es claro es que la publicación de estos trabajos en su *Journal*, las clases que dio en las que explicaba sus resultados sobre irracionales especiales, y su red de contactos, hizo llegar estos intereses, y probablemente al propio

[122] Me refiero a [Liouville 1837].
[123] Ver [Dedekind 1871] y [Dedekind 1876].
[124] [Lützen 1990].
[125] Desde luego, Liouville conocía su trabajo, si no directamente, al menos indirectamente, y es bastante razonable pensar que también leyó su *Mémoire*.

Lambert, a muchos.

Tal es el caso en primer lugar de Hermite, quien demuestra la trascendencia de e en 1873 (no usa dicho término en este artículo), cerrando el problema que había dejado su maestro, y quien no pierde oportunidad de mostrar su deuda con Lambert: «todo lo que puedo, es rehacer lo que ya ha hecho Lambert, solamente que de otra manera».[126] Y en segundo lugar de Lindemann, quien tras pasar un invierno en París con Hermite realiza la demostración de trascendencia de π (1882), cerrando el problema de la cuadratura del círculo (él sí, usando el término «trascendente»).

Posibles Futuras Líneas de Investigación

El resultado de esta investigación doctoral no pretende, por supuesto, cerrar el tema, y con ese espíritu planteamos a continuación de manera esquemática posibles mejoras que se podrían llevar a cabo en futuras investigaciones:

- Creemos que una biografía detallada de Lambert sería una gran aportación en el campo de la historia de la ciencia en general, aunque adelantamos, como ya se apuntó, que no es un proyecto «apto para cobardes».

- En cuanto al uso de los términos «algebraico» y «trascendente», una buena forma de ver con más detalle cuándo empezaron a usarse con cierta confianza, sería tratar de estudiar como fueron pasando a tratados elementales, a partir, digamos, de los años 40, cuando Liouville propone el cambio de marco teórico comentado más arriba. Esto daría una idea más fiable del desarrollo de estos términos.

- Como se ha expuesto en el último capítulo, en las últimas décadas del siglo XIX empieza a haber una rápida aceptación de los resultados de trascendencia, que incluso se simplifican, dando lugar a nuevas publicaciones. Por otro lado, Siegel comenta en 1949 en su libro *Transcendental Numbers* que el conocimiento que se tiene aún de la trascendencia es demasiado restringido como para hablar de una teoría de los números trascendentes.[127] Sería interesante saber cómo se desarrollaron los acontecimientos desde finales del XIX hasta ese momento, y cuándo puede uno hablar de una teoría de los números trascendentes.

- Por último, hasta donde sabemos no hay una publicación anotada, por lo menos moderna, de las demostraciones de Hermite y Lindemann. Un análisis detallado de las mismas arrojaría luz no solo sobre los propios autores, sino desde un punto de

[126] En [Hermite III 1905–1917, p. 146].

[127] Ver sección 8.4.

vista más global sobre la propia época (métodos, etc). Desde luego creemos que el interés histórico es indudable.

Appendix A

Sobre el retrato de Lambert

Lambert, una persona «con una fisonomía muy particular», nunca quiso que se le hiciese un retrato.[1] Al parecer, Johann III Bernoulli, buen amigo del savant, hizo una caricatura que publicó en 1786 afirmando que guardaba un buen parecido.[2] Dicha caricatura debió ser la base para el retrato de cuerpo entero —parte izquierda de la imagen[3]— diseñado por el pintor alemán y director de la Academia de Arte de Berlín, Daniel Chodowiecki, y que pasaría a ser gravado en Berlín en 1812 por Daniel Berger. El artista Pierre Roch Vigneron agrandó la parte superior de esta estampa para su diseño en conmemoración del centenario del nacimiento de Lambert en 1828, diseño que finalmente pasaría a ser litografiado por el mulhusiano G. Engelmann.[4]

La primera vez que aparece publicada dicha imagen es en 1828 en las actas de la ceremonia celebrada en Mulhouse con motivo del centenario del nacimiento de Lambert.[5] En 1829 aparece reproducida en [Huber et al. 1829], «un volumen que durante todo el siglo XIX será la obra de base sobre Lambert»[6], y es la que hasta hoy se usa en la mayoría de los trabajos sobre el savant (parte derecha de la imagen). En la base de dicha litografía, se incluyen unas líneas en edición facsimilar del propio puño de Lambert que expresan

[1] [Jaquel 1969, p. 302].

[2] [Gray 2007, p. 84 nota 5].

[3] En el *Catalogue général Gallica*. El originial en la *Bibliothèque nationale et universitaire de Strasbourg*.

[4] Ver [Jaquel 1969, p. 302] y [Jaquel 1967/68] (agradezco una vez más la amabilidad de Eliane Michelon de los *Archives de Mulhouse* por haberme facilitado de manera totalmente desinteresada este último trabajo).

[5] *Gedächtnissfeier von Johann Heinrich Lambert begangen in Mühlhausen den 27ten August 1828*, Beschrieben durch Franz Christian Joseph, evangelischen Pfarrer zu Mühlhausen und Sekretär des Lambert'schen Vereins, 1828 (ver [Jaquel 1967/68]).

[6] [Jaquel 1977, p. 5].

«vigorosamente, incluso con elegancia, las convicciones teleológicas del savant»:[7]

> Entre todos los cuerpos de nuestra Tierra, los cuerpos orgánicos son lo que se producen más frecuentemente y más fácilmente... Todo lo que dispone en el mundo de los medios más abundantes debe considerarse como parte de los objetivos de la Creación.

[7][Jaquel 1967/68]. Jaquel transcribe el original alemán y da la traducción en francés, que es la que he usado para la versión en español.

Appendix B

Notas de Andreas Speiser

A continuación se proporciona la traducción de las notas que A. Speiser incluye en su edición del trabajo de Lambert. Las notas a pie de página son aclaraciones hechas por quien escribe estas líneas.

Notas al punto §. 7. [Speiser 1946–1948, p. 115].

1) Original: par.[1] A.S.

2) Original: impar. A.S.

Notas al punto §. 8. [Speiser 1946–1948, p. 116].

1) Las fórmulas deberán ser escritas de la manera siguiente:[2]

$$
\begin{aligned}
R^{4n+1} &= -\frac{2^{4n+1}(1\cdot 2\cdots(4n+1))}{(8n+3)!}v^{4n+2}+\frac{2^{4n+1}(2\cdot 3\cdots(4n+2))}{(8n+5)!}v^{4n+4}-\text{etc.}\\
R^{4n+2} &= -\frac{2^{4n+2}(1\cdot 2\cdots(4n+2))}{(8n+5)!}v^{4n+3}+\frac{2^{4n+2}(2\cdot 3\cdots(4n+3))}{(8n+7)!}v^{4n+5}-\text{etc.}\\
R^{4n+3} &= +\frac{2^{4n+3}(1\cdot 2\cdots(4n+3))}{(8n+7)!}v^{4n+4}-\frac{2^{4n+3}(2\cdot 3\cdots(4n+4))}{(8n+9)!}v^{4n+6}+\text{etc.}
\end{aligned}
$$

A.S.

Notas al punto §. 11. [Speiser 1946–1948, p. 117].

[1] El sentido tanto de esta nota como de la siguiente es que Speiser hace la corrección en el cuerpo principal del texto. Otras veces mantiene la errata y hace la corrección en la nota a pie de página.

[2] Nótese que estas expresiones y las que se ofrecen en este traducción anotada son equivalentes ($4n+1 = m$).

1) En base a las correcciones indicadas en la nota precedente.[3] A.S.

Notas al punto §. 19. [Speiser 1946–1948, p. 122].

1) Edición original aquí y en las fórmulas siguientes:[4] $a^n = \dfrac{1}{(2n+1)w - a^{n+1}}$. Corregido por A.S.

Notas al punto §. 34. [Speiser 1946–1948, p. 131].

1) Edición original:[5]

$$1 \quad + \quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{9\cdot 61} + \frac{1}{61\cdot 540} + \frac{1}{540\cdot 5879} + \\ + \frac{1}{5879\cdot 75587} + \frac{1}{75587\cdot 1147426} + \text{etc.}$$

Corregido por A.S.

Notas al punto §. 55. [Speiser 1946–1948, p. 139].

1) Edición original: racional. Corregido por A.S.

