



20
236

1 2 3 4 5 6 7 8 9

~~2 1 0 0 0 0 0 0 0 0~~

3 6 12 18 20 24 28 32 30

48

~~3 2 1 0 0 0 0 0 0 0~~

~~1 2 3 4 5 6 7 8 9 0~~

1 4 3 6 9 8 7 2 1 6 8 7 1 0 1 0 2 0 4 1 2 4 5
2 0 7 0 0 3 4 3 1 0 7 8 6 4 5 0 1 3 4 1 2 3 4 5
3 0 8 0 0 4 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5

15000000 1800000000

$$\begin{array}{r} 178838 \\ \hline 1372902 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 150 \\ 100 \\ \hline 250 \\ 445 \\ \hline 3030 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ 72 \\ 72 \\ 72 \end{array}$$

N. A. ...
 ...
 ...

$$\begin{array}{r} 1600000 \\ 200 \\ \hline 440 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28000 \\ 15000 \\ \hline 28800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 160 \\ 288 \\ \hline 040 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 405 \\ 40 \\ 90 \\ 40 \\ 40 \\ 20 \\ 20 \\ \hline 100 \\ 288 \\ \hline 448 \end{array}$$

← 2.500

ab 1107
 1540
 8800

$$\begin{array}{r} 103400 \\ 28800 \\ \hline 132200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 200 \\ 440 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15800 \\ 28800 \\ \hline 44600 \end{array}$$

1515.

1626.

R. 26.

6/13

7/11

C. 11/11

ARITHMETICA.

Ms 80

Ms 206



*Claudio Marescalco
Magistro*

PARISIIS,

Apud Andream Wechelum.

1562.

Cum privilegio Regis.

A. Chipard
1620.





LIBER PRIMUS

ARITHMETICÆ.

Cap. 1. quid arithmetica, numerus, unitas,
& quæ partes arithmeticæ.

1. **A**RITHMETICA est doctrina bene numerandi.

2. Numerus est ex unitatibus collecta multitudo. 2. d. 7.

Ut binarius numerus est collectus ex uno & uno, ternarius ex uno & uno & uno, quaternarius ex uno & uno & uno & uno, & quilibet deinde numerus est ex unitatibus collecta multitudo.

3. Unitas est secundum quam unumquodque unum dicitur. 1. d. 7.

Ut unus Deus, unus mundus, unus Rex. Unitas numerus non est: nec enim est ex unitatibus collecta multitudo: At tamen ut unitas definitur, secundum quam unumquodque unum dicitur, sic numerus definiiri potest, secundum

quem unumquodque numeratur: ut unum, duo, tria: & sic unitas in multis arithmeticae partibus pro numero usurpatur. Proprie igitur unitas numerus non est, sed initium numeri, e quo primum numerus fit, & in quod ultimum resolvitur, estque; in numero aliquid minimum, nempe unitas, quavis nihil esse possit maximum. Arithmeticae partes duae sunt.

4. *Arithmeticae prima pars est, quae interpretatur simplices qualitates numerorum.*

Et quidem in generali numeratione primum: deinde in specialibus differentiis numerorum. Generalis autem numeratio est prima aut conjuncta: Prima, ut additio & subductio

Cap. 2. de additione, ubi de arithmeti-
cis notis.

5. *Additio est numeratio prima, qua numerus cum numero semel additur, & habetur totus.*

Hic sunt decem unitates, I. I. I. I. I. I. I. I. I. I. quibus addendis, numeramus unum; duo; tria; quatuor; quinque; sex; septem; octo; novem; decem, ubi ad numerum antecedentem unitas additur: Addatur duo cum duobus, totus erit quatuor; quinque cum tribus, totus erit octo: Cujusvis

vis autem numeri addendi & colligendi decem sunt notæ, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0: quarum prima unum significat, secunda duo, tertia tria, quarta quatuor, quinta quinque, sexta sex, septima septem, octava octo, nona novem: Circulus, quæ nota est ultima, nil per se significat: valet tamen ad alias notas amplificandum. Amplificationis verò gradus sunt quatuor, deincepsq; perpetuò similiter iterantur. Nam de primis novem, quælibet sola aut ultimo universi numeri loco suum numerum semel exprimit, penultimo decies, tertio deinceps, quatto millies, quinto decies millena, sexto centies millena, septimo millies millena & sic deinceps. Numeros igitur ita notabis, unum 1, undecim 11, centum undecim 111, mille centum undecim 1111. Duo 2, viginti duo 22, ducenta viginti duo 222, duo millia ducenta viginti duo 2222, mille ducenta triginta quatuor 1234, Ergo in hac amplificatione circulus amplificabit notam sibi præpositam; Notabis enim his notis 10, viginti 20, triginta 30, quadraginta 40, centum 100, ducenta 200, trecenta 300, quadringenta 400, Duo millia viginti 2020, quater millena millia, triginta millia ducenta unum 4030201. Atqui si numeri pluribus notis collecti periodus longior fuerit, ut eam numerare condiscas, millenarii loci, tanquam in membris orationis sensus absoluti, punctis distinguantur; ultimum punctum erit millium, penultimum millenorum millium, tertium millies

millenorum millium, quartū millies millies millenorum millium; Tum singula pūcta deinceps, si plura sint, millies amplificabunt. Numerum igitur decem notis sic additum & interpunctum $\overset{\cdot}{1} \overset{\cdot}{2} \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{7} \overset{\cdot}{8} \overset{\cdot}{9} \overset{\cdot}{0}$, tanquam mēbris quatuor distinctam periodum numerabis. Primum membrum millies millena millia, secundum ducenties tricies quater millena millia, tertium quingēta sexaginta septem millia, quartum octingenta nonaginta. Atque hæc interpunctio tantisper adhibenda, dum te exerceas in notis arithmetiis. Si numeri diversi pluribus notis constant, nec totus simul cum toto addi possit, sinistrorsum singulares cum singularibus, denarii cum denariis, & sic deinceps addendi, ut excrecentes summa locis excrecentibus ordine facilius notentur, & ex iis additus & collectus numerus, interjecta lineola subnotetur. Quæratur igitur quis numerus sit totus $\overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{7} \overset{\cdot}{8} \overset{\cdot}{9}$, & $\overset{\cdot}{1} \overset{\cdot}{2} \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{4}$, ordine dispositis numeris, ut homogeni respondeant, sic

$$\begin{array}{cccccc} \overset{\cdot}{5} & \overset{\cdot}{6} & \overset{\cdot}{7} & \overset{\cdot}{8} & \overset{\cdot}{9} & \\ & & \overset{\cdot}{1} & \overset{\cdot}{2} & \overset{\cdot}{3} & \overset{\cdot}{4} \end{array}$$

Incipies ab ultimo loco, $\overset{\cdot}{9}$ & $\overset{\cdot}{4}$, sunt $\overset{\cdot}{13}$; subnotabis $\overset{\cdot}{3}$, reservabis $\overset{\cdot}{10}$, pro $\overset{\cdot}{1}$, sequentis loci: Ergo dices sequenti loco, $\overset{\cdot}{1}$ & $\overset{\cdot}{8}$ & $\overset{\cdot}{3}$, sunt $\overset{\cdot}{12}$, subnotabis $\overset{\cdot}{2}$, & reservabis, ut antea, $\overset{\cdot}{10}$ pro $\overset{\cdot}{1}$, sequentis loci: Tum $\overset{\cdot}{1}$ & $\overset{\cdot}{7}$ & $\overset{\cdot}{2}$, sunt $\overset{\cdot}{10}$; subnotabis $\overset{\cdot}{0}$, reservabis similiter $\overset{\cdot}{10}$, pro $\overset{\cdot}{1}$, sequentis loci: Tandem $\overset{\cdot}{1}$ & $\overset{\cdot}{6}$ & $\overset{\cdot}{1}$, sunt $\overset{\cdot}{8}$, quæ subnotabis: Postremo $\overset{\cdot}{5}$ sola reperies, adnotabis denique $\overset{\cdot}{5}$, & invenies

nies his duobus numeris additis totum esse 58.

○ 23. Inductionis summa sic erit,

$$\begin{array}{r} 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \\ \quad 1 \ 2 \ 3 \ 4 \\ \hline 5 \ 8 \ 0 \ 2 \ 3 \end{array}$$

Cap. 3. de subductione.

6. *Subductio est numeratio prima, qua numerus á numero semel subducitur, & habetur qui sit reliquus.*

Subducito 2 de 5, reliquus erit 3, subducito 4 de 9, reliquus erit 5. Subducenda sint 2 3 4 de 3 4 5, dispositis ordine numeris, ut respondeant homogenei inter se hoc modo,

$$\begin{array}{r} 3 \ 4 \ 5 \\ 2 \ 3 \ 4 \end{array}$$

Subducendo infrá, suprá autem á quo subductio facienda: Incipies á sinistra dextrorsum, cóntraquám in additione, ut 2 subductis é 3, supernotabis 1, deletis 3 & 2: deinde subduces 3 de 4, & supernotabis 1, deletis 4 & 3. Denique subductis 4 é 5, supernotabis 1, deletis 5 & 4, unde invenies reliquum esse 111, cúm subduxeris 2 3 4 á 3 4 5. Inductio tota sic erit,

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \\ 3 \ * \ 8 \\ 2 \ 3 \ * \end{array}$$

Sed in hac subductionis via, cùm sequēs subducēda nota major est quàm supraposita, ne notarum litura molesta sit, commodiùs é reliquo præcedente i mente reservabis, quod notam sequentem denario augeat, ut si subducenda sint 3 4 5 de 4 3 2, cùm subduces 3 de 4, non supernotabis 1, quia 4 sequēs subducenda nota, major est supraposito 3, sed illud mente reservabis: & 4 subductis á 13, manerent 9, sed 8 tantúm supernotabis, & 1 mente reservabis: quia 5 sequens subducenda nota major est. Itaque 5 subductis á 12, reliqua 7 supernotabis, unde invenies subductis 3 4 5 de 4 3 2, relinqui 8 7. Tota inductio sic erit.

$$\begin{array}{r} 8 \quad 7 \\ * \quad 3 \quad x \\ 3 \quad * \quad 8 \end{array}$$

Hæc subducendi vera via est, nec omnino priùs antecedens nota est subducēda, quàm provideris, unde reliquæ subduci possint. Sic divisio, id est, multiplex subductio postea progredietur, & sic de sequentibus providebit. Itaque meditanda priùs est simplex ista subductio, unde multiplex illa postea formāda sit. In majoribus autem exemplis idem est, ut subductis 4 8 7 6 5 2 9 3 de 5 7 2 9 5 4 9 0, supererunt 8 5 3 0 1 9 7.

Cap. 4. de multiplicatione.

Numeratio simplicis numeri prima ejusmodi est,

di est, conjuncta deinceps erit in multiplicatione & divisione.

7. *Multiplicatio est numeratio conjuncta, qua multiplicandus toties additur, quoties unitas in multiplicante continetur, & habetur factus. 15. d. 7.*

Unicas nil multiplicat; semel 1, semel 2, semel 3, est 1, 2, 3, quamvis plus sit addita. Nam 1 & 1, sunt 2, item 1 & 2, sunt 3: At 2 sibi additus est 4, quot item efficit sui multiplicatione. Nam bis bina sunt item 4. Id in illis est proprium: At 2 ceteros numeros multiplicans, auget, ut bis 3, sunt 6. Sic addis 3 bis quoties nempe unitas in 2 multiplicante continetur: bis 4, sunt 8: addis enim 4 bis quoties unitas in 2 multiplicante continetur. Et hæc prima multiplicationis species, duplicatio dicitur: cujus tamen ars eadem, quæ reliquarum multiplicationum: bis quina sunt 10, sic notabis,

$$\begin{array}{r} 5 \\ 2 \\ \hline 10 \end{array}$$

8. *Si duo numeri fuerint facti à duobus inter se multiplicatis, erunt æquales. 16. p. 7.*

Ut quater quina, sunt 20, & quinquies quaternæ, sunt item 20.

9. *Si numerus fuerit factus à duobus*

totis, erit æqualis factis ex altero toto & segmentis reliqui. 1. p. 2.

Ut septies octona, sunt 56. hic factus est numerus é duobus totis 7 & 8. Seca 8 in 4 & 4, & utrumque segmentum multiplica per 7, facies 28 & 28, é quibus additis, restitues 56. Ergo major multiplicatio hujusmodi proponatur, & quærat, quis numerus efficiatur 456 per 4 multiplicatis. Sinistrorsum ut in additione procedes, & multiplicãtem duces per tres multiplicandi notas sigillatim, & tribus trium segmentorum multiplicationibus singularibus multiplicationem totius cum toto absolves, numeris ita dispositis sic incipies,

$$4 \ 5 \ 6$$

$$4$$

Quater 6 sunt 24: notabis igitur 4, & 20 reservabis pro 2 loci sequentis: quater 5 sunt 20, & 2 reservata sunt 22, notabis 2, reservabis iterum 2 in locum proximum: quater 4 sunt 16 & 2 reservata sunt 18, quæ notabis integra. Inductio- nis summam sic erit.

$$4 \ 5 \ 6$$

$$4$$

$$1 \ 8 \ 2 \ 4$$

Unde invenies 456 per 4 multiplicatis fieri 1824. Hic multiplicasti per 4 totum multiplicatorem, tria segmenta multiplicandi, tanquam separatim multiplicasses 6 per 4, & fecisses 24:

Deinde

Deinde 50 per 4, & fecisses 200. Denique 400 per 4, & fecisses 1600, postremò tres factos singulares addidisses, hoc modo,

$$\begin{array}{r}
 1600 \\
 - 200 \\
 \hline
 1400 \\
 + 200 \\
 \hline
 1600
 \end{array}$$

tantumque fecisti, ac si totum hoc 456, per totum 4 uná multiplicasses.

10. *Si numerus fuerit factus á duobus totis, erit æqualis factis é segmentis utriusque, i. p. 7.*

Ut 72 est factus é totis 8 & 9, frangatur uterque in quotlibet segmenta, ut 8 in 3 & 5, 9 in 2 & 7, & singula per singula multiplica, facies 35. 10. 21. 6. é quibus additis restitues 72. Sed proponatur exemplum pauló plenius, & per ista segmenta tum multiplicandi, tum multiplicantis multiplicatio inducatur: ut 2070 per 204 multiplicentur, singularis inductio segmentorum, componet tandem 422280. Inductio-
nis summa sic erit.

$$\begin{array}{r}
 2070 \\
 \times 204 \\
 \hline
 8280 \\
 0000 \\
 4140 \\
 \hline
 422280
 \end{array}$$

1. Quo in exēplo, sicut in cæteris omnibus circulus per circulum, aut circulus per numerū nihil efficit. Circulus itaque pro inventione talis multiplicationis, notabitur ad sequentes notas augendum.

Numeros in circulum desinētes multiplicare compendio possumus, detractis ultimis circulis: Deinde iisdem factō postpositis: ut si multiplicentur 7 2 0 0 per 4 5 0, omissis circulis illic duobus, hic uno multiplicabis 7 2 per 4 5, & factō 3 2 4, postpones tres circulos, hoc modo, 3 2 4 0 0 0.

Cap. 5. de divisione.

11. *Divisio est numeratio conjuncta, qua divisor subducitur á dividendo quoties potest, & habetur quotus.*

Sic divisio 12 in 3 est subductio 3 quater iterata, & habetur 4, pro quotō. Dividendus igitur numerus, est tanquam hæreditas dividenda: divisor est numerus partium, velut hæredum, quibus ex æquo dividatur, quotus est pars quota hæredis cujusque.

12. *Numerus minor est pars majoris aut partes. 4. p. 7.*

13. *Pars quæ dividit majorem. 3. d. 7.*
Ut 3 est pars 12, nempe quarta.

14. Par-

14. *Partes quando nõ dividit majorẽ.*

4. d. 7. Ut 8 non dividit totum 12. Nam cum semel subduxeris, manent 4. Itaque 8 sunt duæ quartæ duodenarii. Pars illa quota, hæc quanta vulgò dicitur.

15. *Si numerus in numerũ fuerit divisus, quot⁹ erit pars cognominis divisoni.* 39. p. 7

Ut 12 dividitur in 3, & quotus 4 est tertia pars divisi.

