ELEMENTA Arithmeticæ, ac *GEOMETRIAE, AD disciplinas omnes, Aristoteleam præsertim Dialecticam, ac Philosophiã apprimè necessaria, ex Euclide decerpta:*

Petro Monçono Valentino auctore.

VALENTIAE,
Ex typographia Petri à Huete.
in platea herbaria.
1569.

Petrus Monço-

NVS GENEROSO
ac Illustri Ximeni Perezio
à Calatayu, S. P. D.

CVM hæc Arithmeticæ ac Geometriæ elementa absoluissem, ac de his, vt mos est, dicã dis mecum cogitarem, tu mihi primus omniũ statim occurristi, singulare decus Valentiæ nobilitatis, qui hoc muneris, qualecunq; id esset, tibi quasi tuo iure vendicares. Nam quanquam commemorare possem non paucos, qui mea opera & industria in liberalibus disciplinis perdiscendis vsi sunt, te tamen primùm ego ab ipsis penè incunabulis instituendum, atq; informandum suscep[illegible], primus ex me, cũ ipso propemo[illegible]n lacte, literarum elementa bib[illegible]. Quam ob rem primos ho[illegible]ctus, & eorum, quæ in lucem edere in Dialecticam, ac Philosophiam Aristotelis constitui velut fundamenta, ad te pertinere, ac tuo nomini iure optimo consecranda esse, sum arbitratus. Accedit & alia quoq; causa, quæ me, vt id facerem, adhortata est: quòd intelligam te miro quodam literarum, ac bonarum artium studio incensum esse, & ex omnibus, nullas magis nobilem adolescentem, maiorum splendore, potentia, opibus, innumeris & corporis, & animi dotibus nulli secundum decere, quàm disciplinas Mathematicas. Quæ præterquàm

quod

quod absque improbo illo labore, quem aliæ desiderant, perdiscũtur, qui solet homines innumeros, & tui præsertim ordinis, ab studio lite rarũ auocare (certissimæ enim sunt, & à contentionibus, rixosisq; dispu tationibus lõgè alienę, nec spinosis præceptionibus torquent auditorũ animos) magna cum voluptate sciuntur, & domi, foris, in vrbe, in agro, nauigãti, priuato, cum potestate degenti, locis deniq; omnibus, & temporibus firmissimo sunt præsidio, & singulari ornamẽto. Ad hęc cùm sint per vniuersam Philosophiam latissimè fusæ, cognitæ ad disciplinas omnes viã amplissimam sternunt: ipsis verò neglectis omnis ad scientiam additus intercluditur. Quibus omnibus de causis hæc Arihmeticæ, & Geometriæ, quæ in Mathematicis principẽ locũ tenẽt, qua potui breuitate & facilitate ex Euclide decerpere curaui; vt cũ disciplinis Philosophicis animũ istũ tuum, in quo innumeræ virtutes enitent, excolere cœperis: cuius rei desiderio te flagrare vehemẽter intellexi, ex horũ cognitione proximam ad eas viam habeas, & cõpendiariam. Et ne alij horũ fructu priuentur, quem spero maximum fore atq; vberrimum, ad communem omnium studiorum vsum hæc ipsa in lucẽ edere tuo nomine decreui, teq́, eorũ tanquã patronũ & tutorẽ cõstituere; vt quod opus tibi potissimùm scriptum est, idipsum tui nominis præsidio ab inuidorum obtrectationibus tutũ appareat. Vale.

PETRVS MONçonus candido lectori, S. D.

CVM publicè Aristotelis libros de Dialectica, ac Philosophia in hac nostræ Academia Valentina interpretarer, lector optime, in quo munere obeundo, ut communia adolescentiæ iuuarem studia, non dubitaui bonam ætatis partem consumere, summa ope nitebar, Mathema. exēpla, in quibus frequens est Aristo. qua poteram dexteritate explicare: adhibebam quicquid in me erat artis, & operæ, quòd intelligerē obscurißimis quibusq;, his maximam lucē afferri, & horum ignoratione in locis Aristo. nō paucis ac scitu dignis, ueram rei intelligentiam desiderari. Sed (fateor ingenuè) inani me labore torquebam, quòd non sine magno auditorum incommodo fieri, sæpe sum expertus. Cùm enim in more positum sit, ut adolescentes, nullam in perdiscendis artibus ordinis rationem sequuti, magna temporum iactura, & studiorum dispendio, non tam sua ipsorum culpa, quàm eorum, qui illas sic publicè profitentur, ad Aristoteleam disciplinā Mathematicis disciplinis ne à limine quidem salutatis, accedant, quid mirum si exactißimas, ac proinde difficiles Geometriæ demonstrationes, quæ plerunq; solent exercitatos admodum uehementer torquere, nō assequantur? Quid quòd differēdi ratio innumeris referta præceptionibus, Aristotelis scripta uarijs obstructa difficultatibus, distrahi auditorum

ditorum animos in plura studia non patiuntur. Et (ut ait Fabius) angusti oris uascula superfusam humoris copiam respuunt, quā suscipiant facilè, si paulatim instillaueris. Hæc cùm uersarem animo sæpe, & intelligerem planè retardari iuuenum studia, ac expectatam inde utilitatem magna ex parte impediri, ad intermissum laborem Aristoteleæ lectionis nunc denuò eo animi consilio redire constituens, ut quicquid Dialecticæ ac Philosophiæ studia ab ineunte ferè ætate suscepta, homini paulò uigilanti contulerunt, id totum studiosis harum disciplinarum cultoribus candidè impertiar. Decreui iterum ad eundem lapidem non offendere, sed ita me gerere in hoc Philosophiæ decursu, ut ad eam, quam certò scio ueteres Platonem, Aristotelem, & alios omnes tenuisse docendi rationem proximè accedam, & Aristotelis scripta, quæ difficilima hactenus uisa sunt, hac methodo tradita quàm minimo labore doceantur. Excerpsi itaque ex Arithmetica & Geometria Euclidis ea omnia, quæ ad plenam perfectamq; Aristoteleæ disciplinæ intelligentiam mihi facere uisa sunt, quorum in Dialecticis, & uniuersa Philosophia frequentißimus est usus. Scio alia prætereà esse multa, ad utranq; artem pertinentia cognitu dignißima, & utilitatis non contemnendæ: sed neq; omnia persequi artibus tam latè patentibus inclusa nostri erat instituti, & qui elementis his nostris instructi fuerint, uiam ad libros Aristotelis (quod mihi in primis curæ fuit) & ad Euclidis opera habituros paratißimam speramus. Accipe igitur, amice lector, hanc mei erga te amo-

ris non obscuram significationem: & hunc laborem boni consule; quem si probari tibi intellexero, ingenuè spondeo in rebus omnibus, quibus iuuari posse communia studia cognouero, meam operam nunquã defuturam.

Quæ sequuntur continet Arithmetica institutio.

QVID Arithmetica, & ad CAETERAS quo pacto affecta ſit, atq; ad eam quomodo refferenda ſit Logiſtica.

CAPVT I.

MATHEMATICæ omnes circa quantum verſantur molis, aut numeri. Primæ omniũ ſunt ac ſimpliciſſimæ Arithmetica, & Geometria: quæ in hoc genere puræ, ac ſyncere nomen illud iuſtè, ac legitimè retinent. Cõtinẽt ſe ſolæ intra ſuos fines, & cùm vim maximã, ornamentiq; plurimum

rimum cæteris impartiantur, ſuis ipſæ ſtant firmamentis, aliena ope non indigent, ex alijs nihil omnino capiunt præſidij. Quæ harum ſunt propria, cùm in aliud genus transferuntur, & rebus ſenſilibus accommodantur, formas Artium procreant mediæ cuiuſdam naturæ: ſed quæ in Mathematicarum numero ſoleant haberi. Geometria in cælū ſublata ASTRONOMIAM effecit, viſibilibus addita ὀπτικήν. Arithmetica ſonis admiſta dedit Muſicam. Porrò quam rationem habent duæ illæ primæ ad cæteras, eandem optinet Arithmetica Geometriæ comparata. Eſt enim ordine prior, & dignitate præſtantior: qua ſublata, labefactari alias omnes eſt neceſſe, vt nec nomen, nec fines ſuos tueri commodè poſſint. Vnde autem dicta

cta sit Arithmetica, satis est perspicuum à numeris autem dictam esse, perinde atq; Grammaticam à literis, ex ipsa nominis ratione satis cõstat. Hãc, vt & reliquas, quæ huius sunt generis, duas partes cõplecti Theoreticen, & Practicen, à multis receptum est: è quibus eam, quæ est de numerorum proprietatibus, Theoreticen dixerunt, quam verò Ploto in dialogo de Iusto λογιστικὴν *appellat. Arabes ALGORITHMVM, quæ ars est computandi, ad multa quidem vtilis, sed facilior, ac breuior, quàm vt inter liberales artes recipi debeat, Practicen. Quæ diuisio non vsqueadeò ratione nititur, & caret veterum auctoritate. Nam Euclides, qui Arithmeticam primus certa methodo tradidit, nusquam huius posterioris meminisse visus est,*

& Seue-

& Seuerinus Boëtius; qui inter Latinos hanc artem copiosißimè scripsit; quæ ad spectatiuam pertinent, solùm persequi videtur. Deinde in alijs disciplinis ea pars, quæ intra contemplationem subsistit, est velut præparatio operis, practicæ verò executio: ita altera in alteram quodammodo refertur. Verùm Arithmetica, quæ inspectionis est, seu contemplationis, ad Logisticam nulla ex parte respicere videtur. Veriùs igitur forsitan hæc ad Arithmeticam nõ aliter pertinere censebitur, quàm ad Geometriam optice, aut stereometria. Nos ex illa, quæ verè scientia est, & in omnes eas, quæ artium nomine celebrantur, quàm latißimè funditur, decerpemus ea duntaxat, quibus ad Aristoteleam disciplinam plenè intelligendam adolescen-

tes paratiſsimi reddantur. Hanc verò diffinire licebit ſcientiam, quæ vim numerorum atq; naturam perpendit, & omnes eorundem affectiones tertiſsimis commonſtrat rationibus.

De variis Arithmeticæ principijs. Cap. II.

ARithmetica, quemadmodum & reliquæ artes omnes, ſuis conſtat principijs tanquam firmamentis, quibus totius diſciplinæ moles nititur: vt his ſublatis, corruere vniuerſa ſit neceſſe. Principiorum autem duplicem eſſe differentiam placuit Ariſtoteli, compoſitorum & ſimplicium. Simplicia ſunt, diffinitiones, quas in omni diſciplina cognitas eſſe oportere, nemo eſt, qui ambigat. Compoſitorum duo ſunt genera, alia axiomata vocantur,

ſeu

ſeu communes ſententiæ, vſqueadeò perſpicua, vt cuiuis, vel ex ſola vocum ſignificatione citra vllam docentis operam conſtare poßint: Alia poſtulata, certa illa quidem, & ex ſe ipſis fidem habentia, ſed quæ præceptoris operam deſiderent, vt intelligantur. Ac ſunt illa quidem ſatis multa, ſed quæ nobis futura ſunt vſui hîc tantùm apponenda duximus.

Quid vnitas, quid numerus, & de eius partibus, Cap. III.

V*NITAS, omnis numeri principium eſt & menſura. Nam vt res alias numero metimur, ita numeros vnitate. Eſt autem vnitas, qua vnumquodq; vnum dicitur. Numerus eſt multitudo ex vnitatibus compoſita. Quod ad numeri naturam attinet, cùm ſuperiora*

periora petimus, in infinitum progredimur. Nam cõtinuò vbi ad decem numerãdo peruenerimus, super eum ab vnitate numerũ reflectimus, idq́; nõ toties, quin sæpius fieri poßit: cùm autem ad minora descẽdimus, necesse est in vnitate cõsistere: ita maximus numerus nõ reperitur, minimus est binarius. Est numerus rerũ discretarũ mensura & modus, quẽadmodum Aristoteles ingeniosißimè dixit. Oportet autẽ eos à rebus, quarum sunt numeri, ad solum intellectum transferri: hoc enim propriũ est Mathematum. Reperitur in numero duplex partium differentia, quædam aliquoties sumptæ totũ numerum efficiunt, ac metiuntur, quas vocant commensurabiles, vulgò aliquotas: vt in quaternario, binarius:

qui bis sumptus quaternariũ procreat. Aliæ totum numerũ non metiuntur. Quod enim ex ductu earum efficitur, aut superat, aut minus est: vt in ternario, binarius, qui semel sumptus minorem gignit numerũ, sæpius verò, maiorẽ. Quis numerus partem habeat prioris generis, & vnam, aut plures, hac regula dignoscetur. Qui in æquos numeros solui potest, partem habet huius generis: quòd si id semel contingat, vnã tantũ habebit, sin pluries, multas, tot scilicet, quot æquales numeros continebit: vt quaternarius, cũ in duos binarios, qui æquales sunt, dũtaxat soluatur, commensurabilem vnã tantùm partem obtinebit binariũ. At.12. cùm in duos senarios, ternarios quatuor, quaternarios tres, binarios sex diuidatur, ac proinde

qua

quater in æquales numeros ſoluatur, ex quatuor partibus commenſurabilibus conſtabit. Ternarius, quinarius, ſeptenarius, & id genus alij, cùm nullam in æquales numeros diuiſionem recipiant, vnitatem ſolam partem cõmenſurabilem habere cenſebuntur.

