

CHRISTIANI SEVERINI
LONGOMONTANI, CIMBRI,
ROTVNDI IN PLANO,

feu

CIRCVLI,
ABSOLVTA MENSURA,

Duobus libellis comprehensa,

Quorum

Prior veram constitutionem Peripheriæ Circuli Synthetice
perficit, & mox hujus ad Diametrum rationem.

Posterior Geodæsiam Rotundi in plano analytice absolvit, hujus-
que ut & partium ejusdem cum adscriptis Rectilineis omnis
sermæ generis permutationem adæquatam in
lineis pariter ac Numeris ostendit.



AMSTERDAMI,
Apud IOHANNEM BLAEV.
CIC IDC XLIV.



Nobilissimo & Consultissimo Viro,

D. A L B E R T O

C O N R A D O B V R G I O,

I. V. Doctore, Amstelodamensis Reipublicæ Consuli, Curatori Societatis Indiæ Occidentalis, Illustrissimorum Fœderatæ Belgicæ Ordinum ad Potentissimum Russiæ Imperatorem, item ad Serenissimum Daniæ Regem, Exlegato, in Collegio etiam Illustrium Hollandiæ, & West-Frisiæ Ordinum antehac Delegato, & Illustris Amstelodamensium Gymnasii Curatori, Domino Fautori suo.

S. P. D.

Nobilissime, Amplissime, & Consultissime Domine,



Nnus jam tertius effluxit, Vir amplissime, ex quo nomine Illustrium confœderatorum Ordinum Hollandiæ Legationem ad Serenissimum Regem nostrum Daniæ obiens, heic Hauniæ aliquandiu ob Regis absentiam subsistebas: Interim autem me ad

Colloquium tecum vocari dignatus es, forte fama motus, quam in Belgio vestro, meipso majorem, adeptus fuisset. Vbi inter alia, citra fidem cujusdam tunc præsentis, non autem veritatem ipsam, primum me Circuli velut Rotundi in Plano, veram mensurationem invenisse coram referebam, ac Serenissimo & Clementissimo Regi meo jam dudum humillime dedicasse. Cujus quidem Inventionis Exemplar tandem in pauca Problemata redactæ, filio tuo CYNRADO BYRGIO, genio & ingenio præstantissimo Adolescenti, quum me eodem tempore heic inviseret, impertivi, & aliud quod secum in Italiam exportaret, quo actutum, ut Excell. tua referebat, mittendus, & D. Galilæo de Galilæa commendandus erat, apud quem speratum in Mathesi progressum impleret, fundamento antea in Elementis Euclidæis feliciter strato. Ad hunc autem cum
dicto

D E D I C A T O R I A.

dicto Exemplari litteras per filium dedi, quibus Lynceum illum virum, maximæque tunc in Orbe famæ, obnixè rogavi, ut Reipub. universæ Mathematicæ gratificando, aut ipse Inventum istud nostrum sub incudem revocaret, aut alicui præstanti Mathematico Italò, si sibi per ætatem, & visus [ut ægre audivimus] orbitatem, id minus liceret, resolvendum & judicandum traderet, qualem D. Camillum Gloriosum, ex hujus, quæ ad nos pervenerunt monumentis, accepimus. Quod an factum sit nondum mihi constitit, forsân ob Galilæi diurnam infirmitatem, & ultimum nuper [quod cum dolore percipimus] factum. Interim Invento nostro equidem tantam fiduciam tribui, ut non veritus sim, de fama pariter & fortuna mea, cum quovis, præcipue vero inter præstantes Mathematicos, calamum contra stringente, periclitari. Velut quoque supplices litteræ de hac re ad Serenissimum & Clementissimum Regem meum submissee scriptæ, & ante biennium editæ, omnibus testantur. Non enim exigui momenti esse putavi Problema Cyclometricum à pluribus Mathematicis, omnis litterarii sæculi solícite agitatam, primum nunc inventum, & exquisite in Numeros esse solutum. Quoniam vero spartam, quam diviina providentia, præ aliis in hoc argumento nactus sum, ornare usque me decebit, hosce equidem geminos Libellos de mensura ipsius Rotundi in plano, tum

diductiore secundum hexagoni naturam, in quo nascitur, demonstratione, tum uberiore, quam hactenus in Geodæsia, usu, ultimo jam in hoc meo senio Octogonario confeci. Quos quia in Belgio excudendos destinaveram, quo & nitorem Astronomiæ Danicæ, opera amicorum, qui Typographiæ illic præsent, induerent, & illinc Orbi citius innotescerent; Non potui, Vir amplissime, quin eosdem sub illustri tuo nomine in lucem ederem, atque insignis tui in me favoris testes relinquerem. Siquidem & apud nos olim fama fuerat, absolutam Circuli mensuram, hoc est, Diametri ad peripheriam veram in Numeris rationem, sicubi à quoquam inventam, admodum eximiâ perillustrium Ordinum Concederentur liberalitate redemptum iri; apud quos ideo artes Mathematicæ insigniter creverunt, quia hisce, unde tantæ utilitates fluunt, justum statuere precium minime intermiserant. Ideo in hoc argumento absolute perficiendo strenue laborarunt, nec tamen omne punctum tulerunt, Ludolphus de Göllst, item Clarus ille ab origine & litteris Iosephus Scaliger, quamvis hic eximiæ suæ famæ partem non exiguam irritò Cyclometrico conamine decoxerat. Præter hos quoque Willebrordus Snellius, Philippus Lansbergius, & forte plures. In aliis vero augustissimæ Matheseos partibus tam Cælum quam Terram concernentibus, etiam cum hisce, innumeri

apud

D E D I C A T Ō R I A.

apud Belgas alii, quorum omnium memoria in monumentis suis superest, apud posteritatem pro horum valore, magis minusve duratura. Sed finem facio, & te, Vir amplissime, cum tota celebri Burgiana domo Divinæ benedictioni commendo, meque pristino tuo favori. Hauniæ Danorum, ipsis Calendis sexteilibus Anni Salvatoris I. C. 1643.

Illustri T. Amplitudini

addict.

Christianus Scriverini Longomontanus Cimber,
Regiæ Acad. Haun. Superior Mathem. P. P.

A D

Ad Lectorem Diametricum.



Quam necessarium sit ad uniuersalem Geodesiam pariter, & Rotundi mensuram, Circulum cum suis adscriptis partibus ac planis rite cognitum habere, praxis secundi libelli horum, benignum Lectorem admonebit, in qua compendiose admodum & longe aliter, quam haecenus ab ullis Mathematicis nostra instituitur operatio, & ad verum finem perducitur, ob veram Diametri Circuli rationem ad peripheriam lib. I horum inventam, nec nisi potentia Numeris convenientem.

*Igitur, quae ipsis impossibilia haecenus visa fuere, nempe dicta plana nonnuila seorsim in veris numeratisque mensuris enucleare, ea fere nullo negotio nostrae computationi parent. De Circulo itaque, & peripheria ejusdem ad Diametrum ratione, priore libello agimus, vim proportionis sesquitertiae ad hunc Gordium nodum soluedimus ubique manifestantes, ut scilicet fundamentum Geodesiae hujus Cyclometricae, rite ponamus, & variis deinde conjectariis confirmemus. Vbi id ab incredibili per plures annos exploratione didicimus, nullum scilicet veram & legitimam Circuli mensuram Geometrica hypothese, absque Numeris, & ipsorum certis ad invicem proportionibus constitui posse, non magis certe, quam Paraboles apud Archimedem; imo neque numeris quidem, qui ex Sectione Peripheriae fluunt, utut longissime extensis, quandoquidem imperfectionem hac aegrotia semper secum trahat, ut partim sub
finem*

AD LECTOREM.

finem lib. I horum, partim in Diatriba Cyclometria Hamburgenſi ſubjuncta olim manifeſtavimus. Proinde non modo vetuſti, Antipho, Bryzo, Hipparchus; Sed etiam recentiores, Orontius Gallus, Joſephus Scaliger, & innumeri alii, qui ante irrita Computationi adſcriptorum Circulo plurorum cum hujus area inſiſtebant; aut adſumptæ Circuli particule, aliam hæcenus penes eundem æquari poſſe præſumebant. Nam hi omnes, ut etiam ii, qui in ſecunda peripheria cum Archimede laboraverunt, oleum & operam, ut dicitur, in vera ac genuina Circuli menſura in lucem mortalium producenda, perdidērunt. Neque certe abſoluta menſuratio Circuli nobis obtigiſſit, niſi lineæ rectæ ac Circularis Symmetria, & per conſequens, æqualitas in Natura extitiſſet, quam Archimedes pr. I de Circulo præſupponebat, & Eutocius Aſcalonita Archimedis fidus interpres à nemine dubitari affirmabat. Et quidni? Linea enim recta & Circularis ſub eodem genere ſunt; Quapropter earum Symmetriam non modo prop. 4, cap. 3 Quadr. Circuli, liquido ſatis oſtendi; ſed etiam eandem hiſce libellis ulterius ſum confirmaturus. Verum ut ad propoſitum deveniamus, quamvis plures viæ Circuli menſurandi ſunt à nobis inventæ; tamen hac poſiſſimum nunc incedendum putamus, quam Proportio ſeſquitertia ex ipſa Natura proficiſcens nobis luculenter demonſtrat, dum etiam Problema Cyclometricum perilluſtri & Magnifico Regio Cancellario D. CHRISTIANO THOMÆ de STOVGARD ante triennium dedicatum, longe illuſtrius hæc redditur, adeo ut quod hæcenus in hoc argumento forte demonſtrationum involucris præcluſum fuerat, à Mathematicum

AD LECTOREM.

Tyronibus ceteroquin mentem adbibentibus, satis clare nunc cognoscatur. Si quis autem se ex Labyrintho Cyclometrico nondum liberatum conqueritur, causam indicet, cur in luce meridiana cespitet, & Demonstrationes à Natura, ut dixi, derivatas, quæ Rotundum planum cum rectilæno proportionis continuæ sesquitertiæ in hexagono, & inventa inibi rationis Sectionis & Corniculati oblatione necessario conciliant, fastidiat, forte dum inveterata nonnullorum opinioni de Circuli quadrandi impossibilitate tenaciter adhareat. Interim spero Benignum Lectorem incredibilium nostrorum laborum, quos huic argumento aliquando expediendo per plures annos impendimus, æquum aestimatorem futurum, nec hos à posteritate, si quæ futura, unquam negligendos. Opt. Vale.

CON-

CONTENTA CAPITVM LIBRI I.

CAPVT I.

- D**E amplissimo proportionis usu, qua quoque hoc Cyclometricum argumentum ad optatum finem perducitur. pag. 1
- Cap. II. De proportione continua sesquitercia, quam circulus, tum potentia in lineis, tum spaciis similibus penes triangula aequilatera eidem adscripta, imprimis vero hexagonum sibi vendicat, unde peripheria circuli in sequentibus rite perficitur: item de immota mensura & abusu anguli, ut vocant, contactus. 6
- Cap. III. De vera constitutione Peripheria Circuli, & Diametri ejus ad eandem ratione. 11
- Cap. IV. De ulteriore Demonstratione Constitutionis peripheria circuli, &c. etiam per alios modos compendiose. 24
- Cap. V. De collatione inventa rationis Diametri ad suam peripheriam cum Archimedeae, item de cujusvis sectionis hujusmodi peripheria insufficientia. 31

LIBER II.

CAPVT I.

- D**E Enunciatis quibusdam, plurimum à superioribus desumptis, & analysi sequentium inservientibus. pag. 38
- Cap. II. De lineis rectis Circulo adscriptis, & Peripheria ejus Symmetris, ipsarumque cum peripheria Circuli subducta ratione, unde absoluta linea recta & Circularis aequalitas in natura esse cognoscitur. 40
- Cap. III. De lineis rectis circulo adscriptis, quae quia peripheriae longitudine sunt incommensurabiles, inutiles reperiuntur, ad exquisitam Circuli mensuram. 42
- * * 2
- Cap.

- Cap. IV. De resolutione figura Symmetra cap. 2 hujus, quoad Geodesiam planorum ratando ibidem adscriptorum; Deque Lunularum trigoni & hexagoni magnitudine & differentia, in quibus quoque plani rotundi mensura consistit. Exemplo denique, quo ostenditur Circuli veri cum sacris litteris in Numeris convenientia. 44
- Cap. V. De resolutione figura asymmetra cap. 3 hujus, ut inde quoque Geodesia Circuli, in planis adscriptis, quam proxime possit exerceri; ubi de quadrato circumscripto & inscripto, octagono, Dodecagono, Sectionibus, corniculatis, ac Lunulis Quadrantis agitur. 54
- Cap. VI. De modo Circulum à præmissis quadrandi, pro data ratione Diametri ad perimetrum: item de Circuli, & planorum adscriptorum imperata auctione, ac diminutione; tandemque ejus mensura hætenus nobis usitata ad Communem reductione. 57
- Cap. VII. De sectionibus Circuli inveniendis, ad quamvis Diametri datam: Item de Lunula cujusdam equatione sive cum trilineo, sive rectilineo; ubi omnia Numeris probantur. 67

ROTVNDI IN PLANO,

seu

CIRCULI,
ABSOLVTA MENSURA.

LIBER PRIMVS.

De Peripheriæ Circuli constitutione, & ejusdem
cum sua Diametro ratione.

C A P. I.

De amplissimo proportionis usu, qua quoque hoc Cyclometricum argumentum ad optatum finem perducitur.



Circulus quid sit, quidque Diameter ejus, Euclides lib. 1 Definit. 15 & 17 describit. Quid autem linea tangens, quid segmentum seu sectio, item sector circuli, idem Euclides lib. 3 Defin. 2, 5, 9 ostendit, quo brevitatis causa Tyrones sunt remittendi. Saltem heic, quæ ad circuli propositam mensuram spectant, compendiose persequemur, considerantes eam multis aliis modis per nostram Circuli Quadraturam esse pertractatam.

Ceterum quoniam vera Circuli mensura non minus proportionie numerorum, atque Paraboles apud Archimedes & inventio duarum mediarum linearum ex datis extremis, perficitur, operæ precium esse duco nonnihil de amplissimo

A

rationis

rationis ac proportionis usu præmittere, quæ alias lib. 5 Element. definiuntur & generaliter tractantur, siquidem eæ esse videntur, quæ totam naturam convinciant, præcipue autem proportio continua ad Algebram ejusque æquationes unice læ extendens. Ante omnia vero in Planæ Geometriæ proportio trium terminorum, quæ non nisi continua est, ad optatas æquationes in hoc argumento, cæteroquin difficillimo, nos ducit: hæc enim ea est, quæ planiciei mensurandæ vere est accommodata, velut idem Plato in Timæo affirmat.

Vt vero proposito deserviam, vim aliquam eamque satis admirandam proportionis, Exemplis nonnullis in seqq. per numeros illustrabo.

Primo, inter quatuor Arithmeticæ species, quia postremis scilicet Multiplicationi & Divisioni proportio legem præscribit, dum ad tres terminos complendos, illic unitas Multiplicanti, & Multiplicando præfigitur; heic Divisori, & Dividendo, eadem unitas postponitur, proinde evenit, quod in alogis, seu surdis, ut vocant, numeris, producto ex multiplicatione, factus quoque radicum multiplicantis & multiplicandi potentia includatur. Contra vero ex Divisione etiam Divisor Dividendi radicem dividit & quoto potentia includit: ut in multiplicatione $\sqrt{6}$ cum $\sqrt{5}$, præfigitur unitas, & fit proportio $\sqrt{1}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{5}$, factusque $\sqrt{30}$, cui inclusa est radix, quæ ex multiplicatione radicum ex $\sqrt{6}$ & $\sqrt{5}$ potentia exurgit.

Idem in resolutione horum, per Divisionem contingit. Nam unitate postposita stant termini prop. $\sqrt{30}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{1}$. Vnde quotus $\sqrt{5}$, in quo radix potentia est, pro unitate divisionis Divisoris $\sqrt{6}$, in Dividendo $\sqrt{30}$. Potentia dico; nam in hoc exemplo nulli numeri sunt vere quadrati. Ecce ergo aliud in vere quadratis. Exemplum Multiplicationis $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, factus $\sqrt{36}$, cujus radix 6 potentia producta ex 2 & 3, hoc est radicibus $\sqrt{4}$ & $\sqrt{9}$. Exemplum Divisio-

nis, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{1}$, quotus $\sqrt{2\frac{1}{4}}$, cujus radix $1\frac{1}{2}$ ex 2 in 3 divisus, qui numeri radices sunt $\sqrt{4}$ & $\sqrt{9}$.

Igitur ob unitatem, quæ heic proportionis causa accersitur, Multiplicatio & Divisio in alogis longe quam Additio & Subductio in iisdem sunt faciliores.

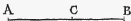
Secundo: In omni multiplicatione duorum numerorum factus potentia est medium proportionale, inter factores, ut ex 6 & 5, factus est $\sqrt{30}$, medium proport. potentia inter 6 & 5, Quod mox cognoscitur factoribus 6 & 5 in suos quadratos diductis, qui sunt 36 & 25. Stat enim sic proportio trium terminorum $\sqrt{36}$, $\sqrt{30}$, $\sqrt{25}$. Hinc sequitur, quod in omni reſtângulo area hujus fit media potentia inter duo latera, unde constat.

Porro, latera si fuerint Symmetra, ut 2 & 8, area quidem reſtânguli ex his potentia fit 16, & radix hujus 4 media proportionalis inter 2 & 8. Stant enim tres termini in subdupla ratione 2, 4, 8. Hæc in numeris, in lineis autem reſtis mediam proport. invenire, inter duas datas, ostendit Euclides prop. 13 lib. 6 Element.