Notas al punto §. 72. [Speiser 1946–1948, p. 144].

[3] La corrección que hace en el cuerpo principal del texto es:

$$\begin{aligned} \pm r^n &= -\frac{2^n \cdot m \cdot (m+1)\cdot(m+2)\cdots\cdot(n+m-1)v^{n+2m-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2n+2m-1)} \\ \pm r^{n+1} &= -\frac{2^{n+1}\cdot m\cdot(m+1)(m+2)\cdots(n+m)v^{n+2m}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2n+2m+1)} \\ \pm r^{n+2} &= -\frac{2^{n+2}\cdot(m-1)\cdot m\cdot(m+1)\cdots(n+m)\cdot v^{n+2m-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2n+2m+1)} \end{aligned}$$

[4] La corrección que hace es:

$$a^n = \frac{1}{(2n+3)w - a^{n+1}}$$

La única diferencia es que Speiser varía la fórmula y mantiene los superíndices y en esta traducción se ha optado por mantener la fórmula de Lambert cambiando los superíndices.

[5] Hay una errata en el texto principal en la que yo no había reparado. Speiser con la lucidez que lo caracteriza da cuenta de él y lo incluye en el cuerpo principal:

$$1 \quad + \quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 61} + \frac{1}{61\cdot 540} + \frac{1}{540\cdot 5879} + \\ + \frac{1}{5879\cdot 75887} + \frac{1}{75887\cdot 1132426} + \&c.$$

1) Aquí, Lambert se equivoca. La fracción siguiente es la de la $\cot v$, mientras que la fracción del final del parágrafo es la de la $\tan v$.[6] A.S.

Notas al punto §. 73. [Speiser 1946–1948, p. 146].

1) Esta fracción se encuentra en la memoria de *Euler* De fractionibus continuis dissertatio,[7] § 30 Ver las Opera Omnia de *Euler*, series I, vol. 14, pg. 210. A.S.

Notas al punto §. 88. [Speiser 1946–1948, p. 157].

1) Se pueden esclarecer los enunciados un poco enigmáticos de este parágrafo de la manera siguiente: La ecuación entre u y v es

$$\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \frac{1}{i}\frac{e^{iv} - e^{-iv}}{e^{iv} + e^{-iv}} \quad \text{o bien} \quad \text{tang.hyp}\, u = \text{tang}\, v$$

Poniendo iv en lugar de u y iu en lugar de v, la ecuación queda igual. Las dos fórmulas

$$\text{tang.hyp}\, u = \text{tang}\, v \qquad y \qquad \text{tang.hyp}\,(iv) = \text{tang}\,(iu)$$

son por lo tanto equivalentes.[8] A.S.

---

[6] Si el lector quiere comprobar que efectivamente esa es la fracción continua de la tangente, no necesita más que comprobar que las convergentes que obtiene son las mismas, algo que verá claro truncando dicha fracción continua de la siguiente forma:

$$\frac{1}{(w-1)+\frac{1}{1}}, \frac{1}{(w-1)+\frac{1}{1+\frac{1}{(3w-2)+\frac{1}{1}}}}, \text{etc.}$$

Si Lambert incluye más convergentes, es porque está truncando dicha fracción continua de la siguiente forma:

$$\frac{1}{w-1}, \frac{1}{(w-1)+\frac{1}{1}}, \frac{1}{(w-1)+\frac{1}{1+\frac{1}{(3w-2)}}}, \frac{1}{(w-1)+\frac{1}{1+\frac{1}{(3w-2)+\frac{1}{1}}}}, \text{etc.}$$

Por otro lado, puesto que:

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}$$

resultará fácil ver cómo pasa de una a otra dado que la tangente y la cotangente son funciones inversas.

[7] Hay traducción al inglés [Euler 1744] (dicha fracción continua aparece concretamente en el punto 30).

[8] Y si estas dos fórmulas son equivalentes, Lambert puede evitar ya tratar con radios imaginarios, tal y como [Barnett 2004, p. 24] comenta que quería hacer.

Appendix C

About Wronski's formula

The path followed by Wronski to get his formula is not new. Actually, it very much remembers to the classical 18th-century procedure, although:

> this traditional maneuver was not welcome among many of Wronski's addressees: the Parisian academy, supporters of Lagrange's algebraic analysis and those involved in the attempts to suppress infinitesimals at the polytechnic. Wronski was obviously aware of the objections that could be raised to his use of actual infinity, and anticipated them in a footnote that promised to deal with them «rigorously» elsewhere.[1]

In any case, a close look at the proof will let us to have a better comprehension of these classical methods.[2]

Wronski begins with a function $\varphi(x)$ such that:[3]

$$x = a^{\varphi(x)}$$

from which he obtains by applying the binomial formula:

$$x^{\frac{1}{m}} = \left[\sqrt[m]{a}\right]^{\varphi(x)} = \left[1 + (\sqrt[m]{a} - 1)\right]^{\varphi(x)} = 1 + \frac{\varphi(x)}{1}(\sqrt[m]{a} - 1) + \frac{\varphi(x)}{1} \cdot \frac{\varphi(x) - 1}{2} \cdot (\sqrt[m]{a} - 1)^2 + \cdots$$

and therefore:

$$x^{\frac{1}{m}} - 1 = \frac{\varphi(x)}{1}(\sqrt[m]{a} - 1) + \frac{\varphi(x)}{1} \cdot \frac{\varphi(x) - 1}{2} \cdot (\sqrt[m]{a} - 1)^2 + \cdots$$

[1] [Wagner 2014]. The author refers to the footnote in [Wronski 1811, p. 11].

[2] See [Wronski 1811, pp. 11, 13, 14, 26]. Also [Wagner 2014].

[3] He writes φx but we will put $\varphi(x)$ for the sake of clarity. This function, by the way, will be nothing but the logarithmic function.

But now «observing that when the arbitrary quantity m is infinitely large the second member of this last equality is reduced to its first term,[4] we will definitely obtain»:[5]

$$\varphi(x) = \frac{x^{\frac{1}{\infty}} - 1}{\sqrt[\infty]{a} - 1}$$

Taking into account that both numerator and denominator are infinitely small quantities, by multiplying them by an infinitely large quantity ∞, we will obtain the same expression with both numerator and denominator finite quantities:

$$\varphi(x) = \frac{\infty \cdot (x^{\frac{1}{\infty}} - 1)}{\infty \cdot (\sqrt[\infty]{a} - 1)}$$

He comments now that between all these functions, the simplest one would be that where the denominator becomes the unity. Wronski represents the concrete value a for which this happens as $a = e$, this concrete number being:

$$\infty \cdot (\sqrt[\infty]{e} - 1) = 1 \Leftrightarrow e = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^{\infty}$$

Therefore this simplest case is nothing but the natural logarithmic function:[6]

$$\log x = \infty \cdot (x^{\frac{1}{\infty}} - 1)$$

From this point, we just have to take into account that:

$$\begin{aligned}
\log\sqrt{-1} = \log\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} &= \log(1+\sqrt{-1}) - \log(1-\sqrt{-1}) \\
&= \infty\left[(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} - 1\right] - \infty\left[(1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} - 1\right] \\
&= \infty\left[(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} - (1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}}\right]
\end{aligned}$$

in order to get the searched formula:

$$\frac{\log\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\infty}{\sqrt{-1}}\left[(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} - (1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}}\right]$$

[4] It is in this point where Wronski opens the aforementioned footnote.

[5] From Wronski's point of view, this expression contains the principle of the whole theory of logarithms; it is the «primitive theoretical expression» of the logarithmic function.

[6] Wronski's notation is Lx.