De prima diuiſione numeri in parem & imparem.
Cap IIII.

Sũma numeri diuiſio eſt per pares & impares. Par numerus eſt, qui in duas æquas partes diuiditur, ex quibus totus cõflatur numerus: Impar, qui id fieri nõ patitur, ſeu qui in duas æquales partes diuiſus medio vnitatẽ habet interuenientẽ. Pari numero inter alia multa conuenit, vt cũ in Ariſt. 4. ca pite primi Poſteriorũ *duas partes secetur, ad quod genus vna pertinet, ad idem altera referatur: vt in octonario in duos quaternarios diuiso, pars vtraq; sub pari numero continetur. Quod si in alias partes soluatur, vt in quinarium, & ternarium, vtriq; conuenit imparis appellatio. Illud quoq; inest, vt si in parem ducatur alius numerus, siue par, siue impar, par oriatur, ac procreetur. Si enim in binarium. 4. duxeris, octonarius efficitur: si quinarium, denarius, quorũ vterq; par est. Imparem numerum hæc sequuntur, quæ prioribus ferè sunt contraria. Primò, vt diuisus in partes duas, quæ totum conficiant, parem alteram habeat, alteram imparem: Deinde, vt solo impari en eum ducto, gignatur impar. Ex ductu enim*

paris

paris in imparem, par procreatur.

De diuisione paris numeri in pariter parē, pariter imparem, & impariter parem. Cap V.

Numerorum parium tres sunt species: Prima, pariter par: Secunda, pariter impar: Tertia, impariter par. Numerus pariter par est, qui semper in partes æquales vsq; ad vnitatem dissolui potest: vt. 32. *cuius dimidium.* 16. *huius.* 8. *huius.* 4. *huius* 2. *Hic nascitur ab vnitate in infinitum progrediens per prioris numeri geminationem, hoc pacto.* 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. *qui numeri omnes sunt pariter pares. Huic formæ numeri peculiare hoc est, vt partes omnes eius commensurabiles sint eiusdem nominis, hoc est, pariter pares. Numerus* *pariter impar est, qui per maxima diuisus imparium numerorũ constituit species: vt. 14. Producitur ab imparibus naturali ordine se consequentibus, & binario numero geminatis: vt 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. quorum quisq; bis sumptus constituit huius numeri formam. Unde sequitur vnumquenq; à proximo abesse quaternario, & inter præcedentem, ac proximè sequentem tres numeros interuenire: vt. 2. & . 6. interuallo distant trium numerorũ 3. 4. & . 5. Impariter par numerus est, cuius proximæ partes, tametsi in æqualia diuidãtur, earũ tamẽ partes similem diuisionem non admittunt: vt. 12. 20. 40. hoc genus cum vtroq; dictorum symbolum est. Nam quod ad vnitatem simili diuisione non peruenit, conuenit cum pariter impari: &*

quod

quod sæpius æqualium partium sectionem recipit cum pariter pari. Gignuntur formæ hæ numerorum ex ductu pariter parium in impares. Si enim constituatur series vna imparium numerorum, prætermissa vnitate, hoc pacto. 3. 5. 7. 9. 11. 13. & rursus altera pariter pariū initio sumpto à quaternario, ad hunc modum 4. 8. 16. 32. 64. 128. & posteriores ducantur in priores, eo ordine, quo descripti sunt, hi producentur. 12. 24. 48. 96. 192. 384. *qui omnes sunt impariter pares.*

De alia paris numeri diuisione in perfectū, mutilum, & superfluū *Cap. VI.*

PAriū numerorū, alij sunt perfecti, alij mutili, alij superflui. Perfectus Arist. cap. 4. primi Posteriorū *fectus & plenus est, qui partibus proportionalibus intra se cõprehensis et collectis est æqualis: vt. 6. cuius partes sunt.* 1. 2. 3. *quæ coniunctæ.* 6. *efficiunt. Horum numerorum summa est paucitas, quẽadmodum & aliarum rerum, quæ perfectæ sunt: intra decem sunt.* 6. *intra centum.* 28. *intra mille.* 496. *Superfluus numerus est, cuius partes proportionales vsq; ad vnitatem collectæ totum superãt: vt* 12. *Eius enim proportionales partes sunt.* 1. 2. 3. 4. 6. *quæ iunctæ efficiũt.* 16. *Diminutus numerus est, cuius partes proportionales compositæ minus integro reddunt: vt.* 8. *cuius partes.* 1. 2. 4. *non amplius quàm septem colligunt.*

De diuisione imparis numeri in primum & incompositũ, secundũ

seu

seu compositum, compositum per se, ad alios autem relatum primum & incompositum. Cap. VII.

Habet impar numerus, quẽadmodũ & par, formas tres: Primum & incompositum: Secundũ seu compositũ: Tertium compositũ quidem per se, ad alios autem relatum, primum & incompositum. Primus & incompositus est, quem sola vnitas metitur: vt. 3. 5. 7. Secundus & compositus est, quem non sola vnitas, sed alius quoq; metitur numerus: vt. 9. 15. 21. Secũdus & ad alterum primus dicitur, cuius per se communis est aliqua mensura, sed relatus ad alterũ nullam habet: vt. 9. ad. 25. Metitur enim nouenarium solum. 3. Sed si ad inuicem illi duo referantur, communi Arist. 4. capite primi Posteriorũ *menſura carent. Nam nullus eſt numerus, ex cuius ductu poſsit vterque procreari. Ariſto. primum numerũ viſus eſt in duas partes diſtribuiſſe, in eum, qui altero modo primus eſt, & qui eſt vtroq; modo primus. Primũ altero modo vocat, quem ſola vnitas metitur, ſed cõponunt numeri, cuiuſmodi eſt. 5. qui cùm nõ habeat aliã menſurã ab vnitate, ex. 3. tamen & 2. conficitur. Vtroq; autẽ modo primum appellat eum, qui nec menſuratur numero, nec ex numeris cõflatur: cuius generis eſt ternarius, quem ita cenſet eſſe diffiniendũ: Numerus impar, vtroq; modo primus. Eſt quoq; in numeris paribus hæc differẽtia, vt ſit alius primus & incõpoſitus: alius ſecũdus & compoſitus. Prioris generis eſt ſolus binarius primus vtroq; mo-*

do. Ad partem alteram cæteri omnes referuntur.

De proportionibus, quid sit proportio, & quæ aptè comparentur.

Caput VIII.

DE numero per se sumpto hactenus diximus: Nunc de eodem differendum est nobis, sed alteri comparato. Agere autem de numero ad alterum relato, nil aliud est prorsus, quàm mutuã ipsorum habitudinẽ explanare, quæ à Græcis ἀναλογία, Latinè ratio, vulgò proportio, dici potest. Huius partis vtilißima est cognitio, & maximum bonarum artium studiosis præstat adiumentum: ijs verò, qui Aristotelis disciplinam profitetur, apprimè necessaria.

Aristoteles proportionis meminit in locis quàmplurimis, tam in Physi. quã in Dialecti cis.

Propor

Proportio autem (qua voce, & alijs similibus, tamet si parum splendidis, vtendum est) certa ab Euclide diffinitur duarum quantitatum eiusdem generis, alterius ad alteram habitudo. Hæc non in quãtitate solùm, sed in alijs quoq; multis reperitur: vt in coloribus, sonis, viribus: sed quæ proportionem aliquam inter se seruant, ea quantitatis naturam aut affectionem participant. Necesse est enim eorum, quæ sic affecta sunt, alterũ altero maius esse, aut minus, aut ei æquale. Quæ quantitatis esse propria, satis fusè explicat in Categorijs Aristo. Præterea nulla est inter res alias cuiuscunq; naturæ inuenta ratio, cui similis in quãtitate non reperiatur. Unde factũ est, vt per habitudinem, quæ inter quãtitates intercedit, pro-

por

portionem diffinierit Euclides. Oportet autem ex rebus, quæ comparãtur (vt diximus) alteram altera maiorẽ esse, aut minorẽ, aut ei æqualẽ. Hinc fit, vt necesse sit, res huiuscemodi ad idem genus pertinere, cõparariq; aut duos numeros, aut lineas, aut tempora inter se. Numerus autem lineæ, aut linea corpori, aut corpus tempori non aptè comparabitur. Hæc enim quæ diuersi sunt generis nec sese inuicem excedere, nec æqualia esse, aptè dici possunt. Ita acutè scripsit Aristote. sub idem genus cadere, quæ comparantur omnia: quod verum esse, & qua ratione accipi debeat, ex his, quæ diximus, pespicuum euadit.

De diuisione proportionis in rationalẽ, & irrationalẽ. Cap. IX.

Diffe

Differentias quantitatis sequuntur variæ proportionis formæ. Est enim alia coniuncta quantitas, vt linea: Alia deiuncta, vt numerus. Quæ inter alia multa, hoc potissimùm discrimine separatur, quòd deiunctæ quantitates omnes sint commensurabiles, hoc est, communem habeant mensuram. Nulli nanque sunt numeri, quos vnitas non metiatur, & aliquoties sumpta componat. Coniūctæ verò, quædam commensurabiles sunt, inter quas reperitur proportio, qualis est vnius numeri ad alterum: Aliæ in communi aliqua mensura non conueniunt, quarum proportioni similis in numeris nō reperitur, cuius generis sunt Diameter & latus quadrati. Hinc orta est proportionis diuisio in rationalem & irrationalem.

Vide Aristot. lib. 4. ad Eudemum, & ad Nichom. 5.

Rationalis est, quæ ab aliquo numero denominatur, & inter quãtitates commensurabiles intercedit. Irrationalis, quæ nomen ab aliquo numero non accipit, & in his solùm quantitatibus reperitur, quæ carent communi mensura. Hanc Geometer solus considerat, cuius interest de magnitudine, & formis eius pertractare: Illã Arithmeticus contemplatur, cuius subiectas formas, vt postulat nostri instituti ratio, breuiter persequemur.

De diuisione proportionis rationalis in eam, quæ maioris inæqualitatis dicitur, & minoris. *Cap. X.*

NAscũtur ꝓportiones è numerorũ inter se relatione, per q̃ alterũ alteri æq̃lem aut inæq̃lem esse necesse est

est. Aequalia in omnibus sunt eiusdem generis: inaequalia aut excessu, aut deffectu finiuntur. Proportio itaq; altera aequalitatis dicitur, altera inaequalitatis: Illa inaequalibus reperitur numeris, vt duobus binarijs, duobus ternarijs: simplex & athoma: Simplici enim ac vno tantū modo contingit numerum vnum alteri aequalem esse. Haec in duas partes scinditur, maioris inaequalitatis, & minoris. Habitudinem maioris numeri ad minorem, proportionem vocant maioris inaequalitatis: cùm autē minor numerus maiori comparatur, proportio est minoris inaequalitatis. Vtriusq; eaedem sunt formae, & ijsdē vocibus designantur: nisi quod in minori inaequalitate, nominibus maioris additur praepositio sub. Quare

cùm

cùm communia ferè habeant omnia, de altera dixiſſe ſat fuerit.