Tertio, quod nulla alia ars efficere potest, ut scilicet ex alogis & prorsus asymmetris numeris inter se Symmetri possint elici, id sola proportio præstabit, neque id solum, sed etiam terminos quatuor proportionis disjunctos ad continuam proportionem trium terminorum reducet: ut sint tres numeri seu magnitudines prorsus inter se longitudine asymmetri $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ex quibus quartus per auream regulam proportionis fit $\sqrt{10}$. Hi omnes quatuor termini $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$ reperiuntur per prop. 10, lib. 10 Elem. longitudine inter se incommensurabiles. At binis quibusvis inter se multiplicatis, facti ex illis erunt Symmetri; nam ab extremis $\sqrt{3}$ & $\sqrt{10}$ factus est $\sqrt{30}$, æqualis scilicet facto à mediis $\sqrt{5}$ & $\sqrt{6}$, ergo quoque Symmetri. Porro, multiplicato termino primo $\sqrt{3}$ in terminum secundum $\sqrt{5}$, factus erit $\sqrt{15}$, similiter ter-

tio $\sqrt{6}$, in quartum $\sqrt{10}$, factus est $\sqrt{60}$, qui duo numeri $\sqrt{15}$ & $\sqrt{60}$ inter se Symmetri sunt. Nam hi inter se multiplicati gignunt $\sqrt{900}$, cujus quadratus est $\sqrt{30}$, medius inter $\sqrt{15}$ & $\sqrt{60}$. Stant proinde termini tres in continua proportionem subdupla $\sqrt{15}$, $\sqrt{30}$, $\sqrt{60}$, videlicet ad continuam trium terminorum proportionem à proportionem quatuor terminorum $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$ reducti, quod erat ostendendum.

Quarto: Nec certe minus facit ad usum & præeminentiam proportionis continua trium terminorum, præcipue in hoc argumento commendandum, quod nimirum Parallelogrammum, sive illud quadratum, sive rectangulum, sive rhombus vel rhomboides fuerit, si in eo Diameter ducta fuerit, duæque lineæ lateribus parallelæ, Diametrum utcuque secantes in uno eodemque puncto, ita ut Parallelogrammum ab his parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma, erit alterum complementorum æqualium, medium proportionale inter ea, quæ circa Diametrum. De quadrato *Arithmet.* est Lemmate subiecto prop. 54, lib. 10 Element. Eandem vero de Parallelogrammis in genere Cyclometria Hamburgensis prop. 4, cap. 7 perficit. Nos hic quod ad propositum maxime spectat quadratum & rectangulum, cum suis numeris adscriptis pro ipsa demonstratione oculis subjiciemus.



Sit proinde linea recta AB , unde quadratum est extruendum per prop. 46, lib. 1 Elem. divisa scilicet [pro instituto nostro in seqq.] ratione sesquitertia in C , ita ut AC se habeant ad CB , velut 4 ad 3. Vnde sequens quadratum extat cum sua Divisione ut vides.

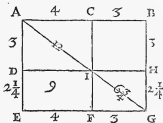
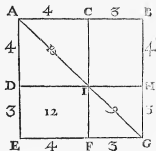
Atqui heic ad oculum cernis, quemadmodum Parallelogramma tria intra hoc quadratum nempe DC , $16. EI$, $12.$ & FH , $9.$ in continua sunt proportionem sesquitertia & tribus terminis,

terminis, inter quos, quadrata circa Diametrum AG sunt, DC 16, & FH 9, medius vero complementum EI 12.

Neque minus in rectangulo, eandem proportionem perficiemus.

Retineatur latus AB divisum in C, ratione, ut supra, sesquitertia, sed BG seu AE in eadem ratione, dum BH fit 3 p. HG vero 2 $\frac{1}{2}$.

Ex hisce confecto rectangulo, & secundum datam rationem in quatuor Parallelogramma, tributo, inscribantur heic quoque numeri promensuris laterum rectangula inscripta quævis conficiuntur DC, 12. EI, 9. FH 6 $\frac{1}{2}$. Similiter in proportione sesquitertia continua trium terminorum.



Alio modo.

Vel fingamus 12 & 6 $\frac{1}{2}$ circa Diametrum esse quadratos numeros velut in priore figura: Erunt igitur necessario in hac ad proportionem sesquiterciam, surdi Symmetri, qui per 4 prop. lib. 2 Elem. additi perficiunt 36 $\frac{1}{2}$ totius figuræ EB contentum, unde singula complementorum EI vel IB fit 9

A 3 medium

medium proportionale inter $6\frac{1}{2}$ & 12, in quadratis; & sic omnia figuræ proximæ conveniunt.

Numeri autem in singulis augeri minuique possunt pro arbitrio, servata semper eadem proportione [heic sesquitertia] ut si pro FH 9, vel $6\frac{1}{2}$ in altera figura, ponatur unitas, erit medium EI, $1\frac{1}{3}$, & DC $1\frac{1}{2}$.

Semper autem in hac proportione sesquitertia erit ratio numerorum, in Parallelogrammis circa Diametrum, ad invicem, qua est 16 ad 9, qui numeri sunt quadrati de 4 & 3. Quod pro usu in seqq. heic generaliter aamonendum fuerat.

C A P. I I.

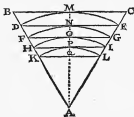
De proportione continua sesquitertia; quam circulus, tum potentia in lineis, tum spaciis similibus penes triangula æquilatera eidem adscripta, imprimis vero hexagonum sibi vendicat, unde peripheria circuli in seqq. rite perficitur: item de immota mensura & abusu anguli, ut vocant, contactus.

HActenus Proportionis summam in Mathefi necessitatem exemplis aliquot declaravi, ut Problema hoc Cyclometricum, quod cæteroquin difficillimum esset futurum, eidem rite secundum Naturam accommodatum, omnium in numeris facillimum ostenderem. In quo quidem omnium primo ad exemplum Archimedis pr. 1 de Circulo; peripheria Circuli, ejusque cum linea recta æqualitas [quæ revera in natura est, ut Eutocius fatetur, & postea ex planis intra hexagonum circuli comprehensis, demonstratur, quando scilicet peripheria circuli ex illis Synthetice colligitur] constituenda nobis simul & demonstranda venit.

Ut vero ad propositum deveniamus, sit triangulum æquilatorum, quod basis hujus negotii est, ABC continua arcuum inscriptione

inſcriptione etiam ex triangulorum ſubſequentium Diametris, idque beneficio circini, quo latera ipſius trianguli $A B C$, nempe $B A$ & $C A$ naturaliter pariter ac Geometricè ſecantur & diſtribuuntur, in eam ordiue proportionem, quæ ſeſquitertia eſt continue. Vnde non modo ſubſequentia triangula æquilatera, ſed etiam ſeſtiones hexagonæ, etiam corniculata intermedia, quibus ſeſtiones à triangulis diſcernuntur, ad eandem proportionem ſeſquitertiam ſeſe accommodant, ut modo in ſubjecta figura patebit.

In ea autem, quoniam trianguli æquilateri $A B C$ latus aliquod $A B$, ſe habet ad Diametrum ejus $A M$, ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$, atque ita ordine. Quando igitur quatuor arcus $D E, F G, H I, K L$, dicto triangulo $A B C$ inſcribuntur, erunt ſingula ſegmenta lateris $A B$, vel $A C$ ordine ad invicem in eadem



ratione. Proinde expoſito $A B$, vel $A C$, $4p$. & ejus quadrato $\sqrt{16}$, erit $A D$, vel $A E$ $\sqrt{12}$. Ut enim $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$, ſic $\sqrt{16}$ ad $\sqrt{12}$. Rurſus ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$, ſic $A D$ $\sqrt{12}$ ad $A F$ $\sqrt{9}$, hoc quoque modo fit $A H$ $\sqrt{6\frac{1}{2}}$ & $A K$ $\sqrt{5\frac{1}{2}}$. Quæ continua eſt proportio ſeſquitertia, ſeu ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$, ubi notandum, quod alterna latera in numeros veros exeant, ut $A B$ 4 , $A F$ 3 , $A K$ $2\frac{1}{2}$ in ſuis radicibus. Nec diſſimilis ratio inſcriptorum arcuum eſt.

Porro quia figuræ ſimiles ſunt in duplicata ratione homologorum laterum, hoc eſt, ut modo ſupra, in ipſis quadratis, ſunt proinde omnia hæc quinque triangula æquilatera ordine in eadem ad invicem proportione, quare poſito ut ſupra $A B C$ triangulo 16 , erit triangulum $A D E$ 12 , triangulum vero

vero $A F G 9$, triangulum $A H I 6\frac{1}{2}$. Denique triangulum $D K L$, $5\frac{1}{2}$ ordine in proportione sesquitertia.

Amplius, quoniam partes similes figurarum similiarum in eadem inter sese cum totis sunt ratione, sequitur adhuc, quod sectiones hexagoni, item corniculata, singulæ nempe species ad invicem, sint in eadem, juxta seriem suam proportione sesquitertia, quomodocunque in sequentibus æquationes inter ipsa ceciderint. Iphis namque inventis, hoc est, in quantum vel triangulum proximum sectionem hexagoni inscriptam, vel sectio corniculatum ordine proximum superaverit, [de quibus cap. sequente,] mox absque mora, quæ tam anxie quæsitæ sunt, dispalescunt; ad quæ hoc caput *περοσθεν* fuerat. Interim oportuuum esse duxi, ut nonnulla, quæ ad sequentia recte expediunda, amplius spectant, adjiciam, quæ alibi, maxime in Quadratura circuli nostra sunt demonstrata.

1 Trianguli æquilateri $A B C$ eandem prorsus rationem esse lateris $B C$ ad arcum $D E$, quæ est ipsius trianguli $A B C$, ad sectorem hexagoni $D A E$, & ideo utriusque Differentiam in numeris esse corniculatum $B C E M D$, ex prop. 5, cap. 2 Quad. Circuli.

2 In triangulo æquilatero linea tangens seu latus trianguli commensurabile est arcui subiecto, aut in veris numeris aut surdi symmetricis. Ex propol. 9, cap. 3 Quadr. circ. quod & ulterius capp. seqq. confirmabitur.

3 Quod quidam obvertunt, nullam scilicet proportionem sectionum & corniculatorum hexagonicorum inter se invicem iniri posse, propterea quia major angulus in circulo minori à linea tangente, quam in majore relinqui cernitur, quod quam falsum in seipso fuerit, quantumque rotundum rite hæctenus mensurandum disturbarat, etsi cap. 2 Quad. circ. ostendi, & simul angulum in semicirculo rectum esse, nec ideo angulum contactus, ut vocant, angulum nisi *καταξυσησιν* nominari, sed spacia ea utrinque per corniculata declinantia, recte

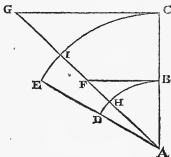
recte ab Euclide *ἴσως* appellari: tamen ut omnibus Mathematicis, quæ ibidem ostendebam, adhuc magis perspicua esse poterint, idem in adjecta figura Geometricè demonstrabo, angulo contactus, etiam ex mente multorum, pro vero concessio.

T H E O R E M A ita habet:

Angulus, ut vocant, contactus in minore & majore circulo, perpetuo sibi est æqualis.

Igitur AB radio describatur sexta circuli pars BD, quam tangat linea recta BF, quæ ex hypothesi æqualis fit circulari BD.

Est igitur in hoc circulo angulus contactus HBF: & trilineum HBF æquale sectori HAD, adeo ut si angulus contactus HBF, pro quantitate comiculati hujus habebitur, ut nonnulli inepte autumant, certe manifestum fatis foret, quod talis angulus posset esse acuto quovis major, dum sectori HAD æquatur. Imo posset quoque ratione circumferentiæ circuli augeri minuique, dum necessario æqualis fieret sectori HAD, sublato scilicet ab æqualibus, nempe triangulo AFB & sectore ADB, æquali BAH: nam ob æqualitatem linearum BF, & BD, triangulum re-ctangulum ABF erit sectori ABD æquale. Ex prop. 1 Arch. de Circulo.



B

Sit

Sit deinde radius AC duplo major quam AB , & inde eodem modo describatur arcus sextæ circuli partis CE , qui quoque duplus erit BD , & acta linea recta ex A per F in G , tangentem CG , erunt tam homologi arcus, quam latera in dupla, figuræ autem hæ similes, in duplicata, hoc est quadrupla ad invicem ratione.

Nunc ad id, quod heic præcipue demonstrandum, pervenimus:

I Si figuræ similes sunt in duplicata ratione homologorum laterum, certe figuræ schematis hujus, nempe sector ACE & sector ABD , item triangulum ACG , & ABF , tandemque trilineum ICG , & HBF , &c. Similes figuræ sunt, quum omnes inter se duplicatam laterum homologorum rationem habeant, linea scilicet AB ad lineam AC , &c. adeo ut si posueris AB 1, & AC 2 erit sector ABD in comparatione ad sectorem ACE , ut 1 ad 4, & sic de cæteris. Similes proinde has figuras esse nemo Mathematicus negabit.

II Si figuræ similes sunt figuræ æquiangulæ & proportionales cruribus æqualium angulorum, omnino omnes, ut Def. 1, lib. 6 Elem. & Pet. Ram. Elem. 14, lib. 4 ostenditur; profecto non potest major esse angulus ad B trilinei HBF circuli minoris, quam trilinei ICG circuli majoris, ubi B & C utrobique pro angulis contactuum habentur, siquidem hæ figuræ cruribus prorsus sunt proportionales, prop. 7, lib. 6 Element. Separandi itaque hoc modo circuli fuissent potius, quam ad unum lineæ rectæ contactum ambo major & minor apponerentur, ne sic æstimatori, quisquis fuerit, sensus visualis imponeret, velut in figura pag. 28 Quadr. circ. ad oculum ostenditur. Et quid quæso *ἀναμύκτητος* magis esse poterit, quam figuras similes, quales circuli revera sunt, totis similibus inscriptas, harum ratione augeri minuique haud posse? Aut infulsè admodum cum Philippo Lansbergio in sua circuli Quadratura fateri, non esse eandem prorsus rationem peripheriæ

pheriæ circuli minoris ad suam Diametrum, quæ majoris ad suam, quam numeris Ludolphæis proposito suo ubique accommodandis, præmeretur.

Sed de his, quæ hæcenus monstroso isti angulo contactus, etiam ultra Euclidem prop. 16, lib. 3 Elem. à Campano, & variis aliis commentatoribus, velut miraculose attributa sunt, ut posteritas recte dispiciat, veræ & illibatæ Geometriæ plurimum interesse putandum est, etiam ne hic scrupulus veræ Cyclometriæ decursum amplius impediatur.

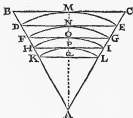
C A P. I I I.

De vera constitutione Peripheriæ Circuli, & Diametri ejus ad eandem ratione.

Dignitatem usus perpetui proportionis cap. primo quodammodo attigimus; secundo autem cap. ostendimus hexagonum circuli cum suis inscriptis sectionibus ad proportionem sesquitertiam ubique exigi, idque absque asymmetrias pariter & anguli contactus [ut illum perperam vocant, quum nullus ibi verus angulus sit, velut cap. 2 Quadr. Cir. convictum est] offensione. Igitur nunc ad caput tertium ex præmissis transitionem paramus, quod in se summam negotii Cyclometrici Problematis continebit, ubi saltim modos aliquot in medium produxisse sufficiet ex eadem sesquitertia proportione desumendos, & in demonstrationem dirigendos, non vero omnes, quibus Naturam in hoc argumento abundare novimus.

Primo autem repetatur figura hexagoni capite antecedente *περὶ ἡμετέρας* præmissa; siquidem in hoc solo hexagono totius circuli veram mensuram hæc venamur, sed hæc saltim cum numeris mensurarum appositis.

Brevis Recapitulatio eorum, quæ cap. præcedente sunt exposita, ac repetitæ figuræ hexagonicæ adjecta.



Sectio lateris A B.		Figuræ in genere.
A B	4	√ 16
A D		√ 12
A F	3	√ 9
A H		√ 6½
A K	2½	√ 5½

Explicatio.

In hac tabella prima series seu columna litterarum, respondet lateri figuræ hexagonicæ A B, cum suis segmentis.

Secunda radices, quæ sunt veri numeri.

Tertia columna exhibet latera segmentorum in duplicata ratione, seu quadratis.

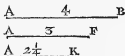
Quarta ipsas figuras singularum specierum hexagono inscriptas numeris exponit, & quidem ordine in proportione sesquitertia, ut figuræ generali hexagono sunt insertæ, cujuscunque tandem speciei fuerint. Hisce oportune hoc loco addi potest, Eandem scilicet esse *Rationem* inter duas diversas species figurarum identidem. Nam eadem ratio est inter tangentem B C, & arcum D M E ei subiectum, quæ est inter tangentem H I, & arcum K P L. Similiter inter sectionem D E & corniculatum subiectum D E G N F, eadem est ratio, quæ inter sectionem F G & corniculatum F G I O H, &c. pro qua primo inveniendâ *Ratione*, si prædecessores

decessores ingenii acumine mediocri usi fuissent, supplementum Geometriæ in Rotundi vera mensura pulchre perficerent.

Id quamvis à nobis multis abhinc annis & multis modis præstitum est: tamen hoc demonstrationis genere, ad imitationem Archimedis, Parabolæ beneficio proportionis sesquitertiæ Quadrare sustinentis, idem in Circulo, per eandem sesquiterciam proportionem, Divino auxilio, exantlabo; præsertim fundamento in præmissis per eandem proportionem vere ac naturaliter locato.

De ratione inveniendâ inter sectionem hexagoni & conicatum ei proxime subiectum.

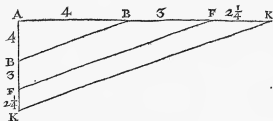
Vt autem vestigia in ipsa Natura premamus, quibus velut rectis lineis, sua rectangula claudentibus, dicta Ratio per dictam proportionem sesquiterciam, demonstrabitur, figuram istam hexagonicam huc reducemus, ac latera ibidem in veris numeris apparentia, & nihilominus terminos proportionis sesquitertiæ representantia, ut puta $AB\ 4$, $AF\ 3$, $AK\ 2\frac{1}{2}$, insuper ex ipsa figura in visum nostrum eximemus.



Ex hisce tribus lineis in continua proportione sesquitercia, ut è figura præcedenti desumptæ sunt, existentibus, una linea recta conficitur $ABFK$, contracta ad $ABFK$ minorem proportionalem per 10 prop. lib. 6 Element. ut ipsam, in demonstratione, charta capiat.