Appendix D

Echegaray's *Disertaciones matemáticas sobre la cuadratura del círculo*

José Echegaray y Eizaguirre (1832–1916) was an Spanish polimath who developed his intelectual life principally in the second part of the 19th century. Although he was an engineer by training, he devoted a great part of his time to literature, becoming Nobel Prize in Literature (1904), acquiring a high reputation in this time in Spain. He also had a rich career in government, being appointed Minister of Education, of Public Works and of Finance successively between 1867 and 1874. Knowing all this, it is noteworthy that mathematics was, in fact, his greatest interest as he remarked often. Santiago Ramón y Cajal, Nobel Prize in Medicine, would say that «he was, without question, the finest and most exquisitely organized brain of 19-century Spain».[1]

The *Escuela de Ingenieros de Caminos* where Echegaray graduated as the first in his promotion, was at that time, along with the rest of Spanish's *Special Schools in Engineering*, the main school responsable for mathematical education as had happened with France's *Écoles*, upon the model of which Spanish's *Schools* had taken form. This influence is reflected, for instance, in the fact that one of the subjects to be passed by students in order to get into the *Escuela* was «Translate from French», influence that will persist in Echegaray, who will rely to great extent on French authors or French translations.[2]

[1] As for Echegaray I rely heavely on [Sánchez Ron 2004] (quote at p. 602). This paper gave rise to the book of the same author: *José Echegaray (1832-1916) el hombre polifacético. Técnica, ciencia, política y teatro en España* (2016). Fundación Juanelo Turriano.

[2] And actually this influence depended also on France journals, particularly, on Liouville's *Journal*, which is on the other hand reasonable due to its enormous impact. Echegaray probably could not

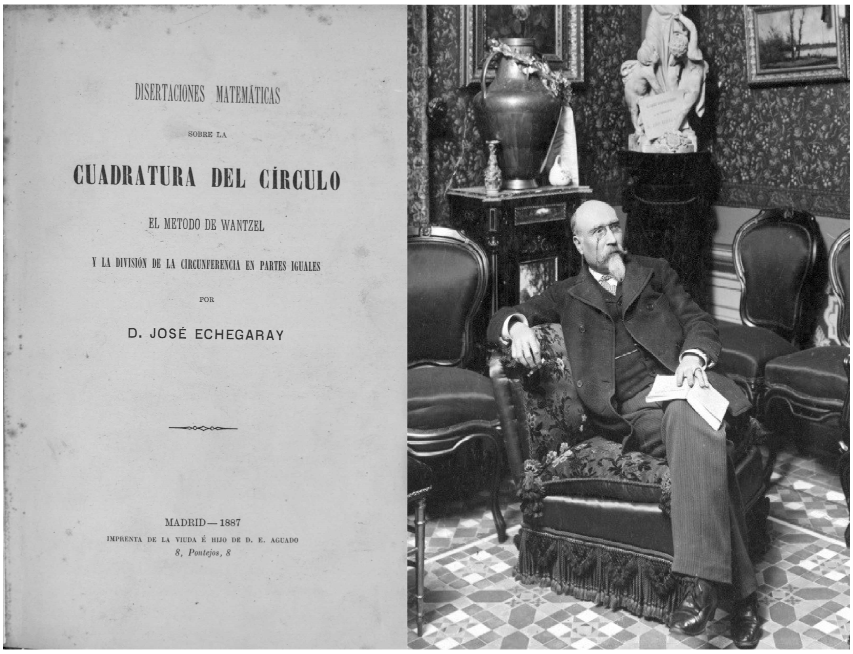


Figure D.1: Echegaray and his book on the circle-squaring problem.

As for mathematics, Echegaray wrote around 1913–1915 in his autobiography *Recuerdos*[3] (3 vol., Madrid):

> Mathematics was and is one of my great interests [...] But the cultivation of High Mathematics does not give enough to live [...] I have never abandoned, not even in the most agitated parts of my life, the science of my predilection: but I have never been devoted myself to it as I had wanted.[4]

Without having been an original mathematician, Echegray was a key figure in the introduction of modern European mathematics into Spain. In this sense he was quite connected with the most groundbreaking investigations carried out abroad, studying Gauss' *D.A.* already in the 1850s, giving lectures about Galois' theory, and producing books on several topics ranging from mathematical physics to pure mathematics, his favorite branch.[5]

One of these books was *Disertaciones matemáticas sobre la cuadratura del círculo*[6] with

read German ([Sánchez Ron 2004, p. 668]), so that Crell's *Journal* might have little to do with his mathematical formation.

[3] *Remembrances.*

[4] Quoted in [Sánchez Ron 2004, p. 613].

[5] See [Sánchez Ron 2004, pp. 604, 610, 614–615].

[6] *Mathematical dissertations about the circle-squaring problem.*

subtitle *Wantzel's method and the division of the circumference into equal parts* (1887), the first chapter of which —*About the impossibility of squaring the circle*— had been published in 1886. This means that Echegaray was presenting a didactical approach to the circle-squaring problem just four years after its solution, which additionaly shows the inmediate influence of this problem we commented elsewhere, being the first introduction of this topic in Spain.

Echegaray did not have access to Lindemann's orignial proof as he himself lamented, having heard of Lindemann's investigation by means of Rouché and Comberousse's *Traité de géométrie élémentaire* (Vol. 1, 5th edition). Echegaray quotes the brief outline to this long-standing problem given by these two authors —in which, by the way, they make reference to both Lambert's proof of the irrationality of π and Legendre's proof or the irrationality of π^2— at the end of which he comments that he aspires to the same objective, namely, to expose Hermite's formulae and theorems, and Lindemann's demonstration. The outcome of this aspiration is a book divided principally into three main parts, gathering together the most recent investigations around this subject:

- *About the impossibility of squaring the circle* [Echegaray 1887, pp. 1–49], where Echegaray upon presenting the needed mathematical scafolding (mainly Hermite's formulae and theorems), closes this part with Lindemann's theorem and the impossibility of squaring the circle.

- *Wantzel's method in order to figure out if a problem can be solved by the straight line and circle method* [Echegaray 1887, pp. 50–96], ending with the impossibility of both the problem of doubling the cube and trisecting an angle.

- *Division of the circumference into equal parts* [Echegaray 1887, pp. 97–149], following Gauss' achievements in the celebrated last part of D.A., the one that had been immediately admired by mathematicians all over Europe.

Bibliography

[Aarsleff 1989] Aarsleff, H. (1989). The Berlin Academy under Frederick the Great. *History of the Human Sciences*, Vol. 2, No. 2, pp. 193–206.

[Abardia et al. 2012] Abardia, J., Reventós, A., Rodríguez, C. J. (2012). What did Gauss read in the Appendix? *Historia Mathematica*, Vol. 39, Num. 3, pp. 292–323.

[Alexander 2006] Alexander, A. (2006). Tragic Mathematics: Romantic Narratives and the Refounding of Mathematics in the Early Nineteenth Century. *Isis*, 97(4), pp. 714–726.

[Andersen 2007] Andersen, K. (2007). *The geometry of an art: the history of the mathematical theory of perspective from Alberti to Monge*. New York: Springer.

[Arthur 1999] Arthur, R. (1999). The transcendentality of π (pi) and Leibniz's philosophy of mathematics. *Proceedings of the Canadian Society for History and Philosophy of Mathematics*, Vol. 12, pp. 13–19.

[Ayoub 1980] Ayoub, R. (1980). Paolo Ruffini's contributions to the quintic. *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 23 (3), pp. 253–277.

[Baltus 2003] Baltus, C. (2003). Continued Fractions and the first proofs that pi is irrational. *Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions*, Vol. XI, pp. 5–24.

[Barlow 1814] Barlow, P. (1814). *A new mathematical and philosophical dictionary: comprising an explanation of terms and principles of pure and mixed mathematics, and such branches of natural philosophy as are susceptible of mathematical investigation. With historical sketches of the rise, progress and present state of the several departments of these sciences, and an account of the discoveries and writings of the most celebrated authors, both ancient and modern.* London: G. and S. Robinson [etc].

[Barnett 2004] Barnett, J. H. (2004). Enter, stage center: the early drama of the hyperbolic functions. *Mathematics magazine*, Vol. 77, Num. 1, pp. 15–30.

[Beckmann 1971] Beckmann, P. (1971). *A history of* π. New York: Dorset Press.

[Begehr et al. 1998] Begehr, H. G. W.,Koch, H.,Kramer, J., Schappacher, N., Thiele, E.-J. (eds.) (1998). *Mathematics in Berlin.* Berlin: Birkhäuser.

[Belhoste 1991] Belhoste, B. (1991). *Augustin-Louis Cauchy. A biography.* Translated by Frank Ragland. New York: Springer.

[Bergin 2001] Bergin, J. (eds.) (2001). *The seventeenth century: Europe 1598-1715.* Oxford: Oxford University Press. References to the Spanish translation: Bergin, J. (ed.) (2002). *El siglo XVII: Europa 1598-1715.* Traducido por Antonio Desmonts. Barcelona: Crítica.

