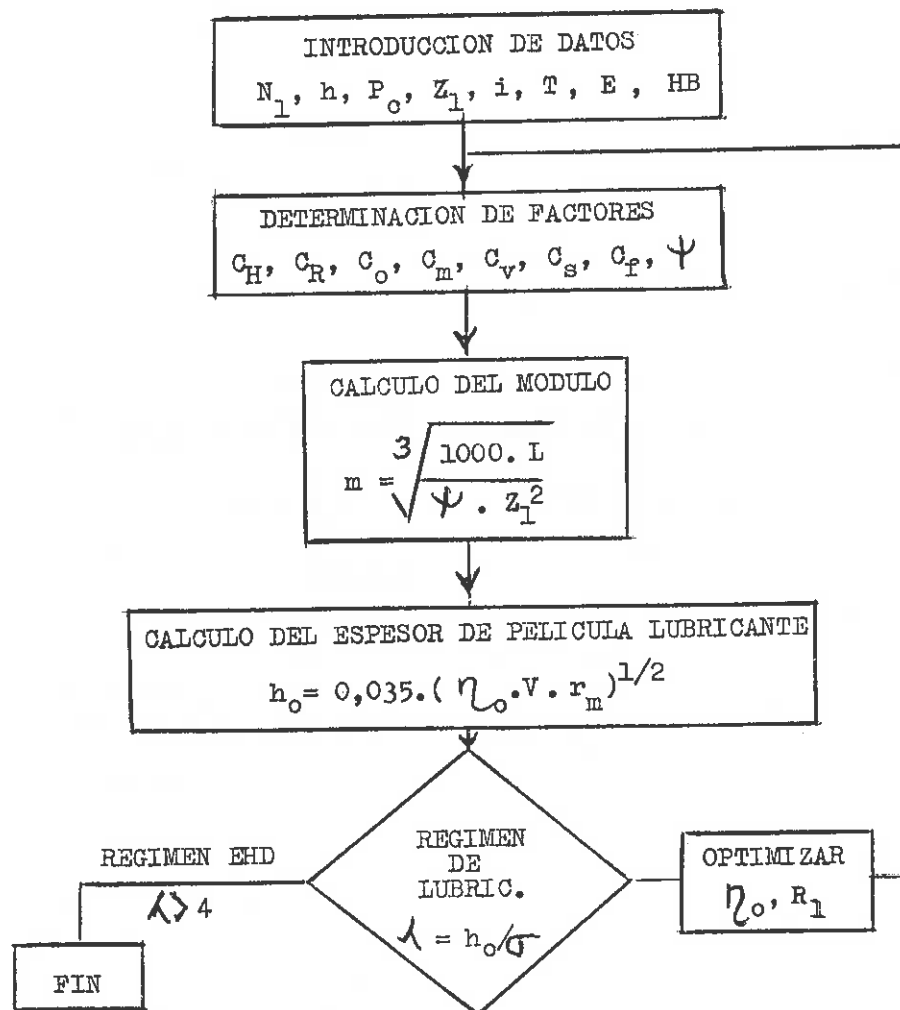


"La viscosidad del aceite η_o , de la velocidad media de fluencia, \bar{v} , y del radio medio de curvatura r_m .

Por otra parte, la definición y la medida de la temperatura de funcionamiento, sobre la que deberá estar basada la viscosidad η_o , son difíciles de determinar. En la teoría EHD, la temperatura del aceite que determina la viscosidad se confunde con la temperatura de las superficies metálicas inmediatamente antes del contacto. En el caso de los engranajes, la temperatura de los dientes es de una importancia primordial, ya que en la fórmula aproximada, de Dowson y Higginson, el espesor de la película se representaba como proporcional a la raíz cuadrada de la viscosidad, de suerte que si la viscosidad se reducía a la mitad, el espesor quedaría reducido aproximadamente en un 30%. El hecho de que para provocar esta reducción sea suficiente, en ciertas circunstancias, subraya la importancia del empleo de sistemas de refrigeración eficaces.