B 3

Vcl,



Vel, si linea quævis re \acute{c} ta dividatur juxta proportionem sesquitertiam in 4, 3, $2\frac{1}{4}$ partes æquales. Nam res hæc eodem redit.

Noëmata Quedam ad sequentem rationem inter sectionem hexagoni & corniculatum proxime subjectum, demonstrandam necessaria.

I In proportione sesquitertia superiore hexagono cap. 2, & hoc 3, demonstrata, Directores sunt numeri seu lineæ 4 & 3, terminos augendo hoc modo : ut 3 ad 4, sic N, &c. minuendo hoc modo, ut 4 ad 3, sic N, &c.

II Linea KA, quæ basis est hujus proportionis subsesquitertiæ, distributa ibi in numeros KF $2\frac{1}{4}$, FB 3, BA 4, potest reduci ad hos numeros $1\frac{1}{4}$, $\frac{12}{4}$, æquipollentis inter sese rationis; nam, ut $2\frac{1}{4}$ ad 1, sic 3 ad $\frac{3}{4}$, & sic 4 ad $\frac{12}{4}$, &c.

III In hoc Noëmate tria Requisite diligenter consideranda veniunt, quæ, ex resolutione hexagoni præmissi, simul concurrent ad inveniendum veram Rationem inter sectionem hexagoni & corniculatum proxime subjectum; in qua quidem inventa Ratione cardo totius hujus argumenti vertitur, ut quoque antea attigimus, & ἀνάλυσις præmissi hexagoni secundum

cum quodammodo attulerat. In tribus autem hisce Requisite deprehendes tres leges Aristotelis: *κατὰ πᾶστας, καθ' αὐτὴν, καὶ ἐξ ἑαυτῶν*, ordine servari.

1 Vt ubique omnes termini ordine dirigantur, per primum Noëma, ad proportionem illam famosam sesquiterciam, & subsesquiterciam, quam Natura ipsius præmissi hexagoni in figuris omnibus similibus sibi inscriptis urget.

2 Vt Symmetria sectionum & corniculorum competentium, ubique juxta Carallela ipsorum spacia fiat. Nam quæ incommensurabilia sunt, in nominatam exquisitè rationem coire negant.

3 Vt idem prorsus numeri, qui superius ab hexagono, pro figuris similibus in genere emergebant, rursus redeant, penes hexagoni sectiones, vel etiam corniculata, in sectionum loca, per medium proportionale, transeuntia. Numeri autem isti sunt $5\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, 9, 12, 16.

Hisce, in quibus Demonstrationis vis cernitur, præmissis, ad ipsam nunc accedamus, cujus problema ita habet.

P R O P O S I T I O.

Ratio sectionis hexagoni ad Corniculatum ordine subscriptum est dupla sesquiquarta, hoc est, in numeris $2\frac{1}{2}$, qua resoluta, erit nominata sectio ad dictum Corniculatum, ut 9 ad 4.

f Hujus problematis sufficiens Demonstratio, in tribus potissimum consistit, nempe *ἐκτίσις*, & duplici *διαιρέσις*, altera scilicet mox ab *ἐκτίσις* ducta; altera penes resolutam rationem $2\frac{1}{2}$ in 4 & 9, uberius expediunda.

E X P O S I T I O

Dividatur, ut in sequentibus, linea aliqua recta, ut LM, in
suffi-

sufficientes partes æquales, pro quinque gradibus seu numerorum sedibus, $5\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, 9, 4, 16, idque beneficio 4 & 3 seu potius heic 3 & 4, juxta primum Noëma.

Deinde per 2 Noëma sumatur M O, unitas, qualium M N est $2\frac{1}{2}$, factisque N P, & O Q parallelis M L, distinguantur ordine ascensus ab imo termino seu gradu $2\frac{1}{2}$ ubique pro ratione inter sectionem hexagoni & corniculatum proxime subjectum, per directores illos proportionis sesquialteræ, nempe 3 & 4, velut litteræ numerique singuli in rectangulis $\kappa\alpha\tau\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\omega\varsigma$ utrinque appareant, ut sequuntur.

	P					N
Sectio hexagoni.	E $7\frac{1}{2}$	D $5\frac{1}{2}$	C 4	B 3	A $2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Cornicul. correspondens.	$\frac{20}{11}$ K	$\frac{14}{7}$ I	$\frac{12}{4}$ H	$\frac{3}{3}$ G	$\frac{1}{1}$ F	1
	Q					O

Sic enim cellulæ A B C D E totidem sectiones hexagoni, sed F G H I K Corniculata cum suis competentibus numeris utrinque repræsentant; ubi quoque primo pro simplici rationis propositæ expositione, Ratio Catallelorum non alia est, quam $2\frac{1}{2}$ ubique. Quod Divisio Sectionis in Catallelum Corniculatum ostendit, ut divisa sectione suprema E, $7\frac{1}{2}$ in Corniculatum K $\frac{20}{11}$ correspondens, fit quorus $2\frac{1}{2}$. Et sic in cæteris omnibus. In hisce autem ratio modo data $2\frac{1}{2}$ vera fuerit, etiam heic sectiones pariter & Corniculata in veris suis ad invicem magnitudinibus singula cernuntur.

Prior Demonstratio.

At veram esse nunc ulterius per ea, quæ data sunt, & trina illa Noëmatis præcedentis ultimi requisita, [Quorum tamen primum,

primum, pro proportione sesquitercia ubique retenta, in ipsa *causa*, est declaratum] sufficienter demonstrabimus.

2 Ergo Symmetria loco secundo restat, facile expediunda inter Sectionem & correspondens Corniculatum; ubi primum Lectorem admonuero, quod licet numeri $2\frac{1}{2}$, & 1, item 3 & $\frac{1}{2}$, &c. heic tanquam veri appareant: tamen in eo Symmetriam requirunt, quia ex duplicata ratione, hoc est, quadratis descenderunt, qui figurarum similium seu homologarum notæ supra penes hexagoni solutionem fuere, ut mox sub initium cap. hujus extant.

In superiori autem schemate proxime quis dubitet Catallelos numeros quadratos, ut $2\frac{1}{2}$ & 1; 4 & $\frac{16}{9}$; denique $7\frac{1}{2}$ & $\frac{49}{9}$, esse commensurabiles? Nec de cæteris dubitabit, modo reliquos 3 & $\frac{1}{3}$, item $5\frac{1}{2}$ & $\frac{25}{4}$ singulos Catallelos inter se multiplicaverit, inde enim mox quadrati procreabuntur. Erunt proinde hi velut surdi Symmetri; ut 3 per $\frac{1}{3}$ prodeunt 4, qui est numerus vere quadratus. Sic $5\frac{1}{2}$ & $\frac{25}{4}$ Symmetri sunt, nam multiplicati radices ostendunt $\frac{15}{2}$ seu $3\frac{3}{2}$. Quod idem in reductione omnium Catallelorum numerorum per Divisionem ad numerum $2\frac{1}{2}$ vere quadratum confestim dignoscitur.

3 Pro reditione numerorum, 16, 12, 9, $6\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, qui figuris similibus hexagono inscriptis in genere sunt appropriati, fiant nunc ex sectionibus corniculata, & istæ, æquivalente, ut prius, ratione, in suas sedes promoveantur, per Regulam auream prop. interveniente medio proportionali, hoc modo, dum primus in Regula terminus fit corniculatum superius expressum; secundus & tertius Sectio catallela, unde quartus terminus ordine sectiones educit, numeris supra positis convenientes, ut:

K	$\frac{16}{9}$,	E	$7\frac{1}{2}$,	E	$7\frac{1}{2}$,	(16.
I	$\frac{12}{7}$,	D	$5\frac{1}{2}$,	D	$5\frac{1}{2}$,	(12.
H	$\frac{9}{4}$,	C	4,	C	4,	(9.
G	$\frac{6\frac{1}{2}}{7}$,	B	3,	B	3,	($6\frac{1}{2}$.)
F	1,	A	$2\frac{1}{2}$,	A	$2\frac{1}{2}$,	($5\frac{1}{2}$.)

C

Συμμή-

Συμπέρασμα seu conclusio Demonstrationis prioris.

Quia igitur numeri hi pro sectionibus hexagoni de novo constituendis rediere, & sic omnibus tribus requisitis Noëm. 3 est satisfactum; proinde proposita ratio $2\frac{1}{2}$ inter sectionem & Corniculatum hexagoni vere est inventa.

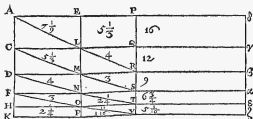
Posterior Demonstratio.

Fiat propositæ rationis $2\frac{1}{2}$ analysi in numeros integros, eruntque ut 4 ad 9; sicque corniculatum proxime subscriptum sectioni hexagoni, ad ipsam sectionem similiter prodatæ rationis $2\frac{1}{2}$ nuda expositione. Sed quando ad sequentem figuram in debita proportione sesquitertia exigitur, mox & heic veritas clarius dispalescet; Etenim primo fiat linea proportionalis aliqua adhuc indeterminata, velut AK, in qua pro prima vice FD sit $2\frac{1}{2}$, DC vero 3; ista enim ratio eadem est cum 3 ad 4, qui numeri è Noëm. 1, Directores sunt proportionis, in qua versamur, sesquitertiæ.

Deinde huic lineæ proportionali CF ducatur alia, quam fundamentalem vocamus, ad angulos rectos nempe Fα, dis-

Corniculat.

Sectio hexagoni.



tributa in partes æquales 13 scilicet 4 pro Corn. & 9 pro Sectione

Etione hexagoni, ut è resolutione propositæ rationis $2\frac{1}{7}$ fluunt, adhibito, quod Noëm. 2 habet, ut pars quævis harum fiat æqualis FD . Deinde fiant $D\beta$ & $C\gamma$ parallelæ, & æquales singulæ $F\alpha$: velut quoque $A\delta$, dum AC in linea proportionali se habet ad CD , ut 4 ad 3. Sic totum rectangulum $F\beta$ Scannatum est, & easdem partes in se continet, quas linea fundamentalis $F\alpha$ exhibet, nempe 4 & 9, prout hi numeri sunt inscripti rectangulis FM , & $N\beta$.

Tertio erecta linea recta NE parallela FA , proveniunt, juxta proportionem sesquiterciam ascendendo, numeri pro Corniculatis, 4, $5\frac{1}{7}$, $7\frac{1}{7}$. Item pro sectionibus Catallelis, 9, 12, 16.

Quarto, ut veritas assumptæ rationis $2\frac{1}{7}$ ulterius in combinatione proportionis sesquiterciæ infallibiliter ac inconcusse confirmetur, sumatur tertia pars de linea fundamentalis $N\alpha$, quæ sectioni destinatur, hoc est, NS_3 , de $N\alpha_9$, & rursus erigatur linea recta SP , parallela FA , vel NE . Quoniam igitur ut est NM $2\frac{1}{7}$ ad ML 3, vel 1 ad $1\frac{1}{7}$, vel denique ut 3 ad 4, nam ratio eadem est; sic linea NS_3 , ad lineam DM , eandem cum FN_4 , & sic rectangulum NR , ad rectang. FM : Sunt igitur continui termini proportionis sesquiterciæ [quam ubique servandam urgemus, quemadmodum eam ab initio in resolutione hexagoni accepimus] in rectangulis NR_3 , FM_4 , $DL_5\frac{1}{7}$, &c. Quæ quidem conspiratio rationis $2\frac{1}{7}$ demonstrandæ, cum dicta proportione sesquitercia, omnem contradictionem tollit, & inter alia, veritatis vindicem se præbet.

Ducantur enim & insuper Diagonii CS , per M mensurans SR seu FD : similiter & reliquæ, ut AR , per L , terminans RQ , vel DC : item DF per N , quæ metitur FH : & tandem FV per O , quæ mensurat altitudinem TV , vel HK ; omnes scilicet in continua ratione sesquitercia. Factis igitur parallelis $H\epsilon$ & $K\zeta$ lineæ $F\alpha$, & præterea Numeris,

ut vides, singulis suis locis inscriptis; habemus & heic præter connexionem proportionis sesquitertiæ supra demonstratam, etiam tria illa, quæ ultimo Noëm. pro veritate inventæ rationis $2\frac{1}{2}$ requirebantur; Nam & heic continua proportio sesquitertia servata, & aucta est. Secundo Symmetria quoque inter sectiones & Catalla corniculata ubique convincitur, aut in ipsis numeris utriusque quadratis, aut surdi-Symmetris [ut heic ita vocare liceat] velut 3 Corn. & $6\frac{1}{2}$ sect. multiplicari, dant veros numeros $4\frac{1}{2}$; Et sic de cæteris. Tertio redire quoque numeros pro sectionibus ordine inscriptis manifestum est.

Conclusio Demonstrationis posterioris.

Quocirca non alia ratio dari potest inter sectionem hexagoni & corniculatum eidem proxime subscriptum, quam $2\frac{1}{2}$, Quæ erat proposita.

C O R O L L.

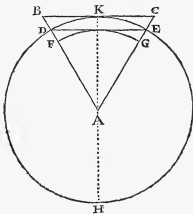
I Ex Diagoniorum inscriptione cernitur, quemadmodum rectangulum aliquod divisum ratione sesquitertia, ut rectangulum FQ divisum in 3, 4, $5\frac{1}{2}$ Complementum exhibeat MQ 4, nempe tertiam partem de 12 sectionis M 7, quæ est Corniculatum gradu inferius. Sic corniculatum DL $5\frac{1}{2}$ tertia pars est sectionis supremæ L 8, &c. Ergo & corniculatum FM 4, quarta pars est ejusdem sectionis L 8 16.

II Datæ pro sectione hexagoni lineæ cujuscunque pars tertia, erit ut 3 ad illam, sic 4 ad corniculatum respondens. Vnde alias adsumptas rationes inter sectionem & Corniculatum corrigere atque ad veras reducere convenit: ut detur vel supponatur talis ratio $2\frac{1}{2}$; hac resoluta fiunt 3 pro cornicul. & 7 pro sectione; hæc mox falsitatis arguitur, siquidem 3 & 7 non sunt Symmetri, ut factus ipsorum 21 ostendit. Ad veram
autem

autem rationem hoc modo reducatur $\frac{2}{7}$ id est pars tertia secti. ut enim 3 ad $\frac{2}{7}$, sic 4 ad $3\frac{2}{7}$ corniculatum respondens. Nam & heic $3\frac{2}{7}$ & 7, Symmetri, & in ratione $2\frac{1}{7}$ reperiuntur. Rursum fit data ratio $2\frac{1}{7}$. Ergo resoluta ut 5 corn. ad 11 sectionem. Sed neque hæc vera est, quod examen arguit. Nam ut 3 ad $\frac{11}{7}$, sic 4 ad $4\frac{1}{7}$ corn. verum. Ut autem 5 & 11 non sunt Symmetri, sic $4\frac{1}{7}$ & 11 numeri sunt commensurabiles. Multiplicati enim dant $\sqrt{\frac{44}{7}}$ id est $\frac{11}{7}$, & simul sunt in ratione ad invicem $2\frac{1}{7}$.

Constitutio Peripherie Circuli ex præmissis.

Fiat triangulum æquilaterum hexagonicum ut prius ABC,



cui inscribatur arcus DE, isque per totius Circuli *ipso* seu
 C 3

seu ambitum continuetur; ut periphœria super A Centro sit DEH, fiatque insuper Diameter KH. Deinde ut supra, inscribatur subtensa DE, & ei rursus inscribatur arcus FG. Habemus igitur & heic Sectionem hexagoni DE, inter duo corniculata BCED, & DEGF, quæ adinvicem superioribus sunt demonstrata in ratione sesquitertia, hoc est ut 4 ad 3. Præterea quoque nunc inventa est Ratio sectionis hexagoni DE, ad corniculatum DEGF dupla sesquiquarta, seu $2\frac{1}{2}$; hoc est, vel ut $2\frac{1}{2}$ ad 1, velut 9 ad 4. Quæ quidem ratio quia in omnibus sectionibus hexagonicis, & corniculatis ordine continuatur, ut supra ostensum est. Quapropter, nos hic numeris in resoluta ratione $2\frac{1}{2}$, hoc est ut 4 ad 9, utimur, quibus, ut decet, conjunctis, summa fit, pro figura [ut nobis vocatur] circulata, DKEGF 13, quæ quidem quarta pars est Sectoris hexagoni ADE, non minus atque trapezium BCDE quarta pars est trianguli ABC. Quum enim latera BC & DE, quæ homologa sunt triangulorum ABC, & ADE similium, in ratione fuerint ad invicem duplicata $\sqrt{1\frac{1}{2}}$, seu ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$, sequitur dicta triangula in eadem esse adinvicem ratione verorum numerorum 4 & 3; igitur triangulum ABC superat trigonum ADE, $\frac{1}{3}$ sui parte, in qua quoque, ut dixi, sectores sunt ADE, & AFG. Quum igitur figura DKEFG sit $\frac{1}{4}$ pars sectoris ADE, isque $\frac{1}{3}$ circuli, sequitur quod dicta figura DKEFG sit totius circuli pars $\frac{1}{12}$. At inventa illa fuit 13. Est proinde sector ADE, 52, & totus circulus 312. Quod pro constitutione periphœriæ circuli ex inventa ratione $2\frac{1}{2}$ inter sectionem hexagoni & subiectum corniculatum, eaque in 4 & 9 resoluta, demonstrasse oportuit. Potest autem circulus augeri minuique pro assumptis sectione & corniculato, ut capite sequente sumus ostensuri. Nunc ad promissam rationem inter Diametrum dati circuli, & hujus circumferentiam properabimus, similiter ostendendam.

