



## **Productos de Blaschke**

**Iván Ruiz Campos**





## **Productos de Blaschke**

Iván Ruiz Campos

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Doble Grado en Física y Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Manuel Jesús Gago Vargas



A mis padres. Pese a no tener la formación suficiente como para entender lo escrito en este trabajo, se han esforzado toda su vida para que yo sí sea capaz de hacerlo.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. Conceptos fundamentales.</b>	<b>11</b>
1.1. Propiedades de los productos de Blaschke. . . . .	11
1.2. Extensión numérica. . . . .	17
1.2.1. Contracciones y 1-dilataciones. . . . .	26
1.3. Operador desplazamiento . . . . .	27
1.3.1. Compresión del operador Desplazamiento. . . . .	33
<b>2. Curvas de Poncelet y productos de Blaschke.</b>	<b>41</b>
2.1. Curvas de Poncelet. . . . .	41
2.2. La clase $S_n$ . . . . .	53
<b>3. n-Elipses de Blaschke.</b>	<b>57</b>
3.1. 3-elipses de Blaschke. . . . .	57
3.1.1. 3-Elipses de Blaschke y condiciones de Cayley . . . . .	60

## II PRODUCTOS DE BLASCHKE

3.2. 4-Curvas de Blaschke. . . . .	64
3.2.1. Curva generadora de la frontera. . . . .	64
3.2.2. 4-Elipses de Blaschke. . . . .	70
3.3. $n$ -Elipses convexas de Blaschke. . . . .	77
<b>4. (n,p)-Elipses de Blaschke.</b>	<b>83</b>
4.1. Automorfismos del disco elípticos. . . . .	83
4.2. Familia de $(n, p)$ -elipses. . . . .	85



# Resumen

En este trabajo, con objetivo de estudiar una serie de curvas, veremos la conexión entre distintas ramas de la matemática: los productos de Blaschke, el Teorema de Poncelet y la extensión numérica de un operador. Estos son conceptos que en un principio parecen alejados entre sí, pero como estudiaremos más adelante, están íntimamente ligados. A través de la extensión numérica de un operador, que surge de los productos de Blaschke, podremos construir lo que se conoce como curvas de Poncelet. Veremos también cuándo estas curvas son elipses y por tanto, verifican el teorema de Poncelet para cónicas.



# Abstract

This paper aims to study a series of curves, what will lead us to connect three different concepts from diverse areas of mathematics: Blaschke products, Poncelet's theorem and the numerical range of an operator. These are concepts that at first seem not to be connected at all, but, as we will study later, are closely related. Through the numerical range of an operator, which comes from Blaschke products, we will construct what is known as Poncelet curves. We will also review when these curves are ellipses and therefore verify Poncelet's theorem for conics.



# Introducción

En el transcurso de este trabajo, vamos a tratar con conceptos de distintas ramas de las matemáticas. Vamos a ver desde geometría hasta teoría de operadores, pasando por análisis complejo. Cada una de estas ramas nos va a aportar una serie de resultados que al principio nos van a parecer alejados unos de otros, pero conforme vayamos avanzando, estos irán encajando hasta que finalmente completemos el marco general de la teoría que estudia determinadas curvas. Pese a que en nuestro camino hallaremos muchas respuestas, también plantearemos una serie de preguntas abiertas que indican la actividad de estas relaciones.

Utilizaremos como guía principal [6]. En esta se recogen todos los resultados que aquí se plasman. Aún así, no deja de ser una guía, por lo que en varios puntos nos alejaremos de esta e incorporaremos resultados y demostraciones propias.

Empecemos en primer lugar con la geometría. Consideremos dos cónicas  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{E}$  y un punto  $z_1 \in \mathcal{D}$ . Si trazamos pasando por  $z_1$  una recta tangente a  $\mathcal{E}$ , esta cortará a  $\mathcal{D}$  en otro punto  $z_2$ . Si repetimos este mismo proceso desde  $z_2$  obtenemos un  $z_3 \in \mathcal{D}$ . En este proceso iterativo pueden ocurrir dos cosas. La primera es que obtengamos una sucesión  $\{z_m\}_{m \geq 1} \subseteq \mathcal{D}$  con todos los elementos distintos. La segunda, y más interesante, es que para algún  $n \in \mathbb{N}$  se tenga que  $z_{n+1} = z_1$ . Si se da esta última propiedad, el teorema de Poncelet nos dice que realmente se cumple para cualquier punto en  $\mathcal{D}$  y con el mismo número  $n$  de iteraciones. Este último resultado puede ser reformulado de la siguiente manera.

**| Teorema 0.1 (Poncelet).** *Sean  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{E}$  dos cónicas. Si existe un polígono de  $n$  lados inscrito en  $\mathcal{D}$  que circunscribe a  $\mathcal{E}$ , entonces dicho polígono forma parte de una familia infinita de polígonos de  $n$  lados que están inscritos en  $\mathcal{D}$  y circunscriben a  $\mathcal{E}$ .*

Podemos, para simplificar, en lugar de considerar una cónica cualquiera  $\mathcal{D}$ , tomar el círculo centrado en el origen de radio 1,  $\mathbb{T}$ . No solo eso, sino que podemos

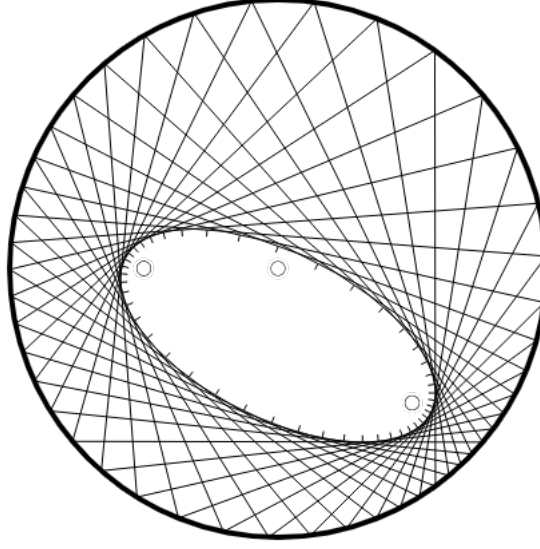


Figura 1: *Elipse de Poncelet con focos en  $-\frac{1}{2}$  y  $\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$ .*

pensar que la cónica  $\mathcal{E}$  es una elipse dentro del disco unidad  $\mathbb{D}$ . A las elipses que cumplan la propiedad reflejada en el Teorema de Poncelet las llamaremos elipses de Poncelet.

El concepto de elipse de Poncelet se puede extender a cualquier curva genérica. Dada una curva  $\mathcal{C}$  en el interior del círculo unidad  $\mathbb{D}$ , diremos que es una curva de Poncelet si para todo  $z \in \mathbb{T}$  existe un polígono de  $n$  lados inscrito en  $\mathbb{T}$  y con  $z$  vértice del mismo tal que circunscribe a la curva  $\mathcal{C}$ . Diremos entonces que  $\mathcal{C}$  es una  $n$ -curva de Poncelet.

Nuestros intereses van a ser conocer cómo construir estas curvas y estudiar cuándo dicha construcción da lugar a una elipse. Para resolver ambos, vamos a hacer uso de la teoría de operadores. En concreto del concepto de extensión numérica de un operador.

**| Definición 0.2.** Sea  $H$  un determinado espacio de prehilbertiano con un producto escalar. Dado un operador lineal  $T : H \rightarrow H$ , se define la extensión numérica de  $T$  como el conjunto

$$W(T) = \{\langle x | T x \rangle \in \mathbb{C} : x \in H, \|x\| = 1\}. \quad (1)$$

Con  $\langle | \rangle$  el producto escalar de  $H$  tal que si  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  y  $x, y, z \in H$

$$1. \quad \langle z | \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle z | x \rangle + \beta \langle z | y \rangle.$$

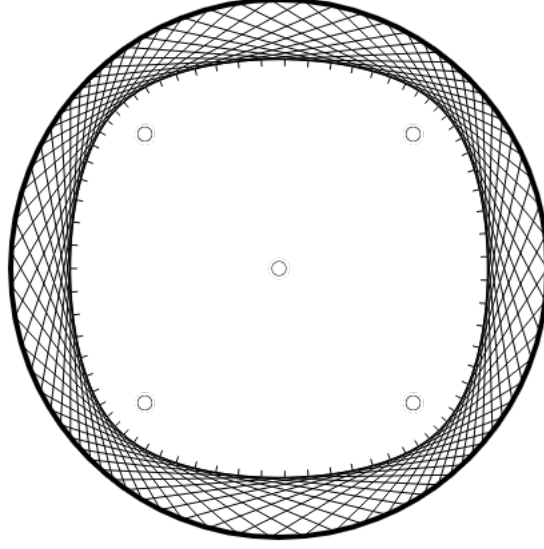


Figura 2: *Ejemplo de una 5-curva de Poncelet.*

2.  $\langle x|y \rangle = \overline{\langle y|x \rangle}$ .
3.  $\langle x|x \rangle = 0 \iff x = 0$ .

En lo que a nosotros respecta, vamos a trabajar con espacios de Hilbert. En la mayoría de los casos será con  $\mathbb{C}^n$  y por tanto, los operadores lineales serán matrices  $n \times n$ .

La extensión numérica de una matriz es un subconjunto del plano complejo que cumple una serie de propiedades. Entre ellas, se encuentra el que sea un conjunto compacto y convexo. Esta última es muy importante ya que nos permite obtener el conjunto completo simplemente conocida la frontera del mismo. Kippenhahn en [14] estudió cómo obtener la frontera de estos conjuntos a través de lo que llamaba la curva generadora de la frontera. La idea intuitiva detrás de esta curva consiste en conseguir líneas tangentes que delimitan el conjunto. Mediante transformaciones de la matriz, se obtienen distintas rectas tangentes obteniendo así la envolvente de la frontera.

Dejando a un lado lo anterior, entra en escena otro concepto clave de nuestro trabajo. Este no es más que los productos de Blaschke, que son funciones del plano complejo en el plano complejo.

**| Definición 0.3.** *Dados  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$  y  $\mu \in \mathbb{T}$ , se define el producto de Blaschke  $B$  de*

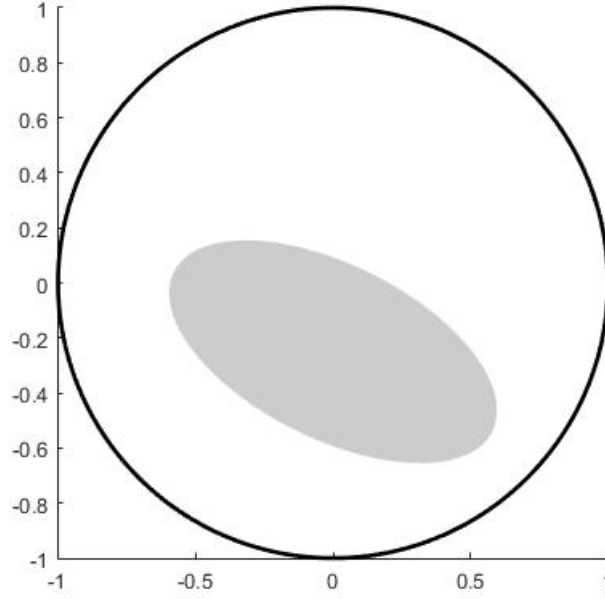


Figura 3: *Extensión numérica de la matriz*  $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

*grado  $n$  como la función*

$$B(z) = \mu \prod_{i=1}^n \frac{z - a_i}{1 - \overline{a_i}z}. \quad (2)$$

Los productos de Blaschke se caracterizan porque son funciones holomorfas que cumplen  $B(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$  y  $B(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ . Es más, esta es condición suficiente para que una función compleja sea un producto de Blaschke. Dado un  $\lambda \in \mathbb{T}$  se cumple que la ecuación  $B(z) = \lambda$  tiene  $n$  soluciones distintas sobre la circunferencia unidad. Esto nos permite identificar  $n$  puntos de  $\mathbb{T}$  construyendo así un polígono inscrito en la misma. Tenemos por tanto, una familia de polígonos inscritos en la circunferencia unidad dados por el producto de Blaschke. Si hacemos la intersección de todos estos polígonos, obtenemos un conjunto cerrado en el interior del disco  $\mathbb{D}$  e inscrito en la familia de polígonos.

Es posible que con los dibujos ya el lector se haya percatado de que hay una cierta relación entre todos los conceptos y resultados expuestos. Vamos a revelar la última pieza clave en la conexión de todos ellos.