7. DISPOSICION ESQUEMATICA DEL PROGRAMA DE CALCULO



8. REFERENCIAS

1. Cameron, A. "Basic Lubrication Theory". Ellis Horwood, 1.975.
2. Deutschman, A.D. "Diseño de Máquinas. Teoría y practica". CECSA, 1.985.
3. Dudley, D.W. "Manual de Engranajes". CECSA, 1.973.
4. Henriot, G. "Traite Theorique et pratique des Engrenages". Dunod, 1.968.
5. Timoshenko, S. y Godier, J.N. "Teoría de la elasticidad". Urmo, 1.972.
6. Valverde, A. "Fundamentos y técnicas de la lubricación". Alción, 1.985.
7. Valverde, A. "Prevención del rayado de los dientes en el diseño de engranajes". III Congreso Nacional sobre la teoría de Máquinas y Mecanismos. Sevilla, 1.980.

"ANALISIS MODAL DE GOTAS CAUTIVAS"

A. GAÑAN y A. BARRERO

Departamento de Ingeniería Energética y Mecánica de Fluidos, E.T.S. Ingenieros Industriales, Universidad de Sevilla, 41012 - Sevilla.

Resumen: Se ha desarrollado un método analítico para determinar las frecuencias de vibración y las oscilaciones libres de pequeña amplitud de gotas cautivas bajo la influencia de campos gravitatorios y/o isorrotacionales.

El método proporciona los modos y frecuencias naturales correspondientes para cualesquiera valores del número de Bond o de Webber (definidos como la razón de las fuerzas gravitatorias o las del campo isorrotacional respecto a las de tensión superficial, respectivamente).

Los resultados teóricos obtenidos han sido comparados con experimentos realizados en ausencia de rotación, para gotas y puentes líquidos, encontrándose una buena concordancia.

Abstract: An analytical method to determine the small amplitude free oscillations of liquid captive drops or bubbles surrounded by a liquid or gas under the influence of gravitational and/or iso-rotational fields has been performed. The method yields the natural frequencies and the corresponding vibration modes for any values of the Bond and Webber numbers. Results for zero Webber number (without rotation) have been obtained. An experimental study to compare with the theoretical results has been also performed. Both are in good agreement.

1. INTRODUCCION. El estudio de las formas fluidas con superficie libre confinadas por tensión superficial, en sus aspectos tanto mecánicos como fisicoquímicos, es actualmente de sumo interés: ingeniería de materiales de alta tecnología (procesamiento en zona líquida); multitud de procesos industriales; innumerables procesos naturales (biológicos, fisiológicos, etc.) y de interés en medicina y farmacología

Por esta razón el comportamiento mecánico de estas formas fluidas está siendo extensamente investigadas desde finales del siglo pasado (Kelvin 1890), (Rayleigh 1894), (Lamb 1932).

En este trabajo se han estudiado las vibraciones libres de pequeña amplitud de gotas líquidas cautivas (puentes líquidos y gotas pendientes o apoyadas) o burbujas rodeadas por otro líquido o gas inmiscible bajo la influencia de campos gravitatorios y/o iso-rotacionales. Para resolver este problema se ha desarro-

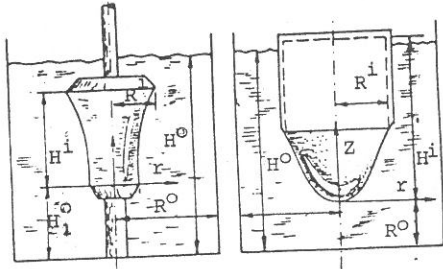
llado un método analítico que utiliza un conjunto ortogonal de autofunciones para desarrollar la perturbación de la interfase mediante una serie de infinitos términos; este conjunto ortogonal de funciones depende intrínsecamente de la forma que adopta la interfase en el equilibrio. Utilizando estas funciones ortogonales se realiza una transformación integral de las ecuaciones cuyo resultado conduce a un problema de autovalores algébrico.

Se han medido experimentalmente las frecuencias de vibración de gotas pendientes y se han comparado con las obtenidas utilizando el método descrito en este trabajo; el acuerdo entre ambos es sumamente bueno.