*De inventione rationis Diametri ad datam Circuli
peripheriam.*

Quemadmodum Sectorem hexagoni ADE constat esse 52, præterea quoque corniculatum superscriptum BCEKD fieri 57, liquidem ut se habent 3 ad 4. Sic rursus antea inventum corniculatum DEGF 4, ad hoc BCEKD 57. Quod est differentia inter Sectorem ADE 52, & triangulum ABC, quare etiam differentia inter arcum DE & latus hexagoni circumscripti BC, è prima prop. Archimedis de Circulo, item prop. 5, cap. 2 Quadr. Circuli. Proinde numeris 52 & 57 simul additis, constituitur BC latus 57. Vt vero $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$, sic 57 seu quadr. $\sqrt{\frac{2028}{7}}$ ad DE, $\sqrt{24657}$, qui numerus mensurat circuli dati 312 radium AK. Ergo hujus duplum $\sqrt{98617}$ est Diameter quæsitæ KH. Invenitur quoque Diameter circuli hac proportione, nam ut BC latus hexagoni circumscripti est ad KH Diametrum, sic unitas ad $\sqrt{3}$. Quare multiplicato $\sqrt{\frac{2028}{7}}$ per $\sqrt{3}$, prodit Diameter ut prius $\sqrt{98617}$.

Atqui ut hoc loco, fortasse, de duobus imprimis admoneam, quæ ambo in demonstrationem cadunt, oportunum fuerit.

I Tangentem hexagoni, & arcum subscriptum, ut hic latus BC, & arcus DE, Symmetros longitudine esse; nam BC 57 & arcus DE 52, ambo sunt numeri veri. At descendendo, quia DE tangens erat $\sqrt{24657}$, & arcus FG quia se habet ad arcum DE 52, ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$, exit itaque FG, etiam in numerum surdum $\sqrt{2028}$, cui quoque DE $\sqrt{24657}$ longitudine Symmeter est, utroque scilicet numero per surdum $\sqrt{3}$ ad vere quadratos revocabili. Quod certe heic de facili demonstratum vides, in quo fere solo cap. tertium Quadr. circuli consumitur, nam id est quod lineæ rectæ cum circulari

circulari æqualitatem in natura conciliat. Sed de hisce ulterius sub finem cap. sequentis acturi sumus.

II Alterum est, quod dato circulo, seu ipsius circumferentia [ut semper hac praxi] in numero vero, semper Diameter in numerum surdum exit, quem quoque mensurat num. $\sqrt{3}$, aut huic Symmeter, haud secus atque in Quadrato accidit, quod datis costis in veris numeris, Diagonius exeat in surdos, semper numero $\sqrt{2}$ commensurabiles. Et, versa vice, utrobique.

Porro, inventa semel, ut heic, vera ratione Diametri ad suam Perimetrum, potest per eandem rationem, non modo data Diametro, in numero vero, ut sæpius requiritur, periphèria acquiri, & vice versa; verum etiam circulus augeri minuique pro imperata ratione, ut id lib. sequ. commodius exemplis docebimus. Vnum hoc loco esto; sit Diameter circuli in vero numero 43, erit periphèria $\sqrt{18252}$. Etenim, ut $\sqrt{9861\frac{1}{2}}$ ad 312, sic 43 ad $\sqrt{18252}$. Ratio autem perimetri ad suam Diametrum ex hisce utrifque in solutis numeris est $\frac{18252}{43^2}$.

In contractioribus vero $\frac{18252}{43^2}$ quam proxime, velut in resolutione horum irrationalium reperies, ceu numeri $\sqrt{\frac{18252}{43}}$. Sed de vere inventa Diametri ad suam perimetrum ratione plura infra cap. 5.

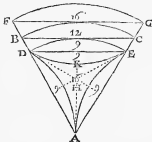
C A P. I V.

De ulteriore Demonstratione Constitutionis periphèria circuli, &c. etiam per alios modos compendioso.

PROportionem sesquiterciam initio in hexagono Circuli analytice, ac postea Synthetice per similes omnes ejus figuras demonstratam, quomocunque eandem ordine invertas, stabilem tandem, & perpetuam ad rotundi seu Circuli dimensionem manere ulterius cap. hoc quarto palam faciemus,

mus, ubi primo demonstrative convincemus, tria [ut superius coroll. I assertum est] corniculata, quamvis sectionem gradu secundo supra/criptam ingredi, & sic duas figuras diversas ejusdem hexagoni respectu, inter se esse æquales, ut in figura hexagoni subjecta.

Sit, ut in proximo hexagono Circulo adjuncto triangulum æquilaterum ABC $57\frac{1}{2}$; inventus autem Sector ADE 52 . Corniculatum autem superius BCE $5\frac{1}{2}$, cujus triplum 16 ; dico illud contineri tam in trilineo, ADE , in medio locato, quam in Sectione FG , supra DE sectionem secundo gradu distante, videlicet postquam triangulo



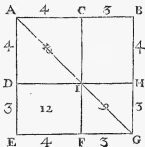
ADE inscriptæ fuerint tres sectiones, quarum singulæ æquales sunt DE , 9 part. Descendant enim ex apicibus ADE tres lineæ rectæ normaliter in arcus oppositos, secantes se in medio, nempe in puncto H . Quoniam igitur lineæ DH & EH simul sumptæ æquales sunt lineæ BC : HK vero æqualis BD , vel CE , & tandem arcus DKE æqualis opposito DE , erit proinde trilineum $DHEK$ æquale corniculato BCE $5\frac{1}{2}$, & ideo tria hujusmodi trilinea, quæ eadem Demonstrationis vi reperiuntur in figura trilineari in medio trianguli æquil. ADE locata, æqualia sectioni hexagoni FG , heic 16 partib. mensuratæ, dum DE sectio est 9 part. per omnia, ut superius cap. 3 ista sunt demonstrata. Idcirco pro constitutione Sectoris ADE , seu arcus DE , denuo ad hanc hypothefin exigenda, quando trilineo isti

D

D'E

DE est 9, rursus exurgit Sector nominatus hexagoni ADE, 52.

Idem admodum compendiose & evidentem in quadrato cap. 1 hujus inserto, & ad proportionem sesquitertiam distributo, cernitur. Quod proinde huc revocetur.



Illud quia ortum ducit ex latere AB in 4 & 3, ut vides, tributo, qui numeri sunt in ratione sesquitertia, ergo plana inscripta in proportione continua sesquitertia sunt, adeo ut quando FH ponitur 9, erit complementum EI 12, & alterum quadratum circa Diametrum DC 16, Sectiones hexagoni supra cap. 3 positas prorsus

representantia. Quin etiam pro imperata suppositione FH, vel DC, peripheriæ circularum in eadem proportione inde in reliquis subsecutura minuuntur, & augentur. Sunt enim plana heic circa Diametrum AG menores Sectoris hexagoni circuli, dum FH sectionem DE, DC vero trilineum in medio H figuræ antecedentis in debita proportione identidem referat, dum illa quater huic, ut supra, addatur. Constituto autem Sectori hexagoni figuræ anteced. ADE, non multum pro Diametro circuli est laborandum. Nam ablata sectione DE, de Sectori ADE, remanet triangulum æquilat. ADE, cujus unum latus ut AD radius est Sectoris ADE, adeoque circuli totius continuandi: hoc autem latus AD se habet ad dictum triangulum, seu ejus Diametrum ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$.

Exemplum

Exemplum in numeris usitatis, ubi sectio DE est 9. Hæc namque quater addita figuræ in medio 16 summam facit 52, videlicet totius Sectoris ADE mensuram. Rursus à Sectore isto ADE 52. sublata una sectione, ut DE 9, remanet triangulum ADE 43 part. ut autem $\sqrt{3}$ ad $\sqrt{4}$, sic 43 seu $\sqrt{1849}$ ad $\sqrt{2465\frac{1}{2}}$ radium Sectoris ADE, ut superius; Hujus autem numerus duplus, seu per $\sqrt{4}$ multiplicatus, dat integram Diametrum $\sqrt{9861\frac{1}{2}}$. vide supra cap. 3.

Aliud Exemplum hujus praxeos, sit, ut 16 ad 9, sic 12 ad $6\frac{1}{2}$: hic postremus terminus, quia Sectio hexagoni est, ejus quadruplum 27 additum 12, constituit summam 39. A qua rursus dempta una Sectione $6\frac{1}{2}$, remanet pro triangulo seu Diametri ejus mensore $32\frac{1}{2}$. in quadr. vero $\sqrt{\frac{1069}{4}}$: hinc, ut $\sqrt{3}$ ad $\sqrt{4}$, sic $\sqrt{\frac{1069}{4}}$ ad radium hujus circuli $\sqrt{1386\frac{1}{2}}$. duplicatum $\sqrt{5547}$, qui est Diameter quaesita. Vel, pro Diametro tota compendiose habenda, ut $\sqrt{3}$ ad $\sqrt{16}$, sic triangulum ADE $32\frac{1}{2}$, hoc est, ut antea in quadr. $\frac{1069}{4}$, ad $\sqrt{5547}$ ipsam Diametrum, cujus circulus, seu cujus circumferentia est 234: Tot enim numeri oriuntur producto arcu Sectoris hexagoni antea constituti 39 in num. 6. Resolutio itaque totius hujus argumenti Cyclometrici originem ducit ex numeris 4 & 3, horumque quadratis $\sqrt{16}$ & $\sqrt{9}$, ut in quadrato proximo antecedit, est manifestissimum, & in hisce exemplis quodammodo declaratum. Ad quæ ob datam proportionem seu potius rationem inter 16 & 9 numeros, qui circa Diametrum AG, infinita alia possunt excogitari ad Circulos cum suis Diametris sive augendos, sive minuendos.

Quinetiam ex transactione in eodem quadrato, alia producuntur analysin hujus argumenti respicientia; ut si medium ejusdem, quodcunque fuerit, ut hic est 12, dividatur per 3, quotus erit corniculatum 4, cujus Sectio est 9; diviso autem supremo termino (16) etiam per 3, oritur corniculatum ($5\frac{1}{3}$) corniculato ④ superius proxime. Item additis majore &

medio terminis, ut 16 & 12, constituitur inde semilunula trigoni 28; Sed differentia inter primum terminum 9 & medium 12, quæ est 3 medio addita, efficit semilunulam hexagoni 15. Summa harum semilunularum æqualis est triangulo ADE 43: Differentia vero 13 pars quarta Sectoris hexagoni, & $\frac{1}{4}$ totius circuli, velut lib. 2 hujus, oblata commoditate, ulterius demonstrabitur.

Porro in Disput. Cyclometrica de Mysteriis Numerorum 6, 7, 8, lunulæ sese offerunt, tam in ipsis numeris, quam ipsorum quadratis, his modis; primo in ipsis numeris: Adde 6 & 7, Summa erit 13, differentia Lunularum trigoni & hexagoni, quæ est $\frac{1}{4}$ pars circuli, ad quem Lunulæ istæ pertinent. Deinde adde 7 & 8; summa fit 15 Lunula hexagoni: Tertio adde 15 & 13, exurgit inde Lunula trigoni 28. Quarto adde 28 & 15, fit summa Lunularum 43, æqualis lateri trianguli æquil. Circulo inscripti.

Secundo in ipsis quadratis Numerorum 6, 7, 8. Nam quadr. de 6 est 36, quadratus vero de 7 est 49; quorum Quadr. differentia 13 differentia est Lun. ut prius. Deinde quadr. de 8 est 64, differt à 49 per 15, quæ est mensura Lunulæ hexagoni. Cætera ut prius.

Denique in alia Disputatione Cyclomet. idem ostendi, fieri posse in propor. tripla & sexdupla, ut & Sector & triangulam exacte inde proveniant, velut:

$$\begin{array}{r} 4 \quad 12 \quad 36 \\ 1 \quad 6 \quad 36 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 4 \quad 12 \quad 36 \\ 1 \quad 6 \quad 36 \end{array}} \right\} \text{Summa} \left\{ \begin{array}{l} 52 \text{ Sector hexagoni.} \\ 43 \text{ trianguli æquil. inscriptum.} \end{array} \right.$$

Et sic in Exemplis aliis omnibus, manentibus proportionibus & numeris variatis. Dum enim primus terminus propor. triplæ utcumque positæ dividatur per 4, secundus per 2, ultimo utrobique manente, fit è tripla, proportio sexdupla, ut heic vides.

Quas

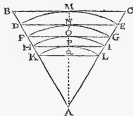
Quas proportiones omnes solutioni hujus famosi Cyclometrici Problematis varie accommodandas, sive veræ Cyclom. è proportionem sesquitertia luculenter per Naturam, velut rivulos effundit.

Vt nihil dicam de Æquatione Algebr. pro lunula trigonica & triangulo inscripto æquil. &c. sub finem Cyclom. Hamburg. pariter & Quadr. Circuli, triplici demonstratione, per numeros inventa; quæ quidem vel una ac sola Epicheiremati tali sufficeret.

Cæterum forte præstat, ulterius quam sub finem cap. præced. demonstrare, quemadmodum linea Circularis cum recta æquationem subeat. Quandoquidem ex eadem praxi percipitur, quomodo data alterutra, Circuli mensura denuo perficietur. Quare reducatur hac usitata hexagoni figura, per quam *dividatæ* hujus commode absolvitur.

PROPOSITIO.

In omni Circuli hexagono, latus circumscripti velut tangens, se habet ad proximum inscriptum arcum in integris numeris, ut 43 ad 39; hoc est in ratione $1\frac{4}{39}$.



Hanc autem rationem inter tangentem & subscriptum arcum hexagoni, si placet, ordine demonstrandam continuabimus, è superioribus emanantem.

Primo igitur quia BC tangens, & arcus DE, ostensæ sunt superius adinvicem esse ut $57\frac{1}{2}$ ad 52. Quod idem esse dico

dico ac si 43 ad 39. Nam utroque numero per 3 multiplicato, seu ad integros resolutio, erunt, illic 172, hic 156. Quibus singulis per communem Divisorem maximum 4 divisus, relinquuntur quoti 43 & 39 in numeris integris, ut est propositum. Deinde pro tangente DE, cum suo arcu subscripto FNG, quia est ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$, sic tangens BC, ad tangentem DE, hoc est, $57\frac{1}{2}$ ad $\sqrt{2465\frac{1}{2}}$; & sic arcus DME 52, ad arcum FNG $\sqrt{2028}$, velut hæc supra cap. 3 in iisdem numeris demonstrata sunt. Ut vero ad Symmetros seu vere quadratos revocentur, uterque $\sqrt{2465\frac{1}{2}}$ & $\sqrt{2028}$ per $\sqrt{3}$ multiplicetur, & fit illic $\sqrt{7396}$, cujus radix est 86; hic vero $\sqrt{6084}$, cujus radix 78. Sunt igitur 86 & 78 in minimis numeris integris 43 & 39. Tertio pro tangente FG, & arcu HOI, quia est, ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$, sic $\sqrt{2461\frac{1}{2}}$ ad $\sqrt{1849}$, cujus radix quadr. 43; item ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$, sic $\sqrt{2028}$ ad $\sqrt{1521}$ cujus radix 39. Vel hoc modo, per numeros veros, in hoc casu, ut 4 ad 3; sic BC $57\frac{1}{2}$ ad FG 43; & sic DME arcus 52 ad arcum HOI 39.

Denique pro tangente HI, & arcu KPL, quia ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$; sic FG 43 ad HI $\sqrt{1386\frac{1}{2}}$, & sic HOI arcus 39 ad arcum KPL $\sqrt{1140\frac{1}{2}}$, qui & ipsi numeri Symmetri sunt. Nam multiplicato $\sqrt{1386\frac{1}{2}}$ per $\sqrt{3}$, erit verus quadratus $\sqrt{\frac{10661}{2}}$, cujus radix $\frac{103}{2}$. Similiter $1140\frac{1}{2}$ per $\sqrt{3}$, erunt $\sqrt{13689}$, cujus radix est $\frac{117}{2}$, sunt autem 129 & 117 [remoto utrobique pari nominatore] inter se, ut 43 ad 39, sic in tota hac serie tangens & arcus hexagoni subiectus, perpetuo sunt in ratione ad invicem $1\frac{2}{3}$, vel ut 43 ad 39: Quod erat ostendendum.

Atqui hinc duo corollaria emanant.

I Quod alibi demonstratum est, nempe tangens hexagoni, & arcus subscriptus proximus perpetuo sunt inter se longitudine Symmetri. Vnde facile colligitur dari scilicet in Natura lineam rectam circulari æqualem, & vice versa. Siquidem differentia hic inter 43 & 39, nempe 4, quoque est verus numerus,

II Dato vel latere circumscripto hexagoni, vel arcu subscripto, & nunc cognita ipsorum inter se ratione $1\frac{2}{3}$: datur non solum circulus cum sua peripheria; sed etiam ejus Diameter. Ut fit in proximo hexagono B C 1, erit arcus D E $\frac{10}{17}$. Nam ut 43 ad 39, sic 1 ad $\frac{10}{17}$, quo numero per 6 multiplicato, conficitur totus circulus $\frac{120}{17}$, seu $5\frac{10}{17}$.

Porro, quia latus hexagoni circumscripti se habet ad Diametrum, ut 1 ad $\sqrt{3}$, velut supra est ostensum: erit igitur Diameter circuli $\sqrt{3}$, cujus peripheria est $5\frac{10}{17}$. In resolutio autem $\frac{120}{17}$, quando nominator 43 quadratur, fit 1849, quo numero multiplicato in $\sqrt{3}$, exit Diameter $\sqrt{5547}$ respondens Circuli peripheriæ 234.

C A P. V.

De collatione inventæ rationis Diametri ad suam peripheriam cum Archimedæa, item de cujusvis sectionis hujusmodi peripheriæ insufficientia.

Collatio inventæ superius Rationis Diametri ad suam peripheriam cum Archimedæa non ideo heic instituitur, ut nostram in dubium vocemus; sed potius, ut omnibus constet, neminem, qui in hoc argumento ludarat, hætenus inventum fuisse, qui quasi medio inter terminos Archimedæos dictam rationem sifteret, sive hypothesi, sive numeris usus. Neque enim limites Archimedis ponimus heic $3\frac{1}{7}$ & $3\frac{10}{71}$ in paucos proxime numeros, ex ipsius Epilogismis extra intraque circumulum, contractos; sed eosdem exquisite retinemus, quos prop. 3 de Circulo nobis reliquerat, peripheria in 96 p. tributa, nempe extra Circulum, inventa Archimedi ratio est Diametri ad perimetrum, quæ est numeri, 4673 $\frac{1}{2}$ ad numerum 14688. Vnde posita Diametro 10000000, fit peripheria 31428265.