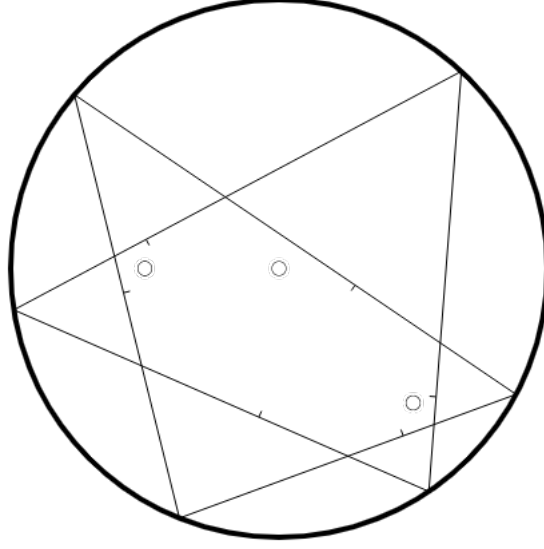


Figura 4: Identificación de puntos de la circunferencia a través del producto de Blaschke con  $\mu = 1$  y ceros  $0, -\frac{1}{2}$  y  $\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$ . Dos puntos  $z_1, z_2 \in \mathbb{T}$  están unidos por un segmento si cumplen  $B(z_1) = B(z_2)$ .

Como ya hemos mencionado, la teoría de operadores es importante en nuestro discurso, pero en concreto nos centramos en el operador desplazamiento.

**Definición 0.4.** Se define el operador desplazamiento  $S : H^2 \rightarrow H^2$  que lleva  $f$  en  $S(f)$  definida como

$$S(f)(z) = zf(z), \quad (3)$$

donde  $H^2$  no es más que el conjunto

$$H^2 = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0 \text{ para } n < 0\}.$$

Este último espacio se estudiará mucho más a fondo, de momento quedémonos con que es un espacio de Hilbert.

Dado  $B$  un producto de Blaschke de grado  $n$  podemos construir un determinado subespacio  $K_B \subseteq H^2$  de dimensión  $n$ . La restricción del operador desplazamiento a dicho subespacio está representada por una matriz  $n \times n$  que está dentro de una determinada clase de matrices particular. Lo interesante de estas matrices es que sus autovalores son los ceros del producto de Blaschke  $B$  asociado. Pero no solo eso, si calculamos su extensión numérica obtenemos un conjunto de puntos en el interior del disco unidad. Este conjunto tiene una propiedad que enlaza por fin todo

lo anterior. La frontera del mismo, no es nada más y nada menos que una curva de Poncelet. En otras palabras, hemos hallado un método de construcción de curvas de Poncelet.

A partir de aquí surgen una serie de problemas a resolver. Por ejemplo, cuándo esta curva es una elipse. Veremos que para  $n = 3$  lo es siempre; y para  $n = 4$  si y solo si el producto de Blaschke se puede descomponer como composición de dos productos de Blaschke de grado 2. Otro problema relacionado es cuándo una curva de Poncelet procede de un producto de Blaschke. Lamentablemente, no existe en la actualidad un criterio para hacerlo, pero sí veremos un ejemplo de una curva de Poncelet que no proviene de un producto de Blaschke. Por último, nos planteamos si dada una elipse dentro del círculo unidad en las condiciones del Teorema de Poncelet, proviene de un producto de Blaschke o no. Confirmaremos que si el polígono que la circunscribe es convexo, entonces dicha elipse se construye a partir de un producto de Blaschke, pero si no es así, no tenemos respuesta.

En resumen, los productos de Blaschke establecen una conexión entre áreas tan diferentes como Análisis Complejo, Geometría Proyectiva y Análisis Funcional, a través del teorema y las curvas de Poncelet, el concepto de extensión numérica de una matriz y el operador de desplazamiento en un cierto espacio de Hilbert.

# 1 | Conceptos fundamentales.

En esta primera parte, vamos a asentar las bases del estudio de las curvas de Poncelet a través de los productos de Blaschke. Vamos a ver, en efecto, la definición de producto de Blaschke, así como sus propiedades principales. Posteriormente veremos el concepto de extensión numérica, propiedades y algunos resultados relacionados. Y por último, estudiaremos el operador desplazamiento y la clase  $S_n$ .

## 1.1 Propiedades de los productos de Blaschke.

**| Definición 1.1 (Producto de Blaschke).** Sean  $a_i \in \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ ,  $i = 1, \dots, n$  y  $\mu \in \mathbb{T}$  (siendo  $\mathbb{T}$  la circunferencia unidad y  $\mathbb{D}$  el disco abierto unidad). Definimos entonces el producto de Blaschke asociado como

$$B(z) = \mu \prod_{i=1}^n \frac{z - a_i}{1 - \overline{a_i}z}. \quad (1.1)$$

En muchos casos hablaremos del producto de Blaschke  $B$  y su conjunto de ceros  $a_i \in \mathbb{D}$   $i = 1, \dots, n$  asociados.

Los productos de Blaschke van a ser un conjunto de funciones complejas de vital importancia en el desarrollo de nuestro tema. Estas cumplen una serie de propiedades que probaremos empleando el Teorema del módulo máximo.

**Proposición 1.2.** El teorema del módulo máximo tiene dos versiones equivalentes:

1. Sea  $f$  una función analítica en un abierto conexo  $U \subset \mathbb{C}$  y  $a \in U$  cumpliendo  $|f(a)| \geq |f(z)|$  para todo  $z \in U$ , entonces  $f$  es constante.

2. Sea  $U \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto acotado y supongamos que  $f$  es continua en  $\overline{U}$  y analítica en  $U$ , entonces

$$\max\{|f(z)| : z \in \overline{U}\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial U\}.$$

*Demostración.* Podemos encontrar la demostración detallada de esta equivalencia en la referencia [5, pp. 128-129].

**Proposición 1.3.** Una función  $B$  de Blaschke cumple las siguientes propiedades:

1. Son funciones analíticas en un abierto  $U \supset \mathbb{D}$ .
2.  $B$  lleva puntos de  $\mathbb{T}$  en puntos de  $\mathbb{T}$ .
3.  $B$  lleva puntos de  $\mathbb{D}$  en  $\mathbb{D}$ .

*Demostración.* La prueba de (1) es sencilla. Basta comprobar que existe un abierto  $U$  que contiene a  $\mathbb{D}$  y en el que no hay polos de  $B$ . Es claro ver que

$$|a_i| < 1 \forall i = 1, \dots, n \implies \left| \frac{1}{a_i} \right| > 1 \iff \left| \frac{1}{\overline{a_i}} \right| > 1 \iff \frac{1}{a_i} \notin \mathbb{D}$$

con lo que los polos de  $B$  se encuentran fuera del disco unidad. Es suficiente tomar el abierto  $U = B(0, \frac{1}{\|a_{i_0}\|}) \supset \mathbb{D}$  con  $\frac{1}{a_{i_0}}$  el de menor norma.

Pasemos a (2). Consideremos  $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ , entonces se cumple que

$$|B(e^{i\theta})| = \prod_{j=1}^n \left| \frac{e^{i\theta} - a_j}{1 - \overline{a_j} e^{i\theta}} \right| = \prod_{j=1}^n \frac{1}{|e^{-i\theta}|} \left| \frac{e^{i\theta} - a_j}{1 - \overline{a_j} e^{i\theta}} \right| = \prod_{j=1}^n \left| \frac{e^{i\theta} - a_j}{e^{-i\theta} - \overline{a_j}} \right| = \prod_{j=1}^n \frac{|c_j|}{|\overline{c_j}|} = 1.$$

Por tanto  $B(e^{i\theta}) \in \mathbb{T}$ .

Probemos el punto (3). Para ello, nos limitamos al caso en el que  $B$  sea un producto de Blaschke de grado 1 normalizado ( $\mu = 1$ ). Extender esto al caso general es trivial. Consideremos

$$B(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$

Como sabemos por (2)  $|B(e^{i\theta})| = 1$  con  $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D} = \mathbb{T}$  y por (1) es analítica en  $\mathbb{D}$  y continua en  $\partial\mathbb{D}$ . Luego por la segunda versión del Teorema del módulo máximo (1.2)

$$|B(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Pero como  $B(z)$  no es una función constante (solo hay que comprobarlo para un par de valores), se llega a que necesariamente  $|B(z)| < 1$  para todo  $z$  en el disco unidad. Finalizando así la demostración.

Los productos de Blaschke son mucho más interesantes. Las propiedades descritas en la Proposición 1.3 no son solo condición necesaria para que sea un producto de Blaschke, también son condición suficiente. Una vez más, para demostrar esto haremos uso del Teorema del módulo máximo 1.2 en sus distintas equivalencias.

**Lema 1.4.** Sea  $f$  una función no constante. Entonces  $f$  es analítica en un conjunto abierto  $U$  conteniendo a  $\overline{\mathbb{D}}$  y lleva  $\mathbb{D}$  en sí mismo y  $\mathbb{T}$  en sí mismo si y solo si  $f$  es un producto de Blaschke.

**Demostración.**  $\Leftarrow$  Es evidente a través de la Proposición 1.3, que todo producto de Blaschke  $B$  cumple las propiedades anteriores.

$\Rightarrow$  Demostremos la otra implicación. Como  $f$  es una función no constante, los ceros de esta no pueden tener puntos adherentes en  $\mathbb{D}$ , por lo que estos están aislados en  $\mathbb{D}$ . Como  $|f| = 1$  en  $\mathbb{T}$ , los ceros tampoco pueden tener puntos adherentes en  $\mathbb{T}$ , entonces necesariamente  $f$  tiene un número finito de ceros en  $\mathbb{D}$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ . Teniendo en cuenta que se cumple

$$|a_i| < 1 \forall i = 1, \dots, n \iff \left| \frac{1}{a_i} \right| > 1 \iff \left| \frac{1}{\overline{a_i}} \right| > 1 \iff \frac{1}{\overline{a_i}} \notin \mathbb{D}$$

podemos tomar  $\frac{1}{\overline{a_{i_0}}}$  de menor norma y construir  $U' = U \cap B(0, \|\frac{1}{\overline{a_{i_0}}}\|) \subset U$  tal que  $\frac{1}{\overline{a_{i_0}}} \notin U' \forall i = 1, \dots, n$ . Si consideramos ahora el desarrollo en serie de potencias de  $f$  se cumple que

$$f = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n)g \quad (1.2)$$

con  $g$  una función analítica en  $U'$ . Además, como los  $\frac{1}{\overline{a_{i_0}}} \notin U' \forall i = 1, \dots, n$ , se cumple que  $((1 - \overline{a_i}z) \cdots (1 - \overline{a_n}z))^{-1}$  es analítica en  $U'$  de modo que

$$f = \frac{z - a_1}{1 - \overline{a_1}z} \cdots \frac{z - a_n}{1 - \overline{a_n}z} h = Bh \quad (1.3)$$

siendo  $h$  una función analítica en  $U'$  y que no se anula en dicho abierto. Así,  $f/B$  y  $B/f$  son analíticas en  $U'$ . Por ser ambas continuas en el compacto  $\overline{\mathbb{D}}$ , tienen que alcanzar el máximo. Como  $|f| = |B| = 1$  en  $\mathbb{T}$ ,  $|f/B| = |B/f| = 1$  en  $\mathbb{T}$  y empleando la segunda versión del teorema del módulo máximo se cumple que en  $\mathbb{D}$

$$\left| \frac{f}{B} \right| \leq 1 \text{ y } \left| \frac{B}{f} \right| \leq 1.$$

Y por tanto,  $|B(z)| = |f(z)| \forall z \in \mathbb{D}$ . En consecuencia,  $|h(z)| = 1 \forall z \in \mathbb{D}$  y por la versión primera del teorema del módulo máximo  $h(z) = \gamma \in \mathbb{T}$ . Confirmamos así que  $f$  no es más que un producto de Blaschke. |

Como podemos ver, los productos de Blaschke son funciones muy particulares. Estas están muy bien definidas a través de una serie de características, que en consecuencia, nos proporcionan diversas propiedades.

**Proposición 1.5.** Sea  $B$  un producto de Blaschke de grado  $n$  con ceros en  $a_1, \dots, a_n$ . Entonces se cumple lo siguiente:

1. La derivada del logaritmo de  $B$  es

$$\frac{d(\log(B(z)))}{dz} = \frac{B'(z)}{B(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{1 - |a_i|^2}{(1 - \overline{a_i}z)(z - a_i)}. \quad (1.4)$$

2. El argumento de  $B(e^{i\theta})$  es una función estrictamente creciente de  $\theta$ .
3. Para cada  $\lambda \in \mathbb{T}$ , existen exactamente  $n$  distintas soluciones a la ecuación  $B(z) = \lambda$  las cuales se encuentran en la circunferencia unidad  $\mathbb{T}$ .