De diuiſione proportionis maioris inæqualitatis, & formis eius primis multiplici, ſuperparticulari, & ſuper partiente, & quæ his ſubijciantur. *Cap. XI.*

MAior inæqualitas naſcitur ex vnius numeri ad alterum exceſſu, quod cùm varijs modis contingat, variæ inde effectæ ſunt huiuſmodi proportionum formæ. Tres primæ ſimplices ſunt, Multiplex, Superparticularis, Superpartiẽs. Duæ ex coniunctione harum mutua procreantur, multiplex ſuperparticularis, & multiplex ſuperpartiens: quibus vocibus, cùm non ſint commodiores inuentæ, vtendum eſt nobis. Nec *alia eſt efferendi ratio, niſi in paucis, quibus à Græcis nomina poſita ſunt. Multiplex proportio eſt, quãdo maior numerus nõ ſemel cõtinet minorẽ, qualis eſt, quaternarij ad binarium, 9, ad. 3. Huius formæ ſunt propemodum infinitæ, tot ſcilicet, quot numerorum, à quibus nomẽ accipiunt, ſpecies: Quarum nomina ſunt, dupla, tripla, quadrupla, quintupla, &c. Dupla eſt, quando numerus maior minorem bis continet, qualem. 8. ſeruat ad. 4. Tripla, quando ter, qualis eſt inter. 9. &. 3. In cæteris ſimili modo. Proportiones huius generis, inueniuntur omnes, ſi. 1. qui ſequuntur numeri comparentur, 2. reliqui omnes, 3. qui ipſi ſuccedunt, ſeruato ſemper naturali ordine numerorum. Vnitatem enim. 2. reſpicit proportione du* *ne dupla. 3. tripla. 4. quadrupla, & hoc pacto comparatione reliquorum cũ vnione. Multiplicis proportionis infinitæ ſpecies reperiuntur. Superparticularis eſt, qua maior minorem, & eius inſuper portionem aliquam continet: quæ ſi dimidiata ſit, Græcè ἡμιόλιος dicitur, à Cicerone ſeſcupla, vulgò ſeſquialtera: vt. 6. ad. 4. Si præter integrum tertiam minoris partẽ complectitur, ἐπίτριτος: Si quartam ἐπιτέταρτος, Latinè ſeſquitertia, ſeſqui quarta, ac deinceps in infinitũ, relato maiore ad proximè minorẽ: vt. 2. 3. 4. 5. 6. ſecundus ad primum, ſeſcuplus eſt: tertius ad ſecundũ, ſeſquitertius: ſequens ad iſtum, ſeſquiquartus. Superpartiens proportio, qua maior minorẽ ſemel cõprehẽdit, & plures partes eiuſdem nominis cõ-*

mēsurabiles, ex quibus fieri vna nequeat maioris denominationis. Partes cōmensurabiles eiusdem nominis intelligendæ sunt, duæ tertiæ, tres quartæ. Pars vltima hoc exēplo innotescet. 10. ad. 7. proportionem habent superpartientem: ad. 8. verò superparticularem. Nam etsi. 10. præter. 8. duas octauas contineant, scilicet, vnitates duas: ex his tamen binarius conflatur, qui quarta pars est octonarij. Proportionis huius formæ multæ sunt, in infinitum possunt excrescere. Sumūtur enim ex partium commensurabilium numero, qui certis ac definitis terminis non clauditur, & ex eodem nomina trahunt: vt superbipartiens, qua maior continet minorem, & duas eius partes: supertripartiens, qua continet tres partes:

super

ſuperquadripartiens quatuor. Harum ſingulis innumeræ ſubijciuntur ſpecies, ſuperbipartienti, ſuperbipartiens tertias, ſuperbipartiens quartas. &c. Supertripartienti, ſupertripartiens quartas, ſupertripartiẽs quintas, ſupertripartiens ſextas, ſupertripartiens ſeptimas. &c. Eodem modo in cæteris. Quænam autem ſit cuiuſq; harum ratio, ex ipſis vocibus perſpicuum euadit. Duæ aliæ proportionis formæ compoſitæ ſunt: Multiplex ſuperparticularis, & Multiplex ſuperpartiens. Multiplex ſuperparticularis eſt, qua maior numerus minorẽ continet pluries, & partem aliquam commenſurabilem: vt 5. ad. 2. Nam binarius bis continetur in quinario, & præterea vnitas, quæ dimidium eſt binarij. Huius ſpecies

 ſunt,

Dupla superparticularis, tripla superparticularis, quadrupla superparticularis. In prima maior numerus minorē cōtinet bis, & partē vnā, quæ cernitur in.5.& binario: In altera maior minorē cōprehendit ter, & partem itidem vnam, qualem seruāt 7.ad.2. In tertia minor numerus in maiori quater comprehenditur, qua comparātur.9.ad.2.& .13.ad.3. Harum singulæ diuisionem recipiūt infinitam, vt infinitus est etiam partiū commensurabilium numerus: efferunturq́ omnes compositis nominibus, vocibus formarum multiplicis proportionis, & superparticularis in vnum nomen coniunctis, hoc pacto, dupla sesquialtera, dupla sesqui tertia: tripla sesqui altera, tripla sesquitertia, & ita licet in infinitum progredi in

huiusmo

huiusmodi formis: Quarum definitiones constituentur facilè, si earum, quas multiplex & superparticularis cōplectuntur, rationes cōiungantur. Multiplex superpartiens proportio est, qua maior numerus minorē continet plusquā semel, & aliquot præterea partes: vt. 8. ad. 3. 11. ad. 4. Huius species ex formis multiplicis, & superpartiētis constantur. Proximæ sunt, dupla superpartiens, tripla superpartiēs, quadrupla superpartiēs: Harū vnaquæq; sub se habet infinitas, quæ nascūtur ex infinito partiū numero: cuiusmodi sunt, dupla superbipartiēs, dupla supertripartiēs, dupla superquadripartiens: tripla superbipartiēs, tripla supertripartiēs. Hæ quoq; singulæ diuidi in alias possunt itidē numero infinitas, hoc modo

Dupla ſuperbipartiens tertias, dupla ſuperbipartiens quartas, dupla ſupertripartiens quartas, quintas, ſextas, in cæteris eodem modo. Nam in immẽſum produci queunt, & earũ omnium rationes facillimum eſt ex præcedentibus elicere.

Quiuis numeri propoſiti quo pacto in extrema redigantur, hoc eſt, minimos numeros eandem ſeruantes proportionem. *Cap XII.*

Termini proportionis appellantur minimi numeri in aliqua proportione: vt proportionis ſeſquialteræ termini ſunt. 3. & .2. Nam minores his in ea proportione reperiri non poſſunt. Cùm igitur duo ſeſe offerunt numeri, quorum habitudo non ſatis

ſatis perſpecta eſt, illos ad terminos ſic reducemus. Maior numerus per minorē diuidatur. Si in diuiſione ad vnitatem peruenitur, non eſt progrediendum vlterius: illi enim ſunt minimi in ea proportione numeri: ſi verò numerus aliquis ſuperſit, per hunc minor numerus diuidatur, quem ſi abſumi contingat, ceſſandum eſt à diuiſione: ſin minus, numerus, qui ex prima diuiſione ſuperfuit, per alterū diuidēdus eſt, qui eſt ex ſecūda diuiſione relictus, fiatq́ hæc reciproca diuiſio, donec occurrat numerus, qui diuidendum totū conſumat. Per hunc vltimo occurrentem, diuidantur numeri propoſiti, & qui prodibunt erūt proportionis termini: vt propoſiti numeri. 30. & . 18. quorum non ita facilè cognita eſt habitudo, ſic ad termi-

nos redigentur, diuisis. 30. per. 18. relinquuntur. 12. Per hæc diuido minorem numerum. 18. relinquuntur. 6. per quæ. 12. diuido residuum primæ diuisionis, & quoniam video consumptum esse id quod diuidendum erat, per senarium. 30. diuido, & apparent in quotiente. 5. diuido rursus. 18. exeuntq́. 3. hi sunt termini proportionis, quam habent. 30. ad 18. cumq́ inter terminos proportio intercedat superbipartiens tertias, cõcludere licebit, maiores numeros eadem sese proportione respicere.

De numero accommodato figuris, & quòd triplex sit eius forma, linearis, plana, & solida.

Cap. XIII.

Figu-

Figura in magnitudinibus reperitur & in coniuncta quantitate. Sed prius ac simplicius in numeris, argumēto est, quòd eundem numerū in varias formas possumus transformare, eādem autē magnitudinem nō possumus. Triplex autē est numerorū figura, linearis, plana, seu superficialis, & solida. Linearis numerus est, qui suas omnes in eandem positionem porrigit vnitates: sub qua forma omnes numerorū species continentur, si ita describantur, vt in vnum & idem interuallum perpetuò procedāt, binarius hoc modo, . . , ternarius itidem eodem . . . , & ita in cæteris. Planus numerus est, qui ex duobus numeris procreatur, sese ad inuicem multiplicātibus, vel qui per suas vnitates in plana superficie descriptus, Arist.4.capite primi Posteriorū

longitu

longitudinem latitudinemq; tantùm obtinet, ut quaternarius, si ita describatur: : Habet infinitas species sub se. Prima est triangularis numerus, qui ab unitate descriptus tria latera reddit æqualia hoc modo. ·. in quam figurã redigi possunt, ternarius, senarius, denarius, & alij permulti. Secunda est circularis numerus, qui ex aliquo numero in seipsum ducto productus, in illum tandem desinit à quo producebatur, ut. 25. Procreatur enim ex ductu quinarij in seipsum, & in quinariũ finiuntur. Sic quoq; 36. 625. numeri sunt circulares. Nã alter ex ductu senarij in seipsum producitur, alter ex ductu. 25. Ducta videtur appellatio ex circulo Geometrico, in quo idem pũctum principiũ est, atq; finis. Numerus quoq; quadra

tus

tus ſub plano continetur, de quo frequens admodum mentio in Philoſophicis habetur diſciplinis. Eſt autem quadratus numerus, qui ex ductu numeri alicuius in ſeipſum ſemel, procreatur: vt. 4. 9. 16. 25. Producitur enim quaternarius ex binario in ſeipſum ducto, nouenarius ex ternario, 16. ex quaternario, hoc modo. Bis duo, ter tria, quater quatuor. In huiuſmodi quadratis numeris, ille, ex cuius ductu procreantur, radix, ſeu latus quadrati appellatur: vt quaternarij radix eſt binarius: nouenarij ternarius, quod facilè intelligetur cuiuſque numeri quadrati vnitatibus in tetragonam figuram redactis. Conuenit inter alia multa huic numero, vt ſi vnus in alterum ducatur, eiuſdem nominis & formæ tertius procreetur,

tur, hoc eſt, quadratus. Ducto enim nõ uenario in quaternarium, efficiũtur 36. numerus quadratus. Sunt & aliæ plani numeri formæ permultæ, altera parte longior, pẽtagonus, hexagonus: ſed omnes perſequi nõ eſt noſtri inſtituti. Solidus numerus eſt, qui ex tribus numeris producitur ſeſe multiplicãtibus, vel qui ſparſim per ſuas vnitates deſcriptus longitudinẽ, latitudinẽ, & altitudinẽ habet: vt. 8. quẽ tribus illis conſtare dimenſionibus intelligemus, ſi eius vnitates in ſingulos teſſeræ angulos diſtribuantur, quolibet latere pares, hoc eſt, duas cõplectente. Habet ſpecies permultas, Sphæricũ, pyramidem, Pheniſcũ ſeu Cuneolũ: quorũ rarò incidit apud Philoſophos mẽtio, certè ab Ariſt. nuſquã in exẽplũ aſſumpti videntur. Cubus, qui in

ſoli-

solidis numeratur, frequētißimus est vsus. Is dicitur numerus ex ductu alterius in se ipsum bis, procreatus, aut quod idem est, ex ductu quadrati in suū latus, vt. 8. 27. *Si enim binarius in seipsum bis ducatur, hoc modo, bis duo bis.8. efficiētur: et si ternarius in seipsum ratione eadem, secundus numerus procreabitur.* 27. *Idem sequetur omnino ducto quaternario in suū latus, hoc est, binariū. In hac numeri forma, quēadmodum & in quadratis, radicē appellare consueuerūt numerū illū, ex cuius ductu gignitur Cubus, vt octonarij radix est binarius, 27. ternarius. Traditur autem certa in vtrisq; radicis inueniēdæ regula, sed hæc ex ea petēda est, quæ cōputādi rationē docet, quā Logisticā diximus.*

De comparationum habitudine,

quæ Analogia dicitur, quid sit, & quas habeat differentias.

Cap. XIIII.

OMnis comparatio, vt minimũ, fit inter duo extrema, de qua hactenus diximus. Solent autem sæpissimè plura duobus sibi inuicem comparari: vbi non vna tãtùm est ratio, sed plures: comparanturq; non tam extrema ipsa, quàm rationes, quã habitudinum comparationem possumus appellare, Analogiam seu mediocritatem, vulgò proportionalitas nominatur. Sit igitur Analogia similitudo quædam & comparatio multarum proportionũ. Reperitur aliquãdo in tribus extremis, quorũ medium bis sumitur: vt si comparentur hi numeri. 4. 2. 1. Est enim sicut primus *ad ſecundum, ita ſecundus ad tertium: vocaturq́ continua Analogia. Cùm autem accipiũtur plura tribus, vt vnoquoq; ſemel tantùm in comparatione vtamur, naſcitur genus alterum Analogiæ priori contrarium, quam diſiunctam vocant: qualis cernitur in his numeris, 12. 6. 8. 4. in quibus, quæ eſt ratio primi ad ſecundũ, eadem eſt tertij ad quartum.*

De tribus Analogiæ formis, Arithmetica, Geometrica, Muſica. *Cap. XV.*

ANalogiæ formæ repertæ ſunt multæ, quæ nec certa ratione poſſunt comprehẽdi. Sed veteres triũ duntaxat præcipuè meminiſſe viſi ſunt, Arithmeticæ, Geometricæ, & Muſicæ: quas mediocritates appel-

larunt, ducta fortasse ex virtutibus morum similitudine. Hæ enim inter extrema duo exuperantiam & defectionem medio quodam loco consistere traduntur. Estque eadem in Analogia ratio, in qua tres numeri reperiuntur, medius vnus, & extremi duo, ita inter se compositi, vt extremorum alter exuperet medium, alter ab eo deficiat. Mediocritas Arithmetica est, in qua inter numeros, qui sibi inuicem comparantur, eadem est differentia, hoc est, idem excessus, non similis proportio, qualis est in tribus numeris. 4. 3. 2. *& in his quatuor.* 8. 6. 3. 1. *Comparatur enim octonarius senario, & ternarius vnitati: & quo excessu primus vincit secundum, eodem tertius superat quartũ. Estque in vtrisque differentia binarius. Geo-*

me

metrica mediocritas est, in qua spe-ctantur, non eædem differentiæ, sed proportiones similes: vt. 9. 6. 4. 15. 5. 6. 2. Nam in illis proportio vna est, sesquialtera, in his tripla, & inæquales differentiæ. Vincunt enim 9. 6. ternario: hi verò. 4. binario. Reperitur præter hæc tertium Analogiæ genus harmonicum, in quo nec eadem obseruatur numerorum diffe-rentia, nec ratio similis, sed confe-runtur inter se partium excessus, ha-bentque rationem eandem, quam ma-ximus numerus ad minimum, vt vi-dere est in his. 6. 4. 3. quorum diffe-rentiæ sunt maioris & medij. Binari-us, medij, & minoris vnitas: Est au-tem binarij ad vnitatem ratio ea-dem, quæ senarij ad ternariũ, dupla videlicet.