Similiter

Similiter facta intra circulum operatione emergit Archimedi hinc ratio Diametri ad perimetrum, quæ est numeri 2017½ ad 6336, calculo & heic ab aliis artificibus diligenter repetito. Sed posita Diametro in hoc casu 10000000, erit peripheria 31409095. Quum autem peripheria Archimedæa utrinque ad medium reducatur, fit ea 31418680; nostra vero sub finem cap. 3 inventa est 31418596.

Proinde differentia saltem est 00000048, qua nostra media Archimedæa minor reperitur, manente utrobique Diametro 10000000. Atqui hanc differentiolum inter rationem Archimedæam limitatam, nostramque Diametri ad circuli perimetrum, libenter Mathematicis dijudicandam relinquo, dum nostram è præmissa, à Natura, proportionem erutam, non etiam nisi potentia rationalem, superius cap. 3, in veritate, deprehenderint. Sed quid Ludolpho de Cölln, Belgii olim miraculo, eo quod in numeris potentissimus fuerat, licet nullus à literis, reponamus? Dum enim hic circumferentiam circuli in polygonal laterum 1073741824, id est pene infinitorum, secando, & Archimedem quodammodo imitando, praxin suam ad aloga ita in lib. de Circulo Belgice edito expedit, ut supposita Diametro, 10000000000000000 peripheria ex polyg. præmissis diduceretur, ad $\left\{ \begin{array}{l} \text{extra } 31415926 : 3589733. \\ \text{intra } 3141592653589732. \end{array} \right.$ Differentia, ut vides, tam vasti numeri, in solam unitatem exeunte. Nec dubium, quin juxta suam methodum, quantum potuit, calculi errorem vitaverat. Nam & huic Clarissimi alii Mathematici, nimirum W. Snellius Belga, & H. Briggsius Anglus, præter alios, assensum suum dederunt, Circuli videlicet factum sub aliam mensuram nunquam in veritate majore casurum arbitrati, & propterea ambo me in hoc Cyclo-metrico argumento indefesso laborantem, litteris suis, dum vixerunt, à proposito sunt debortati; Sed frustra, quum non minus, quam Eutocius olim Epilogo suo in Archimedem, certo

certo scirem, nunquam hujusmodi Sectionis pragmateia, ad Ludolphæam præcisionem in veritate perveniendum.

Certe causa Ludolphææ præcisionis, non in vastis illis numeris præmissis asserenda est, sed potius in Dichotomia peripheriæ circuli prope infinitorum, nimirum in numeris 1073741824 polygonorum; Nam modo eadem sectione usus fuisset, & saltem Diametrum 100000 supposuisset, similiter unitatis differentiam inter polygonum circumscriptum & inscriptum reperiisset. Vide F. Vietam lib. 8 Respons. cap. 15.

Simile profecto secantibus istis accidere mihi videtur, ac si quis peripheriam circuli Mechanice filo æneo formatam, & postea in balance ad certum pondus libratam, per dichotomiam multoties secaret, & inter secandum decedentes per limam rasuras desuere sineret, tandemque affirmaret se ex minima relicta particula in suo pondere æstimata, justum totius peripheriæ pondus Synthetice colligere, ac restituere velle. Sed ne spissum hoc simile, minime tamen impertinens, quemquam offendant, nos Apologiæ seu plenioris responsionis loco, Exordium quoddam, quod Disputationi Cyclometricæ heic publ. olim præmissimus, subjungemus, ut sequitur.

Quum vera aliarum Artium principia curiose ab initio exponi debeant, tum vel maxime Artes in demonstratione fixæ, qualis Arithmetica & Geometria est, atque hinc deducta Cyclometria, ita veris suis principiis innitentur, & homogenea homogeneis conferentur, ne in operationis progressu, magnitudines, quæ natura sua exquisite non comparantur, in devia nos successive abripiant.

Oportet enim Mathematicum, quatenus Mathematicus est, Naturæ quantitativæ definiendæ, & postea corporibus, unde quantitates abstractæ sunt, ipsorumque superficiebus, competenter rursus accommodandæ, ministrum se præbere.

Ergo quod talis Natura non permittit, Mathematicus intantum relinquet, nisi forte $\alpha^{\epsilon} \pi \delta \gamma \mu \delta$, ut Eutocius loquitur,

ubi tamen nihil perfectum & absolutum cognoscere datur, mensuris, quibus quantitates metimur, inter se naturaliter dissidentibus; siquidem ab hisce inter se miscendis, ipse Euclides Mathematicorum parens ubique immunem se servabat; quæ quoque causa fuerat, cur nobis librum decimum de magnitudinibus irrationalibus tam prolixè ad imitationem Pythagoræ reliquerat.

Hanc vero *Ἀποκρίσιον* per Cyclometriam sicubi unquam vere in lucem producendam, non solum ipsa ratio, sed etiam Autoritas præstantium Geometrarum nos præmonuerunt, ut est illustris Francisci Vietæ Fontenæensis Mathematici nostri seculo nulli secundi, tum alibi in Archimedis imperfectam Cyclometriam, tum sub initium supplementi Geometriæ his verbis: Magnitudo tum decimum data intelligitur, secundum analytica principia, quum ita exhibetur re, ut quemadmodum inter homogeneas sit affecta, innotescat.

Idcirco idem Vietæ lib. 8 Responsorum cap. 15, Nec Archimedis Quadraturæ circuli Inventionem; nec Nicomedis *ἑπιπέδων* esse censuit.

Porro C. Dibuadius M. S. in Cyclometriam Philippi Lanbergii idem ingenne confessus est, & quidem specialius de Canonis Trigonometrici insufficientia in argumento Cyclometrico rite tractando his verbis: Problemata, quæ Geometricam certitudinem & factionem requirunt, ex propriis & genuinis locis solvi debent; non ex peregrinis fontibus: Plana scilicet ex planis, solida ex solidis. Astronomica quæ sita recte magnam partem per magnum Canonem expediuntur: Sed genuinum Geometriæ Problema ejus ope absolvere velle ridiculum est, & non ferendum: Vt enim singula in rerum natura ex suis sibi appropriatis Principiis constant, ita in eadem resolvi debent; vel Synthetice ex propriis componi. Mere autem Geometricum Problema est *Quadratura Circuli*, dotari itaque hæc filia suis genuinis debet opibus, si commode & ambitione

bitione procorum sit elocanda. Numeri, qui ex Canone Sinuum inducuntur, quem π exhibeant, & non sit exacti, lateentes errores ingerere possunt, utpote mutili perpetui; Quod nemo ignorat, qui structuram Canonum expendit, vel ei rei perficiendæ manum adhibuit: Nec his unquam *Commensurabile & Incommensurabile* deprehendi potest; Quod tamen summopere necessarium est persensisse, priusquam habitudines affingemus magnitudinibus, quæ nulla ratione inter se ad desideratam conspirare proportionem in rerum Naturæ volunt; Sed qui oriuntur ex rei Natura & Geometricis affectionibus Numeri, neutiquam errant, fallunt ac decipiunt.

Quin & idem Dibadius defectum Canonis Sinuum in sua Geometria Numerali pag. 38, una cum multis aliis his verbis notat: Doctissimus [Clavius in fine Comm. ad lib 6 Euclidis] & alius eum secutus, Canonis Sinuum subsidio proportionem Archimedææ accuratorem inquisiverunt; sed hoc incertum est per æque incertum demonstrare, & ignotum per ignotum declarare, talesque conatus cum partium Canonis Defectu intercidunt.

Hæc ille.

Amplius si rationi locum demus, & in causas hujus defectiōnis Canonis Trigonometriæ paulo accuratius intueamur, tres illius invenimus fati in numeris præguantes, quarum

Prima est, quod Operatio pro Canonis istius Syntaxi in solis lineis rectis contingat, ex quibus tandem lineæ Circularis mensura illis, qui Cyclometriam Canonis accommodant, quaritur: Quod violentum est, & Naturæ contrarium. Quamvis enim linea curva seu circularis, rectæ possit esse æqualis [vel contra, recta in Natura peripheriæ circuli æqualis, ut Eutocius Comm. in Archimedem contestatur,] & ideo Circulus ipse æqualis rectilineo dari, ut in progressu ostenditur: tamen Circularis linea nunquam è rectis componi poterit, nisi hæc prius in puncta transiverint, quod fieri nullo modo potest;

Siquidem omnis linea in infinitum est secabilis; unde nemo mirari debet genuinam mensuram Circuli ampliolem paulo ea esse, quæ è rectis lineis seu lateribus polygonorum adscriptorum conficitur. Cui rei Archimedes olim tacitum consensum attribuisse videtur, ponendo rationem peripheriæ ad diametrum circuli $3\frac{1}{7}$ aliquanto scilicet majorem ea, quam Sectionis praxis ipsi est largita. Vide 2 & 3 prop. Arch. de Circulo. Cui quoque æqualis est illa Euclidæ apud Heronem. Vide P. R. Él. 2 lib. 19.

Secunda causa defectus Canonis est asymmetria longitudinis perimetri Circuli cum Diametro, rata satis ac vera, quæ facit, ut dum operatio in irrationalibus suscipiatur, idque per sæpius iteratam radicem extractionem, tunc plurimi Numeri quavis operationis vice excluduntur, quos radices veris proximæ non exhauriunt. Quando igitur dictæ radices de novo per radium Circuli ad plurimas siphras extensum juxta præcepti exigentiam multiplicantur, quis ignorare debet, insensibilem radicis ita in irrationalibus quæsitæ defectum, vel saltem in numero ejus finali, toties tunc augeri, quoties unitas in radio isto prolixiore reperitur?

Tertia denique hujus defectus causa est disproportionio Sinus recti ac versi sub initium Quadrantis, ubi saltem per Canonem peripheriæ Circuli mensura statuitur. Qui quidem eo major est, quo *διχομμία* vel quævis alia Sectio iteratior fuerit; Quod nec Ioh. Regiomontanum, nec Ioachimium Rheticum, nec denique Valentinum Othonem lib. 3, probl. 4 Oper. Palat. latuisse constat; Quodque certe Archimedi præcognitum fuit, Circulum ad plures quam 96 æquales partes, pro sua Cyclometria, haud sollicitanti.

Quoniam vero nullum prorsus discrimen agnoscimus inter fabricam Canonis Trigonometriæ, & Cyclometriam, scilicet è talibus Sectionibus conficiendam, proinde si quisquam præsumat, veram Circuli peripheriam eam esse, quæ inter
polygo-

polygonum inscriptum & circumscriptum è talibus numeris utrinque confecta censebitur, hic parum profecto attendit, minimum errorem seu defectum, qui ex hisce præmissis causis penes latus minutissimum polygoni sic inventum, necessario resideat, toties in peripheria hinc fabricanda iterari, quoties unitas in Numero laterum omnium polygoni istius continetur.

Hisce debite consideratis, quum pro certo habeamus, nec Archimedes olim, nec quenquam alium, utut sectionis praxi fines Archimedæos plurimum egressum, veram Cyclometriam in Numeris irrationalibus unquam venari potuisse, vel lineam rectam peripheriæ Circuli æqualem: Quod etiam Eurocius in suo Epilogo Comm. in Arch. de Circ. aperte fatetur; Equidem quæ ante plures annos in hoc nobilissimo argumento, recte aliquando intra Symmetra claudendo, ac conficiendo, assiduis curis meditatatus sum, non vereor nunc publ. censuræ exponere: Nec jure vereri me oportet, postquam viam insolitam per Naturam ingressus, ea requisita, eamque simul Methodum satis essem edoctus, quæ Epicheiremati huic sublimi quidem, & juxta plurimorum opinionem inveteratam, inventu impossibili, cæterum in Natura ipsa omnium facillimo, finem aliquando imponerent.

Hæc hæctenus, quæ si Lector Benevolus, ac veritatis amans diligenter trutinaverit, iisque ea adjunxerit, quæ Cyclometriæ Hamburg. subjuncta sunt, videlicet de Canonis Trigonometriæ fabrica, ejusque sub initium & finem in Numeris restitutione [quæ tamen absque sensibili errore in analysi triangulorum accedit] non dubito, quin hanc Sectionis peripheriæ Circuli pragmateiam, scilicet ad eundem tam perfecte mensurandum, haut amplius probabit.

LIBER SECVNDVS

De Geodæfia Rotundi Plani, in lineis, & planis, varie inter se æquandis, augendis, minuendis, transmutandis, & mensurandis.

CAP. I.

De Enunciatis quibusdam, plurimum à superioribus desumptis, & analysi sequentium inservientibus.

I Similes figuræ sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

II Inter duo polygona æqualium laterum circulo circumscripta, & inscripta, medium proportionale est inscriptum duplicatorum laterum.

III In regula proport. trium terminorum; si primus fuerit quadratus Numerus, tertius quoque quadratus erit; vel hi Symmetri, & medius quadratus.

IV In regula proportionis quatuor terminorum; si duo quivis termini Symmetri fuerint, & reliqui duo Symmetri erunt.

V Si Circulo figura quævis circumscribatur, erit eadem ratio peripheriæ circuli ad summam laterum figuræ circumscriptæ, quæ est areæ circuli ad figuram circumscriptam; & contra, pr. 5, cap. 2 *Quadr. Circuli.*

VI Omnis trianguli æquilateri latus, cen tangens, & arcus inscriptus, sunt inter se Symmetra; scilicet aut ambo in veris numeris, aut surdis longitudine Symmetris. cap. 4, lib. 1 hujus, item pr. 2, 4 & 9, cap. 3, *Quadr. Circuli.*

VII Partes circulo adscriptæ nobis mensurantur, non heic cum vulgo Geometrarum in Quadratulis; Sed iis partibus,

bus, quibus circuli peripheria æqualiter dividitur. Exempli gratia: Sector circuli quod nobis superius fuit 52 p. idem in quadratis fit $1290\frac{12}{100}$ quam proxime, resolutio scilicet radio $\sqrt{2465\frac{1}{2}}$ & in dimidium 52, hoc est 26 multiplicato. Aliud Exemplum habes infra cap. 6.

VIII Diameter circuli longitudine incommensurabilis est ejusdem Circuli peripheriæ, ut supra cap. 3 hujus est demonstratum.

IX Si Diameter circuli tripletur, factus erit Dodecagonum Circulo eidem inscriptum, ut postea, cap. 5 hujus, Exemplo patebit.

X Eadem Diameter Circuli quadruplicata, gignit quadratum Circulo circumscriptum.

XI Quadratum circumscriptum circulo ductum in Dodecagonum eidem inscriptum, potest hexagonum circulo circumscriptum. Idem oritur ex multiplicatione Diametri in numerum $\sqrt{12}$.

XII Latus hexagoni circumscripti est ad Circuli Diametrum ut 1 ad $\sqrt{3}$.

XIII Si Diameter Circuli multiplicetur in numerum $\sqrt{9\frac{100}{100}}$, producitur ejus peripheria, secus quam Indi, qui è falsa sua hypothese, perimetrum Circuli ad suam Diametrum rationem habere voluerunt, quæ est $\sqrt{10}$ ad $\sqrt{1}$ seu $\sqrt{\frac{10}{1}}$. Vide Iosephum Scaligerum pag. 38 Cycl.

XIV Hexagonum circumscriptum ad Circulum, & ejus peripheria ad Circuli peripheriam est ut 43 ad 39. Inscriptum vero hexagonum ad Circulum est ut 43 ad 52.

Notatu autem hoc loco dignum puto, quod illustris Hadrianus Romanus in Apologia pro Archimede adversus Iosephum Scaligerum prop. 4. pag. 111, ex ipso Archimede ostenderit; Circulum ad hexangulum inscriptum, rationem habere minorem, quam 1144 ad 945: Si ergo huic unitas adjiciatur, ut fiat 946, eadem fit in minimis numeris 52

ad 43

ad 43 ex invento nostro, & ratio quoque minuitur, ut vult autor.

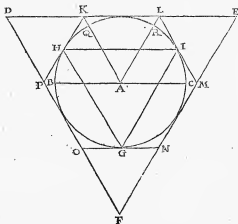
XV Lunulam trigoni & hexagoni mensurat simul latus trianguli æquilateri circulo inscripti; Differentiam vero earundem pars circuli seu ejus circumferentia $\frac{1}{2}$. Vide cap. 4, lib. hujus.

C A P. I I.

De lineis rectis Circulo adscriptis, & Peripheria ejus Symmetris, ipsarumque cum peripheria Circuli subducta ratione, unde absoluta linea recta & Circularis æqualitas in Natura esse cognoscitur.