**Demostración.** La prueba de (1) es sencilla, simplemente hay que aplicar las propiedades de la derivada

$$\log(B(z)) = \log(\mu) + \sum_{i=1}^n (\log(z - a_i) - \log(1 - \overline{a_i}z))$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{d(\log(B(z)))}{dz} &= \frac{B'(z)}{B(z)} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{z - a_i} - \frac{\overline{a_i}}{1 - \overline{a_i}z} \right) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1 - z\overline{a_i} + z\overline{a_i} - |a_i|^2}{(1 - \overline{a_i}z)(z - a_i)} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1 - |a_i|^2}{(1 - \overline{a_i}z)(z - a_i)}. \end{aligned}$$

Para probar (2) vamos a emplear (1). Tomemos  $z = e^{i\theta}$ . Si escribimos  $B(e^{i\theta}) = e^{i\psi}$ , se cumple que

$$\psi = -i \log(B(e^{i\theta})). \quad (1.5)$$

Derivando y haciendo uso de la regla de la cadena es fácil ver que

$$\frac{d\psi}{d\theta} = e^{i\theta} \frac{B'(e^{i\theta})}{B(e^{i\theta})} = \frac{B'(e^{i\theta})}{e^{-i\theta} B(e^{i\theta})} = \sum_{i=1}^n \frac{1 - |a_i|^2}{(e^{-i\theta} - \overline{a_i})(e^{i\theta} - a_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{1 - |a_i|^2}{|e^{i\theta} - a_i|^2} > 0 \quad (1.6)$$

donde hemos tenido en cuenta que los  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ .

Probemos ahora (3). Para cada  $\lambda \in \mathbb{T}$ , queremos resolver  $B(z) = \lambda$  o equivalentemente

$$\mu(a - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n) = \lambda(1 - z\overline{a_1})(1 - \overline{a_2}z) \cdots (1 - \overline{a_n}z). \quad (1.7)$$

Este es un polinomio de grado  $n$  en un cuerpo algebraicamente cerrado por tanto, tiene que tener  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{T}$  raíces (contando multiplicidad). El hecho de que estas raíces se encuentren en  $\mathbb{T}$  se debe a que  $B^{-1}(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ . Vamos a ver que ninguna de estas raíces es múltiple, en otras palabras,  $B(z) = \lambda$  tiene  $n$  raíces distintas. Esto es consecuencia directa del punto (2). Como  $|B(e^{i\theta})| = 1$ , se cumple entonces que

$$|B'(e^{i\theta})| = \left| e^{i\theta} \frac{B'(e^{i\theta})}{B(e^{i\theta})} \right| = \sum_{i=1}^n \frac{1 - |a_i|^2}{|e^{i\theta} - a_i|^2} > 0$$

y en consecuencia  $B'(e^{i\theta}) \neq 0$ . Si consideramos  $F(z) = B(z) - \lambda$ , con  $F(z_i) = 0$ ,  $z_i \in \mathbb{T}$ . Como  $F'(z_i) = B'(z_i) \neq 0$ ,  $z_i$  es un cero de orden 1. Tenemos entonces que los  $z_i$  son  $n$  elementos distintos. |

Lo que más nos va a interesar de este resultado es que, siendo  $B$  un producto de Blaschke de grado  $n$ , identifica  $n$  puntos distintos de la circunferencia unidad mediante  $B(z) = \lambda$  con  $\lambda \in \mathbb{T}$ .

**Ejemplo 1.6.** Si consideramos el producto de Blaschke normalizado, es decir, con  $\mu = 1$ , y ceros  $0, \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$ . Podemos dibujar los triángulos que describen los puntos de la forma  $B(z) = 1$  y  $B(z) = -1$ .

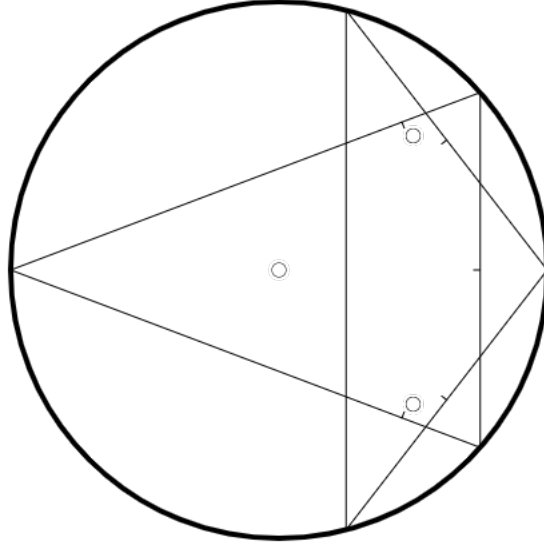


Figura 1.1: Conjunto de puntos que verifican  $B(z) = 1$  y  $B(z) = -1$ , con  $B$  el producto de Blaschke con  $\mu = 1$ , y ceros  $0, \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$ . Dos puntos  $z_1$  y  $z_2$  en  $\mathbb{T}$  están unidos por un segmento si cumplen  $B(z_1) = B(z_2)$ .

Podemos obtener aún más resultados de los productos de Blaschke que nos van a ser interesantes, y algunos útiles para resultados posteriores.

**Proposición 1.7.** Sea  $B$  un producto de Blaschke de grado  $n \geq 2$  con ceros  $0, a_1, \dots, a_{n-1}$ . Sea  $\lambda \in \mathbb{T}$  y denotemos por  $z_1, \dots, z_n$  a las  $n$  soluciones de  $B(z) = \lambda$ . Consideremos la función  $F$  de la siguiente forma

$$F(z) = \frac{B(z)/z}{B(z) - \lambda} = \frac{\mu \prod_{i=1}^{n-1} (z - a_i)}{z \prod_{i=1}^{n-1} (z - a_i) - \lambda \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \overline{a_i} z)} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{z - z_i} \quad (1.8)$$

Siendo este último término el desarrollo en suma de fracciones simples de  $F$ . Entonces se cumple lo siguiente

1.  $\sum_{i=1}^n m_i = 1$
2. Para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  tenemos que  $m_i = \frac{\lambda}{z_i B'(z_i)}$ .
3. Para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  tenemos que  $\frac{1}{m_i} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - |a_k|^2}{|z_i - a_k|^2}$ .
4. Para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  tenemos que  $0 < m_i < 1$ .

**Demostración.** Como ya sabemos, la expansión en fracciones simples de  $F$  es de la forma

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{z - z_i}.$$

Consideremos ahora

$$zF(z) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i z}{z - z_i}.$$

Haciendo tender  $z \rightarrow \infty$

$$1 = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{B(z)}{B(z) - \lambda} = \sum_{i=1}^n m_i \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z - z_i} = \sum_{i=1}^n m_i.$$

De modo que  $\sum_{i=1}^n m_i = 1$ , probando así (1).

Pasemos ahora a probar (2). Como sabemos,  $B(z_i) = \lambda$ , luego

$$\left( \frac{z - z_i}{B(z) - B(z_i)} \right) \frac{B(z)}{z} = \frac{(z - z_i)B(z)}{z(B(z) - \lambda)} = (z - z_i)F(z) = \sum_{k \neq i} \frac{m_k(z - z_i)}{z - z_k} + m_i.$$

El término de la izquierda de la igualdad nos insinúa una derivada, es por ello que tomamos  $z \rightarrow z_i$ , obteniendo

$$m_i = \lim_{z \rightarrow z_i} \left( \frac{z - z_i}{B(z) - B(z_i)} \right) \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{B(z)}{z} = \frac{B(z_i)}{z_i B'(z_i)} = \frac{\lambda}{z_i B'(z_i)}.$$



Probamos así (2).

Para probar (3) recurrimos a la fórmula de la Proposición 1.5. Teniendo en cuenta que hemos considerado un cero de  $B$  en 0, se cumple

$$\frac{B'(z)}{B(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - |a_k|^2}{(1 - \overline{a_k}z)(z - a_k)}.$$

En concreto, si tomamos  $z_i \in \mathbb{T}$  y teniendo en cuenta que  $z_i = \frac{1}{\overline{z_i}}$ , se cumple

$$\frac{z_i B'(z_i)}{B(z_i)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - |a_k|^2}{\overline{z_i}(1 - \overline{a_k}z_i)(z_i - a_k)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - |a_k|^2}{(\overline{z_i} - \overline{a_k})(z_i - a_k)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - |a_k|^2}{|z_i - a_k|^2}.$$

Si tenemos ahora en cuenta que  $B(z_i) = \lambda$  así como (2)

$$\frac{1}{m_i} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - |a_k|^2}{|z_i - a_k|^2}.$$

La prueba de (4) se sigue de (3). Como  $|a_k| < 1$  por pertenecer al disco unidad, se tiene que  $1 - |a_k|^2 > 0$  y por tanto

$$\frac{1}{m_i} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - |a_k|^2}{|z_i - a_k|^2} > 1.$$

Luego  $0 < m_i < 1$ . |

Una observación interesante de este resultado es que podemos escribir la función  $F(z)$  como una combinación convexa de funciones racionales simples.

## 1.2 Extensión numérica.

Uno de los conceptos básicos que vamos a ver ahora es el concepto de extensión numérica de un operador. Este concepto, propio del análisis funcional, se utiliza no solo en matemáticas, sino también algunas ramas de la física como la física cuántica o la física del estado sólido. Nosotros, de momento, nos vamos a centrar en estudiar sus propiedades geométricas.

**| Definición 1.8 (Extensión numérica).** Consideremos un espacio vectorial prehilbertiano  $X$ , y un operador lineal  $T : X \rightarrow X$ . Entonces se define la extensión numérica de  $T$  como el conjunto

$$W(T) = \{\langle x | Tx \rangle \mid x \in X, \|x\| = 1\} \subset \mathbb{C}. \quad (1.9)$$

Antes de ver algunas propiedades de la extensión numérica veamos un poco de teoría de operadores.

**| Definición 1.9 (Operador adjunto).** Sea  $X$  un espacio de Hilbert y  $T : X \rightarrow X$  un operador lineal. Definimos el operador adjunto de  $T$ , denotado por  $T^*$ , como el operador  $T^* : X \rightarrow X$  cumpliendo que

$$\langle Tx|x\rangle = \langle x|T^*x\rangle \quad \forall x \in X. \quad (1.10)$$

La existencia de este operador es clara para el caso en el que  $X$  sea un espacio de Hilbert. Para más contenido relacionado con este concepto se recomienda la referencia [20].

**Proposición 1.10.** Dado un operador lineal  $T$ , se cumple que  $(T^*)^* = T$ .

**Demostración.** Este es un resultado básico de análisis funcional que se puede demostrar a partir de la definición de operador adjunto. |

**| Definición 1.11.** Dado un espacio de Hilbert  $X$  y un operador lineal  $T : X \rightarrow X$  decimos que

1.  $T$  es normal si  $TT^* = T^*T$
2.  $T$  es autoadjunto si  $T = T^*$
3.  $T$  es unitario si  $TT^* = T^*T = I$ . Siendo  $I$  el operador identidad.

**Observación 1.12.** Es necesario remarcar que el producto que estamos empleando entre operadores no es más que la composición de estos, es decir

$$(AB)(x) = A(B(x)).$$

**Observación 1.13.** Ser unitario y/o autoadjunto implica ser un operador normal.

Aunque se haya trabajado en las definiciones anteriores con operadores lineales de forma genérica, vamos a centrar todo nuestro estudio en espacios de dimensión finita, es decir, vamos a emplear la representación matricial de los operadores.

**Proposición 1.14.** Sea  $A$  una matrix  $n \times n$ , entonces:

1. Si  $U$  es una matriz  $n \times n$  unitaria, entonces  $W(U^*AU) = W(A)$ .
2.  $W(A^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in W(A)\}$ .
3. Si  $\alpha$  y  $\beta$  son números complejos, entonces  $W(\alpha A + \beta I) = \alpha W(A) + \beta := \{\alpha z + \beta : z \in W(A)\}$ .

4. El conjunto  $W(A)$  es compacto.

**Demostración.** Para demostrar estos resultados basta emplear la definición de extensión numérica. En el caso del punto 4 tenemos además que considerar la continuidad de la función  $f(x) = x^*Ax$  y tener en cuenta que el conjunto de vectores unitarios (esfera de radio 1) es compacto. |

**| Teorema 1.15 (Teorema espectral para matrices normales).** Sea  $A$  una matriz con autovalores  $a_1, \dots, a_n$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. La matriz  $A$  es normal.
2. Existe una matriz unitaria  $U$  tal que  $U^*AU$  es diagonal.
3. Existe una base ortonormal de  $\mathbb{C}^n$  de autovectores de  $A$ .

**Demostración.** Este resultado es elemental en el Álgebra Lineal y es consecuencia del Lema de Schur para descomposición de matrices cuadradas. |

El siguiente resultado nos aporta una importante propiedad de la extensión numérica de un operador lineal. Esta propiedad nos va a permitir demostrar futuros resultados y teoremas. Pese a que estamos trabajando con matrices, dada la importancia de este, hemos querido dar el resultado de la forma más genérica posible.

**| Teorema 1.16 (Toeplitz-Hausdorff).** La extensión numérica de un operador lineal  $T: X \rightarrow X$  en un espacio de Hilbert es convexo.

**Demostración.** Supongamos  $\lambda_1, \lambda_2 \in W(T)$  con  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Como sabemos por la Proposición 1.14 si escalásemos el operador como  $T' = \alpha T + \beta I$ , no se alteraría la convexidad de la extensión numérica de este nuevo operador, de modo que eligiendo  $\alpha$  y  $\beta$  adecuadamente podemos suponer que  $\lambda_1 = 0$  y que  $\lambda_2 = 1$ .