16. *Et si numerus habuerit partẽ quãlibet, dividetur in numerum parti cognominem.* 40. p. 7.

Ut 12 habet tertiam partem, & ideò dividitur in 3. Quotus autem ille divisoni cognominis adnotatur ad latus. Sic 18 divisus in 2, quotus erit 9, hoc modo,

$$\begin{array}{r} 1 \ 8 \quad (9 \\ 2 \end{array}$$

Et hæc prima in 2 divisio dicitur dimidiatio, cujus tamen ars eadem est quæ divisionis in 3 4, & quemlibet alium numerum. Si divisio tota simul expediri non possit, inductione est utendũ, & quidem dextrosũ, ut in subtractione. Exemplum sit primum de dividere simplici. Dividantur 7476 per 6. Notabis primũ dividendum & divisorem sic,

$$\begin{array}{r} 7 \ 4 \ 7 \ 6 \\ 6 \end{array}$$

E 7 potes subducere 6 semel, & manet 1. notabis igitur 1 pro quoto, & deletis 7 dividendo & 6 divisore, superscribes 1. Prima inductio sic erit,

$$\begin{array}{r} 1 \\ \cancel{7} \ 4 \ 7 \ 6 \quad (1 \\ \cancel{6} \end{array}$$

Secundo produces 6 divisorem in proximum locum. Jam 6 potes subducere bis à 14, & manent 2. Adnotabis igitur quotum 2, & deletis 6 & 14, superscribes 2 reliquum. Secunda inductio sic erit,

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \\ \cancel{7} \ \cancel{4} \ 7 \ 6 \quad (12 \\ \cancel{6} \ \cancel{6} \end{array}$$

Tertio produces 6 divisorem in proximum locum 27. unde potes subducere quater, & manet 3. Adnotabis igitur quotum 4, & deletis 27 & 6, superscribes 3. Tertia inductio sic erit,

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 3 \\ \cancel{7} \ \cancel{4} \ \cancel{7} \ 6 \quad (124 \\ \cancel{6} \ \cancel{6} \ \cancel{6} \end{array}$$

Postremo produces in reliquum locum 36, unde potes subducere sexies, & nihil manet. Adnotabis igitur 6 quotum, deletis 36 & 6. Tota inductio sic erit,

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 3 \\ \cancel{7} \ \cancel{4} \ \cancel{7} \ \cancel{6} \quad (1246 \\ \cancel{6} \ \cancel{6} \ \cancel{6} \ \cancel{6} \end{array}$$

Hic invenis 7 4 7 6 in 6 divisus quotum esse

12346

1 2 4 6 : Exemplum deinde sit de divisore multi-
 plici, qui per partes suas æqualiter subducendus
 sit à suprapositis diuidendi notis, quoties nempe
 quotus continetur. Et hic subductio vera, de qua
 dixi, planè cernitur, cùm subducere incipias
 dextrosam singulas subducendi notas antè me-
 ditando, quàm quidquã de parte quota statuas.
 Dividantur igitur 1 4 4 per 1 2: Notabis primùm
 dividendum & divisorem sic,

$$\begin{array}{r} 1 \ 4 \ 4 \\ 1 \ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \end{array}$$

Ac videbis 1 ab 1 semel subduci, & toties 2 à
 4, & 2 restabunt: adnotabis igitur 1 pro quoto,
 & deletis 1 4 & 1 2, superscribes 2. Inductio pri-
 ma sic erit,

$$\begin{array}{r} 2 \\ 1 \ 4 \ 4 \quad (1 \\ 1 \ 2 \end{array}$$

Secundò produces divisorem in proximum
 locum 2 4, ac videbis à 2 bis subduci posse: & 2 à
 4 toties, neque quicquam restare. Inductio tota
 sic erit,

$$\begin{array}{r} 2 \\ 1 \ 4 \ 4 \quad (12 \\ 1 \ 2 \ 2 \end{array}$$

In prima inductione hujus exempli, secunda
 divisoris nota sæpiùs subduci poterit, quàm pri-
 ma. Sit exemplum ubi prima sæpiùs subduci pos-
 sit quàm secūda, & quidem divisor sit majorum

notarum, ubi etiam multiplices istæ subductiones multiplicatione quoti per divisorem totum, præsidio memoriæ tutius recolligentur, quàm expèdientur separatim singulæ. Dividâtur 841, per 29. Notabis primò dividendum & divisorem sic,

$$\begin{array}{r} 841 \\ 29 \end{array}$$

Ac videbis 2 ab 8 quater quidem subduci posse. At toties 9 à 4 subduci non posse. Potes etiam 2 ter subducere ab 8, sed à reliquis 24 non pores toties subducere 9. Subduces igitur, ut æqualitas subductionis in partibus divisoris obseruetur, 2 ab 8 tantùm bis, & à reliquis 441. toties subduces 9, & manebunt 26. Adnotabis igitur a pro quotò, & per eum multiplicato divisore, recolliges in unũ, quod ista multiplicis subductionis æquatione comprehendisti, & facies; 8, quæ deletò divisore, superscribes dividendo, & ab eo subduces, manebunt 26, quæ subducendo; 8, & supraposito 84. deletis, superscribètur. Inductio prima sic erit,

$$\begin{array}{r} 26 \\ 841 \\ 29 \end{array} \quad (2)$$

Secundò produces divisorem in reliquum dividendi locum. Sic potes 2 subducere tredecies à supraposito dividendo 26. Verùm ab uno reli-

reliquo non potes subducere 9 toties. Nec omnino fieri potest, ut nota divisoris ulla, in ulla divisione plusquã novies hac inductionis via subducatur: quia major numerus quã 9 unica nota & unico loco comprehendi non potest. Cùm verò 2 á 26 novies subduxeris, á reliquis 81 poteris subducere 9 toties. Adnotabis igitur 9 pro quotu, & per eum multiplicato divisore, facies 261, quæ deletu divisore, subscribes dividendo, ab eoque subduces, deletis infra supraq; numeris, tum subductis, tum inde facta subductio est, nihil restabit. Tota inductio sic erit,

$$\begin{array}{r}
 261 \\
 841 \quad (29 \\
 \hline
 299 \\
 881 \\
 \hline
 29 \\
 261
 \end{array}$$

Si contingat divisorem aliquo post primum loco majorem esse dividendo, circulus in quotu adnotetur: sic divisio 60800 per 304, quotus est 200, & primo tantum loco divisor subducitur. Quòd si in relictis medio spacio vacuus locus offendatur, circulus videlicet ascribendus erit, quod accidet, si divides 364 in 26, ubi quotus erit 14. sic,

$$\begin{array}{r}
 200 \\
 364 \quad (14 \\
 \hline
 264 \\
 2
 \end{array}$$

Si peracta tota divisionis inductione aliquid est dividendo relinquatur, propositus numerus non est propriè divisus, sed numerus, qui divisione est omninò subductus, reliquorū autem est sua quædam numeratio.

17 *Dividendus minor divisorsi majori interjecta linea superponitur, illeque numerus, hic nomen appellatur.*

Ut si 5 divideris in 2, quotus erit 2, & reliquum unum nominabitur una secunda, & ita notabitur $\frac{1}{2}$: item divisus 11 in 3, quotus erit 3, & reliquum duæ tertiæ, sic $\frac{2}{3}$, atque ita reliquarum partium numerus erit ipsum reliquum, nomen verò divisor.

18. *Quantum numerus partium abest à nomine, tot unius integri partes dividendo desunt, ut semel ab eo divisor subducatur.*

Ut in $\frac{4}{12}$ desunt $\frac{8}{12}$.

19. *Si numerus sit æqualis nomini, totus est, si major, plus toto, si minor, minus.*

Ut $\frac{3}{7}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{2}{7}$.

20. *Pars autem major est, cujus nomen est*

est minus, minor, cujus nomen est majus:

Ut $\frac{1}{2}$ major quàm $\frac{1}{3}$, vel $\frac{1}{4}$, & sic in cœteris. Est etiam in particulis & partibus partium sua quædam distincta notatio, & eatum minima notatur, ut partes reliquæ nulla interjecta linea. Ergo tres quartæ duatum tertiarum unius secundæ, ita notabuntur $\frac{3}{4} \frac{2}{3} \frac{1}{2}$.

21. *Partium cognominum numeratio, spectat solos numeros.*

Sic igitur adde $\frac{4}{2}$ ad $\frac{6}{2}$, totæ erunt $\frac{10}{2}$. A $\frac{10}{2}$ subducito $\frac{4}{2}$, manebunt $\frac{6}{2}$. Sic in $\frac{1}{2}$ divisio $\frac{1}{2}$, quotus est 4. Item in $\frac{3}{2}$ divisio $\frac{1}{2}$, quotus est 4, unde intelligis partientem partem in partita quater integrè contineri.

Multiplicatio autem multiplicat numeros simul & nomina, sive eadem sive diversa: quia multiplicandæ partes toties addendæ sunt, quot partes in multiplicantibus continètur. Sic $\frac{1}{2}$ multiplicent $\frac{1}{3}$, facient $\frac{1}{6}$. Sic $\frac{2}{7}$ multiplicent $\frac{1}{3}$, facient $\frac{2}{21}$.

Sed aliquandò integri & partium permista numeratio est, ut integer per partes, vel integer cum partibus per integrum solum, vel per integrum cum partibus expediri debeat.

Additio nihil mutat: 2 & $\frac{2}{3}$ sunt $2 \frac{2}{3}$, 2 & $\frac{2}{3}$ cū 2, sunt $4 \frac{2}{3}$, 2 $\frac{2}{3}$, & 4 $\frac{2}{3}$, sunt $7 \frac{2}{3}$.

Subductio ex integris capit unū pro tot partibus, quantum est nomen: ut à duobus subducito $\frac{2}{3}$ è 2 sumes 1 pro $\frac{2}{3}$, à $\frac{2}{3}$ subduces $\frac{2}{3}$, tum è 2

manebit $1\frac{1}{3}$, á $\frac{2}{3}$ tolle $2\frac{1}{3}$, manent $\frac{2}{3}$. A $2\frac{1}{3}$ tolle $1\frac{1}{3}$, manent $\frac{1}{3}$.

Multiplicatio integrum per partes multiplicat, subjiciendo integro tanquam numero 1 pronomine sic $\frac{1}{3}$ per $\frac{2}{3}$ faciunt $\frac{2}{9}$, id est 2.

Integer veró cum partibus per integrum sólum, vel cum partibus multiplicari potest separatim. sic $7\frac{1}{2}$ per 2, facit $14\frac{1}{2}$. Sic $7\frac{1}{2}$ per $2\frac{1}{3}$, faciunt primó $14\frac{1}{3}$, id est 15: deinde $\frac{7}{3}$ & $\frac{1}{3}$, id est $2\frac{1}{3}$, quibus additis totus est $17\frac{1}{3}$.

In divisione idem fieri potest, ut si divides $5\frac{1}{3}$ in $2\frac{2}{3}$, subducere potes 2 á 5 bis: item ab 1 reliquo & $\frac{1}{3}$, id est á $\frac{4}{3}$, potes subducere toties $\frac{2}{3}$. Sed ejusmodi exempla in multiplicatione & divisione rara erunt, in quibus partes expediri possunt absque reductione, de qua postea, sicuti de reliqua partium inventionione in nominibus diversis.

Cap. 7. de primis & factis numeris.

Atque hæc numeratio communis est, unde differentia numeri triplex oritur, prima numerus dicitur primus aut factus.

22. *Primus est numerus individuus ab alio numero.* 11. d. 7.

Ut 2, 3, 5, 7. Si enim numeri á nullo alio numero dividi possunt, nec ideo facti sunt ab alio numero.

23. *Factus est numerus dividiuus ab alio*

lio numero. 13. d. 7.

Ut 4 dividitur á 2, 6 á 3, 8 á 4. Itaque factus numerus fit multiplicatione veri numeri per verum numerum.

24. *Si numerus fuerit factus, erit dividuus ab aliquo primo. 33. p. 7.*

Ut 6 factus, est dividuus á 3 primo.

25. *Si factus á duobus datis sit dividuus á primo, alter datorum erit dividuus ab eodem. 32. p. 7.*

Ut 48 factus ab 8 & 6, est dividuus á 3, á quo & 6 etiam dividuus est. Primus & factus numerus ejusmodi sunt, sed alia ex his partitio cõponitur primorum inter se & factorum inter se.

26. *Primi inter se sunt numeri ab unitate sola dividui cõmuni divisore. 12. d. 7.*

Ut 2 & 3. Utrum autem numeri dati primi sint inter se, cognoscitur subductione & divisione.

26 *Si duobus numeris inæqualibus datis, vicissim subducto semper minore á majore quoties poterit, sola unitas reliqua dividerit antecedentem, dati erunt primi inter se, 1. p. 7.*

Ut 2 & 3 sunt primi inter se: quia subducta minore 2 á majore 3, sola est unitas, quæ præcedentem dividat. Sic in 8 & 9. Sed in majore numerorum differentia idem subtractione multiplici & divisione multò promptiùs expedietur, ut in 27 & 8. Nam prima divisio 27 in 8, relinquet tantùm 3: secunda divisio 8 in 3, relinquet 2. tertia 3 in 2, relinquet unitatem solam, & rem conficiet. Si de tribus aut compluribus quæstio sit, primi sint inter se, necne, cùm de duobus exploratum fuerit, constat hos duos ad quoscunq; alios fore primos, quia eorum præter unitatē divisor communis nullus erit.

28. *Si numerus primus non dividerit datum numerum, erit primus ad eum.* 31. p. 7.
Sic 3 est primus ad 5.

29. *Si numerus dividerit alterum duorum inter se primorum, erit primus ad reliquum.* 25. p. 7.

Ut 6 & 5 sunt primi inter se, & 3 dividens ipsum 6 est primus ad reliquum 5. Atque ita dati primi inter se numeri cognoscuntur subtractione & divisione Inveniuntur autem & procreantur additione & multiplicatione, additione primùm.

30. *Si duo dati numeri fuerint primi inter se, & totus é datis erit primus ad utrumque:*

trumque: Et si totus é datis fuerit primus ad alterũ, dati erunt inter se primi. 30. p. 7.

Ut 8 & 9 sunt inter se primi, & totus ex iis 17 est primus ad 8 & primus ad 9: & contrá, quia totus 17 est primus ad 8, vel ad 9: ideó dati 8 & 9 sunt primi inter se: Multiplicationis inventio copiosior est.

31. *Si duo numeri sigillatim fuerint primi ad aliquem factus ab iis erit primus ad eundem. 26. p. 7.*

Ut 4 & 5 sunt primi sigillatim ad 9, & 20 factus ab iis est primus ad 9.

32. *Si duo numeri fuerint primi inter se, factus ab altero erit primus ad reliquam. 27. p. 7.*

Ut 2 & 3 sunt primi inter se, & 4 factus á 2 est primus ad 3.

33. *Si duo numeri ad duos numeros sigillatim fuerint primi, facti ab iis erunt primi inter se. 28. p. 7.*

Ut 8 & 9 sunt sigillatim primi ad 7 & 5, nempe 8 ad 7 & 5: item 9 ad 7 & 5. Itaque 72 & 35 ab iis facti, sunt primi inter se.

34 *Si duo numeri fuerint primi inter*

se, facti ab iis erunt primi inter se, & facti á datis per postremos factos deinceps perpetuó primi erunt,

Ut in hoc ordine, 2 4 8 16 32
 3 9 27 81 243

35. *Facti inter se sunt numeri, dividui ab aliquo numero comuni divisore. 14. d. 7*

Ut 4 & 6 facti sunt inter se, quia 2 est illis communis divisor. Duo autem hic quaruntur, maximus divisor & minimus divisus.

36. *Si duobus numeris datis inæqualibus factis inter se, minor subducatur vicissim á majore quoties poterit, primus reliquus dividens antecedentem, erit maximus communis divisor datorum. 2. p. 7.*

Ut in 4 & 6, subducatur 4 minor á majore 6, reliquus 2 dividet antecedentem 4. Itaque 2 est maximus communis datorum divisor. Sic in 21 & 15, subducto vicissim 15 á 21, & 6 reliquo á 15, tandem relinquetur 3 communis mensura.