2. FORMULACION DEL PROBLEMA.

Considérense las oscilaciones de pequeña amplitud de una gota (o burbuja) cautiva rodeada de otro líquido o gas inmiscible con el

fluido interno bajo la influencia de un campo gravitacional o isorrotacional. (ver Fig. 1).



(Fig. 1)

En un sistema de referencia que gira con el fluido las ecuaciones linealizadas de Navier-Stokes que gobiernan el movimiento no viscoso de los dos fluidos (supuestos incompresibles) son:

$$\nabla \cdot \vec{v}^j = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}^j}{\partial t} = -\frac{1}{\rho^j} \nabla(p^j + Bz) + \frac{1}{2} \nabla(\vec{\Omega} \wedge \vec{x})^2 - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}^j \quad (2.2)$$

Las ecuaciones han sido adimensionalizadas usando una densidad de referencia $\Delta\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}^i - \tilde{\rho}^o)$, una longitud característica L (que puede ser $L=1 = |\sigma/g|\Delta\tilde{\rho}|^{1/2}$ para gotas pendientes o apoyadas ó $L = R_o$, radio de uno de los discos de apoyo, para puentes líquidos), y un tiempo característico $t_c = (|\Delta\tilde{\rho}|L^3/\sigma)^{1/2}$; σ , g y $\tilde{\rho}$ son los valores dimensionales de la tensión superficial, el campo gravitatorio y la densidad, respectivamente. Nótese que el número de Bond es $B = \pm 1$ para gotas, y $B = gR_o^2 \Delta\tilde{\rho}/\sigma$ para puentes. El superíndice $j = o, i$ se refiere al fluido exterior o interior respectivamente.

Las condiciones de contorno para las ecuaciones (2.1) y (2.2) son:

a) Velocidades normales del fluido nulas sobre las superficies sólidas.

b) Velocidades normales de ambos fluidos iguales en la interfase.

c) La interfase, de ecuación $f(\vec{x}, t) = F(\phi, z, t) - r = 0$, es una superficie fluida: $\partial f / \partial t + \vec{v} \cdot \nabla f = 0$

d) El salto de presiones en la interfase está equilibrado por la tensión superficial: $p^i - p^o = \nabla \cdot \vec{n}$ (\vec{n} normal exterior).

e) El volumen V de líquido debe permanecer constante.

3. RESOLUCION DEL PROBLEMA.

Considerando desarrollos de la solución dinámica en torno al equilibrio estático del sistema, suponiendo formas de equilibrio axil-simétricas y despreciando términos de orden superior se tiene:

- Interfase:

$$F(\phi, z, t) = F_e(z) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{n,m}(z) \exp[i(m\phi \pm \omega t)] \quad (3.1)$$

- Presiones dinámicas:

$$p^j(r, \phi, z, t) = p_e^j(r, z) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^j \eta_{n,m}^j(r, z) \exp[i(m\phi \pm \omega t)] \quad (3.2)$$

- Velocidades:

$$\begin{bmatrix} v_r^j(r, \phi, z, t) \\ v_\phi^j(r, \phi, z, t) \\ v_z^j(r, \phi, z, t) \end{bmatrix} = 0 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} u^j(r, z) \\ v^j(r, z) \\ w^j(r, z) \end{bmatrix}_{n,m} \exp[i(m\phi \pm \omega t)] \quad (3.3)$$