Sean  $u, v \in X$  cumpliendo que  $\langle u|Tu \rangle = 0$  y  $\langle v|Tv \rangle = 1$ . Podemos probar que existe  $\theta \in [0, 2\pi)$  cumpliendo que

$$\langle e^{i\theta} v|Tu \rangle + \langle u|T(e^{i\theta} v) \rangle \in \mathbb{R}.$$

Consideremos  $\langle v|(T - T^*)u \rangle \in \mathbb{C}$ . Si tomamos  $\theta = \arg(\langle v|(T - T^*)u \rangle)$ , es evidente que  $e^{-i\theta} \langle v|(T - T^*)u \rangle \in \mathbb{R}$ , es decir

$$e^{-i\theta} \langle v|(T - T^*)u \rangle = \overline{e^{-i\theta} \langle v|(T - T^*)u \rangle} = e^{i\theta} \overline{\langle v|(T - T^*)u \rangle} = e^{i\theta} \langle (T - T^*)u|v \rangle.$$

Si desarrollamos la igualdad entre el primer y último termino de la cadena de igualdades

$$e^{-i\theta} \langle v|Tu \rangle - e^{-i\theta} \langle v|T^*u \rangle = e^{i\theta} \langle Tu|v \rangle - e^{i\theta} \langle T^*u|v \rangle \iff$$

$$\begin{aligned}
e^{-i\theta} \langle v|Tu \rangle + e^{i\theta} \langle T^* u|v \rangle &= e^{i\theta} \langle Tu|v \rangle + e^{-i\theta} \langle v|T^* u \rangle \iff \\
&\iff e^{-i\theta} \langle v|Tu \rangle + e^{i\theta} \langle u|Tv \rangle = e^{i\theta} \langle Tu|v \rangle + e^{-i\theta} \langle Tv|u \rangle.
\end{aligned}$$

Lo que nos lleva fácilmente, teniendo en cuenta las propiedades de los productos escalares, a

$$\langle e^{i\theta} v|Tu \rangle + \langle u|T(e^{i\theta} v) \rangle = \langle Tu|e^{i\theta} v \rangle + \langle T(e^{i\theta} v)|u \rangle = \overline{\langle e^{i\theta} v|Tu \rangle} + \overline{\langle u|T(e^{i\theta} v) \rangle}.$$

Cumpliendo así esta primera parte. Además se verifica que

$$\begin{aligned}
\langle e^{i\theta} v|T(e^{i\theta} v) \rangle &= e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} \langle v|Tv \rangle = \langle Tv|v \rangle \\
\|v\| &= \|e^{i\theta} v\|.
\end{aligned}$$

Podemos entonces suponer, sin pérdida de generalidad, que tomamos  $v$  cumpliendo el resultado anterior y con  $\langle Tv|v \rangle = 1$ . Definimos por tanto la siguiente función  $\varphi: [0, 1] \rightarrow W(T) \cap \mathbb{R}$  como

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &:= \frac{\langle (1-t)u + tv|T((1-t)u + tv) \rangle}{\|(1-t)u + tv\|} = \\
&= \frac{(1-t)^2 \langle u|Tu \rangle + t^2 \langle v|Tv \rangle + (1-t)t (\langle v|Tu \rangle + \langle u|Tv \rangle)}{\|(1-t)u + tv\|} = \\
&= \frac{t^2 + (1-t)t (\langle v|Tu \rangle + \langle u|Tv \rangle)}{\|(1-t)u + tv\|}.
\end{aligned}$$

Como  $u$  y  $v$  son vectores linealmente independientes y  $(1-t, t) \neq (0, 0) \forall t \in [0, 1]$  entonces  $(1-t)u + tv \neq 0 \forall t \in [0, 1]$ . Luego el denominador no se anula y, por el resultado anterior, el numerador es real y la función es continua. Además, es fácil de comprobar que esta función no es más que aquella que nos da el conjunto de valores que alcanza un vector que pertenezca a la combinación convexa de  $u$  y  $v$ . Siendo entonces  $\varphi(0) = 0$  y  $\varphi(1) = 1$ . De modo que, por el teorema del valor medio, el segmento que une 0 y 1 está contenido en  $W(T)$ . |

Estudiemos algunos ejemplos concretos:

**Ejemplo 1.17.** Sea  $A$  una matriz  $n \times n$  normal. Como sabemos por el Teorema 1.15 tenemos que  $A$  es unitariamente equivalente a una matriz diagonal, es decir, existe  $U$  unitaria y  $D$  diagonal (formada por los autovalores de  $A$ ) tales que  $D = U^* A U$ . Si tenemos en cuenta la Proposición 1.14 llegamos a que

$$W(A) = W(U^* A U) = W(D) = \left\{ \sum_{j=1}^n a_j |x_j|^2 : \|x\| = \sum_{j=1}^n |x_j|^2 = 1 \right\}. \quad (1.11)$$

Este conjunto no es más que el cierre convexo de los autovalores de  $A$  y, como cabe esperar por el Teorema de Toeplitz-Hausdorff, es convexo.

El siguiente ejemplo va a ser tan utilizado en el desarrollo de nuestro trabajo que vamos a darle la importancia que merece. Para ello necesitamos hacer uso del siguiente lema.

**Lema 1.18.** Sea  $A$  una matriz  $n \times n$ ,  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , y

$$C = \frac{(A + A^*) + \gamma(A - A^*)}{2}.$$

Entonces, para  $x, y \in \mathbb{R}$ , tenemos que  $x + iy \in W(A)$  si y solo si  $x + i\gamma y \in W(C)$

**Demostración.** Sea  $z \in \mathbb{C}^n$  con norma 1 tal que  $x + iy = \langle z | Az \rangle$ . Entonces

$$\begin{aligned} \langle z | Cz \rangle &= \frac{\langle z | Az \rangle + \langle z | A^* z \rangle + \gamma(\langle z | Az \rangle - \langle z | A^* z \rangle)}{2} = \\ &= \frac{\langle z | Az \rangle + \overline{\langle z | Az \rangle} + \gamma(\langle z | Az \rangle - \overline{\langle z | Az \rangle})}{2} = \\ &= \frac{x + iy + x - iy + \gamma(x + iy - x - iy)}{2} = x + i\gamma y \in W(C). \end{aligned}$$

Verificar que  $x + i\gamma y \in W(C)$  implica  $x + iy \in W(A)$  es totalmente análogo, basta ver que podemos escribir la matriz  $A$  como

$$A = \frac{(C + C^*) + \gamma^{-1}(C - C^*)}{2}.$$

**Proposición 1.19.** Dada  $A$  una matriz  $2 \times 2$  con autovalores  $a$  y  $b$ . Entonces la extensión numérica de  $A$  es un disco elíptico con focos en  $a$  y  $b$  y eje menor de longitud  $\sqrt{\text{tr}(A^* A) - |a|^2 - |b|^2}$ .

**Demostración.** Esta demostración no es complicada, pero nos va a llevar algo de tiempo. En primer lugar consideremos  $A$  de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos un  $x \in \mathbb{C}^2$  con  $\|x\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$ . Así,  $|x_i| \leq 1$   $i = 1, 2$ . Podemos escribir entonces  $x_1 = r e^{i\theta_1}$ ,  $x_2 = \sqrt{1 - r^2} e^{i\theta_2}$ , con  $0 \leq r \leq 1$  y  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ . Si llamamos  $\gamma = e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \in \mathbb{T}$  tenemos que

$$\langle x | Ax \rangle = \gamma r \sqrt{1 - r^2}.$$

Como  $x$  es un vector genérico, tanto  $r$  como  $\gamma$  pueden valer lo que sea dentro del conjunto de valores que pueden alcanzar. Si dejamos fijo  $r$  y variamos  $\gamma$  obtenemos una circunferencia de radio  $r\sqrt{1-r^2}$ . Si tenemos en cuenta que  $0 \leq r\sqrt{1-r^2} \leq \frac{1}{2}$ , llegamos a que la extensión numérica de  $A$  es el disco centrado en 0 y de radio  $\frac{1}{2}$ . Es inmediato ver, a partir de las propiedades del producto escalar, que si tuviésemos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la extensión numérica de  $A$  sería el círculo centrado en el origen de radio  $\frac{|c|}{2}$ . Es, en efecto, una elipse de eje menor  $\sqrt{\text{tr}(A^*A) - 0 - 0} = \sqrt{|c|^2 - 0 - 0} = |c|$ .

Consideremos ahora una matriz  $A$  normal genérica. Como sabemos del ejemplo anterior, la extensión numérica de  $A$  será el cierre convexo de  $a$  y  $b$ , es decir, el segmento que los une. Por ser  $A$  normal es unitariamente equivalente a la matriz  $D$  diagonal formada por sus autovalores. La traza se conserva para matrices unitariamente equivalentes de modo que

$$\text{tr}(A^*A) = \text{tr}(U^*A^*UU^*AU) = \text{tr}(D^*D) = |a|^2 + |b|^2.$$

Luego  $\sqrt{\text{tr}(A^*A) - |a|^2 - |b|^2} = 0$  verificándose la hipótesis del teorema. En este caso la elipse es degenerada.

Supongamos ahora que  $A$  no es normal; por la Proposición 1.14 si tomamos  $A_1 := A - \frac{\text{tr}(A)}{2}I$ , se cumple que  $W(A_1) = W(A) + \text{tr}(A)/2$  y la extensión numérica de  $A_1$  es una elipse si y solo si lo es la de  $A$ . Podemos entonces estudiar de manera equivalente  $A_1$  la cual tiene traza nula.

Si uno de los autovalores es nulo, teniendo en cuenta el Teorema de Schur (existen  $U$  unitaria y  $T$  triangular superior cumpliendo  $T = U^*A_1U$ ) y que la traza se conserva para matrices unitariamente equivalentes

$$0 = \text{tr}(A_1) = \text{tr}(U^*A_1U) = \text{tr}(T) = a + b = 0 + b.$$

Luego si un autovalor es nulo, el otro necesariamente lo es. Por tanto,  $A$  es una matriz unitariamente equivalente a una del tipo

$$T = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y como ya vimos al inicio, esta matriz cumple la hipótesis de nuestra proposición.

Supongamos ahora que  $A_1$  tiene un autovalor  $a$  no nulo. Como  $\text{tr}(A_1) = 0$ , por el mismo razonamiento que antes, necesariamente el otro autovalor tiene que ser  $-a$ . La extensión numérica de  $A_1$  es una elipse si y solamente lo es  $A_2 = \frac{1}{a}A_1$ , con autovalores 1 y  $-1$ . Esta matriz a su vez es unitariamente equivalente a una matriz triangular superior de la forma

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con  $c = |c|e^{i\theta}$ . Si tomamos ahora la matriz unitaria

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

se cumple que

$$A_3 = U_2^* T_2 U = \begin{pmatrix} 1 & 2r \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

siendo  $2r = |c|$ . Sea ahora

$$C = \frac{(A_3 + A_3^*) + \frac{\sqrt{1+r^2}}{r}(A_3 - A_3^*)}{2} \quad (1.12)$$

que no es más que la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & r + \sqrt{1+r^2} \\ r - \sqrt{1+r^2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Por el Lema de Schur sabemos que toda matriz es unitariamente equivalente a una matriz triangular superior con los autovalores en la diagonal. Como los autovalores son el 0 doble, solo nos queda por determinar un término de la matriz. La norma de Frobenius se conserva a través de transformaciones unitarias, y por tanto, si denotamos por  $C_1$  dicha matriz se tiene que cumplir

$$([C_1]_{1,2})^2 = 1 + 1 + (r + \sqrt{1+r^2})^2 + (r - \sqrt{1+r^2})^2 = 4 + 4r^2.$$

Por tanto la matriz  $C$  es unitariamente equivalente a

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{1+r^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como ya vimos la extensión numérica de esta matriz no es más que el círculo centrado en el origen de radio  $\sqrt{1+r^2}$ , entonces:

$$W(C) = W(C_1) = \left\{ s\sqrt{1+r^2} \cos t + is\sqrt{1+r^2} \sin t : t \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq 1 \right\}.$$

Por el Lema 1.18 tenemos entonces que

$$W(A_3) = \left\{ s\sqrt{1+r^2} \cos t + i s r \sin t : t \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq 1 \right\},$$

que no es más que la elipse de semiejes  $\sqrt{1+r^2}$  y  $r$ , y focos en  $-1$  y  $1$ . Es inmediato comprobar que esta elipse tiene eje menor  $2r = \sqrt{\operatorname{tr}(A^* A) - |a|^2 - |b|^2}$ . Basta entonces con ir deshaciendo las transformaciones que hemos ido aplicando sobre la extensión numérica para que lleguemos al resultado que buscamos. |

*Ejemplo 1.20.* Si consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{2}} \\ 0 & i\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

utilizando la Proposición 1.19 es claro que la extensión numérica de nuestra matriz no es más que el disco elíptico de focos  $\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$  y  $i\frac{3}{4}$ , cuyo eje menor es

$$\sqrt{\operatorname{tr}(A^* A) - \left| \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} \right|^2 - \left| i\frac{3}{4} \right|^2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{2}}.$$

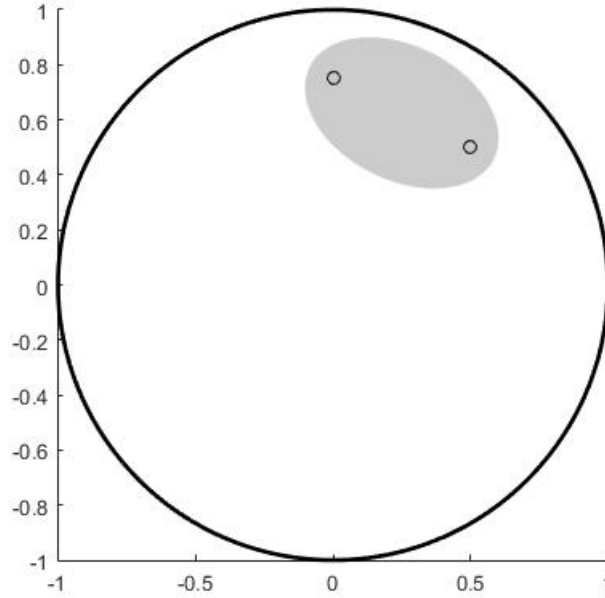


Figura 1.2: Extensión numérica de la matriz  $A$  del ejemplo 1.20



**Definición 1.21.** Dado un conjunto de matrices  $A_1, \dots, A_m$ , ( $n_i \times n_i$ , con  $i = 1, \dots, m$ ) definimos la matriz  $A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_m$  como

$$\bigoplus_{i=1}^m A_i = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Si una matriz  $A$  es unitariamente equivalente a una matriz en la forma (1.13), decimos que  $A$  está en suma directa.