Archimede[m] pariter & Eutocium lineam rectam in Natura peripheriæ Circuli æqualem non frustra supposuisse hoc cap. è lib. 1 hujus, cum B. D. adhuc pluribus ostendemas, ut quoque in sequentium subsidium ac majorem illustrationem veniant, quæ ab illis, ipsarumque determinatis rationibus eliciuntur. Quo vero oculis melius percipiantur, sequentem figuram ipsis paravimus. Circulo GHI super centro A, & Diametro BC, circumscribantur, primo triangulum æquilaterum DEF. Deinde hexagonum KLMNOP. Ductis autem à Centro A, lineis rectis AK, & AL, in terminos lateris hexagoni circumscripti, secantibus circumlum, seu hujus peripheriam in Q & R. Quoniam igitur arcus QR, ex cap. 3 & 4, lib. 1 hujus, est 52 p. dum KL fuerit 57 $\frac{1}{7}$, Symmetræ proinde hæ lineæ sunt, & ipsarum ratio 1 $\frac{1}{7}$. Quæ quoque est totius peripheriæ Circuli ad summam laterum dicti hexagoni circumscripti. Plura extant cap. 4, lib. 1. Porro quia latus trianguli æquilateri circumscripti DE, tripla est KL 57 $\frac{1}{7}$, proinde DE est 172, Circuli autem peripheria 312 p. dum arcus QR 52 sexies adsumitur.

mitur. Habebunt igitur se peripheriæ Circuli, nempe 312 ad DE 172, in ratione $1\frac{1}{3}$. Amplius quoniam latus trianguli in-



scripti æquil. HI, dimidium est lateris circumscripti DE. Quare hujus cum peripheriâ ratio est $3\frac{1}{3}$, quæ eadem est summæ lunularum trigoni & hexagoni cum Circulo, seu ipsius peripheriâ. Quarum differentia est $\frac{1}{3}$ pars circuli, aut hujus peripheriæ, Lunula autem trigoni semper se habet, ad Lunulam hexagoni, ut 28 ad 15 in integris Numeris, hoc est in ratione $1\frac{1}{3}$. Has equidem rationes rectarum linearum, quæ peripheriæ Symmetræ fuere, item Lunularum cum Circulo, etiam ad id conducere video, ut supposito uno, in quocunque alio Numero seu magnitudine, primum Circuli competens

F tens

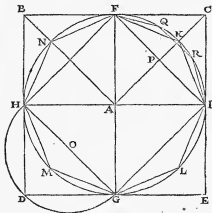
tens peripheria, deinde ejus diameter in Numeris dispalescat. Exempli gratia: Supponatur DE latus trianguli æquilateri circumscripti 9 p. Vnde tam peripheria circuli, quam Diameter quærantur; igitur ratio $1\frac{2}{3}$ resoluta numeros statuit 78 & 43, qui sunt peripheriæ Circuli cum latere trigoni æquil. circumscripti; Ergo proportio, inverso termino, ita statuit $43-78-9$ ($16\frac{2}{3}$ circuli peripheria, cujus Diameter ita facile invenitur: Etenim, ut 1 ad $\sqrt{3}$, sic KL 3, seu $\sqrt{9}$ ad Diametrum BC $\sqrt{27}$. Et ita in aliis. Vt esto lunula trigoni supposita 7 p. quia est ut 28 ad 7, sic differentia 13 ($3\frac{1}{2}$, id est $\frac{7}{2}$ circuli, & ideo tota peripheria 39. Vel plenius, ut 28 ad 7, sic 15 ad $3\frac{1}{2}$ lun. hexag. differentia igitur inter lunulas 7 & $3\frac{1}{2}$, est $3\frac{1}{2}$ id est $\frac{7}{2}$ pars circuli, & ideo peripheria 39 ut prius: Sed summa lun. est $10\frac{1}{2}$, eadem cum trianguli æquil. circulo 39 inscripti latere. Quod quia se habet ad Diametrum circuli ut $\sqrt{3}$ ad 2, seu $\sqrt{4}$, erit Diameter $\sqrt{154\frac{1}{2}}$. Hæc pancula sunt inter plurima, quæ Symmetria lineæ rectæ & circularis in hac figura facile admittit.

C A P. I I I.

De lineis rectis circulo adscriptis, quæ quia peripheria longitudine sunt incommensurabiles, inutilis reperiuntur, ad exquisitam Circuli mensuram.

QVoniã Diameter Circuli peripheriæ ejusdem potentia, & non etiam longitudine, est rationalis, proinde quia nulla absoluta æquatio ex iis rectis lineis cum circulo, & ejus partibus, fieri poterit, quæ immediate à Diametro irrationali descendunt, igitur frustra hæctenus pro Circulo mensurando ab aliis sunt adhibitæ. Hæ autem sunt, quæ circuli quadrantem aut tangunt aut subtendunt, ut de infinitis aliis polygonis peripheriæ incommensurabilibus heic nihil dicam; sufficit enim

enim in quovis præcedentium triangulo æquilatèro, $\lambda\alpha\beta\alpha\delta\epsilon\zeta$ & $\kappa\omicron\mu\lambda\omicron\mu\epsilon\tau\epsilon\tau\epsilon\iota\alpha\varsigma$ ἰσῶν; sed & his alogis sequentem figuram adsignamus. Retento circulo superiore, & ejus peripheria 312 p.



item Diametro hujus $\sqrt{9861\frac{1}{2}}$ è cap. 3, lib. 1 : eidem primum quadratum circumscribatur BCED. Deinde inscribatur quadr. HFIG. Item octogonum FKILGMHN, &c. Quia vero nullæ hujus schematis lineæ rectæ longitudine rationales fuerint peripheriæ circuli, nullæ proinde ejusdem figuræ in plano sive extra sive intra circulum, arcæ circuli sunt Symmetræ. Primo enim quoniam BC latus quadrati circumscripti, Diametri $\sqrt{9861\frac{1}{2}}$ mensuram obtinet, tangentis scilicet arcum quadrantis NFK, est irrationale longitudine toti circulo 312, erit quoque ad quadrantem hujus 78

asymmetrum. Proinde neque corniculatum BCKFN arcæ circuli Symmetrum est, & pr. § cap. 2 Quadr. Circuli. Idem de inscripto quadrato FIGH affirmandum; nam FI dimidium est Numeri quadrati, Diametri circuli HI, nempe $\sqrt{4930\frac{1}{2}}$. Nec denique latus FK Octogonii inscripti rationale, est sit enim illud ex quadratis AK $\sqrt{2465\frac{1}{2}}$ — AP $\sqrt{1232\frac{1}{2}}$, & quadr. FP $\sqrt{1232\frac{1}{2}}$. At nec lunula quidem quadrantis GDHM arcæ circuli Symmetra est: Siquidem ipsa æqualis est triangulo æquicruo HAG, ut postea in resolutione figuræ hujus patebit. In hisce enim duobus capitulis saltem propositum fuerat ostendere, quæ rectæ lineæ pariter & plana in duabus hisce figuris, peripheriæ circuli Symmetra, quæque asymmetra forent. Nam ut in illis præcisa, sic in hisce nulla legitima Æquatio expectanda est: interim tamen nunc data ratione Diametri Circuli ad suam perimetrum, Æquationes, etiam in alogis, se sistunt veritati proximas, ut infra Cap. § experiemur.

C A P. I V.

De resolutione figuræ Symmetræ cap. 2 hujus, quoad Geodesiam planorum rotundo ibidem adscriptorum; Deque Lunularum trigoni & hexagoni magnitudine & differentia, in quibus quoque plani rotundi mensura consistit. Exemplo denique, quo ostenditur Circuli veri cum sacris litteris in Numeris convenientia.

Geodæsia rotundi in plano, idco nec ab Archimede, nec ullo alio hæctenus in suis particulis contentis, rite ad Numeros erui poterat, quia nec inter peripheriam Circuli; lincis rectis supra ostensis longitudine rationalem, & Diametrum ejus, iidem rectis longit. irrationalem discernere datum fuerat. Rotundo autem plano, hoc est, Circulo, varia adscripta

adscripta contenta, et si singula bases multarum rerum solidarum, seu corporum pro figurarum dictarum diversitate, artificiose extruendorum, esse possint; tamen quia in Geodesia plurimum, & interdum necessarium usum habent, proinde ad eandem merito appellationem suam referunt; Sed ad propositum veniamus. Schematè cap. 2, heic repetito, & paululum aucto.

Retenta integri Circuli mensura, prout supra inventa fuit 312 p. cujus quidem $\frac{2}{3}$ pars est Circulata figura V X Z Y 13, ut supra inventa est, composita videlicet ex — 9 sectione V X, & 4 Corniculato infra scripto V X Z Y. Hæc seqq. elicientur.

I Hexagonum circumscriptum.

Quia K L linea inventa fuit $57\frac{1}{2}$, ea itaque sexies iterata fit ambitus hexagoni circumscripti 344, simulque hexagonum ipsum ordinatum circumscriptum K L M N O P.

II Corniculatum superius.

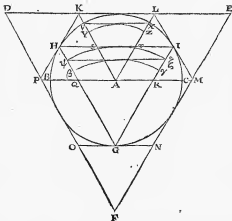
Ab hoc subducto circulo 312 p. remanet differentia 32, qua in sex similiter partes tributa, redit Numerus $5\frac{1}{3}$, differentia inter Sectorem hexagoni 52, & hexagoni circumscripti partem sextam.

III Hexagonum inscriptum.

Quia autem triangulum æquil. A V X, pro inscripti hexagoni $\frac{1}{3}$ parte habendum, se habet ad A K L, ut 3 ad 4, hoc est in ratione subsesquitercia, erit illud 43, & totum hexagonum inscriptum 258.

IV *Triangulum æquil. circumscriptum.*

Porro pro triangulo æquilatero circumscripto DEF, quia DE tripla est KL, id est 172 p. hoc igitur Numero pro



laterum summatriplicato, exit triangulum circumscriptum DEF 516 p.

V *Triangulum æquil. inscriptum.*

Cujus quarta pars est triangulum æquilaterum inscriptum GHI 129 p. Et quia dicti trianguli æquil. inscripti latus HI 86 p. superans KL 57 $\frac{1}{2}$ parte sesquialtera, erunt ipsa triangula

triangula æquil. HIG , & KLA , in ratione ad invicem $2\frac{1}{2}$, hoc est ut 9 ad 4. Et quia eadem ratio fuit Sectionis hexagoni VX ad Corniculatum inscriptum $VXZY$. Quocirca inverfa proportione, erunt dicta Sectio VX & Corniculatum $\psi\xi\beta\gamma$ inter se æqualia. Quæ nimirum convenientia triangulorum, æquilaterorum rectilineorum cum circularibus ad eandem rationem stabiliendam in ipsa Natura vobis revelatur. Nam posito triangulo æquil. inscripto HGI , erit KAL vel OFN 4, id est ratio Sectionis hexagoni quaesita ad subiectum Corniculatum.

VI Sectio Trigoni inscripti æquilateri.

Amplius in præfinito Circulo 312 p. Sectio trigoni inscripti $HVXI$ quaeritur facillime hoc modo. Etenim sublato de Circulo 312, triangulo æquil. inscripto, 129, residui sunt Numeri 183, quorum $\frac{1}{3}$ nempe 61 est dicta Sectio $HVXI$.

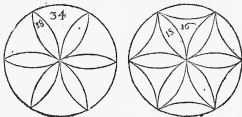
Lubet adhuc æqualitatem trilinei BQH , & HSV per numeros experiri. Igitur subtracto triangulo æquil. QGR $57\frac{1}{2}$ de semicirculo BGC 156, residua sunt, trilineum BGQ , & CGR ; simul $98\frac{1}{2}$, singula $49\frac{1}{2}$. quo rursus sublato ab invento superius trigoni 61 fit quaesitum trilineum BQH $11\frac{1}{2}$, Eiusdem magnitudinis esse HSV ita quoque numeris probatur: totum triangulum æquil. HSK quarta pars est trianguli KAL $57\frac{1}{2}$. Ergo illud est $14\frac{1}{2}$, à quo ablato semicorniculo HVK $2\frac{1}{2}$ [quum totum antea inventum fuerat $5\frac{1}{2}$] redit Numerus $11\frac{1}{2}$, etiam pro trilineo HSV .

Restant adhuc primo quadrilaterum $SYZT$: quod relinquitur ex $\frac{1}{4}$ parte Sectoris AVX 13, & $\frac{1}{4}$ triangul. KAL nempe $14\frac{1}{2}$, quibus additis fit summa $27\frac{1}{2}$, eaque subducta à Sectore AVX 52, remanet quaesitum quadrilaterum $SYZT$ $24\frac{1}{2}$.

Denique pro $\beta\gamma RQ$, quia Sector. $G\psi\xi$ se habet ad Sectorem

Sectorem AVX , nempe $\frac{52}{7}$, ut 9 ad 4, erit ille 117 p. à quo sublata quarta ejus parte $\psi \xi \gamma \beta \frac{29}{7}$, item triangulum æquil. $QGR \frac{57}{7}$, quorum summa est $86\frac{2}{7}$, remanet quæsitum $\beta \gamma RQ \frac{30}{7}$. Et sic in cæteris, ut dato Circulo, vix ullum planum ipsi sic adscriptum in Numeris veris latere nos poterit. De cæteris autem pro quavis parte imperata Circulo auferenda infra docebimus.

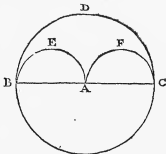
Quia vero Circulus basis est omnium Cylindræcorum corporum, operæ præcium est, unam & alteram, inter plurimas figuras, hic adnotare, quarum singularum magnitudines



Circulo cognito, ex antecedentibus patent. Nec difficile est alias in forma quacunque excogitare, & dato Circulo, singulas suas magnitudinibus Numeris definire, quæ basium loco esse possunt. Paradeigmata nobis præbuit olim Celebrerrimus F. Vieta lib. 8 Responf. cap. 11. Ipsa autem omnia sive Arbeli sive Lunulæ fuerint, facilem in Numeros analyfin admittunt, Circuli per Sectiones partesque suas mensura jam inventa. Ut esto juxta primam prop. dicti cap. 11, descriptio Arbeli primi generis in Numeros præcise resolvendi.

Verba Celeb. Vietae hæc sunt: Describatur Circulus super A centro, & agatur Diametret BAC , & fiunt AB , AC singulæ

gulæ dimetientes
 Circulorum, ipſique
 deſcribantur Circu-
 li. Sunt igitur Semi-
 circumferentiæ ſuo-
 rum Circulorum, ſin-
 gulæ BC , BA ,
 AC , curvæ lineæ.
 Quapropter Spa-
 tium CD , BE , AF
 eſt Arbelus, ſcal-
 prumque Sutorium.
 Haſtenus Vieta.



Nos autem ſingula per Numeros præciſe determinabi-
 mus, meſura è lib. 1 hujus deſumpta. Ergo dato Circulo
 BDC 234, erit hujus Diameter BC $\sqrt{5547}$, Cujus di-
 midium, nempe BA , vel AC eſt $\sqrt{1386\frac{1}{2}}$. Quia vero
 major Semicirculus eſt 117, nempe BDC , erunt eidem pe-
 ripheriæ duorum Semicirculorum BEA , & AFC æqua-
 les. Sed dicti modo Semicirculi, quia ambo dimidii ſunt Se-
 micirculi BDC , quippe ſinguli $29\frac{1}{2}$, ſimul $58\frac{1}{2}$, ideo Ar-
 belus $CDBEA$, æqualis eſt dictis Semicirculis, utpu-
 ta $58\frac{1}{2}$.

Atque ita data ratione Peripheriæ Circuli ad ſuam Diame-
 trum, in quacunque data unius harum meſura, mox reliqua
 præciſe in numeris prodeunt, quorumcunque vel Arbelo-
 rum, vel Lunularum genera fuerint.

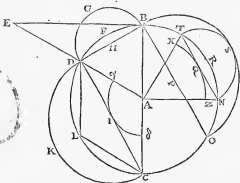
De Lunulis Hexagoni, & Trigoni.

Has equidem Lunulas pro Circuli meſura primus, quod
 ſciam, introduxeram; Nam quas in hoc genere, pro eodem
 meſurando, Celeberrimus olim Ioh. Baptiſta Neapolitanus

G

lineis

lineis tractaverat, ratus hinc inde mensuram Circuli invenisse, eandem recte ad Numeros alogos revocatas Camillus Gloriosus Italus non minus ab ingenio, quam alogorum exercitatione in Mathematicis incomparabilis, prorsus consecerat. Ob quam viri illius in hisce scientiam, semper mihi in voto fuerat, ut Quadratura nostra Circuli sub ipsius incudem atque Censuram caderet; velut quoque ad Galilæum de Galilæo Lynceum, propter Opticum suum, orbi notissimum, litteris meis inserueram. Sed ad propositum ubi primum lunulæ hæ sunt exponendæ, deinde ipsarum differentia à nobis paulo aliter hic, quam alibi, $\frac{1}{2}$ Circuli pars ostendenda.



Notæ sunt in hoc Schemate Lunulæ hexagoni $B G D F$, Trigoni $D K C L$, quæ ambæ æquales sunt triangulo rectangulo $B D C$, remotis scilicet Sectionibus $B D$ hexagoni, & $D C$ trigoni: At quia triangulo eidem $B D C$ per omnia æquale est triangulum $A B E$, quod mensurat latus $B E$ æquale inscripto $D C$, ambo vero seorsum mensurant duo

duo hexagona inscripta, quorum unum est BAD , ambo autem contenta in Rhombo $ADLC$.

Cæterum differentiam dictarum Lunularum esse $\frac{1}{10}$ partem circuli maximi, cujus centrum A paulo aliter nunc, quam cap. 6, prop. 6 Cyclometr. Hamburgensis, demonstrabimus.

Manifestum est rhombum $ADLC$ ambas Lunulas includentem, comprehendere duas Lunulas hexagoni seu ipsarum magnitudines, una cum Sectore trigoni circuli $A\delta I\gamma$. Est proinde idem Sector differentia harum lunularum quaesita. Quia vero $A\delta I\gamma$ se habet ad sectorem trigoni Circuli maximi, ut 1 ad 4. Ergo ad totum Circulum maximum ut 1 ad 12. Et proinde $\frac{1}{12}$ ipsius, quod erat ostendendum. Sic habemus & summam harum Lunularum, nempe hexagoni ac trigoni respectu rectilinei seu lateris triang. æquil. inscripti, & ipsarum differentiam respectu Circuli. At nihil commodi hinc pro Circulo mensurando affertur, nisi etiam magnitudines singularum, utut Symmetriam rectilinei cum Circulo stabiliunt. Equidem quamquam Cap. 7 Quadr. Circuli, plurimus fuerim, ut rationem harum Lunularum ad invicem cognoscerem: tamen id mihi ex posteriori contigerat, & vel maxime in mysteriis Numerorum, 6, 7, 8; ubi verissima ipsarum Ratio, inventa est $1\frac{1}{2}$ ut libr. 1, cap. 4 hujus manifestius reliqueram. Resoluta autem heic ratione $1\frac{1}{2}$ fiunt Numeri pro trigoni Lun. 28, pro hexagoni 15. Quorum Summa pro triangulo ABE , vel BE 43; Differentia vero 13, pro $\frac{1}{10}$ parte Circuli BAT ; Vnde totus Circulus vel hujus perimenter 156; Et quia ut $\sqrt{3}$ ad $\sqrt{4}$, sic 43 seu $\sqrt{1849}$ ad Diametrum Circuli hujus, erit igitur hæc $\sqrt{2465\frac{1}{2}}$.