[Berggren 1997] Berggren, L., Borwein, J., Borwein, P. (eds.) (1997). *Pi: A source book.* New York: Springer.

[Bermúdez 2009] Bermúdez, C. G. (2009). *Georg Cantor. Sistemas de números y conjuntos.* Universidad de A Coruña.

[Bernoulli 1771] Bernoulli, J. (1771). Sur les fractions décimales périodiques. *Nouveax Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlín*, pp. 273–337.

[Blanning 2000] Blanning, T. C. W. (eds.) (2000). *The eighteenth century: Europe 1688-1815.* Oxford: Oxford University Press. References to the Spanish translation: Blanning, T. C. W. (eds.) (2002). *El siglo XVIII: Europa 1688-1815.* Traducido por Omar Rodríguez. Barcelona: Crítica.

[Blasjo 2017] Blasjo, V. (2017). *Transcendental Curves in the Leibnizian Calculus.* Amsterdam: Academic Press.

[Bokhove et al. 2020] Bokhove N. W.; Emmel A. (2020). *Johann Heinrich Lambert. Philosophische Schriften. Supplement: Johann Heinrich Lamberts Monatsbuch. Teilband 2.* Hildesheim, Zürich, New York: Olms 2020.

[Bölling 1997] Bölling, R. (1997). Georg Cantor - Ausgewählte Aspekte seiner Biographie. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 99: pp. 49–82.

[Bopp 1924] Bopp, K. (1924). *Leonhard Eulers und Heinrich Lamberts Briefwechsel aus den manuskripten herausgegeben.* Aus den Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-Math. Klasse, Nr. 2, Berlin.

[Bos 2001] Bos, H. J. M. (2001). *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction.* New York: Springer.

[Bossut I 1800] Bossut, C. (1800). *Cours de mathématiques. Tome 1. Nouvelle édition revue et augmentée*. F. Didot (Paris).

[Bossut II 1800] Bossut, C. (1800). *Cours de mathématiques. Tome 2. Nouvelle édition revue et augmentée*. F. Didot (Paris).

[Bossut II 1810] Bossut, C. (1810). *Histoire générale des mathématiques, depuis leur origine jusqu'à l'année 1808. Tome 2*. F. Louis (Paris).

[Boyer 1968] Boyer, C. (1968). *A History of Mathematics*. New York: Wiley International Edition.

[Brezinski 1991] Brezinski, C. (1991). *History of Continued Fractions and Padé Approximants*. Berlin: Springer.

[Bullynck 2008/2009] Bullynck, M (2008/2009). Johann Heinrich Lambert (1728-1777) Collected Works - Sämtliche Werke Online. http://www.kuttaka.org/~JHL/JHLHistory.html.

[Bullynck 2009] Bullynck, M (2009). Decimal Periods and their Tables: A German Research Topic (1765-1801). *Historia Mathematica*, 36 (2), pp.137-160.

[Cajori 1893] Cajori, F. (1893). *A History of Mathematics*. London: Macmillan.

[Cajori 1918] Cajori, F (1918). Pierre Laurent Wantzel. *Bulletin of the American Mathematical Society*, Volume 24, Number 7, pp. 339–347.

[Cajori 1927] Cajori, F (1927). Frederick the Great on Mathematics and Mathematicians. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 34, No. 3, pp. 122–130.

[Calcut 2006] Calcut, J. S. (2006). Rationality of the Tangent Function. *http://www2.oberlin.edu/faculty/jcalcut/tanpap.pdf*.

[Calinger 2016] Calinger, R. S. (2016). *Leonhard Euler: mathematical genius in the Enlightenment*. Princeton: Princeton University Press.

[Cantor IV 1908] Cantor, M. (1908). *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Vierter Band*. Leipzig B.G. Teubner.

[Cauchy 1821] Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*. [Paris] Imprimerie royale. References to the English translation: Bradley, R. E., Sandifer, C. E. (2009). *Cauchy's Cours d'analyse*. New York: Springer.

[Chrystal I 1904] Chrystal, G. (1904). *Algebra: an elementary text-book for the higher classes of secondary schools and for colleges, Part I, Fifth edition*. London: A. & C. Black.

[Chrystal II 1906] Chrystal, G. (1906). *Algebra: an elementary text-book for the higher classes of secondary schools and for colleges, Part II, Second edition*. London: A. & C. Black.

[Clerke 2004] Clerke, A. M. (2004). Barlow, Peter (1776–1862), mathematician and physicist (revised by Iwan Rhys Morus). *Oxford Dictionary of National Biography*, http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/DNB/Barlow.html (in MacTutor).

[Condillac 1798] Étienne Bonnot de Condillac (1798). *Oeuvres de Condillac. Vol. 23, revues, corrigées par l'auteur, imprimées sur ses manuscrits autographes et augmentées de la Langue des calculs, ouvrage posthume (publ. par G. Arnoux et Mousnier)*. De l'imprimerie de Ch. Houel (Paris).

[Cretney 2014] Cretney, R. (2014). The origins of Euler's early work on continued fractions. *Historia Mathematica*, 41 (2), pp.139-156.

[Crippa 2014] Crippa, D. (2014). *Impossibility results: from geometry to analysis*. Doctorat en Epistémologie et Histoire des Sciences, Universite Paris Diderot.

[Crippa 2016] Crippa, D. (2016). James Gregory y las pruebas de imposibilidad en geometría. Conferencia: *6º Workshop de Sevilla sobre Filosofía de las Matemáticas.*

[Dasaratha et al. 2014] Dasaratha, K., Flapan, L., Garrity, T., Lee, C., Mihaila, C., Neumann-Chun, N., Peluse, S., Stoffregen, M. (2014). Cubic irrationals and periodicity via a family of multi-dimensional continued fraction algorithms. *Monatshefte für Mathematik*, Vol. 174 (4), pp. 549–566.

[Dedekind 1871] Dedekind (1871). *Ueber die Composition der binären quadratischen Formen*. In: Dedekind, R. (ed.). *Vorlesungen über Zahlentheorie von P.G. Lejeune Dirichlet; herausgegeben, und mit zusätzen Versehen, von R. Dedekind*. Braunschweig: Vieweg.

[Dedekind 1872] Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und irrationale zahlen*. Braunschweig: F. Vieweg und sohn. References to the Spanish translation: Dedekind, R. (2014). *¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática, Richard Dedekind*. Edición e introducción a cargo de José Ferreirós. Madrid: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid. Alianza Editorial.

[Dedekind 1876] DEDEKIND, R. (1876). Sur la théorie des nombres entiers algébriques. *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques.* Tome 11, pp. 278–288. References to the English translation: Stillwell, J. (1996). *Theory of Algebraic Integers.* Cambridge: Cambridge University.

[Dirichlet 1889–1897] LEJEUNE DIRICHLET, P. G. (1889–1897). *G. Lejeune Dirichlet's Werke.* Berlin: Reimer. ETH-Bibliothek Zürich, Rar 1513, https://doi.org/10.3931/e-rara-17606/Public Domain Mark.

[Domingues 2008] DOMINGUES, J. C. (2008). *Lacroix and the calculus.* Basel: Birkhäuser.

[Dou 1970] DOU, A. (1970). Logical and historical remarks on Saccheri's Geometry. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Num. 4, pp. 385–415.

[Dou 1992] DOU, A. (1992). Orígenes de la geometría no euclídea: Saccheri, Lambert y Taurinus. *Historia de la Matemática en el siglo XIX (1ª parte)*, pp. 43–63.

[Doublet 1914] DOUBLET, M. E. (1914). L'abbé Bossut. *Bulletin des sciences mathématiques*, 2nd ser., 38, pp. 93–96, 121–125, 158–160, 186–190, 220–224.

[Dugac 1970] DUGAC, P. (1970). Charles Méray (1835-1911) et la notion de limite. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, Tome 23, nº 4, pp. 333–350.

[Ebbinghaus et al. 1988] EBBINGHAUS, H. D., HERMES, H., HIRZEBRUCH, F., KOECHER, M., MAINZER, K., NEUKIRCH, J., PRESTEL, A., REMMERT, R. (1988). *Zahlen* (2nd edition). References to the English translation(1995): *Numbers.* New York: Springer.