De sex alijs Analogiæ formis ex quinto Euclidis.

Cap. XVI.

EUclides quinto elementorum sex alias constituit Analogiæ species, conuersam, permutatam, coniunctam, disiunctam, euersam, & æquã. Conuersa est, cùm sumptis quatuor numeris, in quibus, vt se habet primus ad secundum, ita tertius ad quartũ, concludimus ordine conuerso, quod est secundus ad primum, idem esse quartum ad tertium, hoc modo: si est. 8. *ad* 4. *sicut.* 6. *ad.* 3. *erit è conuerso.* 4. *ad* 8. *sicut.* 3. *ad.* 6.

Permutata est, cùm primus est ad secundum, sicut tertius ad quartum, & ex eo concluditur primus esse ad tertium, sicut secundus ad quartum:

vt si

vt si est.8. ad.4. sicut.6.ad.3. erit permutatim. 8. ad.6. sicut. 4. ad tria, inter quos eadem omnino ratio est.

Coniuncta vocatur, cùm est primus ad secundum, sicut tertius ad quartum: vnde colligimus primum cum secundo esse ad secundum, quod est tertius cum quarto ad quartum: vt si est. 8. ad. 4. sicut. 6. ad. 3. erit coniunctim.12. ad.4. sicut.9.ad.3.

Disiuncta est, cùm primo & secũdo eodem modo se habentibus, quo secundus & quartus, concludimus differentiam primi & secundi eam seruare proportionem ad secundum, quã seruat differentia tertij & quarti ad quartum: vt si sunt. 18, ad. 6. sicut.9. ad.3. erunt.12.ad.6. sicut.6.ad.3.

Euersa est, cùm primo & secundo, tertio itidem & quarto eandem inter *se proportionem seruantibus, colligimus primum ad differentiam ipsiusmet & secundi se habere, quemadmodum tertium se habet ad differentiã, qua vincit quartum: vt si sunt. 12. ad 4. sicut. 9. ad. 5. erunt. 12. ad. 8. sicut 9. ad senarium. Aequa Analogia est, in qua propositis duobus numerorum ordinibus eandem inter se rationem seruantibus, colligimus medijs intermissis, inter extrema similem esse proportionem: vt si sumantur tres numeri. 12. 6. 3. & ex altera parte tres alij. 8. 4. 2. cùm sit vtrorunque ratio eadem concludere licebit. 12. & 3. extrema prioris ordinis eo modo sese habere, quo. 8. & .2. extrema secũdi.*

Simplicia principia artis, hoc est, diffinitiones, hactenus tradidimus: quæ sequuntur ad alterũ genus pertinent,

tinent, suntq́ dignitates & postulata arti & conficiendæ & pernoscēdæ apprimæ necessaria.

Dignitates Arithmeticæ.

OMnis numerus est maior qualibet sua parte. 1

Ea pars minori dicitur maior, quæ sortitur minorem denominationem, minor quæ maiorem. 2

Omnis numeri monas est, pars aliquota & denominata ab ea. 3

Omnis numerus totus à monade est, quota eius pars monas nuncupatur. 4

Omnis numeri partes simul collectæ æquantur suo toti. 5

Numerus crescens ex maiorū additione, maior est eo, qui crescit ex additione minorum. 6

7 *Qui consurgunt æquali multitudine vnitatum, sunt ad inuicem æquales.*

8 *Hi numeri sunt ad inuicẽ æquales, quorum partes eiusdem denominationis sunt inter se æquales.*

9 *Si æqualibus numeris æquales adijciantur, consurgunt æquales.*

11 *Si ab æqualibus numeris æquales numeros demas, residui erunt æquales.*

12 *Si æqualibus numeris addantur inæquales, inæquales consurgent.*

13 *Si ab æqualibus auferantur inæquales, remanentes erunt inæquales.*

14 *Si numerus in monadem ducitur, aut contra, idem numerus semper orietur.*

15 *Duobus inæqualibus numeris propositis, si differẽtia maioris addatur*

minori

minori numero, relinquentur æquales numeri.

Si numerus ducatur in alterum, productus sese habet ad multiplicandum, ut multiplicans ad unitatem. 16

Si numerus diuidat alium, qui diuiditur ad diuidentem sese habebit, ut quotiens ad unitatem. 17

Qui ad eundem numerum relati æquales seruant proportiones, sunt ad inuicem æquales. 18

Si duo maiores numeri tertiũ aliquem efficiunt, & duo minores pariter, qui ex coniunctione maiorum procreabitur maior erit. 19

Eadem est proportio maioris numeri ad minorem, quæ partis ad partem eiusdem nominis. 20

Quoties numerus à numero subtrahi potest, toties in eo potest & numerari. 21

Petitiones seu postulata.

1 *NUmerum in infinitum cresce-re.*

2 *Nullum numerum in infinitum decrescere.*

3 *Unitatem pari numero adiunctā imparem reddere.*

4 *Unitatem impari adiunctam efficere imparem.*

5 *Cuiuis numero innumeros aßignari posse æquales.*

6 *Maiorem numerum non numerare minorem.*

Demonstrationes decem.

EX Arithmetica vnam tantùm aut alteram demonstratione in exemplum assumpsisse visus est Aristote. nos tamen has paucas ex varijs libris Euclidis hîc apponendas du-

ximus

ximus: quarum aliæ ad ea, quæ ex arte iſta Dialecticis & Philoſophicis libris inſerta ſunt, pertinent: aliæ Geometricis intelligendis ſunt neceſſariæ. Nemini itaque mirum videatur, ſi ex tam multis has tantùm decerpſerimus. Porrò in his tradendis hanc ſecuti ſumus methodum, vt præter Campani commentaria, aut Theonis, demonſtrationes ſingulas, quæ hanc operam deſiderare videbantur, in partes diſtinxerimus, probationibus omnibus explicatis atque explanatis. Sic enim ſperamus, facillimè, etiam à rudiſſimis quibuſq̃, perceptas iri. Sumpſimus quoque Theoremata aliquot in his noſtris demonſtrationibus, velut Hypotheſes, demonſtrationibus eorum prætermiſſis, quòd arduæ atq̃ difficiles

nimis

nimis viderentur, & absq; alijs permultis neutiquam intelligi possent.

Theorema primum. 17. septimi Euclidis.

Vnitas	
3	4
a	b
12	12
c	d

Si duorum numerorum vterq; ducatur in alterum, qui inde producentur erunt æquales, seu potius idem vtrobiq; proueniet.

NVmerus numerum multiplicare dicitur, quãdo quotæ sunt in ipso unitates, toties componitur multiplicatus, & gignitur aliquis. Ex qua diffinitione perspicuum euadit, quoties multiplicatus numerus reperitur in tertio, qui producitur, toties unitatem esse in multiplicante: & contrà, quotiens unitas est in multiplicante, toties multiplicatũ in tertio illo reperiri, qui ex multiplicatione procreatur. Sint igitur a & b numeri, & ex a in b proueniat c, idem etiam ex b in a producetur. Cùm enim ex a in b proueniat c, per diffinitionem proximè traditam erit b in c, quoties unitas in a. Iam si unitas ad a sese habet, quemadmodum b ad c (numerat enim unitas a, sicut b c) permutatim ergo quoties unitas in b, toties a in c. Quod etiam per 16. septimi pespicuum euadit, quæ ita habet: Si *numerat unitas aliquem numerum, quoties tertius quartum, erit quoq; permutatim, ut quoties unitas numerat tertium, toties secundus numeret quartum. Quia igitur a toties coaceruatur in c, quoties in b est unitas, sequitur ex definitione ex b in a fieri c, quod probandum erat.*

Demonstrationis explicatio.

Demonstratione efficitur ex b numero in a fieri c, idq; tribus rationibus.

Prima concludit, quoties vnitas est in a, toties b esse in c, in hunc modum.

Quando numerus numerum multiplicat, quoties unitas est in multiplicante, toties multiplicatus est in tertio, qui gignitur, Constat ex præmissa diffinitione.
Atqui a multiplicat b, & gignitur c, Est hypothesis.
Ergo quoties unitas est in a, toties erit b in c.

Secunda concludit, quoties vnitas in b, toties a in c, in hunc modum.

Quando numerat unitas aliquem numerum, quoties tertius quartũ, erit permutatim, ut quoties unitas tertium, toties secundus numeret quartum: Constat ex 16. septimi
Sed unitas numerat a, quoties b c, Est conclusio præcedentis.
Ergo quoties erit unitas in b tertio, toties a secundus erit in quarto c.

Tertia

Tertia colligit, quod probandum erat, ex b in a fieri c.

Constat ex præmissa definitione. Quando quot sunt unitates in aliquo numero, toties alter coaceruatur in tertio, tertius fit ex ductu primi in secundum,

At quoties unitas est in b, toties a est in c,

Est conclusio præcedentis. Ergo ex ductu b in a fit c.

Theorema secundũ.18.septimi.

6	8
d	e
3	4
b	c
a. 2	

Si vnus numerus in duos ducatur, qui gignuntur ex multiplicatione, eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

Multiplicet a utrunq; duorum numerorum b & c, & gignantur d & e, dico eam seruare proportionem d ad e, quam b ad c. Nam si a multiplicat c, & prouenit d, erit b in d, quoties unitas in a. Rursus, si a multiplicat c, & producitur e, erit itidem c in e, quoties unitas in a per diffinitionem traditam. Ita d b, & e c æqualiter continent, nam quoties a unitatem. Ergo sicut d ad b, ita e ad c. Quare permutatim erit d ad e, sicut b ad c, quod probandum fuit.

Explicatio.

Demon

Demonstratio probat d ad e eam seruare proportionem, quam b ad c tribus rationibus.

Prima concludit, b in d, & c in e reperiri, quoties vnitas in a.

Quando numerus numerum multiplicat, quoties unitas est in multiplicante, toties multiplicatus est in tertio, qui gignitur,

Atqui a multiplicat b, & producitur d, itidē multiplicat c, & producitur e,

Erunt igitur b in d, & c in e quoties unitas in a.

Secunda concludit, id esse d ad b, quod e ad c, in hunc modum.

Numerorum ad eos, quos ex æquo continent, eadem est proportio: *Ex se patet*

Cōtinent autem d b, & e c ex æquo, nam quoties a unitatem, *Est conclusio præcedentis.*

Ergo d ad b, & e ad c eadem erit ratio.

Tertia concludit, quod demonstrandum erat, id esse d ad e, quod b ad c.

Ex permutata proportione.

Propositis quatuor numeris, si sit primus ad secundum, sicut tertius ad quartum, erit sicut secundus ad quartum, ita primus ad tertium:

Atqui d ad b perinde sese habet, atq; e ad c, *Conclusio præcedentis*

Ergo quod est b ad c, id erit d ad e.

Theo

Theorema tertium. 20. septimi.

a	6
b	4
c	3
d	2
e	12
f	12
g	24

Si fuerint quatuor numeri proportionales, quod ex ductu primi in vltimum producitur, æquum est ei, quod fit ex ductu secundi in tertiũ.

PRoportionales numeri uocantur, qui se omnes eadem proportione respiciunt. Sit proportio a b, sicut c ad d, fiatq; ex a in d e, & ex b in c f: erunt proculdubio e & f numeri æquales. Ducatur enim a in b, & fiat g, erit per decimam octauam præcedentem g ad d, sicut b ad d. Cùmq; per 17. ex b in a fiat g, & ex eodem b in c f, erit per decimam octauam g ad f, sicut a ad c. Quòd si g seruat proportionem ad e, quam b ad d, & idem g ad f eandem seruat, quam a ad c, cũ illorum proportiones sint eædem, erit g ad e & f proportio eadem: ergo e & f sunt numeri æquales.

Explicatio.