Quoniam vero dictæ lunulæ ejusdem sunt altitudinis, idcirco easdem in hoc Schemate, ut vides, conjunxi, ut planorum æqualitatem ostenderem, in BAT Sectore, quo utrinque Lunula Trigoni Lunulam hexagoni superat, cujus differentia dimidium est trilineum BST : vel OSN æquale $\frac{1}{10}$

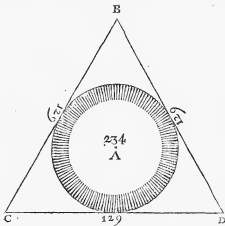
circuli seu Circulato T N Z X. Ad hoc autem Exemplum de facili est per Lunulas hæc Circulum mensurare, solum latere trianguli æquil. inscripto pro lubitu concessio, quam praxin Tyronibus exercendam relinquo.

*Exemplum Hieroglyphicum, ubi perfecta Circuli mensura,
S. S. Scriptura allegorice in Numeris famulatur.*

Notum est non solum apud Platonem in Timæo, sed etiam Astrologos causarum in Natura, & conspirationis superiorum cum his inferioribus sollicitos inquisitores, *Triangulo Aquilifero* nimirum præ omnibus aliis figuris vim quandam divinam inesse, imo si ullis aliis, sanctæ & individux Trinitatis mysterium.

Præterea manifestum est è superioribus, ipsum triangulum æquil. Circuli rite mensurandi fundamentum in solo hexagono extitisse. Ergo omnium maxime, quando tale triangulum, rotundum includit, quod Orbis, terræ, solis, siderum & universi cæli fuiti similitudinem refert. Hoc igitur triangulum, quantum à Circulo comprehenso in Numeris distat, operæ precium est è superioribus didicisse; non quidem in omni dato Circulo, sed solum eo, qui ut supra cap. 4, lib. 1, primario rationem inter latus hexagoni, & inscriptum arcum ejusdem, vel inter ipsum hexagonum circumscriptum, & inscriptum Circuli Sectorem, nempe $1\frac{2}{3}$, vel ut 43 ad 39 actu constituerat. Hujus autem Circuli Triangulum circumscriptum ex superioribus esse 387. Inscriptum vero Circulum 234, & ideo differentiam 153 sequens figura ostendit, cujus circuli diameter est $\sqrt{5547}$. Vide cap. 4 lib. 1.

Quæ quidem figura textui D. Iohannis Euangelistæ cap. ult. v. 11, cur applicari non potest, non video; Erenim Christo Salvatore nostro, post Resurrectionem suam gloriosam apud mare Galilææ præsentem ac jubentem, tot pisces Petrus è mari



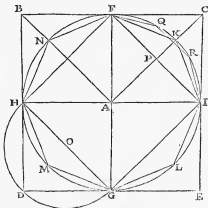
mari in terram traxit, nempe 153, quot inter triangulum & Circulum inscriptum numeri inveniuntur, etiam 153. Anno Petri capturam piscum, hominum fore Iesus Dominus noster Luc. 5, v. 10 promiserat, ipsum Petrum erigens, & ad munus Apostolicum vocans his verbis: μη φοβῆ, διὰ τὸν ἀσθράστου ἰσχύ ζαχαῖν. Anne igitur hæc piscium captura numero tam exquisito, minimeque ab Evangelista ociose posito, Evangelium per totum orbem, juxta Psal. 19, v. 5; Et Paulum ad Rom. cap. 10, v. 19, prædicandum allegorice in præmissâ figura significet, D. D. Theologis disquirendum, & ulterius à gnaris & minime invidis explicandum relinquo. Heic autem mihi sufficit, quod in vera Circuli mensura sic occurrebat; haud oscitanter præteruisse, ut neque antea ex numeris

Apocalypsis ejusdem Iohannis, quibus *μετρηθεις* Cyclometriae Hamburg. pag. 85 concinne quoque, ni fallor, accommodatur.

C A P. V.

De resolutione figura asymmetra Cap. 3 hujus, ut inde quoque Geodesia Circuli, in planis adscriptis, quam proxime possit exerceri; ubi de quadrato circumscripto & inscripto, octagono, Dodecagono, Sectionibus, corniculatis, ac Lunulis Quadrantis agitur.

Redeat huc Schema Cap. 3 hujus, ubi lineae rectae Circulo adscriptae peripheriae ejus prorsus asymmetrae sunt ostenduntur.



fae; Diametro autem imprimis latus quadrati circumscripti Symmetrum. De

De planis hujus figuræ nihilominus pro Geodæsiâ ipsius nobis in seqq. ratiocinandum.

Primo de quadrato circumscripto; deinde inscripto; tertio de octogono inscripto; quarto de Dodecagone inscripto; quinto de Sectione quadrantis: Sexto de Corniculo: Septimo de Lunula quadrantis.

I De Quadrato circumscripto.

Primo heic monendum est, nos in Exemplo usitato pro planis hisce dimetiendis manere, ubi Peripheria Circuli est 312 p. cujus Diameter inventa fuit $\sqrt{9861\frac{1}{7}}$. Igitur pro Quadrato circumscripto B C E D, quia ex quatuor Diametris Circuli constat, quadruplico Diamet. $\sqrt{9861\frac{1}{7}}$, hoc est in 16 multiplico, factus inde $\sqrt{157781\frac{1}{7}}$ est quadratum B C E D circumscriptum, cujus circulus inscriptus est 312. Est proinde Quadratum circumscriptum semper Circulo incommensurable.

Quoniam autem alias Quadr. circumscriptum est $9861\frac{1}{7}$, remoto signo $\sqrt{\quad}$; Proinde Circulum quadrabis multiplicata ipsius quarta parte, nempe 78 seu $\sqrt{6084}$ in Diametrum $\sqrt{9861\frac{1}{7}}$. Vnde fit area Circuli $\sqrt{59996352}$. Dico nunc: ut Numerus $9861\frac{1}{7}$ se habet ad Num. $\sqrt{59996352}$, sic se habet Numerus $\sqrt{157781\frac{1}{7}}$ ad Num. 312.

Cæterum faciliore longe in superioribus computatione, Dum enim ad Rationem inter quadratum circumscriptum, & circulum attendamus, quæratum radix quadr. de $\sqrt{157781\frac{1}{7}}$ quæ proxime est $397\frac{217}{1000}$. Habet igitur se quadratum circumscriptum ad circulum, ut $397\frac{217}{1000}$ ad 312, quam proxime, hoc est, ut 14 ad $10\frac{2857}{1000}$. Archimedes habet; ut 14 ad 11, prop. 2 de Circulo, dum scilicet Diametrum Circuli ad peripheriam ponit, ut 7 ad 22 seu, in ratione $3\frac{1}{7}$. At ex illis datis quam facile fuerit juxta Methodum nostram modo præmissam, rationem

nem Quadrati ad Circulum inscriptum elicere, mox hic docebimus. Sit igitur in figura antecedente FG Diam. 7, eaque per 4 multiplicetur, fiuntque 28. Circulus autem 22, qui ambo in minimis Numeris sunt ut 14 ad 11.

II Pro Quadrato inscripto.

Hoc nimirum $FIGH$ subduplum esse Quadrati circumscripti ad oculum demonstratur. Est autem hic in Numeris $\sqrt{39445\frac{1}{7}}$.

III Pro octogono inscripto & ejus Sectione.

Per 2 Enunciat. cap. 1 hujus multiplica Quadratum circumscriptum $\sqrt{157781\frac{1}{7}}$ in sui dimidium, seu Quadr. inscriptum $\sqrt{39445\frac{1}{7}}$. Oritur inde Octogonum $\sqrt{78890\frac{1}{7}}$. Hoc autem Numero resolutio provenit Octogonum in veris Numeris $280\frac{12}{1000}$ fere, Circulus autem 312. A quo sublato Octog. inscripto, remanent $31\frac{12}{1000}$ pro octo sectionibus. Ergo singulae harum valent $3\frac{12}{1000}$ proxime, FN videlicet.

IV Pro Dodecagono inscripto, & ejus Sectione.

Per 9 Enunciat. cap. 1 hujus, multiplica Diametrum Circuli $\sqrt{9861\frac{1}{7}}$ in $\sqrt{9}$, hoc est triplam, exit Dodecagonum inscriptum $\sqrt{88752}$. In resolutis vero $297\frac{12}{1000}$, à Circulo 312 ablatis, restant $14\frac{2}{1000}$ pro 12 Sectionibus Dodecagoni. Ergo una Sectio hujus velut FQ valet $1\frac{2}{1000}$.

V Pro Sectione quadrantis.

Semiquadratum inscriptum HFI , metitur Diameter HI , quæ est $\sqrt{9861\frac{1}{7}}$. In solutis vero proximis $99\frac{12}{1000}$. Quibus à semicirculo HFI 156 ablatis, restant pro duabus Sectionibus quadrantis $56\frac{12}{1000}$; hinc pro una Sectione nempe $FKIP$ erunt $28\frac{12}{1000}$.

VI Pro

VI Pro Corniculato B F C K F N.

Quoniam Diameter B C metitur triangulum B A C. Sublato igitur Sectorẽ quartæ partis Circuli nempe 78, qui est A N K à modo reſoluta Diametro $99\frac{100}{1000}$, reſtat corniculatum dictum B F C K F N æt $21\frac{100}{1000}$.

VII Pro Lunula quadrantis G D H M.

Hæc Lunula quoniam æqualis eſt triangulo reſtângulo A G H. Illud autem dimidium Diametri nempe H A menſurat, quod eſt $49\frac{60}{1000}$. Erit igitur hic eadem lunulæ quadrantis menſura.

Hæc autem omnia quum Circulo ſint incommenſurabilia, non in numeris, niſi veritati proximis, prodire; fruſtra igitur abſolutam Circuli menſuram hinc inde producere plurimi tentarunt.

Cæterum modo quis ratione Peripheriæ ad Diametrum ſupra in abſolutis numeris cap. 3, lib. 1, inventa atque expoſita $\frac{11+11000}{1000000}$, pro hiſce alogis, uti velit, omnia & citius, & eo veritati propius perficiet, quo Numeri hi productiores fuerint. Nos exempli uſitati Numeros adhibuimus, velut etiam ſupra admonitum eſt. Rationes enim in hiſce perpetuo manent, Numeris quomodo cunque mutatis.

C A P. VI.

De modo Circulum è præmiſſis quadrandi, pro data ratione Diametri ad perimetrum: item de Circuli, & planorum adſcriptorum imperata auctione, ac diminutione, tandemque ejus menſura hæctenus nobis uſitata ad Communem reductione.

INventa è ſuperioribus ratione Diametri ad Circuli peripheriam, etſi plures modi eſſe poſſint, Circulum in quadratum

H

tum

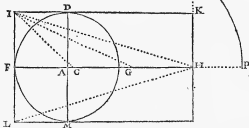
tum transformandi; Nos tamen binos saltem heic pro *Indep-*
tas varietate exponemus.

Ex superioribus constat, aut peripheriam aut Diametrum
Circuli in Numero vero posse semper dari; Deinde tangen-
tem seu latus, cui Sector hexagoni inscribitur, arcui hujus
Symmetrum esse. Siquidem ratio horum lib. 1, cap. 4 osten-
sa est $\frac{21}{19}$, hoc est in minoribus ut $14\frac{1}{7}$ ad 13. Quare in hoc ca-



su ubi peripheria Circuli in vero Num-
ero constituta est, ex linea recta BC
tributa in $14\frac{1}{7}$ p. æquales, fiat triangulum
æquilaterum ABC, cui inscribatur
Sector hexagoni ADE, cujus arcus
DE est 13 p. in linea recta BC nu-
merandarum, nempe FC.

His autem datis ac constitutis, de-
scribatur super radio AD, integer
circulus DFM. Et continuetur FA



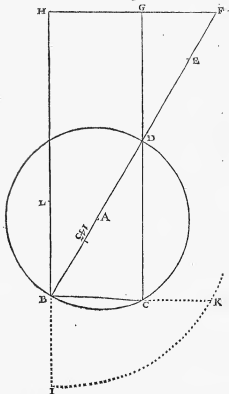
per Diametrum alteram in H, ut linea FH componatur ex
tribus FC hoc est arcubus DE hexagoni, fiatque 39 p. quæ
mensura est Peripheriæ Semicirculi dati. Hinc IL tangens
circu-

circulum in F fiat parallela, & æqualis Diametro DM, quæ in hoc dato Circulo è superior. est $\sqrt{616\frac{2}{7}}$, & ideo radius ejus AD $\sqrt{154\frac{2}{7}}$. Ducta autem ab I in H linea recta IH, erit, ex Archimedis prop. de Circulo, triangulum IFH rectangulum, æquale semicirculo DFM, & triangulum ILH æquale toti circulo, cui quoque rectangulum FHKI est æquale, per 41 prop. lib. 1 Elem.

Denique ut latus quadrati circulo huic æqualis constitutur, quia illud medium proportionale est inter FH, & HK, fitque per 14 prop. lib. 2 Elem. Quare ipsum latus erit heic HN.

Atqui heic clare cernitur, quemadmodum non solum totus circulus, sed etiam quævis ejusdem imperata pars in rectilineum deduci queat, mensura è tangente BC prius diviso, desumenda, ut triangulum FIC est $\frac{1}{7}$ pars Circuli, &c. Vide Cyclom. Hamburg. pag. 92.

Aut Diameter seu radius circuli supponitur in Numero vero, ut sit in hexagonica figura præmissa tangens BC, hic in sua divisione $14\frac{2}{7}$ Radius circuli seq. AB, ex quo describatur Circulus BCD. Quoniam autem radius hujus Circuli continetur in Semiperipheria Circuli proxime ab hexagono majoris, quæ heic est linea recta BF $3\frac{2}{7}$. Quare dum AB fuerit $14\frac{2}{7}$ erit BF 52. In triangulo autem rectangulo BHF angulus ad H est rectus; angulus vero FBH 30 g. Sed BF est 52, ideo hujus dimidium HF 26. Prodit igitur BH per pr. 47 lib. 1 Elem. $\sqrt{2028}$, estque dimidia pars peripheriæ Circuli hujus. Vel brevius: ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{3}$, sic BF 52 seu $\sqrt{2704}$ ad BH $\sqrt{2028}$. Rectangulum vero CH æquale est areæ Circuli BCD. Denique latus Quadrati Circulo æqualis, quia medium est proportionale inter BC radius & BH, erit illud per prop. 14 lib. 2 Elem. linea recta BK. Quæ, ut superior, HN de facili, ex datis, in Numeris invenitur. Invenio autem semel latere qua-



drati Circulo æqualis , quemad. cuiusque Circulo æquale
 quadratum exhibeamus docet C. Clavius in Geometria sua
 Mechanica

Mechanica pag. 328. Item Cyclometria Hamburgensis circa finem.

De augendo , &c. Circulo cum planis adscriptis pariter.

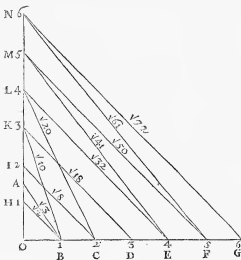
Porro quamvis Circulus ex iis quæ cap. 3 & 4 lib. 1 hujus ostensa sunt, facile augeri minuique poterit, item alio quoque modo, à C. Clavio tradito, nimirum per medium proportionale inveniendum, &c. prop. 16 lib. 6 Geomet. Mechan. : tamen quia figuræ similes se habent, in ratione duplicata homologorum laterum, & Circuli sunt, ut à Diametris quadrata; quocirca omnium compendiosissima via, ut mihi videtur, qua pro imperata augmentatione Circulorum insistemus, hæc erit:

Fiat *Alogolabium*, ut vocant, cui lineæ rectæ potentia inscribantur, quæ deinceps pro imperata auctione, &c. usurpentur in modum, qui sequitur:

Duabus lineis rectis angulum rectum ad O habentibus, singulis in partes æquales, quousque libuerit ab O divisas, inscribantur lineæ potentia surdis numeris seu quadratis, alligatæ, per 47 pr. lib. 1 Elem. ut vides. Divisiones vero in lateribus istis duobus, angulum rectum comprehendentibus pro ipsis rationalibus habebantur, unde *Alogolabium* quodammodo conficitur pro præsentis usu ac necessitate. Quomodo autem lineæ ipsæ inscribantur, facile ex dicta prop. 47 lib. 1 Elem. cognoscitur. Etenim pro BH Diagonio, quia latera singula OH & OB sumuntur $\sqrt{1}$, erit BH $\sqrt{2}$. Porro pro $\sqrt{3}$ extenso O supra H in A, factoque O & A æquali BH $\sqrt{2}$, erit BA $\sqrt{3}$; Et sic cæteræ lineæ, quarum numeri sunt adscripti formantur. Omnes autem inscriptæ lineæ parallelæ sunt Symmetræ, quippe à veris lateralibus numeris descendentes.

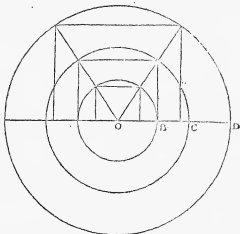
H 3.

Sint



Sint nunc super communi Centro A descripti tres Circuli ex radiis $OB \sqrt{1}$, $OC \sqrt{3}$, $OD \sqrt{8}$. Deinde similes in ipsis figuræ qualescunque, quam facillime intra ipsos Circulos exarantur, saltem rectis à Centro ad ultimam circumferentiam, viam per intermedios monstrantibus, in quacunque figurarum inscribendarum forma ac delineatione; Sic enim similes fiunt in eadem scilicet proportione ad invicem, qua Circuli ipsi ut hic 1, 3, 8. Atqui hic modus inter omnes, quos novi, est nobilissimus atque expeditissimus. Quum enim

Circulus



Circulus figuras omnis generis includat, data proinde hujus imperata proportione, & lineis rectis, ut dixi à communi Centro eductis, ad maximi circumferentiam, facile una figurarum cujuscunque formæ effigiata, cæteræ in dicta proportione describuntur, per parallelas, ex intersectionibus peripheriæ singulorum circularum egredientes. Sed hoc Epicheirema magis praxiu, quam longam & implicatam theoriam desiderat.

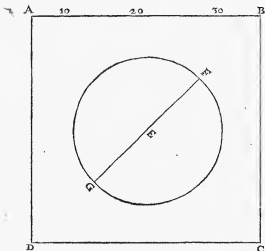
Exemplum pro reductione mensurationis Circuli, nostra Methodo supra confecta ad vulgarem.