37. *Qua via duorum maximus communis divisor inventus est, eadem trium & quamlibet multorum invenietur. 3p. 7.*

Nam cum præcedentium duorum maximus

com-

communis divisor repertus fuerit, ipsius & sequentis numeri divisor similiter inquirendus est, ut in 8, 6, 4, maximus cōmunis divisor 8 & 6 est 2, tum maximus cōmunis divisor 2 & 4 est iterū 2. Ergo 2 est maximus cōmunis divisor in 8, 6, 4: sic in 12, 8, 6, maximus cōmunis divisor est itē 2. Sic in 6, 12, 18, 24, maximus communis divisor est 6. Hic compendium est.

38 *Si numerus minor dividerit majore, erit maximus communis divisor utriusq;.*

Ut 4 dividit 12, & est maximus divisor & sui et 12. E doctrina maximi divisoris sequitur per oppositum doctrina divisi minimi.

29. *Si numerus fuerit factus ab altero datorum per alterius divisorem cognominem maximo communi divisoni, erit minimus divisus á datis. 36.p.7.*

Sic minimus divisus á 12 et 8 est 24. Nam si divideris 12 et 8 per 4 maximum divisorem, habebis cognominem partem in altero 3, in altero 2. Jam multiplica alterné vel 12 per 2, vel 8 per 3, habebis 24. Exemplum sic est,



40. *Si duo numeri dividerint aliquē, mi*

minus ab illis divisus, dividet eundem.

37. p. 7.

Ut 6 & 4 dividunt 24 & 12 minimus divisus à 6 & 4, dividit eundem. Ex illa generali inveniēdi minimi divisi propositione, compendium duplex oritur.

41 *Si numerus fuerit factus à duobus inter se primis, erit minimus divisus à datis.*

Sic minimus divisus à 3 & 2, est 6, quia 1 maximo communi divisori cognominis in 3, divisor est 3, qui multiplicans 2, facit 6: contrā in 2 divisore cognominis maximo divisori est 2, qui multiplicans 3, facit etiam 6. Itaque cūm unum maximus divisor nihil dividat, multiplicatio sola hic erit, divisio frustrā adhiberetur, ut hic,

$$\begin{array}{r} 6 \\ 3 \overline{) 3} \times 2 \\ \quad 6 \\ \hline \end{array}$$

42. *Si numerus major fuerit divisus à minore, erit minimus divisus ab utroque.*

Sic ab 8 & 4 minimus divisus est 8, quia maximo eorū divisori 4 cognominis divisor in 8 est 2, qui multiplicans 4, reliquum facit 8: sic idem maximo divisor cognominis in 8 divisor est 1 qui multiplicans 8, facit etiam 8. Atque hoc compendium superiore majus est. & hic tum divisio, tum multiplicatio frustrā esset, ut vides in subiecto exemplo.

$$4) \begin{array}{c} 8 \\ \overline{8} \\ 1 \times 2 \end{array}$$

Ergo hoc duplex compendium est e prima propositione inveniendi minimi divisi. Eadem via minimus a tribus aut quatuor aut quotlibet divisus invenietur.

38.p.7.

Quia repertus jam minimus divisus conferendus est cum proximo. Nam factus ab altero per alterius divisorem maximo communi divisoris cognominem, est minimus ab his divisus, sic minimus ab 8, 6, 4 divisus, est 24. Nam 24 est minimus divisus ab 8 & 6: rursus item minimus divisus est a 24 & a 4, ut e secundo confectario patet. Sic a 3, 4, 8 minimus divisus est 24, quia minimus divisus a 3 & 4 est 12, tum minimus divisus a 12 & 8, est 24. Sic minimus divisus a 2, 3, 4, 5 est 60. hinc sequitur,

43 *Si numerus fuerit minimus divisus a nominibus datarum partium, erit minimus qui habeat datas partes.* 41.p.7.

Ut minimus divisus qui habeat $\frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4}$ est 12 nempe minimus divisus a 2, 3, 4, quique minimus bifariam, trifariam quadrifariam dividi possit. Sic minimus qui habeat $\frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5}$ est 60. nempe minimus divisus a 2, 3, 4, 5, quique in has partes mi-

nimus dividi possit.

Cap. 8, de numeris paribus & imparibus.

Atque hæc de primis & factis numeris, secūda absoluti & simplicis numeri distributio est in numerum parem & imparem.

44. *Par est numerus dividuus á binario. 6. d. 7.*

Sic 2 ipse par, quia dividitur á seipso semel, sic 4 est par, quia dividitur á 2 bis.

45. *Impar est numerus individuus á binario. 7. d. 7.*

Ut 3, itaque.

46. *Impar unitate differt á pari.*

Sic 5, sic 7, & similes sunt impares numeri, quibus unitate subducta, pares erunt 4, 6.

Par est pariter par tantum, pariter impar tantum, pariter par simul, & pariter impar.

47. *Pariter par est numerus tantum dividuus á pari per parem. 8. d. 7.*

Ut 8 pariter par est, quem 2 par dividit per 4 parem.

48. *Si numeri fuerint ab unitate continué duplicati, quilibet erit pariter par.*

32. p. 9.

Ut

Ut 1, 2, 4, 8, 16, 33, 64.

49. *Pariter impar est numerus tantum dividuus a pari per imparem. 9. d. 7.*

Ut 6, quem 2 par dividit per 3 imparem.

50. *Si numerus habuerit dimidium imparem, erit pariter impar tantum. 33. p. 9.*

Ut 6, 10, 18, quia horum dimidia pars est impar, nempe 3, 5, 9.

51. *Pariter par simul & pariter impar, est numerus neque ab unitate duplicatus, neque dimidium habens imparem. 34. p. 9.*

Ut sunt 12, 20, 28: quia neque duplicati sunt ab unitate, ut 2, 4, 8, 16, neque dimidium habent imparem, cum dimidii ipsorum 6, 10, 14, sint etiam pares. Impar est impar simpliciter vel impariter.

52. *Impar simpliciter, est numerus dividuus tantum ab unitate per seipsum.*

Ut 3, 5, 7, & quilibet primus.

53. *Impariter autem impar est numerus dividuus ab impari per imparē. 10. d. 7.*

Ut 15 impar dividitur in 3 imparem, secundum 5 imparem.

Itaque omnis impar impariter, est factus numerus.

Cap. 9. de numero perfecto & imperfecto.

Additur ad duas simplices numeri distributiones tertia distributio in numerum perfectum & imperfectum.

54. *Perfectus numerus, est numerus partium toti equalium. 22. d. 7.*

Ut senarii partes sunt 1, 2, 3, quæ additæ sunt æquales toti 6. Et hic unitas numerus est. Nam si pars, est etiam numerus numeri.

55. *Si é numeris continué duplicatis ab unitate totus sit primus, & ab eo totidem continué duplicentur, quot anté fuerant, ultimus erit perfectus, reliqui partes perfecti. 36. p. 9.*

Ut hic,

1 2 | 3 6.

Adde 1 & 2, totus 3 est primus, & secundus ab eo continué duplicatus est 6 perfectus, cuius omnes partes sunt, 1, 2, 3, & solus est perfectus intra 10. Secundó, ut hic,

1 2 4 | 7 14 28.

Adde 1, 2, 4, sunt 7, & tertius ab eo continué duplicatus 28 est perfectus, eiusque partes omnes 1, 2, 4, 7, 14, & solus hic est perfectus á 10 ad 110. Tertió, ut hic,

1, 2, 4, 8, 16. | 31, 62, 124, 248, 496.

Adda

Adde 1, 2, 4, 8, totus est 15 compositus, prætereatur igitur. At 1, 2, 4, 8, 16 additis, totus est 31, primus, & quintus ab eo duplicatus 496 perfectus, eiusque partes omnes sunt 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496, solus hic perfectus est à 100 ad 1000, & sic deinceps. Itaque ut perfectus solus neglectis partibus habeatur, hinc factum est ab Euclide theorema in hanc sententiam:

56. *Si è numeris continuè duplicatis ab unitate totus sit primus, factus ab eo per ultimum erit perfectus.*

Sic deinceps à 1000 ad 10000 perfectus est 8128, rarique admodum sunt hi numeri, imò nonnullis gradibus nulli sunt, ut sexto, undecimo, decimoseptimo, & plerisque aliis. Sic igitur perfectus efficitur è pariter paribus & ex imparibus primis, id est, ex maximè dividuis & minimè dividuis.

57. *Imperfectus numerus, est numerus partium toti inæqualium.*

Estque redundans aut diminutus.

58. *Redundans, est numerus imperfectus partium toto majorum.*

Ut 12, cujus partes 1, 2, 3, 4, 6 collectæ, sunt 16 majores toto 12.

59. *Diminutus, est numerus imperfe-*

Etus partium toto minorum.

Ut 4, 8, & quilibet pariter par.

ARITHMETICÆ

LIBER II.

Cap. I. de primis differentiis comparationis.

PRIMA pars Arithmeticæ adhuc fuit, secūda sequitur.

1. *Arithmeticæ pars secunda est, quæ interpretatur numerorum comparationes, comparationumque genera & proprietates.*

2. *Comparatio numerorum est habitudo quedam ipsorum inter se.*

Comparatio est ratio vel proportio.

3. *Ratio est comparatio quantitatis.*

3. d. 5.

Rationis termini duo sunt, primus antecedens & dux, secundus consequens & comes appellatur. Quantitas autem æqualis est vel inæqualis, unde sunt axiomata sequentia.

4. *Si duo numeri fuerint æquales eidem,*

dem erunt æquales inter se.

Ut 2 & 2 sunt æquales eidem 2. Itaque sunt æquales inter se.

5. *Si numeri æquales addantur æqualibus, toti erunt æquales. 2. axio.*

Ut 2 & 2 sunt æquales numeri, adde utrique 3, toti erunt 5 & 5: item æquales inter se.

6. *Si æquales subducantur ab æqualibus, reliqui erunt æquales. 3. axio.*

Ut 5 & 5 sunt æquales numeri: ab utroque tolle 3, manebunt 2 & 2: item æquales inter se.

7. *Totus numerus major est sua parte. 2. ax. 1.*

8. *Si æquales addantur inæqualibus, toti erunt inæquales. 4. axio.*

Ut 4 & 3 sunt inæquales numeri, adde utrique 2, toti 5 & 6 sunt item inæquales.

9. *Si æquales subducantur ab inæqualibus, reliqui erunt inæquales. 5. ax.*

Ut 6 & 5 sunt inæquales numeri, tolle ab utroq; 2 & 2 æquales numeros, reliqui quatuor & 3 erunt item inæquales. Ratio est arithmetica vel geometrica.

10. *Ratio arithmetica, est comparatio*

in quantitate, qua numerus differt á numero.

Ut ratio arithmetica 2 cum 2 est æqualitatis, 2 cum 3 est differentia. 1, 2 cum 5 est differentia 3. Ideoque hæc ratio differentia dicitur.

Cap. 2. de numeratione rationum.

II *Ratio geometrica est comparatio in quantitate, qua numerus est divisus in numerum.*

Hic præcipuè ratio dicitur: dum verò rationis termini scribuntur, dux supernè, comes infernè notatur sic,

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & \end{array}$$

12 *Datis rationis terminis, genus divisione, datoque genere rationis, termini multiplicatione inveniuntur.*

Sic datis terminis 1 ad 1, 2 ad 2, ratio erit æqualitatis, quia æqualis æqualem semel dividit. Datis 4 ad 2, 6 ad 4, ratio erit inæqualitatis, illic dupla, hic sexquialtera, quia comes illic ducem bis, hic semel dividit, & dimidium superest. Dederis contra genus rationis, nempe ex illis quotis $(1 (2 (1 \frac{1}{2}$. Si numerus sit integer, habebis dncem,

ducem, cui 1 pro comite subjicies, sin fractus sit, multiplicabis integrum per nomen, factoque numerum partium simul addes, constitues ducem: comes autem ipse in numero permanet, ut in postremo exemplo: multiplica 1 per 2, & facto 2 adde 1, constitues 3 pro duce, rationisque termini erunt 1.

13. *Rationum communis numeratio est tanquam terminorum, ideoque eadem est quæ partium, atque ideó si comites sint iidem, soli duces spectantur, excepta multiplicatione, quæ tum duces, tum comites multiplicat.*

Sic è ratione dupla 4 ad 2 addita ad ratione triplam 6 ad 2, tota ratio est quintupla 10 ad 2. Sic ratione dupla 4 ad 2 subducta à ratione quintupla 10 ad 2, reliqua est ratio tripla 6 ad 2, exempla ita sunt,

4	6	10	item	4.	10	6
2	2	2		2	2	2

Sic ratio dupla 4 ad 2 multiplicans rationem triplam 6 ad 2, faciet ratione sextuplam 24 ad 4. Sic ratio tripla 9 ad 3 multiplicata per rationem quadruplam 8 ad 2, faciet rationem duodecuplam 72 ad 6. Exempla ita sunt.

4	6	24		9	8	72
			item			
2	2	4		3	2	6

Divide rationem duodecuplam 12 ad 1, in rationem triplam 3 ad 1, quotus erit 4, qui significat dividendam rationem quater in dividenda contineri, aut rationem quadruplam .4 ad 1 pro quota ratione inventi: sic ratio sedecupla 32 ad 2 divisa in rationem quadruplam 8 ad 2, relinquit quotam rationem quadruplam. Denique quotus hic est nomen quotæ rationis. Exempla ita sunt,

3	12	4		8	12	4
			item			
1	1	1		2	2	1

14 *Si comites sint diversi, opus erit reductione, de qua suo loco.*

Ergo hæc numeratio communis est in additione, subtractione, multiplicatione, divisione.

15 *Ratio inæqualitatis reducitur ad rationem æqualitatis multiplicatione suæ conversa.*

Ut ratio $\frac{2}{3}$ multiplicetur per rationem $\frac{3}{2}$, fiet ratio $\frac{6}{6}$, quæ est æqualitatis.

Cap. 3. de generibus rationis.

Ratio prima est aut conjuncta, prima multiplex

plex aut superparticularis aut superpartiens.

16 *Multiplex est, quando terminus major dividitur á minore. §. d. 7.*

Sic omnis numerus multiplex est ad unitatē, ut 2 duplus, 3 triplus, 4 quadruplus, & sic in infinitum. Sunt enim generis hujus reliquorumque species infinitæ. Atque hic antecedens est multiplex, ut duplus, triplus, quadruplus, quintuplus, sextuplus. Cōsequens autem submultiplex, ut subduplus, subtriplus, subquadrupl^o, subquintuplus, subsextuplus. Hic etiam unitas numerus est, sicuti sæpe in tota comparationum doctrina, Species vetò sic notātur,

2	3	4	5	6
I	I	I	I	I

dupla, tripla, quadrupla, quintupla, sextupla.

Si submultiplex multiplici contra comparetur, minoris inæqualitatis erit ratio, & submultiplex dicetur, & antecedens minor erit, cōsequens major, ut in cæteris deinceps. Nomen siquidem rationis in minore qualibet inæqualitate, semper á majore termino capitur, addito, sub: sic igitur submultiplicis species notantur,

I	I	I	I
2	3	4	5
Subdupla, subtripla, subquadrupla, subquintupla			
I			
6			
subsextupla.			

Hæc prima inæqualitatis ratio, vera & propria divisione percipitur, reliquæ autem species imperfecta divisione cognoscuntur, perpetuoque pars aut partes relinquuntur.

17. *Superparticularis est, quando major dividitur semel á minore, & pars ejus superest.*

Si altera, sesquialtera dicitur, si tertia, sesquitertia, si quarta, sesquiquarta, si quinta, sexquiquinta, si sexta, sexquisepta, ut in subiectis exéplis patet.

3	4	5	6
2	3	4	5

Sexquialtera, sesquitertia, sesquiquarta, sesquiquinta.

7
6

Sesquisepta.

Ac si majores minoribus divides, quoti speciem rationis & nomen subtiliús explicabunt, ut hic vides,

$1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{5}$, $1\frac{1}{6}$.

Si minor majori in hac specie comparatur, ratio subsuperparticularis dicitur: res sic erit,

2	3
3	4
Subsesquialtera,	Subsesquitertia.
4	5
Subsesquiquarta,	Subsesquiquinta.
5	6
6	7
Subsesquisepta.	