**Proposición 1.22.** Dada un conjunto de matrices  $A_1, \dots, A_m$ , entonces la extensión numérica de la matriz por bloques  $A = \bigoplus_{i=1}^m A_i$  es el cierre convexo del conjunto  $W(A_1) \cup W(A_2) \cup \dots \cup W(A_m)$ .

**Demostración.**  $\supseteq$  Es evidente que  $W(A)$  contiene a  $W(A_1) \cup W(A_2) \cup \dots \cup W(A_m)$ , basta escoger los vectores unitarios adecuadamente. Además, por el Teorema de Toeplitz-Hausdorff 1.16 tenemos que  $W(A)$  es convexo, luego contiene al cierre convexo de  $W(A_1) \cup W(A_2) \cup \dots \cup W(A_m)$ .

$\subseteq$  Consideremos  $x = (x_1, \dots, x_m)$  unitario con  $x_i \in \mathbb{C}^{n_i}$ . Es evidente que se cumple  $1 = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^m \|x_i\|^2$ . De modo que:

$$\langle x | Ax \rangle = \sum_{i=1}^m \langle x_i | Ax_i \rangle = \sum_{i=1}^m \|x_i\|^2 \langle \tilde{x}_i | A \tilde{x}_i \rangle$$

siendo  $\tilde{x}_i = \frac{x_i}{\|x_i\|}$ . Por tanto  $\langle x | Ax \rangle$  está en el cierre convexo de  $W(A_1) \cup W(A_2) \cup \dots \cup W(A_m)$ . |

Como mencionamos al principio, el concepto de extensión numérica de un operador es algo que se utiliza en Física Cuántica. En esta disciplina, las magnitudes observables se representan a través de operadores lineales hermíticos. Estos operadores actúan sobre un determinado espacio de estados que depende de las magnitudes que caracterizan un determinado sistema. Normalmente este espacio está representado por lo que se conoce como las funciones de onda. Medir un determinado valor, por ejemplo de la posición, en un estado del sistema no es más que calcular el promedio de los valores que pueden alcanzar el operador asociado, en este caso a la posición, en la función de onda. Esto no es más que calcular el valor numérico del operador. En consecuencia, la extensión numérica del operador coincide con el conjunto de valores posibles que podemos medir en un determinado sistema.

### 1.2.1 Contracciones y 1-dilataciones.

Veamos para finalizar esta sección algunas definiciones y un último resultado.

**Definición 1.23 (Contracción).** Dado un operador  $T : X \rightarrow X$  lineal y continuo, decimos que es una contracción si y solo si su norma es menor que 1. Es decir, si y solo si

$$\|T\| = \sup \{\|Tx\| : x \in X, \|x\| = 1\} \leq 1.$$

**Definición 1.24.** Decimos que una matriz  $B$  es una 1-dilatación unitaria de una matriz  $A$  de dimensión  $n \times n$ , si es una matriz  $(n+1) \times (n+1)$  unitariamente equivalente a una matriz de la forma

$$U = \begin{pmatrix} & & & * \\ & & & \vdots \\ & A & & * \\ * & \cdots & * & * \end{pmatrix}.$$

con  $U$  una matriz unitaria.

**Proposición 1.25.** Si una matriz  $A$  tiene una 1-dilatación unitaria  $B$ , entonces  $A$  es una contracción.

**Demostración.** Supongamos que dada la matriz  $A$  existe una 1-dilatación  $B$  de la misma. Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que

$$B = \begin{pmatrix} & & & * \\ & & & \vdots \\ & A & & * \\ * & \cdots & * & * \end{pmatrix}.$$

Si tomamos un vector unitario de la forma  $x = (\nu, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$ , se cumple que

$$\|Bx\| = \|A\nu\| \leq \|B\|\|x\| = 1 \Rightarrow \|A\| \leq 1.$$

Llegando así a que  $A$  es una contracción. |

El concepto de 1-dilatación se puede generalizar a  $m$ -dilatación de la manera natural. Además, podemos encontrar el siguiente resultado.

**Proposición 1.26.** Toda matriz  $A$  es una contracción si y solamente si existe una  $m$ -dilatación  $B$  de  $A$ .

**Demostración.** La demostración de este enunciado se desvía del contenido del trabajo por lo que simplemente vamos a dejar como referencia [3] para aquella persona que esté interesada. |

A partir de una contracción  $A$ , podemos construir la 1-dilatación en función de un parámetro  $\lambda \in \mathbb{T}$  simplemente añadiendo una fila y una columna a  $A$  e imponiendo la ortonormalidad de las columnas. Este método no es óptimo, ni nos garantiza, en un principio, la existencia de dicha 1-dilatación.

**Proposición 1.27.** Sea  $A$  una matriz en representación de una determinada contracción. Entonces la extensión numérica  $W(A)$  está contenida en el disco unidad  $\overline{\mathbb{D}}$ .

**Demostración.** Consideremos un número complejo  $w \in W(A)$ , entonces existe un  $x \in \mathbb{C}^n$  unitario tal que  $w = \langle x | Ax \rangle$ . Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se cumple que

$$|w| = |\langle x | Ax \rangle| \leq \|x\| \|Ax\|.$$

Si tenemos además en cuenta que  $A$  representa a un operador lineal continuo y que tiene norma menor o igual que 1, vemos que

$$|w| = |\langle x | Ax \rangle| \leq \|x\| \|Ax\| \leq \|A\| \leq 1.$$

Por tanto, se tiene que  $w \in \overline{\mathbb{D}}$  verificando así la contención. |

### 1.3 Operador desplazamiento

En la sección anterior hemos hablado de operadores en general. Es en esta en la que vamos a estudiar un operador concreto, el operador desplazamiento. El estudio de este se tiene que hacer cuidadosamente. En primer lugar, tenemos que construir un espacio de Hilbert poco conocido, el espacio de Hardy, y a partir de él estudiar cómo se comporta nuestro operador en distintos subespacios.

Debido a que los conceptos que aquí se tratan, pese a ser elementales, son algo nuevos, necesitan de un estudio y una construcción detallados.

**Proposición 1.28.** El espacio de las funciones complejas de módulo al cuadrado integrable, en el sentido de Lebesgue,  $L^2(\mathbb{T})$ , es un espacio de Hilbert con el producto

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{i\theta})} g(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}, \quad (1.14)$$

donde  $d\theta/2\pi$  denota la medida normalizada de Lebesgue.

**Observación 1.29.** En este espacio, si dos funciones son iguales salvo un conjunto de medida nula entonces tienen la misma integral. Es por ello que en lugar de funciones se trata con clases de equivalencia. Aún así, tratamos los elementos de  $L^2(\mathbb{T})$  como si fuesen funciones.

**Proposición 1.30.** El conjunto de funciones  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  con  $e_n(z) = z^n$  es un conjunto ortonormal de  $L^2(\mathbb{T})$ . No solo eso, también es un conjunto completo, es decir, una base de nuestro espacio.

**Demostración.** Este es un resultado básico del Análisis de Fourier. Aún así, vamos a ver la primera parte. Si al lector le interesa ver una demostración más completa, le recomendamos [12].

$$\begin{aligned}\|e_n\|^2 &= \langle e_n | e_n \rangle = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} e^{in\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} = 1 \\ \langle e_n | e_m \rangle &= \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} e^{im\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{-i}{2\pi(m-n)} \left[ e^{i(m-n)\theta} \right]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

**Observación 1.31.** Dada un función  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , podemos escribir

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta},$$

donde  $a_n = \langle e_n | f \rangle = \hat{f}(n)$ .

Pasemos ahora a un segundo espacio denominado espacio de Hardy,  $H^2(\mathbb{D})$ . Consideremos una función  $f$  analítica definida como  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  en  $\mathbb{D}$ , construimos  $f_r : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$  para  $0 < r < 1$ . Obtenemos así una función continua  $f_r \in L^2(\mathbb{T})$ . Teniendo en cuenta que  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal y aplicando la identidad de Parseval, se cumple

$$\begin{aligned}\|f_r(e^{i\theta})\|_{L^2(\mathbb{T})} &= \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^n r^m \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.\end{aligned}$$

Estas integrales crecen en cuanto  $r$  crece, por tanto, definimos  $H^2(\mathbb{D})$  como sigue:

**| Definición 1.32 (Espacio de Hardy).** Se define el espacio de Hardy ( $H^2(\mathbb{D})$ ) como el conjunto de funciones analíticas  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  para las cuales

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$$

La norma en este espacio se define como

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 = \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi}. \quad (1.15)$$

**Observación 1.33.** Como podemos expresar  $f \in H^2(\mathbb{D})$  como  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , se cumple que

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 = \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

Este espacio puede ser observado desde otro punto de vista gracias al teorema de Fatou del límite radial.

**| Teorema 1.34 (Teorema del límite radial de Fatou).** Sea  $f \in H^2(\mathbb{D})$ , entonces el límite radial

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta}) = f^*(e^{i\theta}) \quad (1.16)$$

existe casi en todo  $\mathbb{T}$ . Donde  $f^* = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{r_n} \in L^2(\mathbb{T})$  con  $r_n \rightarrow 1^-$ .

**Demostración.** La prueba de este teorema se encuentra en [9, p. 28]. |

A partir del Teorema 1.34 podemos construir un producto escalar en el espacio  $H^2(\mathbb{D})$ .

**| Definición 1.35.** Dadas dos funciones  $f, g \in H^2(\mathbb{D})$  se define el producto escalar como

$$\langle f | g \rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_0^{2\pi} \overline{f(re^{i\theta})} g(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}. \quad (1.17)$$

**Observación 1.36.** Teniendo en cuenta el Teorema de la Convergencia Dominada y el Teorema 1.34 se cumple que

$$\langle f | g \rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_0^{2\pi} \overline{f(re^{i\theta})} g(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \overline{f^*(re^{i\theta})} g^*(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = \langle f^* | g^* \rangle_{L^2(\mathbb{T})}. \quad (1.18)$$

Es por ello que podemos extender en casi todo punto de  $\mathbb{T}$  toda función  $f \in H^2(\mathbb{D})$  por  $f^*$ . Esto hace que sea habitual identificar  $H^2(\mathbb{D})$  con el subespacio vectorial cerrado de  $L^2(\mathbb{T})$  dado por

$$H^2 = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0 \text{ para } n < 0\}. \quad (1.19)$$

Como el producto escalar es una función continua en cada una de sus componentes, el subespacio anterior es cerrado por ser intersección de preimágenes de espacios cerrados a través de funciones continuas.

En lo que resta de tema, vamos a identificar  $H^2(\mathbb{D})$  con  $H^2$ , y la norma y el producto escalar de  $H^2(\mathbb{D})$  con el de  $L^2(\mathbb{T})$ .

**Ejemplo 1.37.** Veamos algunos ejemplos de funciones dentro del espacio de Hardy.

1. Como cabe de esperar, un producto de Blaschke  $B$  es una función del espacio de Hardy. Son analíticas en  $\mathbb{D}$ , acotadas por 1 en  $\mathbb{D}$ , y por tanto el límite de (1.15) es finito.
2. Los polinomios son funciones que se encuentran trivialmente en  $H^2(\mathbb{D})$ .