Quandoquidem aream Circuli peripheriæ parem constitui-

mus,

mus, dum hujus rationem ad Diametrum exquisite indagavimus, ubi scilicet Sectors Circuli penes circumferentiam in hujus partientis æstimavimus, quæ de facili in quadrata reduci poterint, ac vulgariter mensurari, inventa nunc vera ratione Circuli peripheriæ ad suam Diametrum $\frac{31418596}{10000000}$ quam proxime.

Sit campus quadratus A B C D constans latere 30 p. & area ideo 900 partibus seu quadratis; Sitque Circulus in eo descriptus F G, cujus Diameter F G sit 20 p. Pro hujus igi-

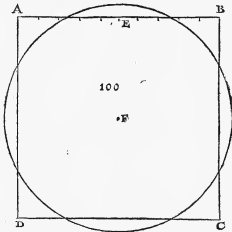


tur Peripheria erit ut 10000000 ad 20, sic 31418596 ad $\frac{31418596}{10000000}$ quo quidem numero in $\frac{1}{5}$ Diameter F G, nempe 5 multiplicato

cato producantur pro area Circuli $\frac{314159265}{10000000}$ seu $314\frac{159265}{1000000}$, qui sublati è toto quadrato hoc modo $\frac{100000000}{10000000}$ relinquunt pro residuo $585\frac{114}{1000000}$.

Atqui ita Geodesia Rotundi se habet in comparatione cum vulgari Geodætarum mensura : Nunc restat quemadmodum datum Rectilineum in Circulum traufibit.

Dato rectilineo Circulum æqualem constituere.

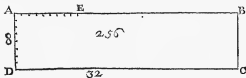


Sit primo quadratum ABCD, cujus latus AB 10 p. & ideo ipsum quadratum 100 p. cui circulus æqualis est constituendus. Posito autem radiò Circuli 10000000 & peripheria 62831920, cujus dimidium 314185960 in radiùm 10000000
I perdu-

perducitur area Circuli 3141859600000000 hujus Numeri semiradix 8862645 se habet ad radium Circuli 10000000 ut semiradix areæ quadrati 5 p. ad radium Circuli æqualis $5\frac{1}{100}$.

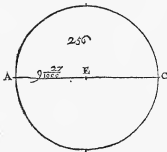
Exemplum in Rectangulo.

Sit parallelogrammum rectangulum A B C D cujus latitudo 8 p. longitudo 32, & ideo area ejus 26, cujus radix est 16, & ideo ejus semiffis 8. Iam ut 8862645 ad 10000000,



sic 8 ad $9\frac{11000}{110000}$ seu $9\frac{11}{1000}$ proxime, radium Circuli sequentis A E.

Sequitur Circulus æqualis.



Exemplum in triangulo ad Circulum redacto habes sub finem Quadraturæ Circuli anno 1634 à nobis editæ. Nec ulla figura in Numeris datur, quin mox eadem Circulus fieri possit æqualis, & contra, per ea, quæ modo præmissimus.

C A P.

C A P. VII.

De Sectionibus Circuli inveniendis, ad quamvis Diametri datam: Item de Lunula cujusdam aequatione sive cum trilineo, sive rectilineo; ubi omnia Numeris probantur.

HÆc praxis, quia insignem usum præstat, non solum in Geodæsia rotundi plani: Sed etiam in Stereometria, cujus corporum Circulus aut ejus partes bases sunt, proinde ipsam adjungere placuit, duplici via tradendam, nostra primum, deinde communi, ut ex collatione omnes Mathematici intelligant Cyclometriam præmissam ad veritatis normam unice congruere.

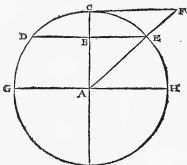
P R O P O S I T I O.

Radio Circuli in quasvis partes imperatas tributo, Sectiones semicirculi duplici via indagare.

Quod heic de toto Circulo demonstrandum, sufficit in semicirculo; imo uno quadrante ipsius ostendere.

Centro *A* describatur Circulus *DCE*, cujus radius *AC* dividatur in tres partes æquales, quarum *AB* est $\frac{2}{3}$. Ducta autem linea recta *DBE* parallela Diametro *GH* fit Sectio *DCEB* quæ invenienda est. Igitur primum pro *quodvis* praxique propria, ducatur ab *A* per *E* recta *AF* desinens in tangentem *CF*.

Quoniam autem ratio *AC* radii è superioribus ad quadrantem Circuli *CH* est ut 10000000 ad 15709298, *AB* autem $\frac{2}{3}$ radii 6666666, *AE* vero ipse radius 10000000. Quare in triangulo rectangulo *ABE*, è datis duobus lateribus, cum angulo recto ad *B*, dantur reliqui anguli, nempe *A* & *E* una cum latere *BE*, & tangens *CF*: Quum autem trian-



gula rectangula ACF & ABE æquiangula fuerint, & triangulum ACF mensurat tangens CF ; erit igitur ut AC ad triangulum ACF in quadratis, sic AB in quadratis ad triangulum ABE . Datur proinde triangulum ABE , quo ablato à CE arcu seu Sectore ACE , remanet semisectio quaesita CEB , &c.

Numeri.

Pro angulo BAC , ut AE 10000000; ad angulum rectum B 10000000, sic AB s. r. 6666666. R. angulo 41 G , 48 M , 37 S , hujus complementi 48 G , 11 M , 23 S , est tangens CF 11180355. Sinus rectus BE 7453565.

Porro quia arcus quadrantis CH antea ostensus fuit 15709298, qualium radius AC est 10000000; erit pro 48 G , 11 M , 23 S , arcu CE proportionaliter 8411408, qui numerus idem est Sector Circuli ACE . Ergo differentia inter tangentem CF , & arcum CE , est 2768947 eadem quæ inter triangulum ACF , & Sectorem ACE , trilineo-

corni-

corniculato CFE terminata. Postremo ut se habet quadratus Numerus DE 3, nempe 9, in quem radius AC divisus fuit, ad quadr. 2, hoc est 4, videlicet $\frac{1}{4}$ radii AB: sic se habet triangulum ACF 11180355, ad 4969046 triangulum ABE. Differentia igitur inter Sectorem ACE 8411408, & triangulum ABE 4969046, est 3442362, ut puta semissis Sectionis DCEB. Ergo ipsa Sectio quæsitæ est 6884724. Quatenus semicirculus GCH nobis est 31418596; residuum igitur, nempe Zona GDEH est 24533472.

Aliter via communi.

Quoniam area Circuli conficitur è Semidiametro & Semiperipheria Circuli in modum rectanguli; & Semiperipheria Circuli est 31418596. Radius vero 10000000, quare rectangulum hinc ortum, nempe 314185960000000, areæ Circuli est æquale, cui $\frac{1}{2}$ pars videlicet 7854649 [Siphris facilioris computationis gratia omiſſis] est mensura Sectoris quadrantis pariter & Sectoris anguli 48 gr. 11 m. 23 s. 4205704 dimidium ejus, qui in praxi superiori. Restat ut triangulum ABE acquiramus vulgari praxi [quod superiori *ipso* compendiose è ratione homologorum laterum in triangulis æquiangulis adepti sumus è prop. 19 lib. 6 Elem.] Quia igitur duo ejus latera circa rectum angulum data sunt, nempe BE 7453565, & AB 6666666. Quare alterius dimidio in alterum ducto, oritur inde triangulum quæsitum ABE 2484522 à Sectore ACE 4205704 sublatum relinquit Semisectionem CEB 1721182, cujus duplum est 3442364, tota Sectio DCEB, qualium semicirculus est 7854649, hoc est dimidium superioris. At Semissis Sectionis superioris erat 3442362, differentia saltem 2 in ult. Numero deprehensa. Nec dubitandum quin in aliis omnibus exemplis eadem vel major præcisio & convenientia se offerat, & sic praxin nostram per superiora in Numeris pariter & lineis demonstratam, omnes ingenui Mathematici

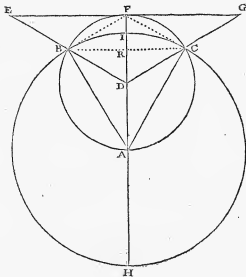
thematici unice veritati litare consentient, in eo etiam, quod passim inter peripheriam Circuli & aream ipsius, item inter peripherias circumscriptarum figurarum & ipsas figuras, nullum pro magnitudinibus earundem cum Circulo mensurandis discrimen agnovimus; ut eo melius magnitudines commensurabiles ab alogis per eundem discernerentur, absque qua cognitione nec vera peripheriæ Circuli constitutio, nec rationis Diametri ad eandem inventio vera unquam patefacta fuisset.

Nunc ultimum hoc vostrum Opus Cyclometricum sequenti Problemate claudemus.

PROBLEMA CYCLOMETRICVM ad solvendum propositum.

Circuli duo super una linea recta describantur, quorum Radius majoris, latus est trianguli æquilateri minori inscripti. Porro à Centro minoris, ad tangentem trigoni hujus, nempe per utrumque terminum hexagoni majoris, dua linea rectæ ducantur, singule scilicet æquales Diametro minoris; Primum invenire in minimis numeris integris utriusque Circuli Diametrum, & per consequens quantitatatem Circuli majoris ad minoris. Deinde ostendere Lunulam creatam ex arcu hexagoni majoris, & arcu trigoni minoris, æqualem esse spatio trilineari, seu differentia inter hexagonum minoris, Circuli, & $\frac{1}{2}$ partem trianguli æquilateri minori Circulo circumscripti. Denique rationem arcus hexagoni majoris Circuli ad arcum hexagoni minoris, eaque omnia concinne in Numeris.

Primo super Centro D describatur Circulus minor ABFC, cui inscribatur triangulum æquil. ABC. Deinde è Centro A, radio AB, Circulus describatur major BCH. Porro à D Centro minoris per B in E, & C in G egrediantur lineæ DE & DG, lineam FG determinantes tangentem Circulum minorem in F. Primum in Numeris integris dato radio circuli majoris AB, invenire radium circuli minoris DB, unde ex quadratis ipsorum ratio magnitudinis horum
Circulorum



Circularum ad invicem cognoscitur per 2 pr. lib. 12 El. Deinde monstrare lunulam BFCI æqualem esse trilinco BEF.

Ultimo determinare rationem peripheriæ seu arcum BFC ad peripheriam suam arcum BIC.

Resolutio singularum questionum propositarum etiam in Numeros, ex præmissis.

Posito AB 3 p. erit BR $1\frac{1}{2}$; ut vero BR $1\frac{1}{2}$ ad $\sqrt{3}$, sic BD radius minoris ad $\sqrt{4}$. Exit igitur DB $\sqrt{3}$, qualium AB est 3. Et propterea quando tota Diameter majoris Circuli

culi HI ponitur 3 p. erit Diameter minoris AF $\sqrt{3}$; in quadratis vero $\sqrt{9}$ & $\sqrt{3}$. Vnde liquet Circulum majorem ter superare minorem, quæ ratio quoque est figurarum similium utrique Circulo adscriptatum. Proinde Sectio BC tripla est Sectionis BF.

Porro dum Diameter Circuli minoris AF erit $\sqrt{3}$, sit radius ejus DB $\frac{1}{2}$, BR vero $\frac{1}{4}$, quæ linea metitur triangulum æquilaterum DBF. Vt autem 43 ad 9, sic DBF $\frac{1}{4}$ ad Sectionem BF $\frac{11}{12}$.

Hinc ut lunula BFCI habetur, quia triangulum BFC æquale est triangulo æquil. DBF $\frac{1}{4}$. Et Sectio hexag. BC tripla est Sectionis BF $\frac{11}{12}$, erit igitur illa $\frac{11}{12}$, ablata à $\frac{1}{4}$, remanent $\frac{11}{12}$, quibus adduntur duæ Sectiones BF & CF nempe $\frac{11}{12}$, & fit Summa pro lunula BFCI $\frac{22}{12}$, vel in minoribus Numeris integris $\frac{11}{6}$; Sed ablata è triangulo EFB $\frac{1}{4}$, una Sectione BF $\frac{11}{12}$, remanent quoque pro trilineo EFB $\frac{10}{12}$ seu $\frac{5}{6}$.

Ultimo, ratio arcus trigoni minoris Circuli ad arcum hexagoni majoris, hoc est, arcus BFC ad arcum BIC, hac proportionem invenitur ut 2 ad $\sqrt{3}$. Nam ut Diameter minoris Circuli $\sqrt{3}$ se habet ad Diametrum Circuli majoris 3; Sic se habet hexag. minoris arcus FB unitas ad hexagoni majoris arcum BC, $\sqrt{3}$: Vel; ut 43 ad $\sqrt{18252}$, sic 3 ad $\sqrt{\frac{18252}{147}}$. Similiter, ut $\sqrt{1849}$ ad $\sqrt{18252}$, sic $\sqrt{3}$ ad $\sqrt{\frac{18252}{147}}$. Diviso igitur Numero $\sqrt{\frac{18252}{147}}$ pro peripheria majoris, in Numerum $\sqrt{\frac{18252}{147}}$ peripheriæ Circuli minoris, erit quotus $\sqrt{3}$; Qualem itaque hexagoni arcus Circuli majoris BIC est $\sqrt{3}$, erit arcus FC Circuli minoris — 1, & BFC 2. Atque hinc apparet, quod concessa Diametro Circuli alicujus in Numero vero, peripheriam exire in Surdum, quem metitur $\sqrt{3}$, & contra, ut satis in superioribus patet.

TAm multa sunt, in quibus libri de Circuli mensura Amsterdami nuper impressi, ab omnibus Mathematicis dissentiunt, ut refutari citò debeant & facillè possint. Quoniam autem vulgares Mathematicorum lapides Lydios (iteratam nempe in polygonorum lateribus investigandis radicum extractionem & Trigonometrarum Canones) tanquam minimè accuratos, ipse librorum auctor (quamvis injustè) respuit; nova utique nobis incunda erit via.

TAngens cujuslibet arcus minoris quam 45 gr. 00' ducatur in duplum Quadratum Radii, à Quadrato Radii auferatur Tangentis quadratum, Illud productum dividatur per hoc residuum, Quotus erit Tangens arcus dupli.

Vt, si Arcus 16°. 41' $\frac{11421,36}{10000}$ Tangens sit $\frac{1}{11}$ radii, Radius sit 10; Tangens igitur erit 3, Ducatur 3 in bis 100; id est in 200, fiunt 600: à 100 auferantur 9, relinquentur 91 Divisis 600 per 91, Quotus erit 6 $\frac{65934,06593}{100000}$ &c. Ergo, si radius sit 100000, 00000,

Et 30000, 00000 sit Tangens 16°. 41' $\frac{11421,36}{10000}$ tum 65934, 06593 &c. erit tangens 33. 23 $\frac{23027}{100000}$

Eodem modo; ad radium 100000, 00, datis hisce 6 tangentibus

viz, 0. 41421, 36	} invenies hos 6 quotos	} qui proinde sunt tangentis arcuum duplurum.
0. 19891, 24		
0. 09849, 15		
0. 04912, 69		
0. 02454, 86 $\frac{1}{10}$		
0. 01227, 25		

Atqui Tangens 45°, 00' est minor quàm 1, 00000, 01
Ergo Tangens 22, 30 est minor quàm 0, 41421, 36
Ergo Tangens 11, 15 est minor quàm 0, 19891, 24
Ergo Tangens 5, 37 $\frac{1}{2}$ est minor quàm 0, 09849, 15
Ergo Tangens 2, 48 $\frac{1}{4}$ est minor quàm 0, 04912, 69
Ergo Tangens 1, 24 $\frac{1}{4}$ est minor quàm 0, 02454, 86 $\frac{1}{10}$
Ergo Tangens 0, 42 $\frac{1}{10}$ est minor quàm 0, 01227, 25

Demon.

Demonstravi igitur (idque sine tangentium Canone aut radicū extractione) tangentem $0^{\circ}.42' \frac{1}{2}$ esse minorem quàm $0,01227,25$

Ergo, duplicata tangens arcūs $0.42' \frac{1}{2}$ est minor quàm $0,02454,50$

At, duplicata tangens arcūs $0^{\circ}.42' \frac{1}{2}$, five $\frac{1}{100}$ gr., est Latus Polygōni ordinati, lateribus 256 , Circulum circumscriptis.

Ergo, Latus Polygōni ordinati, Circulo circumscripti, 256 laterum, est minus quam $2454,5$, qualium Radius est $100000,0$.

Ergo Semiperimeter talis Polygōni est minor quàm $314176,0$.

Ergo, si Diameter alicujus circuli sit $1,00000$, tota perimeter talis polygōni dato circulo circumscripti erit minor quàm $3,14176$.

At Christianus Severini Longomontanus Cimber, Superiorum Mathematicum in Regiā Academiā Hauniensī Prof. Pub. Lib. de absoluta circuli mensura, pag. 24. 32. 57. 64. 65. 66. 67. 68. 69. afferit *ipsius circuli peripheriam fore* $3,14185 \frac{1}{1000}$ &c.

Est igitur, secundum hanc Longomontani assertionem, *Peripheria circuli major quam Perimeter polygōni ordinati, 256 Laterum, eidem circulo circumscripti, quod est absurdum.*

Erit etiam *Area circuli major quàm area talis polygōni circulo circumscripti, id est, Pars erit major toto, quod est absurdissimum.*

Falsā igitur sunt fere omnia, ex quibus Longomontanus, in libris suis *de quadraturā sive mensurā circuli*, tam absurdas conclusiones deduxit.

Falsā item sunt omnia illa hujus falsissimæ assertionis consectaria, quibus iidem libri referti sunt. Nisi enim fundamentum fideliter jeceris, quicquid superstruxeris, corruet.

Abunde igitur sufficit hæc unica pagella, tot chartis librisque aliquoties editis refutandis; triumque horularum spatio, nostra premens vestigia, post pauculas multiplicationes & divisiones, tot annorum incredibiles Longomontani labores prorsus periisse videbis.

Ita censeo

Ioannes Pellius, Coritano-Regnus; Anglus,
Matheseos in illustri Amstelodamensum Gymnasio Professor.
Calendis Sextilibus. Anno 1644.