Introduciendo estos desarrollos en las ecuaciones (2.1)-(2.2) y condiciones c), d) y e), considerando los términos de 1^{er} orden, se obtienen las ecuaciones del problema dinámico. Sin embargo, se ha probado la conveniencia de definir una coordenada intrínseca s a lo largo del perfil de la interfase en su posición de equilibrio (Boucher y Evans, 1975). Considerando la deformación normal a la interfase $\delta_{n,m}(s)$ definida como:

$$\delta_{n,m}(s) = \eta_{n,m}[Z_e(s)] \sin \theta_e(s) \quad (3.4)$$

(ver Fig. 2), las ecuaciones que gobiernan el problema de la dinámica lineal son:

$$r^{-1}(r\phi^j)_r + (1-\lambda^2)\phi_{zz}^j - \frac{m^2}{r^2}\phi^j = 0 \quad (3.5)$$

$$\omega u^j = i(\phi_r^j \pm \lambda m\phi^j/r)/(1-\lambda^2) \quad (3.6)$$

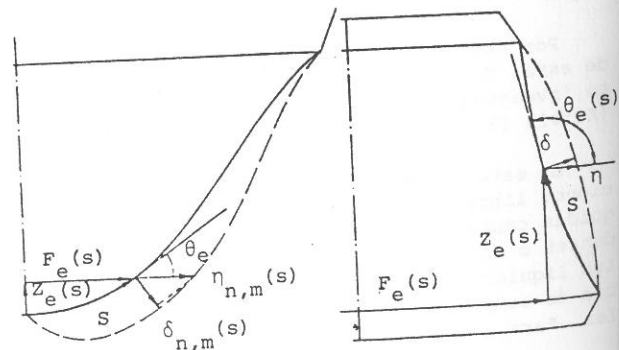
$$\omega v^j = -(\lambda\phi_r^j \pm m\phi^j/r)/(1-\lambda^2) \quad (3.7)$$

$$\omega w^j = i\phi_z^j \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{F_e(s)} \frac{d}{ds} (F_e \frac{d\delta}{ds}) + q(s, m)\delta = [\rho^o \phi^o - \rho^i \phi^i]_{r=F_e(s)} \quad (3.9)$$

$$\omega^2(1-\lambda^2)\delta = (\phi_r^j \pm m\lambda\phi^j/r)_{r=F_e(s)} \sin \theta_e(s) - (1-\lambda^2)\phi_z^j|_{r=F_e(s)} \cdot \cos \theta_e(s) \quad (3.10)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{S_0} \delta(s) F_e(s) \cos m\phi \, ds \, d\phi = 0 \quad (3.11)$$



(Fig. 2)

donde $\lambda = 2\Omega/\omega$,

$$q(s,m) = B \cos \theta_e + \left(\frac{d\theta_e}{ds}\right) + \frac{\sin^2 \theta_e}{F_e} + \Omega^2 F_e \sin \theta_e - \frac{m^2}{F_e^2}, \quad y$$

donde el subíndice e indica equilibrio estático. El problema matemático planteado se cierra añadiendo las condiciones de contorno para la interfase y para el campo de velocidades.

Para modelar matemáticamente las presiones dinámicas de los fluidos se ha recurrido al método clásico de los armónicos cilíndricos. (Funciones de Bessel y senoidales o exponenciales, según la naturaleza de la ecuación (3.5) y las condiciones de contorno a) y b)).

$$\rho^j \delta^j = P_o^j + \rho^j \sum_{k=1}^{\infty} A_k^j R^j(\lambda_k^j r) Z^j(\mu_k^j z) \quad (3.12)$$

donde P_o^j es nulo salvo en el caso axilsimétrico ($m=0$), y las funciones R^j y Z^j son las funciones de Bessel y las senoidales o exponenciales respectivamente.

Nótese que la ecuación (3.5) cambia de elíptica ($|\lambda| < 1$) a hiperbólica ($|\lambda| > 1$), ver Greenspan (1968) lo que obliga a utilizar desarrollos apropiados (Funciones R^j y Z^j) en los rangos $\lambda^2 \in (0,1)$ y $\lambda^2 \in (1,\infty)$; λ_k^j y μ_k^j están relacionadas por

$$\lambda_k^j = \mu_k^j |1 - \lambda^2|^{1/2} \quad (3.13)$$

Dada la linealidad de (3.9) pueden buscarse soluciones para $\delta(s)$ de la forma:

$$\delta(s) = (P_o^j - P_o^j) \delta_p + \sum_{q=1}^{\infty} C_q \delta_q^* \quad (3.14)$$