Demonstratio probat e & f esse numeros æquales, quorum e producitur ex ductu a in d, f uerò ex ductu b in c, quatuor rationibus.

Prima concludit, si ducatur a in b, & fiat g, g ad e sese habere, sicut b ad d, in hunc modum.

Si numerus unus in duos ducatur, qui gignuntur ex multiplicatione eandem rationem habent, quam multiplicati. Ex.18. septimi.

Atqui a multiplicat b, & gignitur e, idem a multiplicat b & producitur g, Hypothesis.

Ergo sicut b ad d, qui sunt numeri multiplicati, ita g ad e, qui ex multiplicatione procreantur.

Secunda probat, ex b in a fieri g, hoc modo.

Si duorum numerorum uterq; ducatur in alterum, idem numerus utrobiq; proueniet, Ex.17. septimi.

Atqui ex a in b fit g,

Ergo si b ducatur in a, idem g proueniet. Hypothesis.

Tertia concludit, esse g ad f sicut a ad c.

Si numerus unus in duos ducatur, geniti eandem habent rationem, quam multiplicati, Ex.18. septimi.

Atqui ex b in a fit g, & ex eodem b in c, f, Hypothesis.

Ergo g ad f erit, sicut a d c.

Quarta colligit, quod demonstrandum erat, e & f esse numeros pares.

Si unius numeri ad duos sit eadem proportio, necesse est illos esse pares: Ex se patet

Atqui g ad e & ad f eandem seruat proportionem. Ex praecedentibus.

Ergo e & f sunt numeri aequales.

E Theo

Theorema quartum.
22. ſeptimi.

a 6 *Si fuerint duo numeri ſecundum*
b 5
c 2 *ſuam proportionem minimi, ipſi erũt*
d 4 e 3 *ad inuicem primi.*

Sint duo numeri a & b ſecũdum ſuam proportionem minimi, dico ipſos fore ad inuicem primos. Si enim non ſint, numeret eos c, ſecundum d, & e: Eritq́ per 18. d ad e, ſicut a ad b. Et quia d & e ſunt minores a & b, ſequitur a & b non eſſe ſuæ proportionis minimos, quod eſt poſitioni contrarium.

Demonſtratio explicatione nõ indiget.

Theorema quintum. 21. octaui.

a 8 *Si quatuor numerorum continuè*
b 12 *proportionalium primus fuerit cu-*
c 18
d 27 *bus, quartum cubum eſſe neceſſe eſt.*

Sint quatuor numeri continuè proportionales a, b, c, d, ſitq́ a cubus, dico d etiam fore cubum

bum. Principio quod decima nona demonſtratione concluditur ſtatuatur principij loco: Si duorum numerorum duo medij proportionales fuerint numeri, ipſos ſolidos fore atque ſimiles. Quod exemplis multis oſtendi poteſt, & in praeaſſumptis numeris euadit peſpicuum. Cùm enim inter. 8. & 27. duo medij proportionales intercipiantur. 12 &. 18. in quibus, quae eſt proportio primi ad ſecundum, eadem eſt ſecundi ad tertium, & tertij ad quartum: nam utrobique eſt ſeſquitertia, ipſi extremi. 8. &. 27. ſunt numeri ſolidi, & ſimiles, uterque enim cubus. Ex theoremate iſto pendet propoſiti demonſtratio.

Quoniam enim inter a d duo medij proportionales intercipiuntur b c, erunt ipſi ſolidi, & ſimiles:

Atqui a eſt cubus ex hypotheſi,
Ergo & d erit cubus.

Explicatio.

Demonſtratio oſtendit, cùm inter a d duo medij proportionales ſint numeri b c, & a ſit cubus, d quoq; fore cubum unica tantùm ratione.

Si duorum numerorum duo medij proportionales fuerint numeri, ipſi ſolidi erunt & ſimiles, ut ſi unus ſit cubus, ſit quoq; cubus & alter, Ex. 9.octaui.

Atqui inter a d duo medij proportionales ſunt numeri c b, Hypotheſis.

 Ergo

Ergo a d solidi erunt & similes, est autem a cubus ex hypothesi: ergo & d, quod fuerat demonstrandum.

Theorema sextum. 23. octaui.

a	8	*Si duorum numerorum, quorum*
b	27	
c	64	*proportio fuerit sicut cubi ad cubum,*
d	216	*alter vter fuerit cubus, erit quoq; cu-*
e	12	
f	18	*bus & alter.*

Sint duo numeri a b seruantes eandem proportionem, quam seruant c d, sitq; a cubus, dico b cubum esse. Necesse est enim c d solidos esse & similes, cùm sint cubi, quod constat ex. 19. octaui.

Inter ipsos itaq; cadent duo medij proportionales per. 18. totidem igitur cadent inter a b per. 8. octaui, quæ demonstrat, si inter duos numeros numeri quodlibet cõtinuè proportionales ceciderint, inter omnes eiusdem proportionis totidem cadere. Medij inter a b sint e f. Quoniã igitur quatuor numeri a, e, f, b continuè proportionales sunt, & a est cubus: ergo b erit cubus, quod fuerat demonstrandum.

Explicatio.

Demonstratio cõcludit, si a & b perinde sese habeãt atq; c & d, qui sunt cubi, & a sit cubus, b *cubum fore quatuor rationibus.*

Prima colligit, c d esse solidos & similes, in hunc modum.

Omnes cubi sunt solidi similes, Ex. 19. octaui.
At c d sunt cubi,
Ergo solidi & similes. Hypothesis.

Secūda concludit, inter c d duos cadere numeros continuè proportionales.

Si fuerint duo numeri solidi similes, necesse est inter eos, duos numeros continuè proportionales intereſſe. Ex. 18. octaui.
Atqui c d sunt huiusmodi, Conclusio præcedētis
Ergo inter c & d duo intererunt medij.

Tertia colligit, inter a b duos quoq; interesse proportionales.

Si inter duos numeros quodlibet continuè proportionales ceciderint, totidem inter alios eiusdem proportionis cadere est necesse. Ex. 8. octaui.
At inter c d cadunt duo numeri, & a b eandē habent cum illis proportionem, Est conclusio præcedentis.
Ergo inter a b duo cadēt proportionales e f.

Postrema ostendit, b esse cubum, quod fuerat demōstrandum.

Si quatuor numerorum continuè proportiona- Ex. 12. octaui.

lium primus fuerit cubus, quartus quoq; erit cubus:

Ex præcedentibus. *At a, e, f, b, sunt numeri proportionales, & a est cubus,*

Ergo b erit numerus cubus.

Theorema septimum.

3. noni.

f	16
g	32
a	8
b	64
c	2
d	4

Si numerus cubus in seipsum ducatur, qui inde producetur, erit cubus.

Sit a cubus numerus, ex quo in se ducto fiat b, dico b fore cubum. Sit enim c latus a numeri cubi, ducaturq; in seipsum, & fiat d, certè ex c in d fiet a, quod manifestũ est ex lateris cubi numeri diffinitione. Iam cùm c seipsum multiplicans efficiat d, quoties unitas est in c, toties erit c in d per diffinitionem primæ propositionis:

Quare quæ est proportio unitatis ad c, eadem est c ad d.

Rursus cùm c seipsum multiplicãs efficiat d, & multiplicans d producat a, per.18. quæ erit proportio c ad d, eadem erit d ad a. Ex quibus sequitur unitatem, c, d, & a esse continuè proportionales, contineriq; inter unitatem & a duos medios numeros continuè proportionales. Porrò cùm a in seipsum ductus efficiat b, quoties unitas in a, toties a in b, eritq; proportio unitatis ad a, sicut

a ad

a ad b: cumq; inter unitatem & a duo medij numeri interſint proportionales, inter a quoq; & b totidem intererunt, ſintq; f & g, quod probatur ex. 8. octaui.

Si igitur a, f, g, b, ſunt quatuor numeri cõtinuè proportionales, & a ex hypotheſi eſt cubus:

Ergo per præcedentem b erit cubus, quod fuerat demonſtrandum.

Demonſtrationis explicatio.

Demonſtratio probat, ſi a cubus numerus in ſeipſum ducatur, & producatur b, b eſſe cubum ſex rationibus.

Prima concludit, ſi c latus cubi numeri a in ſeipſum ducatur, & producatur d, ex ductu c in d fieri a, in hunc modum.

Latus cubi numeri eſt numerus, ex cuius ductu in ſeipſum bis cubus producitur, Ex diffinitione lateris cubi.

At c eſt latus cubi a,

Ergo ex c in ſeipſum bis fiet a, atqui ducere c in ſeipſum bis nil aliud eſt, quàm ducere c in d: igitur ex c in d fiet a. Hypotheſis.

Secunda concludit, vnitatem ad c eſſe, ſicut c ad d, in hunc modum. Ex diffinitione primæ.

Quando numerus numerum multiplicat, quoties unitas

unitas est in multiplicante, toties multiplicatus est in tertio, qui gignitur.

Hypothesis. At c seipsum multiplicat, & fit d,

Ergo quoties unitas in c, toties c in d, eritq; proportio unitatis ad c, quæ est c ad d.

Tertia concludit, quæ est proportio c ad d, eandem esse d ad a, in hunc modum.

Ex. 18. septimi. Si numerus unus in duos ducatur, qui gignuntur ex multiplicatione eandem seruant proportionem, quam multiplicati.

Hypothesis. At ducitur c in seipsum & fit d, ducitur quoq; c in d, & fit a,

Ergo quæ est ratio c ad d, eadem erit d ad a, ex quibus sequitur unitatem, c, d, & a esse continuè proportionales, contineriq; inter unitatem & a duos numeros continuè proportionales.

Quarta concludit, esse proportionem vnitatis ad a, sicut a ad b, in hunc modum.

Ex diffinitione primæ. Quando numerus numerum multiplicat, quoties unitas est in multiplicante, toties multiplicatus est in tertio, qui gignitur,

Hypothesis. Atqui a in seipsum ducitur, & fit b,

Ergo sicut unitas ad a, ita a ad b.

Quinta concludit, inter a & b

duos

duos intereſſe numeros proportionales, in hunc modum.

Si inter duos numeros numeri quodlibet continuè proportionales ceciderint, inter omnes eiuſdem proportionis, totidem cadere eſt neceſſe, Ex. 18. oui.

Atqui inter unitatem & a duo medij interſunt, eſtq́; ſicut unitas ad a, ita a ad b, Ex præcedentibus.

Ergo duo erunt medij inter a & b, f ſcilicet & g.

Poſtrema colligit, b eſſe cubum, quod erat demonſtrandum, in hunc modum.

Si quatuor numerorum continuè proportionaliũ primus fuerit cubus, quartum cubum eſſe eſt neceſſe. Ex. 5.

Atqui a, f, g, b ſunt numeri continuè proportionales, eſtq́; a cubus, Ex præcedentibus.

Ergo & b erit numerus cubus.

Theorema octauũ. 4. noni, quo vſus eſt Ariſt. cap. 7. primi Poſt.

Si cubus in cubum ducatur, qui inde producetur erit cubus.

a	8
b	27
d	64
c	216

Sint a & b cubi, fiatq́; ex a in b c, dico c fore cubum. Ducatur a in ſe, & fiet d, eritq́; per præcedentem d cubus: Et quia per. 18. ſeptimi *est a ad b, sicut d ad c, constat ex. 13. octaui & esse cubum.*

Explicatio.

Demonstratio concludit, cùm sint a & b cubi, & ex a in b fiat c, c esse cubum tribus rationibus.

Prima ostēdit, si a in seipsum ducatur, & fiat d, d esse cubum.

Ex. 3. noni. *Si cubus ducatur in seipsum, qui producetur cubus erit.*

Est hypothesis. *At a, cùm sit cubus, in seipsum ducitur, & fit d, Ergo erit d cubus.*

Secunda colligit, esse a ad b, sicut d ad c.

Ex. 18. septimi. *Si numerus unus in duos ducatur, qui gignuntur eandem rationem habent, quàm multiplicati,*

Atqui a ducitur in seipsum, fitq; d, ducitur etiam in b, & fit c,

Ergo sicut a & b, ita d & c.

Postrema colligit, c esse cubum, quod fuerat demonstrandum,

Ex. 23. octaui. *Si duorum numerorum, quorum proportio fuerit sicut cubi ad cubum, alteruter fuerit cubus, erit quoq; cubus & alter,*

Ex praecedentibus. *At d c sese habēt sicut a b, qui sunt cubi, & d est cubus,*

Ergo c erit cubus.

Theorema

Theorema nonum. 21. noni

Si pares numeri quilibet componantur, cōpositus ex omnibus par erit.

2	4	6
a	b	c

Componantur numeri a, b, c, qui singuli sunt pares, totus a, c erit par. Nam quoniā unusquisq; ipsorum a, b, c, par est, partem habebit dimidiam, quod constat ex diffinitione paris numeri. Quare & totus a c in duo dimidia diuidi poterit, ac per diffinitionem numeri paris, totus a c par erit.