[Echegaray 1887] ECHEGARAY, J. (1887). *Disertaciones matemáticas sobre la cuadratura del círculo. El método de Wantzel y la división de la circunferencia en partes iguales.* Madrid: Imprenta de la viuda é hijo de D. E. Aguado.

[Elías 2017] GUILLÉN, E. F. (2017). *The Germanic Development of the Pre-Modern Notion of Number. From c. 1750 to Bolzano's* Rein analytischer Beweis. PhD, Universidad de Salamanca.

[Elstrodt 2007] ELSTRODT, J. (2007). The Life and Work of Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859). In: Duke, W., Tschinkel, Y. (eds.) (2007). *Analytic number theory: A tribute to Gauss and Dirichlet.* (Clay mathematics proceedings; Vol. v. 7). Providence, R.I: American Mathematical Society, pp. 1–37.

[Engel et al. 1895] Engel, F., Stäckel, P. (1895). *Die theorie der parallellinien von Euklid bis auf Gauss: eine urkundensammlung zur vorgeschichte der nichteuklidischen geometrie*. Leipzig: B.G. Teubner.

[Español et al. 2008] Español, L., Fernández Moral, E. (2008). Euler, Rey Pastor y la sumabilidad de series. *Quaderns D'Història De L'Enginyeria*, Vol. IX, pp. 183–203.

[Esquisabel 2006] Esquisabel, O. M. (2006). Lambert. Representación, conocimiento simbólico y diagramas lineales. *Representaciones. Revista de Estudios sobre Representaciones en Arte, Ciencia y Filosofía*, Vol. 2(2), pp. 61–87.

[Euler 1744] Euler, L. (1744). De fractionibus continuis dissertatio. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*. Volume 9, pp. 98–137. References to the English translation: Wyman, M. F., Wyman, B. F. (1985). An Essay on Continued Fractions. *Math. Systems Theory*, Num. 18, pp. 295–328.

[Euler I 1748] Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum, Tomus primus*. Lausannæ. References to the English translation: Euler, L. (1988). *Introduction to analysis of the infinite, Book I*. Translated by John D. Blanton. Berlin: Springer.

[Euler II 1748] Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum, Tomus secundus*. Lausannæ. References to the English translation: Euler, L. (1989). *Introduction to analysis of the infinite, Book II*. Translated by John D. Blanton. Berlin: Springer.

[Euler 1770] Euler, L. (1770). *Vollständige Anleitung zur Algebra*. St. Petersburg: Kayserliche Akademie der Wissenschaften. References to the English translation: Euler, L. (1822). *Elements of algebra, by Leonard Euler. Translated from the French, with the critical and historical notes of M. Bernoulli. To which are added the additions of M. de la Grange*. Third edition. Translated by John Hewlett. London: printed for J. Johnson.

[Euler 1785] Euler, L. (1785). De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda. *Opuscula Analytica 2*, pp. 91–101. References to the English translation: Euler, L. (2010). On Establishing a Relationship Among Three or More Quantities. Translated into English by Geoff Smith. http://eulerarchive.maa.org/.

[Fauvel et al. 1987] Fauvel, J., Gray, J. (1987). *The history of mathematics: a reader*. Basingstoke: Macmillan.

[Fauvel et al. 2014] Fauvel, J., Flood, R., Wilson, R. (2014). *Oxford figures: eight centuries of the mathematical sciences*. Second edition. Oxford: Oxford University Press.

[Ferreirós 1995] Ferreirós, J. (1995). De la "Naturlehr" a la física: factores epistemológicos y factores socioculturales en el nacimiento de una disciplina científica. *Arbor*, pp. 9–61.

[Ferreirós 2006] Ferreirós, J. (2006). *Georg Cantor. Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta.* Barcelona: Crítica.

[Ferreirós 2007 a] Ferreirós, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics*, (2nd revised edition). Basel: Birkhäuser.

[Ferreirós 2007 b] Ferreirós, J. (2007). 'O $\Theta\varepsilon o\zeta$ $\mathrm{A}\rho\iota\theta\mu\eta\tau\iota'\zeta\varepsilon\iota$: The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss. In: Goldstein C.; Schappacher N.; Schwermer J. (eds). *The shaping of arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae.* Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 235–268.

[Ferreirós 2015] Ferreirós, J. (2015). *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices.* Princeton University Press.

[Flood et al. 2011] Flood, R., Rice, A., Wilson, R. (2011). *Mathematics in Victorian Britain.* Oxford: Oxford University Press.

[Fraser 2003] Fraser, C. (2003). *Mathematics.* In: Roy Porter (Ed.). *The Cambridge History of Science. Volume 4. Eighteenth-century Science.* Cambridge: Cambridge University Press, pp. 305–327.

[Fritsch 1984] Fritsch, R. (1984). The transcendence of π has been known for about a century - but who was the man who discovered it? *Results in Mathematics.* Volume 7, Issue 2, pp. 164–183.

[García 2004] García, A. (2004). Un best-seller del siglo XIX: Los Elementos de Geometría de Legendre. *Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, Volumen 1, pp. 357–368.

[Glaisher 1871] Glaisher, J. W. L. (1871). On Lambert's Proof of the Irrationality of π, and on the Irrationality of certain other Quantities. *Report of the British Association for the Advancement of Science, 41st. Meeting, Edinburgh*, pp. 12–16.

[Grattan-Guinness 1994] Grattan-Guinness, I. (ed.) (1994). *Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences*, London: Routledge.

[Grattan-Guinness 2005] Grattan-Guinness, I. (2005). The *Ecole Polytechnique*, 1794–1850: Differences over Educational Purpose and Teaching Practice. *The American Mathematical Monthly*, 112:3, pp. 233-250.

[Gray et al. 1978] Gray, J. J., Tilling, L. (1978). Johann Heinrich Lambert. *Historia Mathematica*, Num. 5, pp. 13–41.

[Gray 2007] Gray, J. (2007). *Worlds out of nothing. A course in the history of geometry in the 19th century*. London: Springer.

[Gray 2018] Gray, J. (2018). *A history of abstract algebra. From algebraic equations to modern algebra*, Cham, Switzerland: Springer.

[Guicciardini 2007] Guicciardini, N. (2007). La época del punto: El legado matemático de Newton en el siglo XVIII. *Estud. filos.*, Num. 35, pp. 67–109.

[Guillén 2017] Guillén, E. F. (2017). *The Germanic Development of the Pre-Modern Notion of Number. From c. 1750 to Bolzano's* Rein analytischer Beweis. PhD, Universidad de Salamanca.

[Hairer et al. 2008] Hairer, E., Wanner, G. (2008). *Analysis by Its History*. New York: Springer.

[Hankins 1988] Hankins, T. L. (1985). *Science and the Enlightenment*. Cambridge; New York: Cambridge University Press. References to the Spanish translation: Hankins, T. L. (1988). *Ciencia e Ilustración*. Traducción de Alfredo Messa Giró. Madrid: Siglo veintinuo de España editores, s.a.

[Heath II 1908] Heath, T. (1908). *The thirteen books of Euclid's Elements. Translated from the text of Heiberg, Vol II, Books III–IX*. Cambridge, The University Press.

[Hermann 1988] Hermann, U. (1988). Educación y formación durante la Ilustración en Alemania. *Rev. Educ.*, Num. extra 1, pp. 119–132.

[Hermite I 1905–1917] Hermite, C. (1905–1917). *Oeuvres de Charles Hermite publiées sous les auspices de l'Académie des sciences, par Émile Picard, Vol. 1*. Paris: Gauthier-Villars.

[Hermite III 1905–1917] Hermite, C. (1905–1917). *Oeuvres de Charles Hermite publiées sous les auspices de l'Académie des sciences, par Émile Picard, Vol. 3*. Paris: Gauthier-Villars.

[Hintikka et al. 2019] Hintikka, J. J.; Spade, P. V. (2019). History of logic. *Encyclopædia Britannica, inc.* https://www.britannica.com/topic/history-of-logic.

[Hobson 1913] Hobson, E. W. (1913). *"Squaring the circle". A history of the problem*. Cambridge University Press.

[Hogendijk 2010] Hogendijk, Jan P. (2010). The scholar and the fencing master: The exchanges between Joseph Justus Scaliger and Ludolph van Ceulen on the circle quadrature (1594-1596). *Historia Mathematica*, Vol. 37, pp. 345–375.