Ubi

Ubi quoti sunt prioribus similes.

18. *Superpartiens est, quando major dividitur semel á minore, & ejus partes aliquot supersunt.*

Si duæ, superbipartiens, si tres, supertripartiens, si quatuor, superquadrupartiens, si quinque, superquintupartiens, si sex, supersextupartiens, & addimus præterea nomen partis á comite, tertias, quartas, quintas, sextas, septimas, si comes sit 3, 4, 5, 6, 7. Itaque nomen speciale duplex hic erit; alterum é numero, alterum é nomine partium, ut,

5	7	9
3	4	5
Superbipart.	Supertripart.	Superquadrupart.
tert.	quart.	quint.
11		13
6		7
Superquintupart.		Supersextupart.
sext.		sept.

Quorum quoti speciem indicantes sunt,

$1\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{5}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{6}{7}$. Si cõparetur in hoc tertio genere minor majori, superbipartiens dicitur, & contrario modo notatur, ut,

3	4
5	7
Subsuperbipart.	Subsupertripart.
tert.	quart.

$\frac{5}{9}$ Subsuperquadripart, quint.	$\frac{6}{11}$ Subperquintupart, sext.
--	--

$\frac{7}{13}$
 Subsuperseptupart.
 septimas.

Conjuncta ratio est multiplex superparticularis, aut multiplex superpartiens.

19 *Multiplex superparticularis est, quando major sæpius dividitur à minore, & ejus pars superest.*

Uc,

$\frac{5}{2}$ Dupla sesquialtera.	$\frac{7}{3}$ Dupla sesquitercia.
--------------------------------------	--------------------------------------

$\frac{9}{4}$
 Dupla sesquiquarta.

Et sic deinceps, ut, 11 ad 5, dupla sesquiquinta, 13 ad 6, dupla sesquisexta, quarum quoti sunt,

$2\frac{1}{5}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{5}, 2\frac{1}{6}$

Sic tripla superparticularis.

7	10	13	16	19	22	25
2	3	4	5	6	7	8

Rationum quoti sunt.

$3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, 3\frac{1}{4}, 3\frac{1}{5}, 3\frac{1}{6}, 3\frac{1}{7}, 3\frac{1}{8}$

At

At si contrá minor majori comparetur (sub) utrique speciali nomini præponendum: ut ratio $\frac{2}{3}$ est subdupla, subseſquialtera, ratio $\frac{2}{7}$ est subdupla, subseſquitertia, &c.

20. *Multiplex superpartiens est, quãdo major sæpiùs dividitur á minore, & ejus partes supersunt.*

Ut,

8	12
3	5
Duplasuperbipart. tert.	Duplasuperbipar. quint.
16	20
7	9
Duplasuperbipart. sept.	Duplasuperbipart. non.

24

11

Duplasuperbipart.
undec.

Quori rationum.

$2\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{7}$, $2\frac{2}{7}$, $2\frac{3}{11}$.

Cap. 4. de primis differentiis
proportionis.

Ratio adhuc fuit, sequitur proportio.

21 *Portio est similitudo rationum.*

Ejusque perinde valet inversio & alternatio.

22. *Proportionis inversio, est assumptio consequentis, velut antecedentis ad antecedentem velut consequentem.* 13.d.5.

Ut si dixeris, ut sunt 2 ad 4, sic 3 ad 6: Ergo, inquam, ut 3 ad 6, sic 2 ad 4: item ut 6 ad 3, sic 4 ad 2. Denique ut 4 ad 2, sic 6 ad 3, id ἀνὰ πάλιν est Euclidi.

23. *Proportionis alternatio est assumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.* 11. & 12.d.5.

Ut si dixeris, ut 5 ad 10, sic 4 ad 8: ergo, inquam, ut 5 ad 4, sic 10 ad 8. Id ἐναλλάξ est Euclidi. Proportio est disjuncta vel continua.

24. *Proportio disjuncta, est proportio terminorum disjunctorum.*

Ut 6 ad 12, sic 7 ad 14. hic termini quatuor sunt diversi.

25. *Proportio continua, est proportio ejusdem termini secundi & tertii.*

Ut 2 ad 4, sic 4 ad 8: hic duæ rationes uno termino continuantur.

Cap. 5. de proportione arithmetica disjuncta.

Proportio est arithmetica aut geometrica.

Propor-

26. *Proportio arithmetica, est similitudo differentiarum.*

Ut in 8, 6, 12, 10, utrobique enim est 2, pro differentia etiam inverso modo: ut enim 10 ad 12, sic 6 ad 8, vel ut 12 ad 10, sic 8 ad 6: una enim differentia 2 est. Item alterno modo, ut 8 ad 6, sic 12 ad 10. Ergo ut 8 ad 12, sic 6 ad 10. Proportionis arithmetice inventio varia est, prima est additionis.

27. *Si quatuor numeri sint arithmetice proportionales, extremus simul uterque erit equalis medio simul utrique.*

Ut in 2, 3, 4, 5: utrobique enim est 7. Sic in 12, 10, 6, 4: utrobique enim est 16. Secunda est multiplicationis.

28. *Si sint quatuor numeri arithmetice proportionales, factus á mediis superabit factum ab extremis, factó á differentia maximi á medio, per differentiam eiusdem medii á minimo.*

Ut in 12, 10, 8, 6, factus ab extremis est 72, quem 80 factus á medio, superat 8, factó á 2, differentia primi supra medium, per 4 differentiam eiusdem medii á minimo. Sic in 12, 10, 4, 2, factus ab extremis est 24, quem 40, factus á me-

dius superat 16, factò á 2 differentia primi á medio, per 8 differentiam eiusdem medii á minimo, Termini tamen rectè constituèdi, ut medii sint medii quantitate. Neque hïc dices ut 12 ad 8, sic 16 ad 12, sed vt 8 ad 12, sic 12 ad 16.

Cap. 6. de proportione arithmetica continua, ejusque progressionè.

E disjuncta proportione Arithmetica, affectio continuè deducitur.

28. *Si sint tres numeri arithmetice proportionales, medius erit dimidius extremi simul utriusque.*

Ut in 3, 5, 7. Nam 3 & 7 sunt 10, quorum dimidius est 5. Hinc patet inventio medii arithmetici.

30. *Si sint tres numeri arithmetice proportionales, factus á medio, superabit factum ab extremis factò á differentiis.*

Ut in 3, 6, 9, factus ab extremis est 27, quem 36 factus á medio, superat 9 factò á differentiis 3 & 3.

31. *Proportionis arithmetice continuæ termini quantumlibet continuari possunt, & progressio arithmetica vulgò dicitur.*

In ea quæri solet terminorum differentia, numerus,

merus, primus, ultimus & summa, quæ datis tribus inveniuntur.

32. *Si primus fuerit subductus ab ultimo, reliquusque divisus in numerum terminorum unitate minutum, quotus erit differentia.*

Ut progressionis quinque terminos habentis sunt primus & ultimus terminus 2 & 10, numerus autem terminorum 5, tolle igitur 2 primum à 10 ultimo, restant 8, quibus in quatuor numerum terminorum unitate minutum divisus, quotus erit 2 pro differentia, per quam à 2 primo termino inuenies reliquos terminos 4, 6, 8, usque ad 10 ultimum, totaque progressio erit 2, 4, 6, 8, 10.

33. *Si primus fuerit subductus ab ultimo, reliquusque divisus in differentiam, quotus unitate auctus, erit numerus terminorum.*

Ut in eodem exemplo, tolle 2 à 10, manent 8, quibus divisus in 2 differentiam, quotus est 4, cui adde 1, habes 5 numerum terminorum.

34. *Si unitas fuerit subducta à numero terminorum, factusque à reliquo per differentiam subductus ab ultimo, reliquus erit primus.*

Ut in eodem exemplo, tolle 1 á 5 numero terminorum, & 4 reliquum multiplica per 2 differentiam, & factum 8 tolle á 10 ultimo, reliquus 2 est primus.

35. *Si unitas fuerit subducta á numero terminorum, factusque á reliquo per differentiam additus primo, totus erit ultimus.*

Ut in progressionē, 1, 4, 6, 8, 10, numerus terminorum est 5, á quo tollatur 1, & per 4 numerū terminorum unitate minutum, multiplica per 2 differentiam, & 8 facto adde 2 primum terminū, totus erit 10 ultimus terminus progressionis.

36. *Si numerus fuerit factus ex additis extremis per dimidium numeri terminorum, vel á numero terminorum per dimidium additorum extremorum, erit summa progressionis.*

Ut in 2, 4, 6, 8, 10, 12, extremis additis 2 & 12, totus 14 per 3 dimidium multiplicatus, facit 42 summam quæsitam. Fac numerum terminorum imparē, ut in 2, 4, 6, 8, 10, extremis additis totus est 12, cujus dimidius 6 per 5 numerum terminorum multiplicatus, facit 30 summam.

Cap. 7. de proportione geometrica, deque inventionē proportionalium & inæqualium.

Ad

Adhuc proportio arithmetica fuit, geometrica sequitur.

37. *Proportio geometrica est similitudo rationum. 4. d. 5.*

Hic propriè proportio dicitur.

38. *Proportionales sunt, qui habent eandem rationem. 7. d. 5.*

Veluti 9 ad 3, sicuti 12 ad 4, ratio utrobique est tripla, ideoque 9, 3, 12, 4, sunt proportionales.

39. *Si numeri fuerint æquales, erunt proportionales ad eundem, & idem erit proportionalis ad æquales. 7. p. 5.*

40. *Et si numeri fuerint proportionales ad eundem, erunt æquales, & ad quos idem fuerit proportionalis, & illi erunt æquales. 9. p. 5.*

Ut 2 & 2 sunt proportionales ad 3 : ut enim 2 ad 3, sic 2 ad 3. itemque 3 ad 2, & 2 est proportionalis : ut enim 3 ad 2, sic 3 ad 2, contraque 2 & 2 cùm sint proportionales ad 3, sunt æquales. Itè 2 & 2 æquales, ad quos 3 est proportionalis.

41. *Si duo numeri fuerint inæquales, major habebit ad eundem majorem rationem, quàm minor, & idem ad minorem*

habebit majorem rationem quàm ad majorem. 8. p. 5.

42. *Et si duo numeri habuerint ad eundem rationem inaequalem, qui habuerit majorem, erit major, ad quẽ autem idem habuerit majorem rationem, erit minor.*

20. p. 5.

Ut 3 & 4 sunt inæquales, & 4 ad 2 majorem rationem habet, nempe duplam, quàm 3 ad eundem, nempe sesquialteram: item 2 ad 3 majorem habet rationem, nempe sesquialteram, quàm ad 4 subduplam. Conuersum patet in eodem exemplo,

Cap. 8. de inuentione proportionalium per multiplicationem, deq; reductione partium ad cognomines & proportionales.

43. *Minores æquẽ majoribus sunt proportionales. 15. p. 5.*

Ut 2 ad 4, sic 3 ad 6. Antecedentes enim dimidii sunt consequentium: datis autem minoribus, majores proportionales inveniuntur multiplicatione.

44. *Si numerus numeros multiplicet, facti*

*facti erunt proportionales multiplicanti-
bus. 18. p. 7.*

Ut 2 multiplicet 3 & 4, facti erunt 6 & 8 pro-
portionales multiplicatis 3 & 4. Item 3 & 4 mul-
tiplicent 2, facti iidem 6 & 8 erunt iidem pro-
portionales multiplicantibus, 3 & 4, quia utro-
bique æquæ majores sunt minoribus,

Reductio partium ad cognomines & propor-
tionales é proximo multiplicationis theoremate
deducitur, atq; ut proportionales ipsi addantur,
subducantur, dividantur necessaria. Proportio-
nales enim partes sunt eadem quátumlibet ter-
minis dissimiles, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{8}$.

46. *Partium reductio ad cognomines
& proportionales partes, est multiplica-
tio nominis & numeri per alterũ nomen.*

Ut in $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, multiplica 2 & 3 per 4, item 3 &
4 per 3, facies cognomines & proportionales par-
tes $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$ proportionales quidem, quia nume-
rus idem duos multiplicavit: cognomines veró
& æqualium nominum, quia sunt é duobus nu-
meris inter se multiplicatis.

47. *Nomina reductioe eadem facta,
ad divisionem nihil attinent.*

Nam cùm reduxeris partes $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ ad $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$,
dicere $\frac{8}{12}$ toties é $\frac{9}{12}$ subduci nihilo plus est
quàm dicere 8 toties á 9. Itaque nominum inter

se multiplicatio hic in divisione omittitur. At si series reducendarū partium longior fuerit, binæ reducendæ sunt, ut in $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$, prima reductione atque hinc additione facta, habebis $\frac{17}{60}$: deinde cum $\frac{1}{5}$ reductæ sunt $\frac{85}{300}$, $\frac{48}{300}$.

48. *Eadem via reductionis, cognoscetur é binis partibus utræ sint majores.*

Ut $\frac{1}{6}$ sunt majores quàm $\frac{1}{2}$, quia facta reductione habebis $\frac{10}{14}$ pro $\frac{1}{2}$: At habebis tantum $\frac{18}{14}$ pro $\frac{1}{4}$.

49. *Eadem via termini rationum fracti ad integros proportionales redeunt, si numeri multiplicentur per nomen unarum partium.*

Sic $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ multiplicatæ per 4, redeunt ad $\frac{8}{4}$, $\frac{12}{6}$, id est ad 2 & 2 integros, & eandem rationem habentes quam habent $\frac{2}{3}$ ad $\frac{1}{2}$. Si majores terminos proportionales requiras, multiplica rursus $\frac{8}{4}$ & $\frac{12}{6}$ per nomen 4, facies $\frac{32}{4}$ & $\frac{48}{6}$, id est, 8 & 8, vel multiplica per 6, facies $\frac{48}{4}$ $\frac{72}{6}$, id est 12 & 12 integros proportionales datis fractis $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{6}$.

Idem erit, si cum integris fracti misceantur, ut si pro $3\frac{1}{2}$ & $4\frac{1}{3}$ quærantur integri proportionales, multiplicabis $3\frac{1}{2}$ per 2, facies 7: deinde multiplicabis $4\frac{1}{3}$ per idem nomen, facies $8\frac{2}{3}$, neque dum habes ambos integros, sed alterum tantum, Eadem itaque via quærat alter: igitur
per

per reliquum nomen 3, multiplica $8\frac{2}{3}$, facies 24 & $\frac{4}{3}$, unde colliges 26, tandemque habebis 21 & 26 integros proportionales $3\frac{1}{3}$ $4\frac{2}{3}$.

Cap. 9. de inventionē proportionalium per
divisionem, deque reductione ad
minimos.

Datis verò majoribus numeris, minores inveniuntur regula divisionis per contrariam é lege multiplicationis deducta.

50. *Si numerus dividerit numeros, quoti erunt proportionales divisis.*

Ut 2 dividat 8 & 6, quoti 4 & 3, erunt proportionales divisis 8 & 6: At 4 & 3 dividant 24, quoti 6 & 8, erunt proportionales divisis, sed contrario genere inæqualitatis. Non enim ut 4 ad 3, sic 6 ad 8, illic enim est ratio sesquitertia, hic sesquialtera, sed ut 4 ad 3, sic 8 ad 6. proportionales fiunt divisione non solum minores divisis, sed minimi proportionalium.

51. *Si numeri fuerint minimi proportionalium, erunt primi inter se. 23. p. 7.*

52. *Et si fuerint primi inter se, erunt minimi proportionalium. 24. p. 7.*

Ut 3 & 2 sunt primi & minimi sesquialterorum, & quia sunt minimi proportionalium, ic-

circò sunt primi.

53. *Si maximus communis divisor dividerit datos, quoti erunt minimi proportionales datis.* 35.p.7.

Ut hic,

$$\begin{array}{r} 8 \qquad 12 \\ 4 \overline{) } \\ \underline{4 } \\ 2 \qquad 3 \end{array}$$

4 maximus divisor cùm dividerit 8 & 12, quoti 2 & 3 erunt proportionales minimi, unde etiam sequitur.

54. *Si duo numeri fuerint minimi proportionalium, dividant sibi proportionales æqualiter, majormajorem, & minor minorem.* 21.p.7.