Demonstratio facilior est, quàm vt explicatione indigeat.

Theorema decimum. 23. noni.

Si impares numeri componantur, & multitudo ipsorum fuerit impar, numerus, ex quibus componitur, erit impar.

3	5	7
a	b	c

Componantur numeri impares a, b, c, quorum multitudo est impar, totus a, c erit impar. Auferatur à c unitas, & relinquatur e par numerus, cùm igitur a b sit par, per. 23. quæ demonstrat, si numeri impares coaceruentur, quorum multitudo sit par, numerum ex eis compositum

esse

esse parem, si illis addatur e, totus a e erit par per præcedentẽ: toti huic, si unitas addatur fiet impar: at unitate addita fit a c, totus igitur a c est numerus impar.

Hæc quoq; explicationẽ non desiderat.

Qui de Arithmetica scripserũt, omnes fermè Logisticam seu Computatoriam videntur cum ea cõiunxisse, quæ in sola contemplatione versatur, sed nobis vel ob hanc causam illã prætermittere licebit, quod scilicet poßit ex alijs commodè peti, & ad disciplinam Aristo. nil omnino opis ferat.

Finis Arithmeticæ institutionis.

Quid Geometria, et quot eius principia, & partes.

GEOMETRIA vna est ex Mathematicis, Arithmetica sola posterior, cæteris omnibus ordine prior, & demonstrationũ firmitate longè superior: quæ magnitudinum, figurarum, terminorumq́ in his existentium rationes perpendit, affectionesq́ varias ad magnitudinem pertinentes certeßima ratione inuestigat, ac inesse ipsi argumentis necessarijs demonstrat. Huius, quemadmodum & aliarum, duas pleriq́ fecerunt partes: quarum altera in contemplatione sola consistit, *altera in actionem & opus referatur. Prior simplex est & vna, hæc in tria membra diuisa Altimetriã, Planimetriam, & Stereometriam, metiri corporum molem, secundum omnem partem ac dimensionem, arte docet & instrumentis: prima lineæ, hoc est, longitudinis, secunda extremitatis & latitudinis, tertia altitudinis mensurandæ rationem ostendẽte. Nobis propositum est, eius tradere elementa, quæ in contemplationem solam incumbit. Continet perinde atq; Arithmet. ars ista firmißima principia: quorũ alia simplicia sunt, alia composita. De quibus omnibus, quatenus instituti nostri ratio postulat, dicendum est.*

Diffinitiones simplicia principia.

MAgnitudinis principium punctus est, quemadmodum & numerorum vnitas.

Punctus est, cuius nulla est pars, & in coniuncta collocatur quãtitate: cuius fluxu, perinde ac si vestigiũ aliquod relinqueret, linea describi à Mathematicis intelligitur.

Linea, est longitudo sine latitudine, cuius extrema sunt puncta. Recta est breuissima extensio, cuius medium non declinat ab extremis. Inflexa, seu obliqua, cuius medium ab extremis discrepat.

Ex lineæ fluxu extremitas describitur, quæ longitudinem & latitudinem tantùm obtinet, altitudinis expers: & lineis clauditur.

Corpus, perfectissimam magnitudinem, suo fluxu efficit extremitas, tribus

tribus continetur dimensionibus, longitudine, latitudine, & crassitie: clauditurq́ aut vna extremitate, aut pluribus, vt talus & sphæra.

De angulis.

ANgulus, est duarum magnitudinum contactus mutuus, nõ rectè iacentium: aut potius magnitudo altera parte finita, & duabus lineis, vel extremitatibus comprehensa, se non rectè contingentibus. Contactus rectus linearum, est quando ex duabus vna coalescit, atq́ conflatur.

Anguli prima diuisio est in solidum, & planum: Planus, est linearũ contactus, non rectè iacentium: Solidus, siue corporeus, est qui ex pluribus planis angulis, in eadẽ superficie minimè constitutis, & ad idem punctũ concur-

cōcurrentibus efficitur. Comprehenditur itaq; angulus solidus, vt minimum, tribus lineis rectis, & tribus planis angulis.

Planus angulus, aut rectilineus est, aut curuilineus, aut mixtus. Rectilineus est, qui ex rectis lineis conficitur: Curuilineus, qui ex obliquis: Mixtum efficiunt recta & obliqua, cùm coëunt.

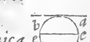
Diuiditur vnaqueq; harū formarū plani anguli in alias præterea species. Rectilineus, in rectum, acutū, & obtusum. Rectū angulū efficit linea recta, super rectam incidens ad perpendiculum, vt a d. Cùm autē linea vna aliam intersecat, non ad perpendiculum, sed obliquè, fiunt anguli obtusus, & acutus. Obtusus maior est recto, vt e. Acutus recto minor, vt c.

Curuilineus angulus tres habet ſpecies, Concauum, Conuexũ, & Medium. Concauus eſt, quem duæ lineæ circulares continent, ſeſe ſecundum interiorem partem contingentes: Conuexum efficiunt quoq; lineæ circulares, quæ ſe ſecundum exteriorem partem contingunt: Medius ab eiſdem conſtituitur, cùm altera ſecundum partem interiorem, altera ſecundum exteriorẽ, ad idẽ punctũ concurrunt.

Mixtus angulus tres quoq; ſub ſe formas cõtinet: Angulum cõtingentiæ, qui fit ex cõtactu rectæ lineæ ad curuã ſecundum exteriorẽ partem: Angulũ ſemicirculi, qui producitur ex contactu diametri, & circũferentiæ in interiore parte circuli: & Angulum portionis circuli, quem efficit recta linea non ducta per centrum cum *cũ circumferentia circuli: quorũ omnium exempla in subiectis figuris cernuntur.*

De figura.

Figura est, quæ aut extremo vno clauditur, aut pluribus. Plana, quæ in extremitate descripta, lineis comprehenditur. Solida, quæ clauditur extremitatibus. Plana, aut rotũda est, aut rectilinea. Rotunda circulum continet, & quas irregulares Geometræ appellant.



Circulus est plana figura, vnica linea comprehensa, quæ circumferentia dicitur: in cuius medio punctus est, à quo omnes lineæ ad circumferentiam ductæ pares sunt.

Dimetiens circuli, est linea per centrum acta, vtrinque in circunferentiam

rentiam desinens.

Semicirculus, est figura diametro, & abscisa circuli circumferētia cōprehensa.

Sectio, seu portio circuli, est quæ sub recta linea, & portione circuli, aut maiore, aut minore semicirculo continetur: vocaturq́ linea huiusmodi corda: portio verò circuli, arcus.

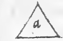
Area in circulo, & in alijs figuris, appellatur superficies, quæ intra lineam, aut lineas comprehenditur.

Rotunda figura irregularis curua linea vna continetur, sed in ea nō est punctus, à quo lineæ ad circumferentiam ductæ, pares sint: vt oui figura, aut lentis.

Rectilineæ figuræ, sunt quæ sub rectis lineis continentur: cuius infinitæ sunt formæ, & à numero laterum

rum, atq; angulorum nomē accipiūt.

Prima eſt triangulum, quod tribus lateribus continetur, & totidem angulis.



Aequilaterū, quod tribus conſtat æquis lateribus: Iſoſceles, quod duo tantū habet æqualia latera: Scalenū, cuius omnia latera inæqualia ſunt.

Eſt & altera trianguli diuiſio ex angulis deſumpta, in Orthogonium, quod rectum vnum habet angulum: Ambligonium, quod obtuſum vnum habet, & acutos duos: Oxigonium, cuius omnes acuti ſunt anguli.

Figurarum quadrilaterarū quadratum, eſt quod æquilaterum & rectangulum eſt, vt d.

Altera parte longius, quod rectāgulum quidem eſt, ſed non æquilaterum, vt e.

Rombus, qui æquilaterus, sed rectangulus non est, vt f.

Romboides, qui neq; æquilaterus, neq; rectangulus est: habet tamen opposita latera æqualia, & pares angulos, vt g.

Aliæ ab his, quæ quatuor continentur lateribus, trapezia dicuntur.

Figura quinq; lateribus cõstans, pentagona est, vt i.

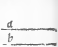
Quæ sex habet latera, hexagona, vt d. Sicq; in immensum excrescunt.

Figura solida, est quæ aut extremitate vna clauditur, aut pluribus: cuius formæ sunt permultæ, quas persequi non est nostri instituti.

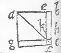
Basis in omnibus figuris rectilineis appellatur linea, quæ subijci ac substerni cæteris intelligitur: reliquæ latera vocantur.

Para-

Paralellæ lineæ, ſunt rectæ lineæ, quæ in eadem ſuperficie deſcriptæ, etiam ſi vtrauis ex parte in infinitum producantur, nunquam concurrent.



In ſpacio paralellogramo, ea, quæ diameter ſecat per medium paralellograma, circa eandem diametrum conſiſtere dicuntur. Eorum verò, quæ circa eandem diametrum conſiſtunt, vnumquodq; cum duobus ſupplementis gnomon appellatur, vt in propoſita figura a b c d quadratum a g e K, *& paruulum quadratum* K *f h d, quæ diameter a d per medium ſecat, circa eandem diametrum dicuntur conſiſtere. Reliqua g* K, *c f, & c* K. *b h ſupplementa vocantur: vnũquodq; autem quadratũ cũ duobus his ſupplementis dicitur gnomon.*



Axiomata, seu dignitates.

1 *QVæ vni & eidem sunt æqualia, & sibi inuicem sunt æqualia.*

2 *Si æqualibus æqualia addantur, vel idem commune, quæ procreantur sunt æqualia.*

3 *Si ab æqualibus auferãtur æqualia, quæ relinquũtur erunt æqualia.*

4 *Si inæqualibus inæqualia adijciantur, omnia erunt inæqualia.*

5 *Si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua inæqualia erunt.*

6 *Quæ eiusdem sunt duplicia, aut æquè multiplicia, æqualia esse sibi inuicem est necesse.*

7 *Quæ eiusdem sunt dimidiũ, æqualia sunt ad inuicem.*

8 *Quæ sibimet cõueniunt, sunt quoq; æqualia*

Omne

Omne totum maius est sua parte, & omnibus partibus simul sumptis æquale. 9

Postulata.

A *Quouis puncto in datum quodcunq; punctum rectam lineam ducere.* 1

Rectam lineam definitam in continuum rectumq; producere. 2

Super centrum quoduis, occupato quantolibet interuallo, circulum describere. 3

Omnes rectos angulos ad inuicem esse æquales. 4

Si linea recta super duas rectas ceciderit, & anguli ex eadem parte duobus angulis rectis minores fuerint, duas illas in eandem partẽ protractas, coniunctum iri. 5

6 *Rectam lineam, vel obliquam à dato puncto, quod intra figuram est, ad extremũ quodcunq; punctum in eodem plano signatum eductã, ipsius figuræ latera intersecare.*

8 *Duas rectas lineas superficiẽ nullam claudere.*

Sunt & alia tam postulata, quàm axiomata his similia penè infinita, quæ longum esset percensere.

THEOREMA
primum.

Triangulum æquilaterum, supra datam rectam lineam collocare.

Sit recta linea a b, pede uno circini in a collocato, & altero usq; ad b extẽso, circulũ describã per tertiam petitionem, c d b: Rursus, seruata eadem circini extensione, super punctum b alterum describam circulum priori æqualem, qui se in duobus

bus punctis intersecabunt c, & h. Ab intersectione altera, ut c, ad puncta lineæ a b, rectas duas lineas ducam per primam petitionem: eritq; factum triangulum æquilaterum, a c b. Nam quia à centro a, circuli c d b ductæ sunt lineæ a b, & a c ad eius circumferentiam, erunt æquales per circuli diffinitionem. Eadem quoq; ratione lineæ b a, & b c pares erunt, ducuntur enim à centro circuli a c e ad eius circumferentiam. Iam cùm lineæ a c, & b c æquales sint lineæ a b, ipsæ quoq; erunt æquales per primum axioma. Ita relinquitur, latera omnia trianguli a c b esse æqualia, ac proinde factum esse triangulum æquilaterum, quod fuerat demonstrandum.

Explicatio.

Demonstratio probat, triangulum a c b æquilaterum esse tribus rationibus.

Prima concludit, lineas a c, & a b esse pares, in hunc modum.

Omnes lineæ ductæ à centro ad circumferentiã pares sunt. Ex diffinitione circuli.

Lineæ a c, & a b ducuntur à centro ad circumferentiam, Hypothesis.

Ergo lineæ a c, & a b sunt pares.

Secunda

Secunda colligit, lineas a b & b c pares esse, argumento simili, & ex eodem principio ducto.

Tertia concludit, lineas a c & b c pares esse, in hunc modum.

Ex. I. axiomate. Quæ sunt eidem æqualia, sunt ad inuicẽ æqualia.

Ex præcedentibus. Lineæ *a c* & *b c* sunt æquales lineæ *a b*,

Ergo sunt ad inuicem æquales. Ex quibus sequitur in proposito triãgulo latera omnia esse æqualia.