Vamos a estudiar ahora más a fondo un ejemplo que nos va a ser útil a lo largo del resto del capítulo.

**| Definición 1.38 (Núcleo de Cauchy).** Dado un elemento  $a \in \mathbb{D}$  definimos el núcleo reproductor o núcleo de Cauchy a la función

$$k_a(z) = \frac{1}{1 - \bar{a}z}. \quad (1.20)$$

**Proposición 1.39.** Dado  $a \in \mathbb{D}$ , se cumple que  $k_a \in H^2(\mathbb{D})$  con norma

$$\|k_a\|^2 = \frac{1}{1 - |a|^2}.$$

Además, si  $f \in H^2(\mathbb{D})$ , se cumple que

$$\langle k_a | f \rangle = f(a). \quad (1.21)$$

**Demostración.** Mediante el mismo razonamiento al que hemos recurrido en el Teorema 1.3 y en el Lema 1.4,  $k_a$  no tiene polos en  $\mathbb{D}$  y por tanto, es analítica. Si consideramos la norma del denominador

$$|1 - \bar{a}z|^2 = 1 + |a|^2|z|^2 - 2\Re(\bar{a}z) \geq 1 + |a|^2|z|^2 - 2|a||z| = (1 - |a||z|)^2.$$

A partir de esta desigualdad, si tenemos en cuenta que  $z \in \mathbb{D}$ , se cumple que

$$\begin{aligned} |1 - \bar{a}z|^2 &\geq (1 - |a|)^2 \quad \forall z \in \mathbb{D} \\ \Rightarrow |k_a(z)|^2 &\leq \frac{1}{(1 - |a|)^2} \quad \forall z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Afirmamos así que es acotada, con lo que el límite radial es finito.

A través de la serie geométrica, es inmediato llegar a que

$$k_a(z) = \frac{1}{1 - \bar{a}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}^n z^n,$$

con lo que  $k_a \in H^2(\mathbb{D})$ . Si tenemos en cuenta la Observación 1.33, vemos que

$$\|k_a\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^{2n} = \frac{1}{1 - |a|^2}.$$

Probemos ahora el último resultado. En primer lugar, es fácil de comprobar que

$$\langle k_a | e_n \rangle = \overline{\hat{k}_a(n)} = \bar{a}^n.$$

Como el producto escalar es una función lineal en la segunda componente, se cumple que, dado un polinomio  $p \in \mathbb{C}[z] \subset H^2(\mathbb{D})$ ,

$$\langle k_a | p \rangle = p(a).$$

Además, los polinomios son densos en  $L^2(\mathbb{T})$  ([4, p. 28]) y por tanto los son en el subespacio  $H^2(\mathbb{D})$ . Si a esto le sumamos que el producto escalar es una función continua, tenemos por último que

$$\langle k_a | f \rangle = f(a)$$

para cualquier  $f$  función analítica. |

El núcleo de Cauchy es una función recurrente en el análisis de funciones de variable compleja, debido a que está involucrado en grandes teoremas de esta rama mencionada. Para nosotros será útil a la hora de construir subespacios de  $H^2$  gracias a sus propiedades.

Ahora que ya hemos construido el espacio de Hardy, es hora de hablar del operador principal que va a ser clave a la hora de conectar los productos de Blaschke con la extensión numérica.

**| Definición 1.40 (Operador desplazamiento).** Se define el operador desplazamiento  $S: H^2(\mathbb{D}) \rightarrow H^2(\mathbb{D})$  como aquel que aplica  $f \in H^2(\mathbb{D})$  en  $S(f)$  definida por

$$S(f)(z) = zf(z).$$

**Observación 1.41.** Si a cada función  $f \in H^2(\mathbb{D})$  le asociamos el vector correspondiente a los coeficientes del desarrollo en serie

$$f \rightarrow (a_0, a_1, \dots).$$

A la función  $Sf$  le corresponde

$$Sf \rightarrow (0, a_0, a_1, \dots).$$

Como su nombre indica, el operador desplazamiento, valga la redundancia, desplaza los coeficientes del desarrollo en serie añadiendo un término nulo. Esto nos permite ver que, bajo la definición (1.19), el operador  $S$  lleva funciones de Hardy en funciones de Hardy.

**Observación 1.42.** Fijémonos que se cumple

$$\begin{aligned} S(f)(z) &= z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} \\ \Rightarrow \|Sf\|^2 &= 0 + \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \|f\|^2. \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.43.** Con lo que conocemos sobre operadores y sobre la extensión numérica, podemos calcular  $W(S)$ . A través de la desigualdad de Cauchy-Schwartz con  $f \in H^2(\mathbb{D})$  de norma 1, tenemos

$$|\langle f | Sf \rangle| \leq \|f\| \|Sf\| = 1.$$

Luego,  $W(S) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ . Sea  $a \in \mathbb{D}$ , consideremos el núcleo de Cauchy normalizado

$$\tilde{k}_a(z) = \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-\bar{a}z}$$

que cumple

$$\langle \tilde{k}_a | S\tilde{k}_a \rangle = (1-|a|^2) \langle k_a | Sk_a \rangle = (1-|a|^2) Sk_a(a) = \frac{a(1-|a|^2)}{1-|a|^2} = a,$$

de modo que  $\mathbb{D} \subseteq W(S) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ . Veamos si la frontera del disco unidad está contenida en la extensión numérica de  $S$ . Supongamos  $\lambda \in W(S) \cap \mathbb{T}$ , entonces existe una función  $g \in H^2(\mathbb{D})$  con norma 1 que cumple  $\langle g | Sg \rangle = \lambda$

$$1 = |\lambda| = |\langle g | Sg \rangle| \leq \|Sg\| \|g\| \leq 1.$$

En concreto,  $|\langle g | Sg \rangle| = \|Sg\| \|g\|$ , se alcanza entonces la igualdad de Cauchy-Schwartz. Por tanto existe un escalar  $\mu \in \mathbb{C}$  con  $Sg = \mu g$ . Pero esto es imposible pues se tendría que cumplir  $zg(z) = \mu g(z) \forall z \in \mathbb{D}$ , lo cual es cierto solo si  $g(z) = 0$ .

Concluimos entonces que  $W(S) = \mathbb{D}$ .



Si el operador desplazamiento es el operador más importante en el estudio de este tema, el operador *retroceso* es el segundo más importante.

**Definición 1.44 (Operador retroceso).** Definimos el operador retroceso  $S^* : H^2(\mathbb{D}) \rightarrow H^2(\mathbb{D})$  como el operador que me lleva una función  $f \in H^2(\mathbb{D})$  tal que  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  en la función

$$S^*(f)(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n. \quad (1.22)$$

**Observación 1.45.** Representamos  $f \in H^2(\mathbb{D})$  mediante la sucesión  $(a_0, a_1, \dots)$  donde  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . El operador desplazamiento construye una aplicación de la forma

$$(a_0, a_1, \dots) \rightarrow (a_1, a_2, \dots).$$

El hecho de que hayaamos denotado al operador retroceso por  $S^*$  no es mera casualidad. La siguiente proposición aclara este hecho.

**Proposición 1.46.** El operador retroceso  $S^*$  es el adjunto del operador desplazamiento  $S$ .

**Demostración.** Para probar esto, simplemente tenemos que comprobar que se cumple la igualdad

$$\langle Sf | g \rangle = \langle f | S^* g \rangle$$

para todo  $f, g \in H^2(\mathbb{D})$ . Si  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  y  $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$ . Teniendo en cuenta la linealidad del producto escalar, se cumple:

$$\begin{aligned} \langle Sf | g \rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} \middle| \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_n} b_m \langle z^{n+1} | z^m \rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_n} b_m \delta_{n+1, m} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} b_{n+1} \\ \langle f | S^* g \rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \middle| \sum_{m=0}^{\infty} b_{m+1} z^m \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_n} b_{m+1} \langle z^n | z^m \rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_n} b_{m+1} \delta_{n, m} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} b_{n+1}. \end{aligned}$$

■

### 1.3.1 Compresión del operador Desplazamiento.

Como vamos a ver en el capítulo 2, la clave para construir las curvas de Poncelet es el operador desplazamiento. En concreto nos va a interesar su representación en

subespacios de dimensión finita de  $H^2$ . Pero para ver esto, primero tenemos que ver qué subespacios tienen un buen comportamiento frente al operador desplazamiento.

**Definición 1.47 (Funciones internas).** Sea  $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ , decimos que es una función interna si es analítica, acotada y cumple que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} |u(re^{i\theta})| = 1$$

en casi todo  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

**Definición 1.48.** Dado un subespacio  $M \subseteq H^2(\mathbb{D})$  decimos que es invariante bajo el operador  $S$  si es cerrado y cumple  $S(M) \subseteq M$ .

**Teorema 1.49 (Teorema de Beurling).** Un subespacio  $M \subseteq H^2(\mathbb{D})$  no trivial, es invariante bajo el operador  $S$  si y solo si existe una función interna  $u$  tal que  $M = uH^2(\mathbb{D})$ , donde

$$uH^2(\mathbb{D}) = \{uh : h \in H^2(\mathbb{D})\}. \quad (1.23)$$

**Demostración.** En esta demostración probaremos solo la implicación hacia la izquierda. La otra implicación queda recogida en la referencia [9, p.79].

⊆ Consideremos  $f \in uH^2(\mathbb{D})$ , entonces existe un  $h \in H^2(\mathbb{D})$ , de modo que  $f = uh \in uH^2(\mathbb{D})$ . Se cumple por tanto:

$$Sf(z) = zf(z) = zu(z)h(z) = u(z)(Sh(z)) \in uH^2(\mathbb{D}).$$

Queda así claro que  $S(uH^2(\mathbb{D})) \subseteq uH^2(\mathbb{D})$ . Veamos ahora que es un subespacio cerrado. Que es subespacio vectorial, es decir, cerrado para la suma y para el producto por escalares, es inmediato a partir de la definición. Veamos ahora que es cerrado. Para ello vamos a ver que toda sucesión convergente, converge a un vector del espacio. Consideremos un  $\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq uH^2(\mathbb{D})$ , con  $f_n \rightarrow f$ . Existe entonces un conjunto  $\{h_n\}_{n \geq 1} \subseteq H^2(\mathbb{D})$  tal que  $f_n = uh_n \forall n \geq 1$ . Si tenemos en cuenta que  $H^2(\mathbb{D})$  es un subespacio cerrado de  $L^2(\mathbb{T})$  y que el módulo de  $u$  está acotado por 1 al ser una función interna, entonces

$$\|f_n - f_m\| = \|uh_n - uh_m\| = \|h_n - h_m\|.$$

Como  $f_n \rightarrow f$ , entonces es de Cauchy, por lo que  $\{h_n\}_{n \geq 1}$  es de Cauchy en  $H^2(\mathbb{D})$ , espacio de Hilbert. De modo que existe  $h \in H^2(\mathbb{D})$  tal que  $h_n \rightarrow h$ . En consecuencia

$$\|f_n - uh\| = \|uh_n - uh\| = \|h_n - h\| \rightarrow 0.$$

Luego  $f_n \rightarrow uh \in uH^2(\mathbb{D})$  como queríamos demostrar. |

**Lema 1.50.** Sea  $B$  un producto finito de Blaschke, y sea  $f \in H^2(\mathbb{D})$ . Entonces  $f$  se anula en los ceros de  $B$  (según multiplicidad) si y solo si  $f \in BH^2(\mathbb{D})$ .

**Demostración.**  $\Leftarrow$  Es claro que si  $f \in BH^2(\mathbb{D})$ , entonces  $f$  se anula en los ceros de  $B$ .

$\Rightarrow$  Supongamos ahora que  $B$  tiene ceros  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{D}$  (repetimos los ceros según su multiplicidad) y  $f$  se anula en estos. Como  $f$  se anula en  $a_1, a_2, \dots, a_n$  y es analítica, se cumple que

$$f(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_n) g(z)$$

con  $g$  una función analítica. Como bien hemos razonado muchas veces anteriormente  $(1 - \overline{a_j}z)$  no se anula en  $\overline{\mathbb{D}} \forall j = 1, \dots, n$ . Por tanto

$$f(z) = \frac{z - a_1}{1 - \overline{a_1}z} \cdots \frac{z - a_n}{1 - \overline{a_n}z} g_1(z), \quad (1.24)$$

donde  $g_1$  es también analítica en  $\mathbb{D}$ . Tenemos entonces que  $f = Bg_1$ . Solo nos quedaría probar que  $g_1 \in H^2(\mathbb{D})$ . Como los ceros de  $B$  se encuentran en  $\mathbb{D}$  y hay un número finito de estos, existen  $\varepsilon > 0$  y  $s > 0$  tales que  $|B(z)| > \varepsilon$  para todo  $s < |z| < 1$ . Se cumple entonces que

$$|(g_1)_r(e^{i\theta})| = |g_1(re^{i\theta})| = \frac{|f(re^{i\theta})|}{|B(e^{i\theta})|} < \frac{|f(re^{i\theta})|}{\varepsilon} = \frac{|f_r(e^{i\theta})|}{\varepsilon} \quad \forall r > s.$$

Si tenemos en cuenta que  $f \in H^2(\mathbb{D})$ , por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se cumple que la integral de  $g_1$  dada por (1.15) es finita. Por tanto  $g_1 \in H^2(\mathbb{D})$ . Finalmente  $f \in BH^2(\mathbb{D})$  como queríamos demostrar. |

**Proposición 1.51.** Un subespacio  $M \subseteq H^2(\mathbb{D})$  no trivial, es invariante bajo el operador  $S^*$  si y solo si existe una función interna  $u$  tal que  $M = (uH^2(\mathbb{D}))^\perp$  espacio ortogonal a  $uH^2(\mathbb{D})$ .