Ut patet in eodem exemplo; 3 dividit ipsum 12 quater, & 2 dividit ipsum 8 toties. Habet autem ista ad minimos reductio usum tam necessarium, quàm est facile pares numeros præ magnis numerate. Itaque providendum semper est, ut primi numeri & minimi perpetuò proponantur, aut si compositi dati sint, protinus reducantur ad minimos per maximum communem divisorem. Serviet etiam superiori proportionalium reductioni reductio ad minimos terminos, ut postea reductorum terminorù alia reductio prolixior evitetur. Sed reductio ista per species numerationis est etia quædam specialis

55. In additione & subductione minimus á nominibus divisus est assumendus pro communi nomine & numeri multipli-
candi alterné per partes cognomines.

Ut hic vides,

$$\begin{array}{r} \underbrace{6} \quad \underbrace{4} \\ \frac{2}{7} \quad \frac{4}{7} \\ \times \quad \frac{4}{7} \\ \hline \frac{6}{9} \end{array} \text{ubi pro } \frac{1}{7}, \text{ \& } \frac{4}{7} \text{ habes } \frac{6}{9}, \text{ \& } \frac{4}{9}.$$

56 In multiplicatione numerus & no-
men alterius reducuntur.

Quia sunt multiplicatores, idemque est mul-
tiplicate $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{6}$, & $\frac{1}{6}$ per $\frac{1}{3}$. Itaque tanquam $\frac{1}{6}$
rediges ad $\frac{1}{3}$, & pro $\frac{1}{18}$, facies $\frac{1}{9}$.

57. Si numerus nomini alterno fuerit
æqualis, reliquus numerus reliquo nomini
superpositus multiplicationem absolvit.

Ut in $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ omissis 3 & 3, habes $\frac{1}{4}$, id est, $\frac{1}{12}$.
Quin si longa hic series fuerit, æqualibus omni-
bus omissis, reliquus numerus cum reliquo no-
mine multiplicationem absolvit, ut hic,

$$\frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{6}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \text{ est } \frac{1}{9}.$$

58. In divisione numeri inter se, vel no-
mina inter se, vel utraque separatim re-

ducuntur.

Ut si $\frac{4}{7}$ dividantur per $\frac{2}{3}$, pro 2 & 4, sumes 1 & 2, & quota pars erit $\frac{6}{7}$, vel $1\frac{1}{7}$. Item si divides $\frac{1}{2}$ per $\frac{4}{5}$, sumes 2 & 3 pro 9 & 6, & facies $1\frac{1}{2}$, vel $1\frac{7}{4}$. Item si $\frac{8}{7}$ per $\frac{4}{5}$, sumes 8 & 2 pro 4, & 8 pro 9 & 27, 1 & 3, & quota pars erit $\frac{1}{3}$.

Cap. 10. de regula aurea proportionis disjunctæ, & inde quarti proportionalis inventione.

Proportio est prima aut conjuncta.

59. *Proportio prima, est proportio disjuncta tantum, aut continua tantum.*

60. *Proportio disjuncta est, quando quæ ratio est primi termini ad secundum, eadem est tertii ad quartum.*

Ad proportionem disjunctam prima erit inventio quarti proportionalis per multiplicationem simul & divisionem, quæ inventio propter singularem excellentiam vulgò aurea regula nominatur.

61. *Si quatuor numeri sint proportionales, factus ab extremis erit æqualis factus à mediis: & si factus ab extremis sit æqualis factus à mediis, quatuor numeri e-*

runt

runt proportionales. 19.p.7.

Ut in 4, 2, 6, 3, factus 12 ab extremis 4 & 3, est æqualis 12 facto à mediis 2 & 6. Ideoque etiam numeri quatuor positi sunt proportionales. Hinc sequitur.

62. *Si datis tribus numeris primus dividerit factum à secundo & tertio, quotus erit quartus proportionalis. 19.p.9.*

Ut in 2, 4, 6, quartus proportionalis est 12.

63. *In hujus regulæ quæstionibus præcipué spectandus est ordo terminorum.*

Ut nempe primus primo loco sit, & cæteri suo. Itaque si confusius, ut solet, quærat, redigantur tamen in ordinem termini: Ut, quot horæ sunt in 6 diebus, cum in 3 sint 72? Hic quæstio est tertii termini, quæstionisque proportio sic expeditur 3, 72, 6, 144.

64. *Si confundantur res heterogeneæ, reducendæ sunt priús ad idem genus.*

Ut si quærat, hebdomada horas habet 168, dies 4 quot horas habent? Pro hebdomada ponantur 7 dies, & tum dic, 7 dies dant horas 168, 4 dies, quot horas dabunt? repeties 96.

65. *Si termini rationis comprehendantur dato nomine rationis, antè sunt explicandi.*

Ut ad quem numerum 12 est quintuplus? Pone pro primo & secundo termino terminos minimos quæ sitæ rationis 5 & 1, & dicito, ut 5 ad 1, sic 12 ad $2\frac{2}{5}$. Atque hoc modo cuilibet termino terminus rationalis, qua voles rationis specie reperietur. Sic enim idem 12 sesquiquartus erit ad $9\frac{3}{4}$ superbipartiens tertias, ad $7\frac{1}{7}$ duplus sesquiquartus, ad $5\frac{3}{5}$, id est, $\frac{1}{5}$, duplus supertripartiens quintas ad $4\frac{2}{5}$. Exempla sunt cum specie rationum terminos includente: sic,

$5,$	$5,$	$1,$	$12,$	$2\frac{2}{5}$
I				
$1\frac{1}{4},$	$5,$	$4,$	$12,$	$9\frac{3}{4}$
$1\frac{1}{5},$	$5,$	$3,$	$12,$	$7\frac{1}{7}$
$2\frac{1}{4},$	$9,$	$4,$	$12,$	$5\frac{3}{5}$, id est $\frac{1}{5}$
$2\frac{2}{5},$	$13,$	$5,$	$12,$	$4\frac{2}{5}$.

66. *Si quid antecesserit questionem, antè explicandum est.*

Centum libras emi 10 aureis, vendidi 12, quarum lucri fuisset ex aureis 100? Primò videbis lucrum 10 aureorum esse aureos 2. Tum igitur per auream regulam dicito: 10 dant 2, ergo 100 dabunt 20. Item si libra 3 aureis empta, venderetur tantum 2, quanta esset jactura ex aureis 100? Hic cum videris jacturam in 3 esse 1, tum dices 3 perdunt 1: ergo 100 perdunt $33\frac{1}{3}$. Sic sæpe multarum rerum additio facienda, priusquam proportio concludatur: ut, piperis pondo 1000 in Lusitania empta sunt nummis 10000, proque his

his vectigal pensitatū nummis 1000, naulum per Rhotomagum usque fuerit 300. Ibi deinde vectigal 500, vectura 200 : accesserit ministrorum impensa 2000, vis in singulas libras lucrari 4, id est, pro rota summa 4000? Adde illa omnia, summa erit 18000. Iam dicito, 1000 pondo dant impensas 18000 : ergo 1 dat 18.

Puterius quidam puteum brachiorum 34 redemit effodiendum libris 60 cum victu geminarum operatum. Effossis autem brachiis 20, ægrotare cœpit, patremque familias mercedē debitam rogavit, quanta igitur ea est? Hic victus nihil variat, sed arithmeticæ progressionis usus hic est antè proportionis geometricæ conclusiōnem. Nam secundum brachium, laborem primū continet & tertium utriusque, & sic deinceps arithmetica gradatione labor crescit. Itaque summa integræ progressionis brachiorum est 595. At summa progressionis 3, 4, 20 brachiorū est 210. Jam ad proportionem conclude, ut 595 ad 60, sic 210 ad 21 $\frac{10}{9}$, vel $\frac{2}{3}$.

Cap. II. de reductione quadruplici ex inventionione quarti proportionalis.

Ex aureæ regulæ consecratio quadruplex reductio oritur partium ad datum nomē, integrorum ad partes, partium ad integros, particulare ad partes.

67. *Reductio partium ad datum nomen, est multiplicatio reducendi numeri per datum nomen, & facti divisio per reducendum nomen.*

Atque hic integra proportio est: ut si quæ-
ratur $\frac{3}{4}$ quot sunt $\frac{1}{12}$? Hic enim terminos tres
habes 4, 3, 12, unde quarto proportionali invē-
to, respondebis $\frac{3}{4}$ esse $\frac{9}{12}$. Idem verò est dicere,
 $\frac{3}{4}$ reductæ ad $\frac{1}{12}$, sunt $\frac{9}{12}$, item quætere, quot
sunt $\frac{1}{12}$ in $\frac{3}{4}$? Reliquæ reductiones compēdium
proportionis habent. In his enim proportionis
terminis aliquis deest. Itaque multiplicatio vel
divisio omittitur.

68. *Reductio integrorum ad partes, est multiplicatio integrorum per nomen partium unius integri.*

Ut si reducere velis 12 signa ad gradus, scis gra-
dum esse tricesimam partem signi, multiplicabis
igitur 12 per 30, & facies 360. Multiplicatio hic
tantum est, quia primus terminus est 1, quo nihil
dividitur. Quæstio autem sic esset é suis termi-
nis: 1 signum continet 30 gradus, 12 signa, quot
gradus continent? totaque proportio sic esset 1,
30, 12, 360.

69. *Reductio partium ad integros, est divisio partium per ipsarum nomen.*

Ut 360 gradus, quot valent signa? Scis gradum esse $\frac{1}{30}$ signi. Itaque divides 360 per 30, & habebis 12. Quæstio etiam sic esset: 30 gradus valent 1 signum, 360 quot valent? tumque proportio concluderetur: 30 gradus valent 1 signum, ergo 360 gradus valent 12 signa. Atque hic quia secundus terminus est 1, quo nihil multiplicatur, divisio tantum est necessaria. Proportio tota sic est 30, 1, 360, 12. Hac igitur utraque reductione, via patet reducendi aut eos ad asses, asses ad uncias: contraque uncias ad asses, & asses ad aureos, & monetæ cujuscunque genus in partes frangendi, partesque ad totum reducendi.

70. *Reductio particularum ad partes, est multiplicatio numerorum inter se, & nominum inter se.*

Sic $\frac{1}{4}$; redeunt ad $\frac{6}{12}$, id est $\frac{1}{2}$, & divisio hic, ut in reductione integrorum ad partes negligitur, quia 1 est primus terminus proportionis, & proportio hic duplex est, altera in numeris, altera in nominibus. Tota proportio sic est, $1 \frac{1}{4}$; $\frac{6}{12}$: ut enim 1 ad 3, sic 2 ad 6, item ut 1 ad 4, sic 3 ad 12. Constitutis autem proportionalibus, constat factum ab extremis æqualem esse facto à mediis, atque ob eandem proportionis causam videri possit multiplicatio partium & rationum nomen & comitem simul cum nomine & duce cōplecti: Si series longior fuerit, binæ partes sunt expediendæ, ut in $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$, primò facies $\frac{6}{12}$, id est

$\frac{1}{2}$. Deinde ex $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$ facies $\frac{1}{4}$. Idem autem fuerit dicere, $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{2}$, & $\frac{2}{3}$ & $\frac{2}{4}$ & $\frac{3}{4}$, vel $\frac{1}{4}$ & $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{2}$ quia idem numeri inter se multiplicati creant eosdem, & per hanc particularem reductionem, cognoscis quid sint particulae, cum vides quales sint partes totius. Eodem compendio partes integrorum cognoscantur, ut $\frac{2}{7}$ trigintaquinque aureorum sunt $\frac{70}{7}$, id est 10 aurei, tanquam quaereretur $\frac{2}{7}$ $\frac{35}{1}$.

Cap. 12. de variis quaestionibus
proportionis.

Instructis & paratis fractorum numerorum praecipis, proportionis usus multo expeditior erit, qualem compluribus & clarioribus exemplis lubet illustrare.

Persolveris aëris alieni $\frac{1}{3}$: deinde $\frac{1}{4}$, & restet 10 aurei, quantum erat totum aëris alienum? additæ partes sunt $\frac{7}{12}$: reliquum igitur est $\frac{1}{12}$, unde quaestionis proportio concluditur.

5 valent 10 aureos: ergo 12 valent 24.

Turtis $\frac{1}{3}$ in terra latet, $\frac{1}{4}$ demergitur sub aqua, reliqua pars 60 cubitis supra aquam eminent, quot igitur cubiti in terra? quot in aqua? Partes additæ sunt $\frac{7}{12}$, reliquum igitur $\frac{1}{12}$ valent 60: unde concludes,

5 valent 60: Ergo $\left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 3 \end{array} \right.$ $\begin{array}{l} 48 \\ 36 \end{array}$

Talis

Talis est quæstio duplex græcorum epigrammatum de statua Palladis.

Pallas ego sum malleata, sed aurum

Juvenum est, donum poëtarum.

Dimidiû quidê auri Charisius, octavam autê

Tespis, & decimam partem posuit Solon.

Sed vicesimâ Themison, reliqua veró talenta

Novem, & ars, donum Aristodici.

Adde partes, habebis $\frac{1}{4}\frac{1}{2}$. Itaque reliqua 9 ad cõplendum totum, valent 9 proposita. Hic accidit eundem esse numerum propositum & reliquum, ut aliud quærendum non sit. In proximo res alia est.

Augeam interrogavit magna virtus Alchide

Multitudinem armentorum quærens, ipse

veró respondit :

Circa quidem Alpei fluvium, amice, dimi-

dium quidem horum,

Pars autem octava, collem Saturni circũ-

pascuntur.

Duodecima autem secessit Taraxippi ad

montem:

Circa veró Elidê divinâ, vicesima pascũtur.

Verũm in Archadia tricesimam reliqui.

Reliquos autem videto greges, hic quin-

quaginta.

Additæ partes sunt $\frac{2}{11}\frac{1}{2}$. Itaque reliqua 25 ad ex-

plendum totum valent 50: Ergo 120 valent 240.

Pauló dissimiliter solvitur græci item epigram-

matis illa quæstio fratrum Zethi & Amphionis

matrisque Antiopes.

Ambo quidem nos viginti mnas trahimus

Zethusq; & germanus: at si de meo sumpteris
Tertiam & quartam Amphionis.

Sex omnia inveniēs, matris invenies pōdus.

Primūm simul utriusq; quæsitī numeri, id est 20, cape $\frac{1}{4}$, quæ nempe sit unius & alterius quæsitī $\frac{1}{4}$ communis ea erit 5: 6 autem matris numerus continet hanc communem $\frac{1}{4}$, & præterea unū, id est $\frac{1}{4}$ primi quæsitī numeri, ut perspicies tollendo $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$, unde proportio de primo numero quæsitō concludetur.

$\frac{1}{3}$ valet 1: ergo $\frac{1}{3}$, id est totus, valet 12.

Hic numerus Zethi, quo de 20 sublato, manet 8, numerus Amphionis. Nam $\frac{1}{3}$ de 12, item $\frac{1}{4}$ de 8, sunt 4 & 2, & simul uterque 6 numerus Antiopes. Idem verō concludi potest, sumendo primum $\frac{1}{3}$ ejusdem totius 20, id est 6 & $\frac{2}{3}$: 6 enim superatur ab eo $\frac{2}{3}$, id est $\frac{1}{3}$ secundi quæsitī, cujus $\frac{1}{4}$ quæritur, unde concludetur.

$\frac{1}{3}$ valet $\frac{2}{3}$: ergo 1 valet $\frac{3}{2}$, id est 8.

Hic numerus est Amphionis, quo de 20 sublato, restat 12 numerus Zethi.

Emisti dōlium vini aureis 8, lucrari vis duos, quanti pintam vendes? Doliūm continet pintas 288, aurei octo denariolos 4800, tum proportionem concludito.

288 pintæ valent 4800 denariolos, ergo

1 pinta valet $16\frac{2}{3}$, id est $\frac{50}{3}$.

Commuta 3 aureos in asses, quales 1 aureus valet

let 50, item in semisses, quadrantes, æquali singulorum generum numero, quot asses, quot semisses, quot quadrantes dabis? commuta; aureos in asses 50: deinde asses in minimam propositarum monetam, ut in quadrates, habebis 600, quales assis valet 4, semissis 2, quadrans 1. Hi valores 4, 2, 1, additi sunt 7, unde proportio concludetur.