Theorema secundum.

A Dato puncto, cuius rectæ lineæ propositæ æquam rectam lineam ducere.

Sit *a* punctus datus, & *b c* linea proposita, cui à puncto *a* ducenda sit æqualis. *a* punctum cõiungam cum altero extremo lineæ *b c*, nempe *c* per lineam *a c*, super quam constituam triangulum æquilaterum per præcedentem *a c d*. Iam pede circini in extremo *c* collocato, & altero secundũ quãtitatem *b c* lineæ expanso, describam circulum *e b* per tertium postulatum, & latus trianguli æquilateri *d c* protraham usq; ad *e*, ut sit linea tota *d c e*: secundum cuius quantitatem describã circulum *e f*, & latus *d a* trianguli protraham usq; ad *f*. Erit itaq;

itaq; linea a f, lineæ b c æqualis. Nam b c & c e æquales sunt, cùm ex eodem centro ducantur. Rursus d f & d e sunt itidem pares propter eandem causam. Ab his auferamus d a & d c latera æqualia trianguli, quæ supererunt lineæ c e & a f erunt æquales per tertiũ axioma. Quòd si lineæ c e æqualis est a f, & eidem æqualis b c, b c igitur & a f pares erunt per primum axioma.

Explicatio.

Demonstratio probat in proposita figura lineam a f, quæ ducta est à dato puncto a, propositæ lineæ b c æqualem esse quatuor rationibus.

Prima ostendit, lineas b c & c e æquales esse, in hunc modum.

Omnes lineæ ductæ à centro ad circumferentiam pares sunt, — Ex diffinitione circuli.

Lineæ b c & c e ducuntur à centro ad circũferentiam, — Hypothesis.

Ergo sunt æquales.

Secunda ostendit, d f & d e pares esse simili prorsus argumento, quia ducuntur à centro circuli e f ad circumferentiam.

Tertia demonstrat, lineas e c & a f pares esse.

Si ab

Ex.3. axiomate. *Si ab æqualibus auferantur æqualia, æqualia relinquentur,*

Ex præcedentibus. *Lineæ d f, & d e sunt pares.*

Ergo sublatis partibus æqualibus c d, & a d, quæ supererunt lineæ c e, & a f erunt æquales.

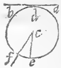
Postrema demonstrat, a f æqualem esse b c.

Ex.1. axiomate. *Quæ eidem sunt æqualia, sunt sibi inuicē æqualia,*

Linea b c æqualis est lineæ c e, & eidē æqualis est a f,

Ergo lineæ a f & b c sunt æquales, quod fuerat demonstrandum.

Theorema tertium.



Duabus datis rectis lineis inæqualibus, à maiori minori æqualem rectā lineam abscindere.

Sint lineæ duæ a b, & c d, & à maiori c d, sit minori æqualis abscindenda. A puncto c duco æqualem a b, ut præcedens docuit: sitq; c e. Ac centro c, interuallo autem c e, describam circulum, lineam c d intersecantem in puncto f. Linea c f æqualis est lineæ c e, & eidem æqualis erat a b: erunt igitur a b, & c f pares per primam communem sentētiam. Ita à maiori linea c d, abscissa est minori a b æqualis scilicet c f.

Explicatio

Explicatio.

Demonstratio probat lineam c f, quæ à maiori e d abscinditur, æqualem esse lineæ a b, duabus rationibus.

Prima ostendit, lineā c f æqualem esse lineæ c e, in hunc modum.

Lineæ ductæ à centro circuli ad circumferentiā sunt pares, Ex diffinitione circuli.

Lineæ c f, & c e ducuntur à centro circuli ad circumferentiam, Hypothesis.

Sunt igitur pares.

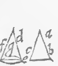
Secunda concludit, lineam e f æqualem esse lineæ a b, quod fuerat demonstrandum.

Quæ eidem sunt æqualia, sunt ad inuicē æqualia, Ex 1. axiomate.

Linea a b est æqualis lineæ c e, & eidem c e æqualis est linea e f,

Ergo e f & a b erunt æquales. Ex præcedentibus.

Theorema quartum.



Quorūcunq duorū triangulorū duo latera vnius, duobus lateribus alterius fuerint æqualia, & anguli his æquis lateribus contēti æquales, erit

basis

basis basi, & reliqui anguli unius, reliquis angulis alterius æquales, & deniq; totus triangulus toti triangulo æqualis.

Sint duo triangula a b c, d e f, sitq; latus a b æquale lateri d e, & latus a c æquale lateri d f, & angulus a æqualis angulo d. Dico basim b c æqualem esse basi e f, & angulum b angulo e, angulum c angulo f, & totam trianguli a b c superficiem superficiei triãguli d e f æqualem. Superponatur & accommodetur triangulum a b c triangulo d e f, ut angulus a cadat super d angulum, latus a b super d e, & a c super d f. Certè ista omnia cõgruent sibimetipsis, & neq; angulus angulum excedet, nec latera unius trianguli, latera alterius, per octauum axioma. Rursus cùm latus a b conueniat cum latere d e, & a c cum latere d f, punctũ b congruet puncto e, & c puncto f: quare basis b c congruet basi e f, & erit ipsi æqualis. Alioqui si extremis punctis linearum cõgruentibus, lineæ non congruerent, una extra alteram caderet, & clauderent superficiem, quod repugnat ultimo postulato. Quòd si lineæ omnes trianguli unius pares sunt lineis alterius, & anguli angulis, totum triangulum toti erit æquale.

Explicatio.

Ex octauo axiomate. Demonstratio uim accipit ex penultimo axiomate, &

mate & unica ferè ratione, quod demonstrandum est, concludit ad hunc modum.

Quæ sibi inuicē congruunt, sunt æqualia.

Sed si triangulum a b c, triangulo c d f, superponatur & accõmodetur anguli angulis cõgruūt, & lineæ lineis. Ex. 8. axiomate hypotheses.

Ergo & anguli pares sunt angulis, & lineæ lineis, & totus triangulus toti triangulo est æqualis.

Theorema. quintum.

Isoscelis trianguli qui sunt ad basim anguli, pares sunt. Quòd si eius duo latera rectè protrahãtur, fient quoque sub basi duo anguli inuicem æquales. quo vsus est Aristoteles. 24. cap. prmi Priorum.

Sit triangulus a b c, cuius latus a b, sit æquale lateri a c: dico angulum a b c, æqualem esse angulo a c b. Quòd si protrahantur a b, & a c, usq; ad d, & e, fiet angulus d b c, æqualis angulo e c b. Protractis a, b, & a, c, constituam lineam a, d, æqualem lineæ a e, per tertium Theorema: & educam lineas e b, & c, d. His ita constitutis intelligo primū duos triangulos a, b, e, & a, c, d, qui æquales sunt & æqui anguli. Nam prioris latera a b, & a, e, æqualia sunt duobus lateribus alterius a, c: et a d, angulus a, cõmunis utriq;: ergo per præcedentem, basis b e, æqualis erit basi c d, & angulus e, æqualis angulo d, & angulus a b e, æqualis angulo a c d. Item alios duos triangulos intelligo d b c, & e c b: qui ostenduntur esse æqui lateri, & æqui anguli. Nam latera b, d & c d, trianguli b, d, c, sunt æqualia duobus lateribus e c, & e, b, trianguli e b c: & angulus d, angulo e: ergo per præcedentem, basis basi, & reliqui anguli reliquis angulis. Quare angulus d, b, c, est æqualis angulo e c b, quod secundo loco fuerat demonstrãdum. Illi enim sunt sub basi Isoscelis positi. Iam totus angulus a b e, est æqualis a c d: si ergo à toto auferamus æquales angulos e c b, & d b c, qui supererũt a b c, & a c b, erunt æquales per tertiũ axioma, qui sunt anguli ad basim Isoscelis positi, quod primo loco fuerat demonstrandum.

Explicatio.

Demonstratio sumptis hypothesibus, & constituta figura, demonstrat in primis triangulos a b e, & a c d esse æquiangulos & æquales in hũc modũ.

Ex quarto. Omnium triangulorum, quorũ duo latera unius fuerint æqualia duobus lateribus alterius, & anguli æquilateribus contenti æquales, erit basis basi, & deniq; totus triangulus toti æqualis.

Ex hypothe. Sed in propositis ita res sese habet.

Ergo totum triangulum toti par erit, & angulus a b e, æqualis angulo a c d.

Secunda ratio ostendit partem posteriorem angulos, qui sunt sub basi d b c, & e c b, pares esse.

Omnium

Omnium triangulorum, quorũ duo latera unius fuerint æqualia duobus lateribus alterius. &c. sed in propositis triangulis, latera d b, & d c, trianguli d b c, æqualia sunt lateribus alterius e c, & e b: & anguli d c æquales.

Ergo anguli, qui sunt sub basi Isoscelis e c b, & d b c, erunt æquales.

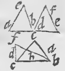
Tertia ratio concludit priorem partem, angulos a b c, & a c b, qui sunt ad basim Isoscelis pares esse.

Si ab æqualibus auferantur æqualia, quæ relinquuntur sunt æqualia. Ex. 3. axiomate.

Sed totus angulus e b a æqualis erat toti angulo d c a, & a b his ablati sunt æquales anguli d b c, & e c b, qui sunt sub basi. Ex præcedentibus.

Ergo qui relinquuntur anguli a b c, & a c b, erunt æquales, quod fuerat demonstrandum.

Theorema sextum. 8. primi.



Omnium triangulorum, quorum duo latera vnius fuerint æqualia duobus lateribus alterius, & basis basi æqualis, qui continentur æquis lateribus, anguli erunt æquales.

Sint duo trianguli a b c, d e f, sitq́; latus a c *æquale lateri d f, & b c, æquale e f, & a b basis, æqualis basi d e. Dico angulum c parem esse angulo f, angulũ a, angulo d, & b, e. Nam si triangulus unus alteri superponatur & accommodetur, certè oportebit latera lateribus congruere, & basim basi, per octauum axioma. Et punctus f cadet super c, alioqui lineæ non essent pares, ut ex altera constat figura, cadet quoque d super a, & e super b. Ita anguli omnes unius erunt pares angulis alterius, quod fuerat demonstrandum.*

Explicatio.

Demonstratio unica hac ratione concludit propositum, angulos æquis lateribus contentos pares esse f, c: d, a, e, b.

Ex.8. axiomate. *Quæ sunt æqualia, sibi inuicem congruunt, sed latera unius trianguli æqualia sunt lateribus alterius, & basis basi.*

Ex hypothe. *Ergo si alter alteri accommodetur, & latera congruent, & anguli angulis. Quare necesse est angulos esse pares.*

Theorema septimum. 9. primi.

Datũ angulum per æqualia secare.

Sit datus angulus, quẽm oportet diuidere a b c, lineæ ipsum continentes, fiant æquales, sint a b c, & a c. Et trahatur linea b c: super quam constituatur

triangulus

triangulus, siue æquilaterus, siue æquicrurus b d c, punctiq; a d linea recta iungantur a d. Dico illam diuidere angulum a in duo æqualia. Sunt enim duo trianguli, b a d, & c a d: quorum latera unius sunt æqualia lateribus alterius, scilicet b a, & a d, & c a & a d: & basis b d, basi b c. Quare per præcedentem anguli æquis lateribus contenti b a d, & c a d, pares erunt. Ita constat totum angulum b a c diuisum esse in duo æqualia.

Explicatio.

Concludit demonstratio angulum b a c, per lineã a d, diuisum esse in duo æqualia unica ratione.

Quorum triangulorũ latera unius æqualia sunt lateribus alterius, & basis basi, Anguli æquis lateribus contenti sunt æquales, Ex. 6. axiomate.

Sed duo latera b a, & d a, trianguli b d a, æqualia sunt duobus lateribus alterius c a, & d a, & basis b d, basi d c, Ex hypothesibus.

Ergo anguli b a d, & c a d, æquis lateribus contenti, pares erunt. Quare totus angulus b a c, diuisus est in partes æquas.

Theorema octauum. 10. primi.

Datam rectam lineam, per æqualia diuidere.

Sit linea diuidenda per æqualia a b, super ipsam *constituam triangulum æquilaterum a b c, & angulum c diuidam in partes æquas per præcedentē, ducta linea c d.*

Dico lineam c d, diuidere lineam a b per æqualia. Sunt enim duo trianguli a c d, & b c d, & latera prioris a c, & d c, sunt æqualia lateribus alterius b c, & d c, & angulus e unius, par angulo c, alterius. Erit igitur per quartam basis a d, æqualis basi d b, quod demonstrandum erat.

Explicatio.

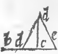
Demonstratio unica ratione propositum concludit, lineam a b, à linea c d, in partes æquas esse diuisam.

Ex quarto. *Quorum triangulorum latera sunt æqualia, & anguli æquis lateribus contenti pares, basis basi est æqualis.*

Ex hypothesi. *Sed duorum triangulorum a c d, & b c d, latera sunt æqualia, & angulus e par angulo c.*

Ergo basis a d, æqualis basi d b. Linea igitur a b in partes æquas est diuisa.