[Holcroft Vol. 11 1789] Holcroft, T. (1789). *Posthumous works of Frederic II. King of Prussia, Vol.11. Letters between Frederick II and M. D'Alembert.* Translated from the french by Thomas Holcroft, London: Printed for G.G.J. and J. Robinson.

[Holcroft Vol. 12 1789] Holcroft, T. (1789). *Posthumous works of Frederic II. King of Prussia, Vol.12. Letters between Frederick II and Mess. D'Alembert, De Condorcet, Grimm and D'Arget.* Translated from the french by Thomas Holcroft, London: Printed for G.G.J. and J. Robinson.

[Hormigón 1994] Hormigón, M. (1994). *Las Matemáticas en el siglo XVIII.* Madrid: Ed. Akal.

[Huber et al. 1829] Huber, D., Graf, M., Erhardt, S. (1829). *Johann Heinrich Lambert, nach seinem leben und wirken, aus anlass der zu seinem andenken begangenen secularfeier in drei abhandlungen dargestellt.* Basel.

[Hutton I 1796] Hutton, C. (1796). *A mathematical and philosophical dictionary Volume 1.* London: Printed by J. Davis, for J. Johnson; and G. G. and J. Robinson.

[Hutton II 1796] Hutton, C. (1796). *A mathematical and philosophical dictionary Volume 2.* London: Printed by J. Davis, for J. Johnson; and G. G. and J. Robinson.

[Hutton 1815] Hutton, C. (1815). *A philosophical and mathematical dictionary.* New ed. with additions. London.

[Jacobi 1881–1891] Jacobi, C. G. J. (1881–1891). *Gesammelte werke.* Berlin: G. Reimer.

[Jacobs 2014] Jacobs, B. (2014). *On Hermite's Algorith.* Bachelor Thesis, Department of Mathematics, Utrecht University.

[Jahnke 1993] Jahnke, H. N. (1993). Algebraic Analysis in Germany, 1780-1840: Some Mathematical and Philosophical Issues. *Historia Mathematica*, Vol. 20(3), pp. 265–284.

[James 2002] James, I. (2002). *Remarkable Mathematicians. From Euler to von Neumann.* Cambridge: Cambridge University Press.

[Jaquel 1967/68] Jaquel, R. (1967/68). Légende du portrait de Lambert de 1828. *Bulletin des professeurs du lycée d'Etat de garçons de Mulhouse*, n° 4, 1967/68, pp. 79–80.

[Jaquel 1969] Jaquel, R. (1969). Vers les Oeuvres complètes du savant et philosophe J.-H. Lambert (1728-1777): velléités et réalisations depuis deux siècles. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, tome 22, n° 4, pp. 285–302.

[Jaquel 1973] Jaquel, R. (1973). Le problème nuancé de la Nationalité du «Leibniz alsacien» Jean-Henri Lambert (1728-1777). *Extrait du Bulletin du Musée historique de Mulhouse*, tome CXXXI, pp. 81–109.

[Jaquel 1977] Jaquel, R. (1977). *Le savant et philosophe mulhousien Jean-Henri Lambert (1728–1777). Etudes critiques et documentaires.* Paris: Éditions Ophrys.

[Juhel 2009] Juhel, A. (2009). Lambert et l'irrationalité de π (1761). *Bibnum [En ligne]*: http://journals.openedition.org/bibnum/651.

[Katz 2008] Katz, V. J. (2008). *A History of Mathematics. An Introduction* (3rd edition). Boston, Mass.; London: Addison-Wesley

[Kindleberger 2006] Kindleberger, C. P. (2006). *A financial history of Western Europe.* London: Routledge.

[Klein 1983] Klein, M. (1983). Euler and Infinite Serie. *Mathematics Magazine*, Vol. 56, pp. 307–314.

[Kleiner 2007] Kleiner, I. (2007). *A History of Abstract Algebra.* Basel: Birkhäuser.

[Klemme et al. 2016] Klemme, H., Kuehn, M. (eds.) (2016). *The Bloomsbury dictionary of eighteenth-century German philosophers.* New York: Bloomsbury Publishing Plc.

[Klügel I 1803] Klügel, G. S. (1803). *Mathematisches Wörterbuch; oder, Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik mit den nöthigen beweisen und literarischen nachrichten Begleitet in alphabetischer ordnung Vol. 1.* Leipzig: E.B. Schwickert.

[Klügel II 1805] Klügel, G. S. (1805). *Mathematisches Wörterbuch; oder, Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik mit den nöthigen beweisen und literarischen nachrichten Begleitet in alphabetischer ordnung Vol. 2.* Leipzig: E.B. Schwickert.

[Klügel III 1808] Klügel, G. S. (1808). *Mathematisches Wörterbuch; oder, Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik mit den nöthigen beweisen und literarischen nachrichten Begleitet in alphabetischer ordnung Vol. 3.* Leipzig: E.B. Schwickert.

[Klügel IV 1823] Klügel, G. S. (1823). *Mathematisches Wörterbuch; oder, Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik mit den nöthigen beweisen und literarischen nachrichten Begleitet in alphabetischer ordnung Vol. 4.* Leipzig: E.B. Schwickert.

[Knobloch 2006] Knobloch, E. (2006). Beyond Cartesian limits: Leibniz's passage from algebraic to "transcendental" mathematics. *Historia Mathematica*, Vol. 33, pp. 113–131.

[Kronecker (ed.) I 1889] Kronecker, L. (1889). *G. Lejeune Dirichlet's Werke.* Band 1. Berlin: Druck und verlag von Georg Reimer (Berlin)

[Kvasz 2006] Kvasz, L. (2006). The History of Algebra and the Development of the Form of its Language. *Philosophia Mathematica*, Volume 14, Issue 3, pp. 287–317.

[Lacroix II 1801] Lacroix, S-F (1801). *Complément des Élémens d'algèbre: à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations. Deuxième édition revue et corrigée.* Duprat (Paris).

[Lacroix VI 1835] Lacroix, S-F (1835). *Complément des Élémens d'algèbre: à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations (6e édition).* Bachelier (Paris).

[Lagrange II 1867] Lagrange, J. L. (1867). *Oeuvres de Lagrange T. 2.* Gauthier-Villars (Paris).

[Lalanne 1882] Lalanne, L. (1882). *Oeuvres de Lagrange: t.13 Correspondance inédite de Lagrange et d'Alembert, publiée d'après les manuscrits autographes et annotée par L. Lalanne.* Paris: Gauthier-Villars.

[Lambert 1755] Lambert, J. H. (1755). Tentamen de vi caloris, que corpora dilatat ejusque dimensione. *Acta Helveticae physico-mathematico-anatomico-botanico-medica*, Band II, pp. 172–242.

[Lambert 1758] Lambert, J. H. (1758). *Les propriétés remarquables de la route de la lumière par les airs et en général par plusieurs milieux réfringens, sphériques et concentriques.* La Haye.

[Lambert 1759] LAMBERT, J. H. (1759). *Die Freye Perspective, Oder Anweisung, Jeden Perspektivischen Aufriss Von Freyen Stucken Und Ohne Grundriss Zu verfertigen.* Zürich.

[Lambert 1760] LAMBERT, J. H. (1760). *Photometria sive de mensure et gradibus luminis colorum et umbra.* Basel.

[Lambert 1761a] LAMBERT, J. H. (1761). *Insigniores orbitae cometarum proprietates.* Augsburg.

[Lambert 1761b] LAMBERT, J. H. (1761). *Cosmologische Briefe über die Einrichtung des Weltbaues.* Augsburg.

[Lambert 1761/1768] LAMBERT, J. H. (1761/1768). Mémoires sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes, circulaires et logarithmiques. *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Berlin*, pp. 265–322.

[Lambert 1764] LAMBERT, J. H. (1764). *Neues Organon oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichung des Wahren und dessen Unterscheidung vom Irrthum und Schein*, 2 Bände. Leipzig.

[Lambert 1765] LAMBERT, J. H. (1765/1767). Discours du M. Lambert. *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Berlin.* pp. 506–514. References to the Spanish translation: Arana, J. (1993). Discurso sobre la física experimental natural. Johann Heinrich Lambert. Traducción e introducción de Juan Arana. *Thémata Revista de Filosofía*, Num. 11, 1993, pp. 199–215.