7 continent semel singula quæ sita genera, ergo 600 continet octogies quinquagies cum $\frac{1}{7}$.

Eme 4 aureis æquali numero libras piperis, Zingiberis, amygdalarum, saccari, quot est singulis generibus libras habebis? Sume pretium unius libræ in singulis generibus, ut libra piperis 16 assibus vaneat, Zingiberis 18, amygdalarum 2, saccari 4, pretiis his additis, totus est 40, tum sume pro 4 aureis 184 asses, & proportionem concludere.

40 asses dant 1 libram singulorum generum, ergo 184 asses dant 4 libras & $\frac{1}{7}$ unius libræ. Hic si multiplices libris singulorum generum inventum pretium, restitues 184 asses. In sequentibus proportio alia quæ sitam antecedit.

Cursor Lutetia Lugdunum 5 diebus pervenit, cursor alius velocior, Lugduno Lutetiam idem iter triduo conficit, quando & ubi inter se occurrent? Præpone proportionem antecedentes.

Primus 5 diebus totum iter conficit:

Ergo 1 die conficit $\frac{1}{5}$ itineris.

Secundus 3 diebus conficit iter:

Ergo 1 die conficit $\frac{1}{3}$ itineris. Hæ partes

additæ sunt $\frac{3}{7}$ itineris, unde tota proportio concluditur.

$\frac{3}{7}$ itineris conficiuntur 1 die, ergo totum iter conficitur $\frac{1}{2}$ diei, id est 1 die, & sequentis $\frac{7}{2}$. hoc tempus est concursus, jam dicito,

Primus 5 diebus conficit totum : ergo $\frac{1}{2}$ diei conficiet $\frac{5}{4}$ itineris, id est $\frac{5}{4}$.

Secundus conficit 3 diebus totum : Ergo $\frac{1}{2}$ conficit $\frac{3}{4}$, id est, $\frac{3}{4}$. Locus igitur concursus erit ad $\frac{3}{4}$ itineris à primo confecti, & ad $\frac{5}{8}$ à secundo confecti.

Cursorum 2 Luteria Romam contendunt, sed primus 20 millia passuum quotidie conficit, secundus 33, primus 6 diebus præcessit, quando secundus assequetur? Imprimis collige per multiplicationem jam confectum iter, habebis 120 millia, tum sume 13 exuperantiam secundi, & dic. Secundus conficit 13 millia uno die supra primū, idem 120 millia, quot diebus supra eundem conficiet? quæstio sic est,

$$13, \quad 1, \quad 120, \quad 9 \frac{1}{7}.$$

Potator quidam solus exhaurit cadum vini 20 diebus : at cum unā potat uxore, 14 diebus exhaurit : quot igitur diebus uxor sola cadum exhauriet? Maritus 20 diebus exhaurit totum, ergo 14 diebus exhaurit $\frac{14}{20}$ vel $\frac{7}{10}$. Itaque uxor 14 diebus potat reliquū, id est, $\frac{1}{10}$. Jam dicito, uxor exhaurit 14 diebus $\frac{1}{10}$. Ergo $\frac{1}{10}$, id est totū : exhaurit 46 diebus & $\frac{2}{3}$ unius diei.

E 4 architectis ædificium totum absolueret
omnes

primus anno 1, secundus 2, tertius 3, quattus 4. Si omnes simul adhibeantur, quanto tempore absolvent? Secundus 2 annis absolvit totū opus: ergo 1 anno absolvet $\frac{1}{2}$ operis, tertius $\frac{1}{3}$, quartus $\frac{1}{4}$. Adde jam singulorū opus $1\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, habebis $\frac{11}{12}$, unde concludes: Quatuor architecti absolvent $\frac{11}{12}$ ædificii 1 anno, ergo iidem absolvent $\frac{12}{11}$ vel totum $\frac{12}{11}$ unius anni, id est 5 mensibus, & $\frac{10}{11}$ unius mensis.

E duobus architectis primus absolveret 30 diebus, secundus 40, tertio autē addito 15 diebus absolvunt, quot diebus tertius solus effecisset? Primus 30 diebus absolveret totum: ergo 15 diebus absolvet $\frac{15}{30}$ ædificii, id est $\frac{1}{2}$, secundus $\frac{15}{40}$, id est $\frac{3}{8}$, quæ additæ sunt $\frac{7}{8}$. Itaque tertius effecisset $\frac{1}{8}$ illis 15 diebus. Jam denique dicito: $\frac{1}{8}$ conficitur 15 diebus: ergo $\frac{8}{1}$, id est totum, efficitur 120 diebus.

Item, Unius moletrinx tres molæ molunt 12 horis modios, prima 18, secunda 13, tertia 8, quot horis univæ molent modios 24? & quantum singulæ? Adde primūm 18, 13, 8, facies 39, prima quæstio sic erit 39, 12, 24.

Dices igitur 39 modii moluntur 12 horis: ergo 24 moluntur horis $7\frac{1}{3}$. Tum de tribus molis triplex erit quæstio: prima sic. Prima mola molit 12 horis 18 modios: Ergo prima mola horis $7\frac{1}{3}$, quot modios molet? dicito: 12 dant 18: ergo $7\frac{1}{3}$ dabunt 11 $\frac{1}{3}$.

In secunda & tertia dicito,

12 dant 13: ergo $7\frac{1}{3}$ dabunt 8. item

E

12 dant 8: ergo $7\frac{1}{3}$ dabunt $4\frac{2}{3}$.

Fons duas fistulas habet, prima implet lacum horis 4, si sola fluat, secunda vacuat horis 11, si illa obstructa sit: Si uná fluant, quot horis implebitur lacus? Distinguito proportionem antecedentes, & dicito,

4 horæ implet lacum: ergo 1 hora implet $\frac{1}{4}$ lacus. deinde

11 horæ vacuant lacum, ergo 1 hora vacuat $\frac{1}{11}$ lacus. Jam ut sola impletio maneat, tolle $\frac{1}{11}$ ab $\frac{1}{4}$, restabunt $\frac{7}{44}$ lacus, quæ implentur 1 hora, inde quæstionis proportio concludetur.

$\frac{7}{44}$ lacus implètur 1 hora: ergo $\frac{44}{7}$ implentur $\frac{44}{7}$ horæ, id est 6 horis & $\frac{2}{7}$ unius horæ. Sed quia nominum in divisione nulla est ratio iis rejectis, & in hoc & in cæteris omnibus exemplis, expeditiús concludes. Statues igitur proportionem huius terminos hoc modo,

7, 1, 44, $\frac{44}{7}$, id est 6 $\frac{2}{7}$.

Lacus fontis tres fistulas habet, quarum prima vacuat lacum $\frac{1}{4}$ horæ, secunda $\frac{1}{2}$, tertia hora integra, quanto tempore fluètes simul omnes vacuant lacum? Dices hic ut antea.

$\frac{1}{4}$ horæ vacuat semel, ergo 1 hora vacuat quater. Itaque $\frac{1}{2}$ vacuat bis, 1 hora semel, adde has vices, habes 7, & dicito,

Lacus vacuatur septies 1 hora, ergo vacuatur semel $\frac{1}{7}$ horæ, termini ita sunt,

7 1 1 $\frac{1}{7}$.

Leo fontis 4 fistulas habet, quarum prima imple

plet subiectum lacum 2 4 horis, secunda 36, tertia 48, quarta 6: Si simul fluant, quot horis implebunt? facito proportiones antecedentes,

2 4 horæ implent totum, ergo 1 implet $\frac{1}{4}$ lacus.

3 6 horæ implent totum: ergo 1 implet $\frac{1}{6}$ lacus: 4 8 horæ implent totum: ergo 1 implet $\frac{1}{8}$ lacus.

6 horæ implent totum: ergo 1 implet $\frac{1}{6}$ lacus.

Adde jam partes impleti lacus 1 hora, habebis $\frac{1}{44}$, quales 144 totum faciunt, reiectis itaq; iisdem nominibus, dices,

3 7 partes lacus implentur 1 hora: ergo 144, id est totus, impletur 3 horis & $\frac{1}{4}$ unius horæ.

Cap. 13. de proportione disjuncta,
inversa.

Proportio disjuncta directa adhuc fuit, qua inversa utendum est, quoribus rerum comparatarum proportio ejusmodi est, ut quanto magis alix crescant, tanto magis alix minuantur. Itaque primus terminus hic pro quarto quaerendus est.

Amphora sufficit 3 dies 30 convivis, 6 dies; quot convivis sufficiet? termini quaestionis ita sunt, 3, 30, 6. Factus autem à primo & secundo est 90, quo diviso in 6, quotus erit 15 pro primo inverso, tota proportio sic est, 15, 3, 30, 6.

Commearus suppetit 7 menses 3000 obsessis militibus: 12 menses, quot obsessis suppetet? termini proportionis ita sunt,

1750, 7, 3000, 12.

Cúm modius tritici vænit 5 auteis, tum panis quadrantis est 4 unciarum: ergo cúm vænit 3, panis erit unciarum $6 \frac{2}{7}$, & hic primus terminus directæ proportionis est quartus.

Pannus latus 6 ulnas, longus 7, vestiendus est æquali panno lato 3 ulnas, longitudo igitur erit 14 ulnarum.

15 boves arant decem jugera 8 diebus, quare 20 boves 10 jugera arabunt diebus 6. In iis quaestionibus res eadem iterata proportionis terminum nullum facit, tanquam de agro aliquo ageretur, & ita concluderetur,

15 boves arant 8 diebus, quare 20 arabunt 6.

Tale est Aristotelis exemplum 1 cap 1. de cœlo, cúm ait, Proportionem quam habent pondera, tempora, ἀνάπαλλιν, id est inverso modo habebunt, ut si dimidium pondus in tali, duplum in dimidio hujus. Esto igitur Aristotelea proportio. Pondus 20 librarum descendit certum spatium horis 2, pondus igitur 40 librarum, idem spatium descendet hora 1. Proportionis termini ita sunt, 1, 20, 2, 40.

Trium mercatorum primus contulit aureos 60 per 6 menses, secundus autem per 7 menses, tertius per 5 sortem nescio quam contulerint, lucrum autem fuerit singulis aureorum 30: quanta est fors secundi, quanta tertii? Dicitur: 6 menses lucrantur 30 ex 60, ergo lucrantur tantundem 7 menses ex $51 \frac{2}{7}$, & 5 menses ex 72.

Caput

Caput 14. de additione proportionis.

Hactenus proportionis disjunctæ doctrina fuit tum directæ tum inversæ, propria differentia sequitur ex additione & duplicatione terminorum.

71. *Additio proportionis est additio terminorum.*

Estque duplex.

72. *Additio proportionis prima est assumptio antecedentis & consequentis ad consequentem. 14.d.5.*

Ut 2 ad 4, sicut 3 ad 6: ergo 2 & 4, id est 6 ad 4, ut 3 & 6, id est 9 ad 6.

73. *Additio proportionis secunda, est assumptio omnium antecedentium ad omnes consequentes. 12.p.7.*

Ut 2 ad 4, sic 3 ad 6: ergo 2 & 3, id est 5 ad 4 & 6, id est 10, ut 2 ad 4.

Hæc secunda proportionis additio propter quotidianum usum in cōsortio & societate mercatorum vulgò regula societatis appellata est. Quare ejus utilitas pluribus exemplis est illustranda.

Duorum sociorum primus contulit aureos 8, secundus 6, unde lucrati sunt aureos 7, quantum

singulis accedit? Quæstio additis antecedentibus ita solvetur:

	8	4,
14 dant 7 : ergo		
	6	3.
& contra fors concluditur.		
	4	8
7 dant 14 : Ergo		
	3	6

Tres mercatores contulerunt aureos, primus 90, secundus 60, tertius 50, lucratique sunt aureos 100, quantum singulis accedit? Adde antecedentes, ut antea, & concludere,

	90	45
200 dant 100 : ergo	60	30
	50	25

Contrá singulares sortes ex additis consequentibus concludentur:

	45	90
100 dant 200 : ergo	30	60
	25	50

Octo creditoribus debentur aurei, primo 15, secundo 24, tertio 32, quarto 54, quinto 60, sexto 75, septimo 86, octavo 100: Sed bona debitoris tantummodo valent aureos 150. Itaque omnibus omnino satisfieri non potest. Ad proportionis igitur æquitatem recurreretur: quantum singulis pro rata bonorum portione persolveretur? Ex additis antecedentibus ita concludes,

	15	5	$\frac{20}{446}$
	24	8	$\frac{12}{446}$
	32	10	$\frac{8}{446}$
	54	18	$\frac{5}{446}$
446 dant 150 : ergo	60	20	$\frac{4}{446}$
	75	25	$\frac{3}{446}$
	86	28	$\frac{2}{446}$
	100	35	$\frac{1}{446}$

Aurei 200 tribus ea conditione partiendi, ut primus triplo plus habeat quam secundus, & secundus quadruplo quam tertius. Hic ab extremo incipe. Si tertius habeat 1, secundus habebit 4, & primus 12, quibus additis, conclude,

	12	141	$\frac{1}{17}$
17 dant 200 : ergo	4	47	$\frac{1}{17}$
	1	11	$\frac{1}{17}$

Hæreditas 3000 legata quinque fratribus ea cõditione, ut obveniat primo $\frac{1}{2}$, secundo $\frac{1}{3}$, tertio $\frac{1}{4}$, quarto $\frac{1}{5}$, quinto $\frac{1}{6}$. Id, uti proponitur, fieri nõ potest, quia datæ partes superant totum. recurratur igitur ad æquitatis proportionem, & numerus inveniatur, qui minimus habeat datas partes. Hic enim est usus talis numeri, quoties datæ partes totum superant, & inventi partes inveniantur datis illis cognomines, quæ æqualiter quinque fratribus æsem partiantur. Minimus verò divisus à datis partibus est 60, cujus partes, partibus illis datis cognomines sunt. 30, 20, 15, 12, 10. Has igitur partes adde, & dic per auream regulam,

	30	1034	$\frac{4\frac{1}{2}}{7}$
	20	687	$\frac{17}{7}$
87 dant 3000: ergo	15	517	$\frac{2\frac{1}{2}}{7}$
	12	413	$\frac{62}{7}$
	10	344	$\frac{7\frac{1}{2}}{7}$

Tres partiuntur 100 ea conditione, ut primus capiat $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, secundus $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{7}$, tertius $\frac{1}{7}$ & $\frac{1}{2}$. Id item, sicuti proponitur, fieri non potest, quia partes totum superant. Æquitas ergo proportionis adhibeatur. Itaque sumes primò minimum divisum 60, cujus divisores datis partibus cognomines sunt 20 & 15 pro primo, 15 & 12 pro secundo, 12 & 10 pro tertio, quibus primùm separatim additis, sunt 35, 27, 22. Deinde simul sunt 84: conclude igitur,

	35	41	$\frac{2}{3}$
84 dant 100: ergo	27	32	$\frac{1}{7}$
	22	26	$\frac{4}{7}$

Quatuor sic partiuntur 600 aureos, ut primus habeat $\frac{2}{3}$ & 9 aureos, secundus $\frac{2}{7}$ & 8, tertius $\frac{1}{7}$ & 7, quartus $\frac{1}{7}$ & 6. Hic item partes majores sunt toto. Ad illud igitur proportionalis æquitatis iudicium refugiamus, & quatuor in hoc exemplo superiorum dissimilia distinguamus, primò nominum propositorum, præteritis numeris

meris & integris: assumendus minimus divisus est, hic erit 120, secundò partes cognomines inventæ per suos numeros multiplicandæ. Itaque $\frac{2}{3}$ erunt 80 $\frac{1}{4}$, 72 $\frac{1}{2}$, 100 $\frac{7}{8}$. 105. tertiò é 600 summa dividenda, tollantur integri numeri 9, 8, 7, 6, id est 30, manebunt 570 pro additis consequentibus: quartò denique inventis quartis proportionalibus, addes primo 9, secundo 8, tertio 7, quarto 6. Totum exemplum sic erit.