Theorema nonum. II. primi.



Data recta linea, à signo in ea signato, rectam lineam ad rectos angulos excitare.

Sit

Sit data linea a b, signetur in ea punctus c, à quo sit educenda perpendicularis. per. 3. constituam lineam b c æqualem lineæ a c: & super totam a b, cõstituo triangulum æquilaterum a b d, ac tandẽ extraho ex puncto c, lineam c d, hanc dico esse perpẽdicularem ad lineam a b. Sunt enim duo trianguli a c d, & b c d: & quia duo latera a c, & c d unius, sunt æqualia lateribus c b, & c d alterius, & basis a d, basi b d, erit per. 8. angulus a c d, æqualis angulo b c d. Quare uterq; eorum erit rectus. Cùm enim recta linea super rectã consistens angulos utraq; parte æquales fecerit, uterq; æqualium angulorum rectus est, & linea, quæ super altera cõsistit, est perpendicularis. Quare linea c d, ad lineam a b erit perpendicularis.

Explicatio.

Demonstratio colligit lineam c d, esse perpendicularẽ, & angulos a c d, & b c d, esse rectos, duabus rationibus. Prima concludit præfatos angulos esse pares.

Quorum triangulorum latera sunt æqualia, & basis basi æqualis, anguli æquis lateribus contenti sunt æquales. Ex. 8. pro.

Sed latera a c, & c d sunt æqualia lateribus c b & c d, & basis a d, basi b d. Sunt hypothe.

Ergo anguli a c d, & b c d, erunt æquales: nam continentur æquis lateribus.

Secunda concludit prædictos angulos esse re-

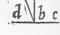
ctos, & lineam c d esse perpendicularem, in hunc modum.

Cùm recta linea super recta consistens utrobiq; angulos æquales fecerit, uterq; illorum angulorum est rectus, & linea, quæ super altera cadit est perpendicularis.

Ex præcedentibus.

At linea c d, efficit æquales angulos. Ergo & perpēdicularis est, & anguli, quos cōstituit, sunt recti.

Theorema decimum. 13. primi.



Cùm recta linea super rectā consistens, angulos fecerit, aut duos rectos, aut duobus rectis, pares efficiet:

Super rectam c d, cadat linea a b, quæ si fuerit perpendicularis, faciet duos angulos rectos per cōuersionem diffinitionis lineæ perpendicularis. Si autem non sit perpendicularis, ducatur à puncto b perpendicularis, per. 11. b e, eruntq; duo anguli e b c, & e b d recti per eandem conuersionem. Iam cùm duo anguli d b a, & a b e sint pares angulo d b e, ipsi cum angulo c b e, erunt æquales duobus rectis. Quare tres anguli d b a, a b e, & c b e pares sunt duobus rectis.

Sed angulus c b a, est æqualis duobus angulis c b e, e b a, ergo duo anguli c b a, & a b d, sunt æquales duobus rectis. Hinc fit totum spacium, quod circunstat punctum quod uis in superficie plana,

plana, quatuor rectis angulis esse æquale.

Explicatio.

Demõstrationis prior pars explicatione nõ eget. *Altera eius pars concludit angulos c b a, & d b a, esse pares duobus rectis his rationibus. Prima colligit, ducta linea perpendiculari b e, angulos c b e, & e b d esse rectos.*

Cùm recta super rectam consistens, angulos fecerit adinuicem æquales, uterq; illorum angulorũ est rectus. Ex diffinitione recti angu.

Sed anguli propositi fiunt à linea b e ad perpẽdiculum ducta. Hypothe.

Igitur sunt anguli recti.

Altera colligit angulos rectos c b e, e b d pares esse angulis tribus e b a, a b d, e b c in hunc modũ.

Si æqualibus addantur æqualia, aut idem commune, quæ reliquuntur sunt æqualia, Ex. 2. axiomate.

Sed anguli duo e b a, a b d, æquales sunt angulo e b d: nam partes æquales sunt toti, Ex. 9. axiomate.

Ergo si utrisq; addamus angulum communem c b e, duo anguli c b e, e b d, pares erunt tribus angulis e b a, a b d, e b c.

Tertia ostẽdit angulos c b a, a b d, æquales esse angulis c b e, e b a, a b d, æquales esse simili argumento.

Si æqualibus addantur æqualia, aut idem cõmune, quæ relinquuntur sunt æqualia, Ex 2. axiomate.

Sed angulus c b a æqualis est angulis c b e, e b a, Ex. 9. axiomate.

 totum

totum enim æquale eſt partibus.

Igitur ſi utriſq; addamus communem angulum a b d, anguli c b a, a b d æquales erunt tribus angulis c b e, e b a, a b d.

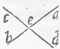
Quarta colligit quod demõſtrandum erat, angulos c b a, a b d, eſſe pares duobus rectis.

Ex ratio. *Quæ eidem ſunt æqualia, ſunt inter ſe æqualia.*

Ex præcedentibus. *Sed anguli c b a, a b d, ſunt pares tribus c b e, e b a, a b d, & eiſdem tribus æquales ſunt anguli c b e, e b d.*

Ergo anguli c b a, a b d, pares erunt angulis c b e, e b d. Quare cùm hi recti ſint, pares illi erũt duobus rectis.

Theorema vndecimũ. 15. primi.



Omnium duarum linearum ſe inuicem ſecantium, omnes anguli cõtra ſe poſiti ſunt æquales.

Sint duæ lineæ a b, & c d, ſe inuicem ſecantes in puncto e, angulus d e b par erit angulo a e c, & angulus c e b angulo a e d. Erunt enim per. 13. duo anguli a e c, & c e b æquales duobus rectis. Itemq; anguli c e b, & d e b erunt per eandem pares duobus rectis. Quare cùm omnes anguli recti ſint æquales, priores poſterioribus pares erunt. Si igitur auferamus

ramus communem angulum c e b, erit angulus a e c æqualis angulo d e b. Eodem modo reliqui oppositi ostendentur æquales.

Explicatio.

Demonstratio cõcludit angulos d e b, & a e c, oppositos esse pares duabus rationibus. Prima colligit angulos a e c, & c e b, itemq; angulos c e b, & d e b, esse pares duobus rectis, ac proinde inter se æquales ad hunc modum.

Recta linea super rectam consistẽs, angulos efficit rectos, aut pares, duobus rectis, sed priores sunt ex linea e c, super rectam a b cadente, posteriores ex linea e b, super rectam d c, Ex 13. Hypothe.

Ergo utriq; pares erunt duobus rectis, unde fit ut sint priores posterioribus æquales, nam per postulatum. 4. omnes recti sunt æquales.

Secunda concludit quod propositũ est, hoc pacto: si ab æqualibus auferantur æqualia, uel idem commune, quæ relinquuntur sunt æqualia. Ex. 3. axiomate.

Sed anguli a e c, & c e b, pares sunt angulis c e b, & d e b, Ex præcedenti.

Ergo si ab ijs auferamus communem angulũ c e b, qui relinquũtur erunt æquales, a e c, & d e b. Simili argumento ostendentur æquales c e b, a e d, oppositi.

Theorema duodecimum.

16. primi.

Omnis

Omnis trianguli vno latere producto, exterior angulus vtrouis interiori & opposito maior est.

Protrahatur triãguli a b c latus usq; ad d, angulus d b c, maior est angulo b a c, & b c a. Diuidam enim per 10. lineam c b, per æqualia in puncto e: & protraham a e, usq; ad f, ut sit e f, æqualis a e. Protraham quoq; lineam b f, intelliguntur duo triangula, c e a, & b e f. & quia duo latera a e, & e c, trianguli a e c sunt æqualia duobus lateribus f e, & e b, trianguli f e b, & angulus e, unius æqualis est angulo e alterius per præmissam, sunt enim anguli oppositi, erit per. 4. angulus e c a, æqualis angulo e b f, unde fit, angulum e b d, maiorem esse angulo b c a. Simili argumento probabitur idem angulus e b d, maior esse c a b,

Explicatio.

Demonstratio ostẽdit angulũ d b c, maiorẽ esse angulo b c a, hac sola ratione: Quorũcunq; triangulorum duo latera unius sunt æqualia duobus lateribus alterius, & anguli his æquis lateribus contẽti æquales, erit basis basi æqualis, & totus triãgulus toti triãgulo æqualis. Sed latera a e, & e c, trianguli a e c, sunt æqualia duobus lateribus f e, & e b, trianguli f e b, & angulus e, unius æqualis angulo e alterius, cum sint contra se positi. Er-

Ex. 4. Pro. Hyco theo.

Ex præcedente.

go angulus e c a, æqualis erit angulo e b f. Quare cùm angulus c b d, maior sit angulo e b f, est enim is pars illius, maior quoq; erit angulo e c a, quod demonstrandum fuerat.

Theorema decimumtertium 18. primi.

Omnis trianguli longius latus, maiori angulo appositum est.

Sit in triãgulo a b c, angulus a, maior angulo c, latus c b, maius erit latere a b. Si enim sit æquale, erit per 5. angulus a, æqualis angulo c, quod est contra hypothesim. Si autem a b, sit maius fiat æquale per, 3. sitq; d b, æquale c b. Erit ergo per. 5. angulus d c b, æqualis angulo b d c. Sed b d c est maior angulo b a c, per. 16. ergo b c d est maior b a c, Quare erit etiam maior angulo a c b. Fiet itaq; ut pars sit maior toto. quod cum fieri nequeat, sequitur uerum esse quod fuerat demonstrandum.

Explicatio.

Demonstratio concludit, cùm sit angulus a maior angulo c, latus b c, maius esse latere a b. Hoc argumento.

Aut est æquale, aut minus. Sed nec æquale, nec minus: igitur maius erit, non esse æquale ostenditur adhunc modum.

Angu

Ex.5. Anguli,qui sunt super basim isoscelis,sunt æquales.

Sed a, & c, sunt anguli, supra basim isoscelis positi.

Igitur erunt æquales.

Non esse autem latus a b maius latere c b,his rationibus colligit. Prima concludit angulum d c b, æqualem esse angulo b d c, eodem modo quo & præcedens.

Secunda concludit angulum b d c, maiorem esse angulo b a c, ad hunc modum,

Ex. 16. Omnis triãguli angulus externus maior est utrouis interno opposito,

Sed b d c, est externus angulus trianguli d a c,

Ergo angulus b d c, est maior angulo opposito b a c.

Tertia colligit inco dum & impossibile, partem maiorem esse toto.

Axioma. Quod est maius maiore,maius est minore.

Ex præ. Sed angulus b d e,est maior angulo b a c, angulo autem b d e par est angulus b c d.

Igitur angulus b c d maior erit angulo b a c: at angulus b a c maior esse ponebatur angulo b c a: fiet igitur,ut angulus b c d maior sit angulo b c a, cuius est pars,quod est impossibile.

Theorema decimumquartum 19. primi.

Omnis

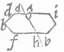
Omnis trianguli maior angulus maiori lateri oppositus est.

Sit triangulum a b c, cuius angulus a sit maior angulo c, latus a c maius erit latere a b. Nam si non sit maius, aut æquale erit, aut minus: at neutrum esse potest. Primum æquale non erit, fieret enim ut anguli a c essent æquales, cùm sint ad basim Isoscelis, per quintam. Quod est contra hypothesim. Minus quoq; esse non potest, esset enim angulus c minor angulo a, per præcedentem. Quare relinquitur, latus b c maius esse latero a b.

Demonstratio facilior est, quàm ut explicatione egeat.

Theorema decimumquintum, 27. primi.

Si recta linea super duas rectas ceciderit, duosq́; angulos sibi inuicē æquales fecerit, rectæ illæ lineæ erūt æquidistantes.

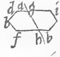


Linea a b cadat super duas lineas c d, & e f, & secet lineam c d in puncto g, & lineam e f, in puncto h, sintq́; anguli d g h, & e h g

& e h g æquales, dico lineas c d, & e f, esse æquidistantes. Nam si non sint, concurrant ergo ad d f, in puncto l, fiet triangulum l g h, cuius g est angulus externus, qui cùm positus sit æqualis esse angulo h coalterno, tam intrinseco, quàm extrinseco, accidit, ut exterior angulus trianguli par sit interno ullo sito, quod repugnat decimosexto Theorematis.

In hoc quoq; nulla desideratur explicatio.

Theorema decimumsextum, 29. primi.



Si duabus lineis æquidistantibus linea superuenerit, duo anguli coalterni æquales erunt, angulusq́; extrinsecus angulo intrinseco sibi opposito æqualis, itēq; duo anguli intrinseci ex alterutra parte constituti duobus rectis angulis æquales.

Explicatio.

Demonstratio multis partibus continetur. Prima concludit angulos g, & h coalternos, esse æquales argumento ducente ad incommodum.

Si angulus b g h non est æqualis angulo c h g, alter eorū erit maior. Sit ergo maior angulus c h g.

Cùm duo