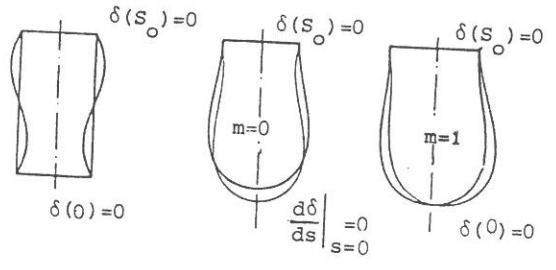
Por conveniencia las funciones $\delta_p(s)$ y $\delta_q^*(s)$ se escogen de modo que satisfagan la ecuación

$$\frac{1}{F_e(s)} \frac{d}{ds} \left(F_e \frac{d\delta_p}{ds} \right) + q(s,m) \delta_p = 1 \quad (3.15)$$

y la ecuación de Sturm-Liouville

$$\frac{1}{F_e(s)} \frac{d}{ds} \left(F_e \frac{d\delta_q^*}{ds} \right) + [q(s,m) - (1-l_q)] \delta_q^* = 0, \quad (3.16)$$

con las condiciones de contorno en $s=0$ y $s=s_o$ (Ver Fig. 3).



(Fig. 3)

Nótese que (3.16) define un conjunto infinito de autofunciones δ_q^* ortogonales en el intervalo $[0, s_o]$. Nótese también que (3.16) es la ecuación que debe satisfacer cada δ_q^* para que (3.14) sea solución de (3.9) si el 2º miembro de (3.9) se desarrolla en este espacio funcional.

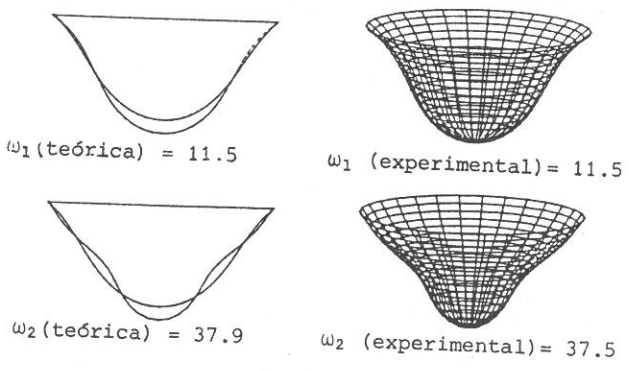
$$\rho^o \sum_{k=1}^{\infty} A_k^o R_k^o(s) Z_k^o(s) - \rho^i \sum_{k=1}^{\infty} A_k^i R_k^i(s) Z_k^i(s) = \sum_{q=1}^{\infty} (1-l_q) C_q \delta_q^*$$

Es de interés notar que para configuraciones de equilibrio cilíndricas o esféricas, las funciones δ_q^* son las funciones circulares o los armónicos esféricos respectivamente (Sanz 1985, (Strani y Sabetta, 1984).

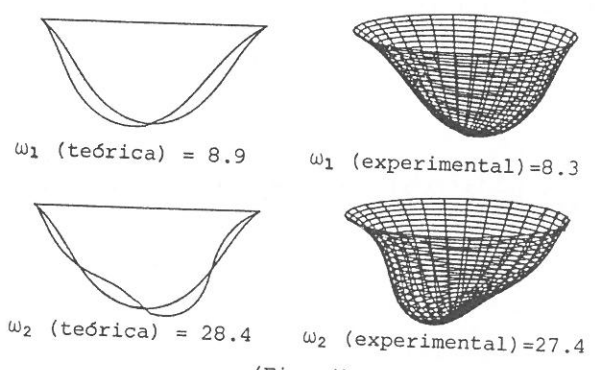
La resolución numérica del problema (3.9)-(3.11) se ha llevado a cabo mediante una transformación integral generalizada en el intervalo $(0, s_o)$ (Gañán y Barrero, 1987). El procedimiento consiste en multiplicar ambos miembros de las ecuaciones (3.9), (3.10) por $(F_e \delta_q^* ds)$ e integrar, (haciendo uso de la condición δ_q^* de ortogonalidad) entre 0 y s_o ; se llega así a un sistema algebraico homogéneo, no lineal en ω que puede resolverse por métodos clásicos para encontrar las frecuencias naturales $\omega_{n,m}$ y los modos de vibración correspondientes $\delta_{n,m}$.