80	136	$\frac{161}{317}$
357 dant 570: ergo 72	122	$\frac{141}{117}$ vel $\frac{114}{119}$
100	166	$\frac{117}{117}$
105	173	$\frac{111}{117}$ vel $\frac{11}{17}$

Cap. 15. de alligatione.

Alligationis regula quæ dicitur, hac proportionis additione multùm utitur: tamen ipsa per se nulla est proportio.

74. *Alligatio est æquatio medii cum extremis inæqualibus per alternam ab eo differentiam.*

Ut si é duobus vini generibus, quorum primum valeat 6, secundum 12, miscédum sit quod valeat 10, alternæ differentiæ extremorum 6 & 12 à medio 100 erunt 2 & 4 quæ significabunt, si 2 su-

mantur primi generis, 4 assumenda secundi. Itaque si sextarii 6 miscendi sint, alligatio perfecta erit, ut hic vides,

$$\begin{array}{r} 6 \quad 2 \\ 10 \\ 12 \quad 4 \end{array}$$

Hujus æquationis causa est ÷ communibus regulis multiplicationis. Nam si multiplices 10 per 6, compones 60, item si multiplices 10 per 2 & 4 segmenta alterius multiplicati, compones duos compositos 20 & 40 æquales primo composito, tum si multiplices eadem segmenta 2 & 4 per 10 tum 10 alterno segmento, nunc auctum, nunc minutum, id est per 12 & 6, compones duos compositos 48 & 12, primo composito æquales, ut hic vides,

$$\begin{array}{r} 10 \quad 10 \quad 10 \quad 6 \quad 12 \\ \hline 6 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \\ \hline 60 \quad 20 \quad 40 \quad 12 \quad 48 \end{array}$$

Hinc igitur patet alligationis regula, neque medius alligationis terminus est proportionis, sed medius inæqualium extremorum: Estque minor majore extremo, major minore. Sed alligationis quæstio rara est sine proportionis additione, ut in exemplo. Si unus sextarius temperandus esset ÷ duobus illis generibus, tum alligatio facta esset, diceretur nō peti 6, sed 1. Itaque proportionis additio id explicaret hoc modo: 6 redeunt

deunt ad 1 : ergo 2 redibunt ad $\frac{2}{3}$, 4 ad $\frac{4}{3}$, totaque quæstio sic erit,

$$\begin{array}{cccc} & 6 & & 2 \\ 10 & & & 6 & 1 \\ & 12 & & 4 & \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{2}{3} \text{ vel } \frac{1}{3} \\ 4 \frac{4}{3} \text{ vel } \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Tale est Archimedæum problema illud apud Viétruvium lib. 9. cap. 3. de aurea Hietonis regis corona ad deprehendendum aurificis furtum. Duas, inquit Viétruvius, massas ejusdem ponderis cum aurea corona Archimedes fecit, alteram auream, argéteam alteram, quibus vicissim in vas aqua plenum demissis, é differentia effusæ aquæ ad auream massam & argenteam, itém ad ipsam coronam, deprehendit argenti in aurea corona missionem. Estó igitur inæqualis effusio aquæ ex aurea massa 10, ex argentea 16, ex ipsa regis corona 24. Sumptis differétiis, vides auri triplum, argenti subtriplum in corona permistum esse: Et si corona 16 pondo esset, essent auri 12, argenti 4, & hæc alligatio est. At si alterius pōderis ea fuerit, similem rationē proportionis additione concludes, ut si fuerit 100 pondo, quæstionis explicatio tota sic erit,

$$\begin{array}{cccc} & 20 & & 12 \\ 24 & & & 16 & 100 \\ & 36 & & 4 & \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 12 \quad 75 \\ 4 \quad 25 \end{array} \right.$$

Talis est in permiscendis metallis quotidiana ratio, ut si aurifex habeat 100 pondo argen-

ti, quorum unum valeat 17. Item alteram habeat massam, cujus pōdo valeat 24, quantū argenti ē secunda massa addet primæ, ut pondo valeat 22, & quantum denique omnino futurum est? Alligatio alternarum differentiarum sic erit,

$$\begin{array}{r} 17 \qquad 2 \\ 22 \\ 24 \qquad 5 \end{array}$$

Unde concludes 2 pondo primi argenti, 5 pondo secundi requirunt: Ergo 100 requirunt 250: quibus adde 100, ē prima massa habebis 350 pondo misti argenti.

Alligationis causa eadem fuerit, ubi termini non tantū tres, sed quotlibet proponentur: Bini siquidem extremi ad unum medium perpetuō conferendi: ut vini genera quatuor sunt, primique amphora valeat 7 aureos, secundi 9, tertii 10, quarti 12, & miscendæ sint amphoræ 300, quæ singulæ valeant 11 aureos, dispositis terminis, differentiisque alternè alligatis, tota questio sic erit,

$$\begin{array}{r} 7 \qquad 1 \qquad 1 \qquad 30 \\ 9 \qquad 1 \qquad 1 \qquad 30 \\ 10 \qquad 1 \qquad 1 \qquad 30 \\ 11 \\ 10 \qquad 300 \\ 12 \quad 4 \quad 21 \qquad 7 \quad 210 \end{array}$$

Nihil verò interest, utrum majores termini sint plures: ut 400 pondo ficuum, amygdalarum, zingiberis, piperis, moschocaryorum, croci, emuntur 200 libellis: Libra autem ficuū emitur 6 solidis,

lidis, amygdalarum 7, zingiberis 9, piperis 11, moschocaryorum 12, croci 16. Quot igitur sunt pondo singulorum generum? Hic preciorum permistio & alligatio est. Sume itaque precium unius libræ pro medio quantitatis, sic,

400 pondo emuntur 200 libellis:

Ergo 1 emitur $\frac{1}{4} \frac{0}{0} \frac{0}{0}$ vel $\frac{1}{2}$ libellæ,

id est 80 solidis.

Tum singulorum generum pretia ipsi subscribe in eadem moneta, quæstio tota sic erit,

6 ficu.	1	2	6	9	70	$\frac{10}{17}$
---------	---	---	---	---	----	-----------------

7 amyg.	1	2	6	9	70	$\frac{10}{17}$
---------	---	---	---	---	----	-----------------

9 zingib.	1	2	6	9	70	$\frac{10}{17}$
-----------	---	---	---	---	----	-----------------

10

§ I. 400

11 pip.	1	3	4	8	62	$\frac{13}{11}$
---------	---	---	---	---	----	-----------------

12 mosch.	1	3	4	8	62	$\frac{18}{11}$
-----------	---	---	---	---	----	-----------------

16 croc.	1	3	4	8	62	$\frac{18}{11}$
----------	---	---	---	---	----	-----------------

Adhuc additio proportionis fuit, cui subductio proportionis est in elementis opposita.

75. *Subductio proportionis, est assumptio reliqui termini.*

Estque duplex.

76. *Subductio proportionis prima, est assumptio reliqui termini ad subductam.*
Ut 6 ad 4, sicuti 9 ad 6: ergo 2 ad 4, ut 3 ad 6. itaq;

77. *Si fuerit ut totus ad subductum, sic totus ad subductum, reliquus erit ad subductum, ut reliquus ad subductum.*

78. *Subductio proportionis secunda, est assumptio reliqui ad reliquum.*

Ut 5 ad 10, ut 2 ad 4 : ergo ut 5 ad 10, sic 3 ad 6. itaque

79. *Si fuerit ut totus ad totum, ita subductus ad subductum, reliquus erit ad reliquum, ut totus ad totum, 19. p. 5.*

Cap. 16. de duplicatione proportionis.

Jam de duplicatione proportionis dicendum est.

80. *Duplicatio proportionis, est assumptio facti á primo & secundo pro primo, & facti á quarto & quinto pro tertio, unde sextus pro quarto concluditur.*

Ut si quærat, 10 boves 7 diebus atant 35 jugera, 20 boves 24 diebus quot jugera arabuunt? termini quæstionis 5 ita erunt, 10, 7, 35, 20, 24. Factus verò é 10 & 7 erit 70 pro primo termino, factus é 24 & 20, erit 480 pro tertio, unde con-

cludes

cludes pro quarto 240, terminique proportionis duplicis sic erunt,

10	7	35	10	24
70		35	480	240

Hic verò duplex proportio permiscetur, prima simplex & directa est boum & iugerum. 10 boves atant 7 diebus 35 iugera: ergo 20 boves eodem tempore arabunt 70. Hic tempus idem nullum proportionis terminum facit, tanquam diceretur, cum 10 boves atant 35 iugera, 20 boves atant 70. Secunda proportio simplex est, 20 boves arant 7 diebus 70 iugera: ergo idem 20 diebus arabunt 24 iugera. Hic tempora diversa faciunt terminos proportionis, idem 20 boum numerus nullum terminum facit. Causa autem cur illi duo facti pro quatuor simplicibus assumantur, est, quod ratio tertii 35 ad sextum 240 fit è ratione 10 primi ad 20, quartum & ratione 7 secundi ad 24 quintum, quæ ratio est duorum factorum 70, 480: 3 aurei 2 mensibus luctantur aureos 6. aurei 4 mensibus tribus quot lucrabuntur? Hic si facias 6 è 3 & 2: item 12 & 4 & 3, & concludas 6 dant 6, ergo 12 dant 12, nibilo plus facies, quam si dixisses, 2 dant 6, ergo 4 dant 12, quia multiplicati per eundem 3 fiunt. Itaque factorum & facientium est eadem ratio. Quare quoties in tali duplicatione æquales termini sic occurrent, æqualibus terminis omissis, proportio concludenda est. Sed ubertas regulæ est uberius explicanda.

Trium mercatorum primus contulit 44 per
per 8 menses, secundus 32 per 6 mēses, tertius 24
per 4 menses, unde lucrati sunt aureos 80, quan-
tum singulis ex hoc lucro ceder? Multiplica sor-
tem quamque cum suo tempore, primi factus est
352, secundi 192, tertii 96, & singulis jam additis,
dicito per auream regulam,

$$\begin{array}{r} 352 \quad 44 \\ 640 \text{ dant } 80 : \text{ergo} \quad 192 \quad 24 \\ \quad \quad \quad 96 \quad 12. \end{array}$$

Legio habet pedites 6100, equites 726, &
peditis stipendiū est 4 aurei, equitis 9, præda au-
reorum 2000 his dividenda, quantum singulis
dabitur? Multiplica' numeros personarum, sti-
pendiorum: primus factus erit 24400, secundus
6534, tum facti addantur, erunt 30934, & dic per
auream regulam,

$$\begin{array}{r} 24400 \quad 1577 \quad \frac{17088}{30934} \\ 30934 \text{ dant } 2000 : \text{ergo} \quad \text{dant} \\ \quad \quad \quad 6534 \quad 422 \quad \frac{11812}{30934} \end{array}$$

Canonici 12, & sacellani 20, partiuntur quot-
annis aureos 3000, sed ea lege ut canonicus 5
capiat, quoties sacellanus 4, quantum igitur eo-
rum stipendium est annuum? Multiplica nume-
ros personarum & stipendiorum, primus erit 60,
secundus 80, qui additi sunt 104. dic igitur.

$$\begin{array}{r} 60 \quad 1285 \frac{1}{2} \\ 140 \text{ dant } 3000 : \text{ergo} \\ \quad \quad \quad 80 \quad 1714 \frac{2}{3}. \end{array}$$

Inter-

81. *Interdum faciendi termini complures é variis generibus sortium, temporum, personarum, aliarumve rerum, in unumque tandem omnes addendi.*

Quatuor mercatorum biennii societate inita, primus 30 aureos cōtulit, sed octavo post mēse 10 subduxit, iterumq; vicéfimo mēse ineunte 12 cōtulit, secūduſ initio 24 cōtulit, ac sexto post exacto mēse subduxit 8. Denuoq; sexti decimi mensis initio 14 retulit, tertius initio contulit 20. & septimo post mēse exacto omnes subduxit, sed decimosēptimo post exacto mēse 16 retulit, quartus septimo mēse ineunte, 18 aureos contulit, sed quarto post exacto mēse 9 subduxit, iterūq; decimosēptimo mēse incipiēte 15 addidit, lucrū ex omnibus his summis factū est 100 aureorū. Singulotū igitur pecunias & tēpota in suum numerū rediges: primi 30 autei & 8 menses faciunt 240: deinde reliqui 20 autei & 11 mēses faciunt 220, postea 20 autei & 12, id est 32 & mēses 5 faciunt 160. Deniq; facti tres additi sūt 620. Secūdi mercatoris 24 aurei & 6 menses faciunt 144: Deinde reliqui 16 & 9 menses faciunt 144, tum additi aurei 14 & 16, id est 30 cum 9 mēſibus, faciunt 270. Hi tres facti additi sunt 558. Tertii 20 aurei & 7 menses faciunt 140: Deinde 16 aurei & menses 7 faciunt 112. Hic factus additus priori, constituit 252, quatti 18 aurei & 4 menses faciunt 72, tum 9 aurei & menses 6, faciunt 54. Denique 9 & 15,

id est 24 aurei & 8 menses, faciunt 192. Hi quatuor facti additi, sunt 318. Colligamus tandem hos quatuor factos, & dicamus per autem regulam.

620	35	$\frac{205}{417}$
558	31	$\frac{461}{417}$
1748 dant 100 : ergo		
252	14	$\frac{181}{417}$
318	18	$\frac{84}{417}$

Cap. 17. de duplicatione proportionis inverse.

Proportionis duplicatio aliquando invertitur.

82. *Duplicatio proportionis inverse, est assumptio facti a primo & quinto pro primo, & facti a tertio & quarto, pro tertio, unde sextus pro quarto inverse concluditur.*

Ut hic: 2 messorum 4 diebus demetunt 6 jugera, 8 messorum 12 jugera, quot diebus demetent ? invenies 2, quæstioque tota sic erit,

2,	4	6,	8,	12
2,	24	4	48	

Hic etiam ut in directa, proportio duplex permiscetur, quam potes ita separatim concludere, primo inverse: duo demetunt 6 jugera 4 diebus, ergo 8 demetent jugera eadem 1 die. Hæc proportio est inversa hoc modo, 1, 2, 4, 8.

Secun-

Secunda directa est, sic: 8 messores demetunt 6 jugera 1 die: ergo iidem demetent 12 jugera 2. Causa est hic superioris similis, quia ratio 4 secundi termini ad 2 quartum, est facta e rationibus 8 quarti ad 2 primum, 6 tertii termini ad 12 quintum, quæ duæ rationes faciunt terminos primum 24, & tertium 48.

Cap. 18. de proportione continua.

Proportio disjuncta generatim descripta est, jam tempus est de continua dicendi.

83. *Proportio continua est, quando quæ ratio est primi termini ad secundum, eadem est secundi ad tertium.*

Ut in 2, 4, 8. Continuae proportionis proprietas ex aurea regula sic est,

84. *Si tres numeri fuerint continue proportionales, factus ab extremis erit æqualis factus a medio: Et si factus ab extremis fuerit æqualis factus a medio, tres numeri erunt continue proportionales. 20. p. 7.*

Ut in 2, 4, 8 factus ab extremis 16 est æqualis 16 factus a medio. Hinc sequitur inventio tertii proportionalis,

85. *Si datis duobus numeris primus di-*

viserit factum á secundo, quotus erit tertius proportionalis. 18. p. 9.

Ut in datis 2 & 4, multiplica 4 per sese, facies 16, quem 2 primus dividit in 8. Itaq; 8 est tertius proportionalis: ut in 2, 4, 8. Itaque

86. *Si duo numeri habuerint tertium proportionalem, erunt facti inter se. 16. p. 9*

Quatuor amicorum primus accipiat aureos tres, secundus 6, tertius tantó plures secundo, quantó plures secundus habet primo, & quartus item tantó plures capiat tertio, quátó plures tertius capit secundo, quot habebit igitur tertius? quot quattus? Inveni duobus datis tertium continué proportionalem, & iterum duobus ultimis tertium continué propottionalem, quæstio soluta est, erunt enim termini continui 3, 6, 12, 24.

87. *Si continuorum primus dividerit secundum & antecedens quisque dividet consequentem alium: & si antecedens quisque dividerit ullum consequentem, primus etiam dividet secundum. 6. & 7. p. 8.*

Ut in 1, 2, 4, 8, 32. 64. Itaque

88. *Si ab unitate numeri fuerint continui, minor dividet majorem per aliqué datorum continuorum. 11. p. 9.*

Ut in proximo exemplo.