**Demostración.**  $\Leftarrow$  Supongamos que  $M = (uH^2(\mathbb{D}))^\perp$  siendo  $u$  una función interna, por las propiedades del complemento ortogonal es un espacio vectorial cerrado. Consideremos  $f \in (uH^2(\mathbb{D}))^\perp$  y  $g \in uH^2(\mathbb{D})$ , entonces

$$\langle S^* f | g \rangle = \langle f | Sg \rangle = 0,$$

ya que por el Teorema 1.49 se tiene que  $Sg \in uH^2(\mathbb{D})$  para todo  $g \in uH^2(\mathbb{D})$ . De modo que  $S^* f \in (uH^2(\mathbb{D}))^\perp$ . En consecuencia  $M$  es invariante para el operador  $S^*$ .

$\Rightarrow$  Supongamos ahora que  $M \subseteq H^2(\mathbb{D})$  es un subespacio invariante para  $S^*$ . De manera completamente análoga podemos llegar a que  $S(M^\perp) \subseteq M^\perp$ . Por el Teorema

1.49 existe una función interna  $u$  tal que  $M^\perp = uH^2(\mathbb{D})$ . Como  $M$  es un subespacio vectorial cerrado se cumple que  $M = (M^\perp)^\perp$ , de modo que  $M = (uH^2(\mathbb{D}))^\perp$ . |

**Observación 1.52.** En lo que sigue del tema vamos a notar a  $(uH^2)^\perp$  como  $K_u$ .

**Proposición 1.53.** Sea  $B$  un producto de Blaschke de grado  $n$  con ceros  $a_1, \dots, a_n$  distintos. Entonces  $K_B = \langle k_{a_1}, \dots, k_{a_n} \rangle$ .

Es importante destacar que por ser un subespacio generado por un número finito de vectores, es también cerrado.

**Demostración.** Vamos a probar esto por doble contención.

$\supseteq$  Sea  $f \in BH^2(\mathbb{D})$  entonces  $f = B \cdot h$  con  $h \in H^2(\mathbb{D})$ . Sabemos por 1.39 que

$$\langle k_{a_j} | Bh \rangle = B(a_j)h(a_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Se sigue entonces que  $k_{a_j} \in (BH^2(\mathbb{D}))^\perp$ . Por tanto

$$\langle k_{a_1}, \dots, k_{a_n} \rangle \subseteq (BH^2(\mathbb{D}))^\perp.$$

$\subseteq$  Para demostrar esta inclusión vamos a demostrar que  $BH^2(\mathbb{D}) \supseteq \langle k_{a_1}, \dots, k_{a_n} \rangle^\perp$ . Seguidamente tomamos el complemento ortogonal, invirtiendo así las contenciones y probando lo que queremos.

Sea  $f \in \langle k_{a_1}, \dots, k_{a_n} \rangle^\perp$ . Se cumple particularmente que  $f(a_j) = \langle k_{a_j} | f \rangle = 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Como  $f$  se anula en los ceros de  $B$ , por el Lema 1.50,  $f \in BH^2(\mathbb{D})$ . Terminamos así la demostración. |

**Observación 1.54.** Si cada cero  $a_j$  de  $B$  tiene multiplicidad  $m_j$ , entonces basta tomar  $\langle k_{a_j}^l, j = 1, \dots, n, l = 1, \dots, m_j \rangle = K_B$ .

**Proposición 1.55.** Sea  $B$  un producto finito de Blaschke con  $n$  ceros  $a_1, \dots, a_n$  distintos. Denotemos por  $\tilde{k}_{a_j}$  el núcleo de Cauchy normalizado y

$$\varphi_{a_j}(z) = \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j}z}. \quad (1.25)$$

Entonces el conjunto

$$\left\{ \tilde{k}_{a_1} \prod_{j=2}^n \varphi_{a_j}, \tilde{k}_{a_2} \prod_{j=3}^n \varphi_{a_j}, \dots, \tilde{k}_{a_{n-1}} \varphi_{a_n}, \tilde{k}_{a_n} \right\} \quad (1.26)$$

forma una base ortonormal de  $K_B$ .

**Demostración.** Es evidente, gracias a la proposición 1.53, que  $\tilde{k}_{a_n}$  pertenece a  $K_B$ , pero tenemos que ver que el resto también lo hacen. Tenemos entonces que comprobar que para todo  $j = 1, \dots, n$  y  $h \in H^2$  se cumple que

$$\langle \tilde{k}_{a_j} \prod_{k=j+1}^n \varphi_{a_k} | Bh \rangle = 0.$$

Teniendo en cuenta la definición de producto escalar

$$\langle \tilde{k}_{a_j} \prod_{k=j+1}^n \varphi_{a_k} | Bh \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{\tilde{k}_{a_j}(e^{i\theta}) \prod_{k=j+1}^n \varphi_{a_k}(e^{i\theta})} \prod_{l=1}^n \varphi_{a_l}(e^{i\theta}) h(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Si recordamos de la Proposición 1.3 que  $|\varphi_{a_j}(e^{i\theta})| = 1$ , en consecuencia

$$\langle \tilde{k}_{a_j} \prod_{k=j+1}^n \varphi_{a_k} | Bh \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{\tilde{k}_{a_j}(e^{i\theta})} \prod_{l=1}^j \varphi_{a_l}(e^{i\theta}) h(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = \langle \tilde{k}_{a_j} | \prod_{l=1}^j \varphi_{a_l} \rangle = \prod_{l=1}^j \varphi_{a_l}(a_j) = 0$$

pues  $\varphi_{a_j}(a_j) = 0$ . Por tanto, todos los elementos de nuestro conjunto pertenecen a  $K_B$ . Nos queda, por último, comprobar que es un conjunto ortonormal. Mediante razonamientos totalmente análogos a los que ya hemos hecho, es evidente que

$$\langle \tilde{k}_{a_j} \prod_{k=j+1}^n \varphi_{a_k} | \tilde{k}_{a_j} \prod_{k=j+1}^n \varphi_{a_k} \rangle = \langle \tilde{k}_{a_j} | \tilde{k}_{a_j} \rangle = 1.$$

Además, suponiendo que  $q > p$  se verifica

$$\langle \tilde{k}_{a_q} \prod_{j=q+1}^n \varphi_{a_j} | \tilde{k}_{a_p} \prod_{j=p+1}^n \varphi_{a_j} \rangle = \langle \tilde{k}_{a_q} | \tilde{k}_{a_p} \prod_{j=p+1}^q \varphi_{a_j} \rangle = 0.$$

Tenemos entonces  $n$  vectores ortonormales del espacio  $K_B$  de dimensión  $n$ , por tanto estos actúan como base. |

**Definición 1.56 (Compresión del operador desplazamiento).** Sea  $B$  un  $n$ -producto de Blaschke,  $S$  el operador desplazamiento y  $P_B$  la proyección ortogonal sobre  $K_B$ . Definimos  $S_B : K_B \rightarrow K_B$  como

$$S_B = P_B S|_{K_B}. \quad (1.27)$$

El operador  $S_B$  se conoce como la compresión del operador desplazamiento por  $B$ .

Nos interesa ahora conocer la representación del operador  $S_B$  con respecto de la base (1.26). Para ello vamos a obtener la representación de  $S_B^*$ . Como  $K_B$  es invariante para el operador  $S^*$  se cumple que  $S_B^* = S^*|_{K_B}$ , con lo que simplemente tenemos que saber cómo actúa  $S^*$  sobre los elementos de la base.

**Proposición 1.57.** Consideremos  $\{f_1, \dots, f_r\}$  un conjunto de funciones de  $H^2$  y sea  $S^*$  el operador retroceso. Entonces se cumple que

$$S^* \left( \prod_{i=1}^r f_i \right) (z) = \sum_{i=1}^r \prod_{j=1}^{i-1} f_j(z) S^*(f_i)(z) \prod_{k=i+1}^r f_k(0). \quad (1.28)$$

**Demostración.** Vamos a demostrar esto por inducción. Es obvio que se cumple para el caso  $n = 1$ . Antes de pasar a la hipótesis de inducción veamos el caso en que  $n = 2$ .

$$\begin{aligned} S^*(fg)(z) &= \frac{f(z)g(z) - f(0)g(0)}{z} = \\ &= \frac{f(z)(g(z) - g(0))}{z} + \frac{g(0)(f(z) - f(0))}{z} = f(z)S^*(g)(z) + g(0)S^*(f)(z) \end{aligned}$$

Supongamos entonces que se cumple la fórmula (1.28) para  $n$ , veamos que también se cumple para  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} S^* \left( \prod_{i=1}^{n+1} f_i \right) (z) &= S^* \left( f_{n+1} \prod_{i=1}^n f_i \right) (z) = \prod_{i=1}^n f_i(z) S^*(f_{n+1})(z) + f_{n+1}(0) S^* \left( \prod_{i=1}^n f_i \right) (z) \\ &= \prod_{i=1}^n f_i(z) S^*(f_{n+1})(z) + f_{n+1}(0) \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^{i-1} f_j(z) S^*(f_i)(z) \prod_{k=i+1}^n f_k(0) \\ &= \prod_{i=1}^n f_i(z) S^*(f_{n+1})(z) + \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^{i-1} f_j(z) S^*(f_i)(z) \prod_{k=i+1}^{n+1} f_k(0) = \sum_{i=1}^{n+1} \prod_{j=1}^{i-1} f_j(z) S^*(f_i)(z) \prod_{k=i+1}^{n+1} f_k(0) \end{aligned}$$

I

Si escribimos los elementos de la base como

$$v_i = \prod_{r=0}^{n-(i+1)} \varphi_{a_{n-r}} \cdot \tilde{k}_{a_i}$$

y tenemos en cuenta

$$\begin{aligned} S^*(\tilde{k}_{a_i}) &= \overline{a_i} \tilde{k}_{a_i} \\ S^*(\varphi_{a_{n-r}}) &= \sqrt{1 - |a_i|^2} \tilde{k}_{a_i} \end{aligned}$$

además de la expresión (1.28), llegamos a que

$$\begin{aligned} S^* \left( \prod_{r=0}^{n-(i+1)} \varphi_{a_{n-r}} \cdot \tilde{k}_{a_i} \right) &= \\ &= \overline{a_i} \prod_{r=0}^{n-(i+1)} \varphi_{a_{n-r}} \cdot \tilde{k}_{a_i} + \sqrt{1 - |a_i|^2} \sum_{l=0}^{n-(i+1)} \sqrt{1 - |a_{n-l}|^2} \prod_{m=l+1}^{n-(i+1)} (-a_m) \prod_{p=0}^{l-1} \varphi_{a_{n-p}} \tilde{k}_{a_{n-l}}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Si consideramos los vectores de la base, nos queda la matriz

$$[S_B^*]_{ij} = \begin{cases} \overline{a_j} & \text{si } i = j, \\ \left( \prod_{k=i+1}^{j-1} (-a_k) \right) \sqrt{1 - |a_i|^2} \sqrt{1 - |a_j|^2} & \text{si } i > j, \\ 0 & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Si tomamos ahora la matriz conjugada traspuesta (que no es más que la representación matricial del operador adjunto) nos queda finalmente la representación de  $S_B$  en el espacio  $K_B$  con respecto de la base (1.26)

$$[S_B]_{ij} = \begin{cases} a_j & \text{si } i = j, \\ \left( \prod_{k=i+1}^{j-1} (-\overline{a_k}) \right) \sqrt{1 - |a_i|^2} \sqrt{1 - |a_j|^2} & \text{si } i < j, \\ 0 & \text{si } i > j. \end{cases} \quad (1.30)$$

Si nos fijamos podemos fácilmente comprobar que esta matriz es triangular superior.