[Lambert 1766/1770] LAMBERT, J. H. (1766/1770). Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung II. *Berlin, Band II in zwei Theilen*, 1766/1770.

[Lambert 1766/1786] LAMBERT, J. H. (1766/1786). Theorie der Parallel-Linien. *Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik, Band I*, pp. 137–164; 325–358.

[Lambert 1768/1770] LAMBERT, J. H. (1768/1770). Observations trigonométriques. *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Berlin*, pp. 327–354.

[Lambert 1779] LAMBERT, J. H. (1779). *Pyrometrie oder vom Maaße des Feuers und der Wärme.* Berlin.

[Legendre I 1794] LEGENDRE, A. M. (1794). *Éléments de géométrie, avec des notes*, (1st edition). F. Didot (Paris).

[Legendre II 1830] LEGENDRE, A. M. (1830). *Elements of geometry and trigonometry; with notes.* Translated from the French of A.M. Legendre, by David Brewster. Second Edition. New-York: White, Gallaher & White; Collins & Hannay; and James Ryan.

[Lemmermeyer et al. I 2015] LEMMERMEYER, F., MATTMULLER, M. (eds.) (2015). *Correspondence of Leonhard Euler with Christian Goldbach: Volume 1.* Basel: Springer.

[Lemmermeyer et al. II 2015] LEMMERMEYER, F., MATTMULLER, M. (2015). *Correspondence of Leonhard Euler with Christian Goldbach: Volume 2.* Basel: Springer.

[Lindemann 1882 a] LINDEMANN, F. (1882). Über die Zahl π. *Mathematische Annalen*, pp. 213–225.

[Lindemann 1882 b] LINDEMANN, F. (1882). Sur le rapport de la circonjerence au diametre, et sur les logarithmes neperiens des nombres commensurables ou des irrationnelles algebriques (Extrait d'une Lettre adressee a M. Hermite). *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, T. 95, pp. 72–74.

[Liouville 1837] LIOUVILLE, J. (1837). Mémoire sur la classification des transcendantes, et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1er série, Tome 2, pp. 56–104.

[Liouville 1851] LIOUVILLE, J. (1851). Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1er série, Tome 16, pp. 133–142.

[Lützen 1990] LÜTZEN, J. (1990). *Joseph Liouville 1809-1882: Master of Pure and Applied Mathematics.* New York: Springer.

[Lützen 2009] LÜTZEN, J. (2009). Why was Wantzel overlooked for a century? The changing importance of an impossibility result. *Historia Mathematica*, Vol. 36, pp. 374–394.

[Mahoney 2000] MAHONEY, M. (2000). *The mathematical realm of nature.* In: D. Garber & M. Ayers (Eds.). *The Cambridge History of Seventeenth-Century Philosophy.* Cambridge: Cambridge University Press.

[Maor 1994] MAOR, E. (1994). *e: The Story of a Number.* Princeton University Press.

[Maor 2013] MAOR, E. (2013). *Trigonometric delights.* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

[Martín et al. 2007] MARTÍN, D., MENÉNDEZ, R. (2007). La Objetividad en el Romanticismo: El Empirismo Imaginativo en J.H.Lambert y en J.W.Ritter. *Llull*, vol. 30, pp. 295–318.

[Méray 1869] MÉRAY, C. (1869). Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données. *Revue des sociétés savantes*, 2e série, 4, Paris, pp. 280–289.

[Merzbach 2018] MERZBACH, U. C. (2018). *Dirichlet. A Mathematical Biography.* Birkhäuser Basel.

[Michaud et al. XXIII 1819] MICHAUD, J. FR.; MICHAUD, L. G. (EDS); ÉVERAT (PRINTER). (1819). *Biographie Universelle, Ancienne Et Moderne, Ou Histoire, Par Ordre Alphabétique, De La Vie Publique Et Privée De Tous Les Hommes Qui Se Sont Fait Remarquer Par Leurs écrits, Leurs Actions, Leurs Talents, Leurs Vertus Ou Leurs Crimes.: Ouvrage Entièrement Neuf.* Paris and Leipzig.

[Mieg 1939] MIEG, P. (1939). Les origines de la famille Lambert de Mulhouse. *Bulletin de la Société d'Histoire et de Sciences Naturelles de Mulhouse*, N° 4, pp. 26–30.

[Molk 1909] MOLK, J. (1909). Nombres irrationnels et notion de limite: exposé, d'aprés l'article allemand de A. Pringsheim (1898). *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Vol. 1, part. 3, Paris, pp. 133–208.

[Montesinos 2011–2012] MONTESINOS, J. (2011–2012). Hobbes y la cuadratura del círculo. *Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia*, pp. 471–495.

[Montferrier I 1835] MONTFERRIER, A. A. (1835). *Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées, Volume 2.* Paris: Dénain et Delamare.

[Montferrier II 1836] MONTFERRIER, A. A. (1836). *Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées, Volume 2.* Paris: Dénain et Delamare.

[Montucla III 1802] MONTUCLA, J. E. (1802). *Histoire des mathématiques, T. 3 (Nouvelle édition).* H. Agasse (Paris).

[Montucla IV 1802] MONTUCLA, J. E. (1802). *Histoire des mathématiques, T. 4 (Nouvelle édition).* H. Agasse (Paris).

[Montucla 1831] MONTUCLA, J. E. (1831). *Histoire des Recherches sur la cuadratura du cercle, avec une addition concernant les problèmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle (Nouvelle édition revue et corrigée).* Paris: Bachelier père et fils.

[Newton 1720] NEWTON, I. (1720). *Universal Arithmetick*. trans. Raphson, London.

[Oberle 1985] OBERLE, R. (1985). Un tricentenaire: la Révocation de l'Edit de Nantes, l'Alsace et Mulhouse. *Extrait du Bulletin historique Ville de Mulhouse*, tome 1, pp. 9–25.

[Parker 1997] PARKER, G. (ed.) (1997) *The Thirty Years' War*. 2nd edition. London: Routledge & Kegan Paul. References to the Spanish translation: Parker, G. (2003). *La Guerra de los Treinta Años*. Traducción de Daniel Romero Álvarez. Madrid: Antonio Machado Libros.

[Petrie 2009] PETRIE, BRUCE J. (2009). Euler, Lambert, and the Irrationality of e and π. *Proceedings of the Canadian Society for History and Philosophy of Mathematics*, Vol. 22, pp. 104–119.

[Petrie 2011] PETRIE, BRUCE J. (2011). Johann Heinrich Lambert's Use and Understanding of Mathematical Transcendence, *Conference*.

[Petrie 2012] PETRIE, BRUCE J. (2012). Leonhard Euler's Use and Understanding of Mathematical Transcendence. *Historia Mathematica*, Vol. 39, 3, pp. 280–291.

[Petrie 2014] PETRIE, BRUCE J. (2014). Natures of Curved Lines in the Early Modern Period and the Emegence of the Transcendental. En: Zack, M.; Landry, E. (eds) (2004). *Research in History and Philosophy of Mathematics. The CSHPM 2014 Annual Meeting in St. Catharines, Ontario*. Basel: Birkhäuser.

[Preuss 1850] PREUSS, J. D. E. (1850). *Oeuvres de Frédéric le Grand, v. 16*. Berlin: Imprimerie royale.

[Quérard 1836] QUÉRARD J. M. (1836). *La France littéraire, ou dictionnaire bibliographique des savants, historiens et gens de lettres de la France, ainsi que des littérateurs étrangers qui ont écrit en français, plus particulièrement pendant les XVIII^{e} et XIX^{e} siècles, T. 8*. Paris: Firmin Didot père et fils.

[Richards 2006] RICHARDS, J. L. (2006). Historical Mathematics in the French Eighteenth Century. *Isis*, Vol. 97 (4), pp. 700–713.

[Rodríguez 2006] RODRÍGUEZ, C. J. (2006). La importancia de la analogía con una esfera de radio imaginario en el descubrimiento de las geometrías no-euclidianas. *Prepublicacions Departament de Matemàtiques UAB*, pp. 1–48.