En la Fig. 4 se representan gráficos obtenidos numéricamente de los dos primeros modos de vibración axilsimétricos ($m=0$) y transversales ($m=1$) de una gota pendiente.

MODOS AXILSIMETRICOS ($m=0$)



MODOS TRANSVERSALES ($m=1$)



(Fig. 4)

Los resultados dados en la Fig. 4 han sido obtenidos para una gota de agua colgando de un tubo de 5.02 mm. de diámetro y 50 mm. de profundidad. El volumen de la gota era de 167 mm³ y la tensión superficial agua-aire, a la temperatura a la que se hizo el experimento, era 0.0564 N m⁻¹.

4. APENDICE.

Se escribe aquí el sistema algébrico a que se llega efectuando la transformación integral de las ecuaciones

$$(1-l_q) C_q D_q + \omega_n^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\rho^i A_k^i E_k^i - \rho^o A_k^o E_k^o \right] = 0, \quad (q = 1 \dots \infty)$$

$$(\omega_n^2 - 4\Omega^2) \left[(p_o^o - p_o^i) G_q + C_q D_q \right] = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^j \left[\omega_n^2 H_{nk}^j + 2m\Omega \omega_n M_{nk}^j - (\omega_n^2 - 4\Omega^2) N_{nk}^j \right], \quad (j=o, i), \quad (q=1 \dots \infty),$$

$$\left[(p_o^o - p_o^i) \int_0^{s_o} \delta_p F_e ds + \sum_{q=1}^{\infty} C_q \int_0^{s_o} F_e \delta_q^* ds \right] \int_0^{2\pi} \cos m\phi d\phi = 0$$

donde

$$\int_0^{s_o} F_e(s) \delta_q^* ds = D_q$$

$$E_{kq}^j = \int_0^{s_o} R^j (\lambda_k^j F_e) Z^j (\mu_k^j z_e) F_e(s) \delta_q^*(s) ds$$

$$G_q = \int_0^{s_o} \delta_p(s) \delta_q^*(s) F_e(s) ds$$

$$H_{kq}^j = \int_0^{s_o} \left[\frac{d}{dr} R^j (\lambda_k^j r) \right]_{r=F_e} Z^j (\mu_k^j z_e) \frac{dz_e}{dr} F_e \delta_q^* ds$$

$$M_{kq}^j = \int_0^{s_o} R^j (\lambda_k^j F_e) Z^j (\mu_k^j z_e) \frac{dz_e}{ds} \delta_q^* ds$$

$$N_{kq}^j = \int_0^{s_o} \left[\frac{d}{dz} Z^j (\mu_k^j z) \right]_{z=z_e} R^j (\lambda_k^j F_e) \frac{dF_e}{ds} F_e \delta_q^* ds$$

5. REFERENCIAS.

BOUCHER, E.A. & EVANS, M.J.B. 1975. Pendant drop profiles and related capillary phenomena. Proc. R. Soc. Lond. A346, 349-374.

GAÑAN, A. y BARRERO, A. 1987. Free Oscillations of Liquid Captive Drops, enviado a J. of Fluid Mech.

GREENSPAN, H.P. 1980. Theory of Rotating Fluids. Cambridge University Press.

KELVIN, LORD 1890. Mathematical and Physical Papers, 3, p. 384. Clay.

LAMB, H. 1932. Hydrodynamics. Cambridge University Press.

RAYLEIGH, LORD 1894. The Theory of Sound. Macmillan.

STRANI, M. & SABETTA, F. 1984. Free vibrations of a drop in partial contact with a solid. J. Fluid Mech. 141, 233-247.

SANZ, A. 1985. The influence of the outer bath in the dynamics of axisymmetric liquid bridges. J. Fluid Mech. 156, 101-140.