89. *Si fuerint numeri continué proportionales, ratio primi ad secundum duplicabitur in tertio, triplicabitur in quarto: & sic deinceps ratio primi ad extremum fiet ex omnibus intermediis rationibus.*

10.d.5.

Ut in 3, 9, 27, 81: ratio 27 ad 3 est duplicata ratio 9 ad 3: ut hic vides in contractis terminis,

$$\begin{array}{ccc} 3 & 3 & (9 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

Sic ratio 81 ad 3, est ratio triplicata 9 ad 3, ut hic constat in contractis terminis

$$\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 3 & (27 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

Denique ratio extremorum fit ex omnibus rationibus intermediis: imò verò

90. *Si fuerint quotlibet rationes terminis quomodocunque continuæ, ratio extremorum fiet ex omnibus intermediis rationibus.*

Ut in 1, 2, 3, 4, 5: ratio 5 ad 1 fit é rationibus.

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 & (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) & (5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \end{array}$$

E continuationis autem geometricæ natura inventa est hæc regula.

91. *Libræ terminis duplæ & triplæ continuationis comprehensæ, totidem cognominibus ponderibus appenduntur.*

Sic libræ usque ad 7 appenduntur tribus pō-
deribus, quorum primum unius libræ, secundum
binarium, id est duarum librarum, tertium qua-
ternarium, quia progressionis 1, 2, 4 termini tā-
tum comprehendunt: sic libræ usque ad 15 appē-
duntur 4 ponderibus hac progressionē significa-
tis 1, 2, 4, 8: Sic libræ 31 ponderibus hujus con-
tinuationis 1, 2, 4, 8, 16: Sic in tripla ratione, li-
bræ usque ad 40, appenduntur ponderibus hac
progressione significatis, 1, 3, 9, 27. Sic libræ us-
que ad 121 appenduntur his ponderibus, 1, 3, 9,
27, 81, & sic deinceps libræ terminis triplæ pro-
gressionis comprehensæ, totidem cognominibus
ponderibus appenduntur.

Julianus juriscōsultus de liberis & posthumis
hæredibus instituendis generis hujus quæstionē
proponit Digest. lib. 28. Si ita scriptum sit: Si mi-
hi filius natus fuerit, ex bello hæres esto, ex reli-
qua parte uxor mea hæres esto. Si verò filia mi-
hi nata fuerit, ex triete hæres esto, ex reliqua par-
te uxor mea hæres esto: & si filius & filia nati ef-
sent, dicendum est assem distribuendum esse in
7 partes, ut ex his filius 4, uxor duas filias unam
partem habeat. Ita enim secundum voluntatem
testātis filius altero tanto amplius habebit quàm
uxor,

uxor, item uxor altero, tantó amplius habebit quám filia. Licet enim subrili juris regulæ conveniar ruptum fieri testamentum: Attamen cüm & utroque nato testator voluerit uxorem aliquid habere, ideo ad eiusmodi sententiam humanitate suggerente decursus est, quod etiam inventio Celsó apertissimé placuit. Hæc jurisconsultus: unde intelligimus ex volúate testatoris tres numeros continué proportionales in dupla ratione inveniendos esse. Sumes itaque minimos 4, 2, 1, ac si hæreditas fuerit 70 coronatorum, ex additis illis terminis quæstio hærescundæ familiæ ita solvetur.

$$\begin{array}{r}
 4 \qquad 40 \\
 7 \text{ dant } 70 : \text{ ergo } 2 \text{ dant } 20 \\
 1 \qquad 10
 \end{array}$$

Quód si uxor tres filios & duas filias pepererit, tres quaternarii pro tribus filiis, & duo binarii pro duabus filiabus assumendi. Adde igitur omnes & conclude,

$$\begin{array}{r}
 4 \qquad 17 \frac{1}{4} \\
 4 \qquad 17 \frac{1}{2} \\
 4 \qquad 17 \frac{3}{4} \\
 16 \text{ dant } 72 : \text{ ergo } \text{ dant} \\
 2 \qquad 9 \frac{1}{2} \\
 1 \qquad 4 \frac{1}{2} \\
 1 \qquad 4 \frac{3}{4} \\
 \qquad \qquad \qquad F \text{ iiij}
 \end{array}$$

92. Si duo numeri multiplicentur uterque per utrumque, sient tres continué proportionales datis, tum si facti omnes multiplicentur per datum ducem, rursusque ultimus per datum comitem, quatuor sient continué proportionales datis, & sic deinceps invenientur quotlibet continui in data ratione. é 2.p.8.

Ut hic vides

	2		4
	4	8	16
8	16	32	64
16,	32,	64,	128, 256.

93. Si duo numeri habuerint continué medios, duo proportionales datis habebūt totidem per datam rationem. 8.p.8.

Ut in exemplo

8	12	18	27
32	48	72	108

inter 8 & 27 sunt duo medii 12 & 18, inter 32 & 108 rationis eiusdem nempe $3\frac{1}{2}$ sunt etiam duo 48 & 72, qui medii inveniūtur per datam rationem 8 ad 12, sic dices 32 ad 48.

94. Si duo numeri & unitas habuerint totidem continué medios, dati inter
16

se etiam totidem habebunt. 10. p. 8.

Ut hic,

	I			I		
	2		4		2	3
4	8	16		4	6	9
8,	16	32	64.	8	12	18 27.

Deducitur é 2. p. 8: sed generaliter accepta.

95. *Si continué proportionalium quilibet seipsum multiplicaverit, facti erunt continué proportionales: & si dati factos multiplicaverint, facti rursus erunt continué proportionales, idq; semper circa extremos accidet.* 13. p. 8.

Ut hic,

2	4	8
4	16	64
8	64	512

Caput 19. de inventione optati termini.

96. *Si arithmetice ab unitate cōtinui, geometricé á numero cōtinuis respondeāt, arithmetici geometricorū indices erunt, et factus á duobus geometricis tātus erit suæ progressionis terminus, quantus est simul-*

*uterque arithmeti-
corum multiplicatis re-
spondentium.*

Ut in hac progressionē dupla,

1	2	3	4	5	6
2	4	8	16	32	64

Arithmetici enim 1, 2, 3, &c indicant 2, 4, 8, esse progressionis primum, secundum, tertium terminum. Itaq; si quæras terminum quempiã, ut septimum, adde indices eum constituentium numerum, ut 3 & 4, & multiplica geometricos iis respondētes 8 & 16, facies 128 septimū terminū progressionis. Sic erit in hac progressionē tripla,

1	2	3	4	5
3	9	27	81	243

Si quæras nonum, multiplica 243 per 81 respondentes arithmeti-
cis indicibus 4 & 5, constituentibus 9, facies 9,683 nonum terminū. Hæc termini optati est inventio.

• Caput 20 de continuē minimis,

Proportio continua nõ solū recipit communem ad minimos contractionem, sed de iis propriam institutionem habet.

97. *Si duo minimi data rationis numeri multiplicentur uterque per utrunque, tres fient minimi continuē proportionales datis, tum si facti omnes multiplicentur per*

per datum ducem, rursusque ultimus per datum comitem, quatuor fient minimi cōtinuē proportionales datis, & sic deinceps invenientur quotlibet minimi continui in data ratione. 2 p. 8.

Ut hic vides,

	2		5	
	4		6	9
8	12		18	27
16	24	36	54	81.

98. Si duo inter se primi habuerint cōtinuē medios, uterque & unitas habebūt totidem. 9. p. 8.

Ut patet in proximo exemplo.

99. Si fuerint quotlibet continuē proportionales extremorum inter se primorū, erunt minimi proportionalium: & si fuerint minimi proportionalium, erunt extremorum inter se primorum. 1. & 3. p. 8.

Ut in 8, 12, 18, 27. Nam cū sint extremi inter se primi, omnes unā & medii & extremi, primi inter se erunt, itaque minimi.

100. Si continuatio fuerit extremorum inter se primorum, erit maxima. 17. p. 9.

Ut in 8, 12, 18, 27. Atque hæc de proportionē simplici.

Cap. 21. de æquatione.

101. *Proportio conjuncta est, quæ conjungitur é proportione disjuncta & continua:*

eaque triplex in elemētis insignis est æquatio, exuperati ultimi ad præcedentes. Inventio continué minimorum in datis rationibus.

102. *Æquatio est, quando positis in uno ordine quotlibet numeris, aliisque totidem in altero, binis sumptis in eadem ratione, fuerit ut primi ordinis primus ad ultimū, sic secundi ordinis primus ad ultimum.*

Itaq; in continuanda æquatione, termini proportionis utrinque extremi duntaxat assumendi sunt, mediis intermissis: estque directa vel inversa.

103. *Æquatio directa est, quando fuerit ut primi ordinis primus ad secundum, sic secundi primus ad secundum: itemque ut primi ordinis secundus ad tertium, sic secundi secundus ad tertium.*

Ut hic vides in tribus exemplis quæ continuari in unum possunt.

9,	6,	3,	9,	6,	9,	3,	6,	9,
12	8	4	12	8	12	4	8	12.

quo genete proportionis plurimæ in elementis demonstrationes à Theone conclusæ sunt.

104. *Æquatio inversa est, quãdo fuerit ut primi ordinis primus ad secundum, sic secundi secundus ad tertium; utque primi secundus ad tertium, sic secundi primus ad secundum.*

Ut vides in tribus exemplis,

9,	8,	6,	9,	8,	9,	32,	16,	8,
24	18,	16,	16,	18,	16,	8,	4,	3,

Hic enim ut 9 ad 8, sic 18 ad 16: item ut 8 ad 6, sic 24 ad 18, & similiter inverso ordine in reliquis exemplis. Difficile autem sit in numeris integris terminos proportionis inverse æquatos cõtinuare: continuati tamen possunt ordine non solum inverso, sed in contrarias partes tendente, ut hic vides,

6,	3,	2,	1,	3,	4,	3,	1,	2,
12,	24,	6,	8,	24,	12,	8,	4.	

Hic enim æquatio est, cum sit extremotum eadem ratio in utroque ordine, tum inversa, ut res ipsa ostendit. Hoc proportionis genus minus usi-

tarum est, eo tamen Archimedes utitur quarto theoremate secundi de sphaera.

Cap. 22. de exuperantia ultimi
ad præcedentes.

105 *Si fuerint quotlibet numeri continué proportionales, subducantur autem á secundo & ultimo æqualis primo, erit ut secundi exuperantia ad primum, sic ultimi exuperantia ad seipsum præcedentes omnes. 13. p. 9.*

Ut hic

1	4	8
	2	6

Tolle 2 á 4, & ab 8 item tolle 2, ut 2 exuperantia secundi ad primum 2, sic 6 exuperantia ultimi ad 2 & 4 antecedentes, par enim utrobique ratio est, sic in

2	8	32
	6	30

Ab 8 tolle 2, & totidem á 32, manent 6 & 30, atque ut 6 ad 2, sic 30 ad 8 & 2, id est ad 10. Fac periculum in majori serie, ut in

2,	4,	8,	16	32,	64
	2				62

A 4 secúdo tolle 2: item á 64 ultimo tolle 2, jam erit 62, sic ad omnes antecedentes, ut 2 exuperantia secundi ad 2 primum, utrobique enim æqualitas. Ex hac regula invēitur summa progressio-

tiæ

nis geometricæ, quæ est cõpendiaria additio numerorum continua geometricæ proportionis serie continuatõti. Nam facta subduçtione primi termini à secũdo & ultimo, habes terminos tres, unde quartus similis invenien dus est æqualis omnibus ultimum præcedẽtibus, ut additus ultimo, summam compleat, sicut vides in

2	8	32
6		30

Nam ut 6 reliquus secundi se habet ad 2 primum, sic 30 reliquus ultimi ad præcedẽtes omnes 10, id est ad quartum proportionalem, ideoque hic quartus proportionalis additus ultimo, summam complet omnium, nempe 42.

Agricola promisit filio pro xeniis primo anni die in triginta continuos dies grana tritici primo unum, secundo duo, tertio quatuor, & sic deinceps duplicãdo, quæritur tricesimo die quot grana futura sint. Quæritur tricesimus terminus, id est ultimus progressionis hujus, ut antea demonstratum est: primo sextus 64 per sese faciet 4096 pro duodecimo termino, & hic rursus ex sese faciet 16777216 pro vicesimo quarto termino, quem multiplica per 32 quintum terminũ, facies pro vicesimo nono termino 53687032 qui tricesimus erit, si unitas pro primo numeretur. Tollatur igitur unitas à secundo & ultimo, exuperantia secũdi erit æqualis primo, Itaque inventus ultimus uno dempto erit æqualis omnibus antecedentibus: addatur uterque sum-

ma tota erit 1073741863. Idverò brevius fiet, si progressio uno termino augeatur, & æqualibus sublatis reliquus ultimus dividatur pro exuperantia secundi supra primum.

Cap. 23. de inventione minimorum
in datis rationibus.

105. *Si datis rationibus quotlibet in minimis terminis proportionales ad secundum & tertium minimi multiplicent obliquè terminos duarum primarum rationum, facti erunt continuè minimi in datis rationibus: deinde si proportionales ad postremò inventum & ducem sequentis rationis minimi multiplicent obliquè alter inventos, alter sequentes omnes, facti erunt continuè minimi in datis rationibus. 4.p.8.*

Ut hic vides,

5	6	4	3
10	12		9

Nam si sumas minimos ad 6 & 4, habebis 3 & 2, tum si multiplices obliquè 6 & 5 per 2, faci-

cijs

cies 12 & 10 . Item si per 3 multiplices obliqué 4 & 3, facies 12 & 9 continué minimos in datis rationibus : ut enim 5 ad 6, ita 10 ad 12, & ut 4 ad 3, sic 12 ad 9 . Hic autem continuatio terminorú est in datis rationibus, ut regula præcipit, non autem cõtinuatio rationum, & hæc proportio disjuncta est rationibus, continua tantúm terminis minimis in datis rationibus, esto & aliud exemplum,

2	3		4	5		6	7
8	12			15			
16	24			30			35

In hoc exemplo pportionales ad 15 postremo inventum, & 6 ducem sequentis rationis minimi sunt 2 & 5, qui multiplicatione obliqua fecerunt 16, 24, 30, 35. Denique hac regula continuabis quotlibet minimos in datis rationibus minimorum numerorum . Habet veró & hæc continuatio usum valdé singularem, ut 100 aurei tribus dividantur ea conditione, ut quoties primus 5 capit, toties secundus 6 capiat, & quoties secundus capit 7, toties tertius capiat 9 : quot aureos singuli capient ? Hic duæ sunt rationes in minimis terminis, 5 ad 6, 7 ad 9, in quibus rationibus proportionales minimi continui sunt 35, 42, 54. Hoc modo

5	6		7	9
35	42			54

Adde igitur tres continuos repertos, totus

erit 131, & jam dicito

$$35 \quad 26 \quad \frac{24}{131}$$

$$131 \text{ dant } 100 \text{ ergo } 42 \text{ dant } 32 \quad \frac{2}{131}$$

$$54 \quad 41 \quad \frac{29}{131}$$

Partite quatuor amicis 100 aureos, sic, ut quoties primus capit 3, secundus capiat 4, & quoties secundus capit 5, toties tertius capiat 6. Denique quoties tertius capit 7, toties quartus capiat 8: quot aurei singulis cedent? hic sunt tres rationes in minimis terminis dissimiles; ad 4, 5 ad 6, 7 ad 8, in quibus continui termini sunt 105, 168, 192. Adde continuos, totus erit 605, & dicito

$$105 \quad 17 \quad \frac{41}{131}$$

$$140 \quad 23 \quad \frac{17}{131}$$

605 dant 100: ergo dant

$$168 \quad 27 \quad \frac{21}{131}$$

$$192 \quad 31 \quad \frac{22}{131}$$

FINIS.

05 10 15 20 25 30 35 40 45 50

4 4

135

~~87~~

864

131

999

80

773

1014

253

946

1014

10 11 22 130

18 9 159

20208 4 32

3 + 2800

2000

mar a sta

56789

maria 34

maria 23

23456789

23454321

1111

39000000

maria maria