[Rodríguez et al. 2006] Rodríguez, U. P., Lires, M. A., Martínez, P. P. (2006). Las reflexiones de Frai Martín Sarmiento sobre la cuadratura del círculo. *Llull*, Vol. 29, pp. 357–375.

[Roper 2017] Roper, L. (2017). *Martin Luther: Renegade and Prophet.* New York: Random House. Referencias a la traducción española: Roper, L. (2017). *Martín Lutero. Renegado y Profeta.* Traducido por Sandra Chaparro. Barcelona: Taurus.

[Rowe 2018] Rowe, D. (2018). *A richer picture of mathematics: the Göttingen tradition and beyond.* Springer.

[Rudio 1892] Rudio, F. (1892) *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Deutsch Hrsg. und mit einer Übersicht über die Geschichte des Problemes von der Quadratur des Zirkels, von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage.* Leipzig: B.G. Teubner.

[Saccheri 1733] Saccheri, G. (1733). *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus.* References to the English translation: Saccheri, G. (2014). *Euclid Vindicated from Every Blemish.* Edited and Annotated by Vincenzo De Risi. Translated by G.B. Halsted and L. Allegri. Basel: Birkhäuser.

[Sánchez Ron 2004] Sánchez Ron, J. M. (2004). José Echegaray: entre la ciencia, el teatro y la política. *Arbor*, Vol 179, Nº 707/708, pp. 601–688.

[Schubring 2005] , Schubring, G. (2005). *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century. France and Germany.* New York: Springer.

[Scriba 1973] Scriba, Chr. J. (1973). Lambert. *Dict. Scient. Biogr.*, vol. 7, pp. 595–600.

[Sereda 2017] Sereda, K. (2017). *Leibniz on the Concept, Ontology, and Epistemology of Number.* PhD in Philosophy, University of California.

[Serfati 1992] Serfati, M. (1992). *Quadrature du cercle, fractions continues et autres contes. Sur l'histoire des nombres irrationnels et transcendants aux XVIII et XIX siècles.* Brochure A.P.M.E.P., nº 86.

[Serfati 2018] Serfati, M. (2018). *Leibniz and the invention of mathematical transcendence.* Stuttgart: Franz Steiner Verlag.

[Sheynin 2010] Sheynin, O. (2010). *Portraits Leonhard Euler, Daniel Bernoulli, Johann-Heinrich Lambert.* Compilado y traducido por Oscar Sheynin, Berlín.

[Siegel 1949] Siegel, C. L. (1949). *Transcendental Numbers.* Annals of Mathematics Studies; N° 16. Princeton: Princeton University Press.

[Sitzmann 1909] Sitzmann, E. (1909). *Dictionnaire de biographie des hommes célèbres de l'Alsace: depuis les temps les plus reculés jusqu'à nos jours. Tome 2.* F. Sutter (Rixheim).

[Smith 1894] Smith, H. J. S. (1894). *The Collected Papers of Henry John Stephen Smith Vol. 2.* Edited by A. W. L. Glaisher. Oxford: Clarendon Press.

[Smith 1958] Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics Vol. 2.* Dover edition.

[Smith 1986] Smith, D. E. (1986). *A source book in mathematics, 1200-1800.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

[Sorensen 2010] Sorensen, H. K. (2010). *The Mathematics of Niels Henrik Abel: Continuation and New Approaches in Mathematics During the 1820s.* RePoSS: Research Publications on Science Studies 11. Aarhus: Centre for Science Studies, University of Aarhus.

[Speiser 1946–1948] Speiser, A. (1946–1948). *Iohannis Henrici Lamberti Opera mathematica.* Turici: in aedibus Orell Füssli.

[Stainville 1815] Stainville, M. J. de (1815). *Mélanges d'analyse algébrique et de géométrie.* Paris: Ve Courcier.

[Steck 1970] Steck, M. (1970). *Bibliographia Lambertiana, Ein Fuhrer durch das gedruckte und ungedruckte Schrifttum und den wissenschaftlichen Briefwechsel von Johann Heinrich Lambert 1728-1777, Neudruck mit Nachtragen und Erganzungen.* Hildesheim.

[Stevin I 1958] Stevin, S. (1958). *The Principal Works of Simon Stevin, Mathematics.* Edited by D. J. Struik. Vol. II A, CV Swets y Zeitlinger, Amsterdam.

[Stevin II 1958] Stevin, S. (1958). *The Principal Works of Simon Stevin, Mathematics.* Edited by D. J. Struik. Vol. II B, CV Swets y Zeitlinger, Amsterdam.

[Stillwell 1994] Stillwell, J. (1994). What Are Algebraic Integers and What Are They For? *The American Mathematical Monthly.* Vol. 101, No. 3, pp. 266–270.

[Stollberg-Rilinger 2018] Stollberg-Rilinger, B. (2018). *Das Heilige Römische Reich Deutscher Nation. Vom Ende des Mittelalters bis 1806.* C. H. Beck. References to the Spanish translation: Stollberg-Rilinger, B. (2020). *El Sacro Imperio Romano-Germánico. Una historia concisa.* Traducción del alemán por Carlos Fortea. La Esfera de los Libros, S. L.

[Struik 1969] Struik, D. J. (1969). *A Source Book in Mathematics, 1200-1800.* Harvard University Press.

[Tannery 1910] Tannery, J. (1910). *Correspondance entre Lejeune Dirichlet et Liouville.* Paris: Gauthier-Villars.

[Thiébault I 1806] Thiébault, D. (1806). *Original ancedotes of Frederick the Great, king of Prussia, and of his family, his court, his ministers, his academies, and his literary friends v. 1.* Philadelphia: Printed at the office of the United States gazette for I. Riley & co.; New York.

[Thiébault II 1806] Thiébault, D. (1806). *Original ancedotes of Frederick the Great, king of Prussia, and of his family, his court, his ministers, his academies, and his literary friends v. 2.* Philadelphia: Printed at the office of the United States gazette for I. Riley & co.; New York.

[Verdier 2008] Verdier, N. (2008). L'irrationalité de e par Janot de Stainville, Liouville et quelques autres. *Bibnum [En ligne]*, http://journals.openedition.org/bibnum/670.

[Wagner 2014] Wagner, R. (2014). Wronski's Infinities. *HOPOS: The Journal of the International Society for the History of Philosophy of Science*, 4:1, pp. 26–61.

[Wallis 1656] Wallis, J. (1656). *Arithmetica infinitorum.* Oxford. References to the English translation: Wallis, J. (2004). *The Arithmetic of Infinitesimals: John Wallis 1656.* Translated from Latin to English with an introduction by Jacqueline A. Stedall. New York: Springer.

[Wantzel 1837] Wantzel, P. L. (1837). Note sur les nombres incommensurebles. *Journal de l'École polytechnique*, pp. 151–157.

[Wantzel 1843] Wantzel, P. L. (1843). Classification des nombres incommensurables d'origen algébrique. *Nouvelles annales de mathématiques*, 1er série, tome 2, pp. 117–127.

[Wardhaugh 2017] Wardhaugh, B. (2017). Charles Hutton: «One of the greatest mathematicians in Europe»? *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, 32:1, pp. 91–99.

[Weil 1984] Weil, A. (1984). *Number theory: an approach through history from Hammurapi to Legendre*. Boston: Birkhäuser.

[Wreede 2010] Liesbeth C. de Wreede (2010). A dialogue on the use of arithmetic in geometry: Van Ceulen's and Snellius's *Fundamenta Arithmetica et Geometrica. Historia Mathematica*, Vol. 37, pp. 376–402.

[Wronski 1811] Wronski, J-M. H. (1811). *Introduction à la philosophie des mathématiques, et technie de l'algorithmie*. Courcier (Paris).

[Wronski I 1815] Wronski, J-M. H. (1815). *Philosophie de la technie algorithmique. Première section, contenant la loi suprême et universelle des mathématiques*. De l'impr. de P. Didot l'aîné (Paris).

[Wronski II 1816/1817] Wronski, J-M. H. (1816/1817). *Philosophie de la technie algorithmique. Seconde section, contenant les lois des séries comme préparation à la réforme des mathématiques*. De l'impr. de P. Didot l'aîné (Paris).

[Wronski 1821] Wronski, J-M. H. (1821). *A course of mathematics. Introduction determining the general state of the mathematics. Translated from the original french, under the immediate inspection of the author*. Bagster Samuel (London).