Estas matrices admiten 1-dilataciones en función de un parámetro  $\lambda \in \mathbb{T}$ . Para obtener las 1-dilataciones  $U_\lambda$  basta añadir una fila y una columna a la matriz anterior e imponer las condiciones de ortonormalidad. Nos queda por tanto

$$[U_\lambda]_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } 1 \leq i, j \leq n, \\ \lambda \left( \prod_{k=i+1}^{j-1} (-\overline{a_k}) \right) \sqrt{1 - |a_j|^2} & \text{si } i = n+1 \text{ y } 1 \leq j \leq n, \\ \left( \prod_{k=i+1}^n (-\overline{a_k}) \right) \sqrt{1 - |a_i|^2} & \text{si } j = n+1 \text{ y } 1 \leq i \leq n, \\ \lambda \prod_{k=1}^n (-\overline{a_k}) & \text{si } i = j = n+1. \end{cases} \quad (1.31)$$

**Definición 1.58.** Dada una matriz  $A$  diremos que está en forma estándar si es de la forma (1.30).

**Observación 1.59.** Siguiendo la Proposición 1.26 las matrices en forma estándar son contracciones por existir 1-dilataciones de las mismas. Esto nos indica, junto con la Proposición 1.27 que la extensión numérica de estas matrices está dentro de  $\mathbb{D}$ . Esto es razonable teniendo en cuenta que ya vimos que la extensión numérica del operador desplazamiento  $S$  es el disco abierto  $\mathbb{D}$  y las matrices en forma estándar representan restricciones del operador  $S$  en distintos subespacios.

**Ejemplo 1.60.** Consideremos por simplicidad  $a_1, a_2 \in \mathbb{D}$ . La matriz asociada al operador  $S_B$  con

$$B(z) = \frac{z - a_1}{1 - \overline{z}a_1} \frac{z - a_2}{1 - \overline{z}a_2}$$

es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \sqrt{1-|a_1|^2}\sqrt{1-|a_2|^2} \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Si recordamos ahora la Proposición 1.19, tenemos que la extensión numérica de nuestra matriz  $A$  no es más que la elipse de focos  $a_1$  y  $a_2$  y eje menor  $\sqrt{\operatorname{tr}(A^*A) - |a_1|^2 - |a_2|^2}$ . En concreto el eje menor vale:

$$\begin{aligned} A^*A &= \begin{pmatrix} \overline{a_1} & 0 \\ \sqrt{1-|a_1|^2}\sqrt{1-|a_2|^2} & \overline{a_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & \sqrt{1-|a_1|^2}\sqrt{1-|a_2|^2} \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} |a_1|^2 & * \\ * & |a_2|^2 + (1-|a_1|^2)(1-|a_2|^2) \end{pmatrix} \\ \sqrt{\operatorname{tr}(A^*A) - |a_1|^2 - |a_2|^2} &= \sqrt{1-|a_1|^2}\sqrt{1-|a_2|^2} = [A]_{12}. \end{aligned}$$

La 1-dilatación  $U_\lambda$  correspondiente a  $A$  es la matriz

$$U_\lambda = \begin{pmatrix} a_1 & \sqrt{1-|a_1|^2}\sqrt{1-|a_2|^2} & -\overline{a_2}\sqrt{1-|a_1|^2} \\ 0 & a_2 & \sqrt{1-|a_2|^2} \\ \lambda\sqrt{1-|a_1|^2} & -\lambda\overline{a_1}\sqrt{1-|a_2|^2} & \lambda\overline{a_1}a_2 \end{pmatrix}.$$

En la sección 3.1 hablaremos más de este caso particular y veremos una familia de curvas asociadas a este tipo de matrices.



## 2 | Curvas de Poncelet y productos de Blaschke.

En esta sección vamos a ver, por fin, la conexión de todos los fundamentos que hemos visto anteriormente. A través del concepto de curva de Poncelet vamos a relacionar los productos de Blaschke, la extensión numérica y el operador desplazamiento. Al final del capítulo, estudiaremos lo que se conoce como la clase  $S_n$  de matrices que va a ser clave para responder, parcialmente, una de las principales cuestiones que nos planteamos en este capítulo, ¿proviene los elipses de Poncelet de productos de Blaschke?

### 2.1 Curvas de Poncelet.

**| Teorema 2.1 (Teorema de Poncelet).** Sean  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{C}$  dos cónicas en un mismo plano. Si es posible encontrar para un  $n \geq 3$ , un polígono de  $n$  lados que simultáneamente se inscribe en  $\mathcal{D}$  (lo que significa que todos sus vértices se encuentran en  $\mathcal{D}$ ) y circunscrito alrededor de  $\mathcal{C}$  (lo que significa que todos sus bordes son tangentes a  $\mathcal{C}$ ), entonces es posible encontrar un número infinito de ellos. Cada punto de  $\mathcal{D}$  o  $\mathcal{C}$  es un vértice o una tangencia (respectivamente) de uno de dichos polígonos.

**Observación 2.2.** El Teorema de Poncelet está descrito para dos cónicas cualesquiera. En nuestro caso vamos a trabajar con la circunferencia unidad y una curva  $\mathcal{C}$  que en un principio no tiene por qué ser una cónica.

Este teorema se puede adaptar a un contexto más general si no nos restringimos solamente a cónicas. Para ello generalizamos el concepto de curva de Poncelet a través de la siguiente definición.

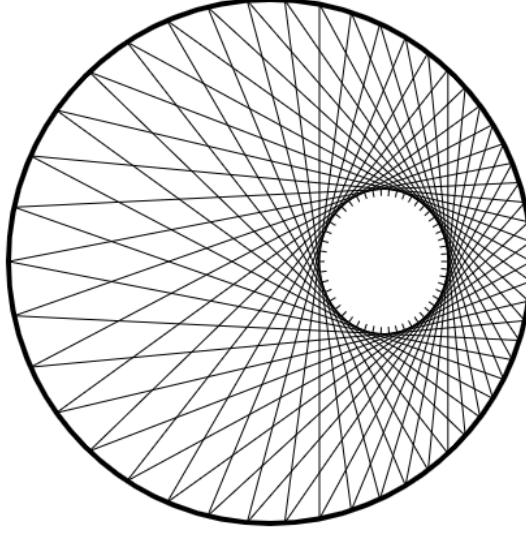


Figura 2.1: Ejemplo de 5-elipse de Poncelet. En este caso los polígonos no son convexos.

**Definición 2.3 (Curva de Poncelet).** Una curva diferenciable  $\mathcal{C}$  en  $\mathbb{D}$  decimos que tiene la propiedad de Poncelet o la  $n$ -propiedad de Poncelet, si para todo  $z \in \mathbb{T}$  existe un polígono de  $n$  lados inscrito en  $\mathbb{T}$  que circunscribe a  $\mathcal{C}$  y tiene  $z$  como un vértice. Diremos entonces que  $\mathcal{C}$  es una  $n$ -curva de Poncelet.

Nuestro objetivo va a ser construir curvas con esta propiedad. Es aquí donde realmente vamos a unificar todos los conocimientos previos. Antes de entrar en materia, veamos un resultado que nos va a permitir hacer una consideración genérica sobre los productos de Blaschke con los que vamos a trabajar.

**Proposición 2.4.** Dado un producto de Blaschke  $B$  de la forma

$$B(z) = \prod_{i=1}^n \frac{z - a_i}{1 - \overline{a_i}z}, \text{ con } a_i \in \mathbb{D}$$

entonces se cumple que

$$C := \frac{B - B(0)}{1 - \overline{B(0)}B} \quad (2.1)$$

es un producto de Blaschke con  $C(0) = 0$  e identifica puntos de la misma manera que  $B$ . Es decir, si  $B(z_1) = B(z_2)$  entonces  $C(z_1) = C(z_2)$ .

**Demostración.** Que  $C(0) = 0$  es inmediato; solo hay que sustituir. Si  $B(z_1) = B(z_2)$  es también sencillo ver que  $C(z_1) = C(z_2)$ . Solo nos quedaría ver que  $C$  es un producto de Blaschke. Para ello, vamos a recurrir a la caracterización 1.4 de los productos de

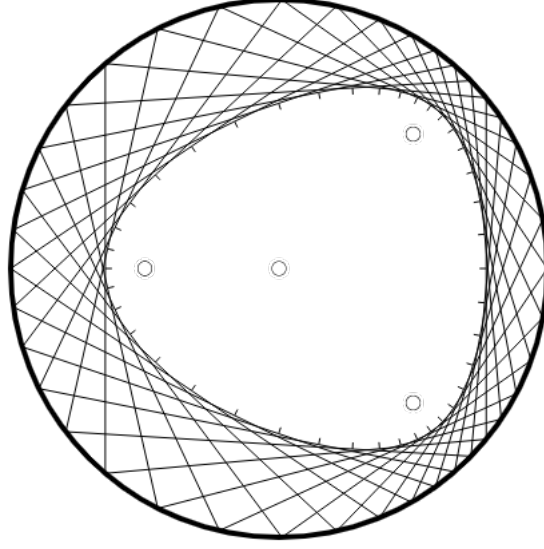


Figura 2.2: *Ejemplo de 4-curva de Poncelet.*

Blaschke. Podemos escribir  $C$  como

$$C(z) = (\psi \circ B)(z)$$

siendo

$$\psi(z) = \frac{z - B(0)}{z - \overline{B(0)}z}$$

el producto de Blaschke de grado 1 con cero en  $B(0)$ . Esta última función es un automorfismo del disco en el disco y de la circunferencia unidad en la circunferencia. De modo que, por composición, es inmediato que  $C$  es una función analítica en  $\overline{\mathbb{D}}$  que va del disco unidad en el disco y de la circunferencia unidad en la circunferencia. Por tanto,  $C$  es un producto de Blaschke. |

Este resultado nos va a permitir considerar todos los próximos productos de Blaschke de aquí en adelante con un cero en 0. En otras palabras, se cumple que  $B(0) = 0$ .

**Lema 2.5.** Sean  $S$  y  $T$  matrices  $(n+1) \times (n+1)$  que difieren solo en la  $(n+1, n+1)$  entrada

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & s \end{pmatrix} \text{ y } T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & t \end{pmatrix}$$

con  $A, B$  y  $C$  matrices  $n \times n$ ,  $n \times 1$  y  $1 \times n$ , respectivamente. Entonces se cumple que

$$\det S - \det T = (s - t) \det A \quad (2.2)$$

Este lema nos va a permitir demostrar uno de los principales teoremas de esta sección. Con él, vamos a estrechar la conexión entre los productos de Blaschke y la compresión del operador desplazamiento.

**| Teorema 2.6.** *Sea  $A$  una matriz  $(n-1) \times (n-1)$  en forma estándar 1.30. Para cada  $\lambda \in \mathbb{T}$ , denotamos por  $U_\lambda$  la 1-dilatación que aparece en 1.31. Sea  $B_1$  el producto de Blaschke de grado  $n-1$  con ceros en los autovalores de  $A$ . Entonces, los autovalores de  $U_\lambda$  son las  $n$  soluciones en  $\mathbb{T}$  de la ecuación  $B(z) = \lambda$  con  $B(z) := zB_1(z)$ .*

**Demostración.** Vamos a demostrar este resultado por inducción en el número  $k$  de ceros de  $B_1$ . Consideremos el producto de Blaschke normalizado con cero  $a_1 \in \mathbb{D}$ . Como sabemos, la matriz en forma estándar asociada es

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \end{pmatrix},$$

cuya familia de 1-dilataciones es la siguiente

$$U_\lambda = \begin{pmatrix} a_1 & \sqrt{1-|a_1|^2} \\ \lambda\sqrt{1-|a_1|^2} & -\lambda\overline{a_1} \end{pmatrix}.$$

Si buscamos ahora los autovalores de la anterior matriz, tenemos que resolver la ecuación  $\det(zI - U_\lambda) = 0$ . Realizamos los cálculos pertinentes y obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} z - a_1 & -\sqrt{1-|a_1|^2} \\ -\lambda\sqrt{1-|a_1|^2} & z + \lambda\overline{a_1} \end{array} \right| &= 0 \iff \\ \iff z(z - a_1) - \lambda(1 - \overline{a_1}z) &= 0 \iff \\ \iff B(z) = z \frac{z - a_1}{1 - \overline{a_1}z} &= \lambda. \end{aligned}$$

Planteemos como hipótesis de inducción que se cumple para  $k-1$  ceros que el polinomio característico es  $\det(zI - U_\lambda) = z \prod_{i=1}^{k-1} (z - a_i) - \lambda \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \overline{a_i}z)$ . Supongamos ahora que  $B_1$  tiene  $k$  ceros, si tenemos en cuenta la representación de la matriz  $U_\lambda$  ( $(k+1) \times (k+1)$ ) dada por (1.31), se cumple que

$$\det(zI - U_\lambda) = (z - a_k) \cdot V_1(z) + \sqrt{1-|a_k|^2} \cdot \det V_2(z),$$

siendo  $V_1(z)$  (resp.  $V_2(z)$ ) la matriz  $k \times k$  obtenida a partir de la matriz  $zI - U_\lambda$  al eliminar la  $k$ -ésima fila y la  $k$ -ésima columna (resp. la  $k$ -ésima fila y la  $(k+1)$ -ésima

columna). Si hacemos uso del Lema 2.5 para el cálculo del determinante de  $V_1(z)$  y  $V_2(z)$  tenemos

$$\begin{aligned} \det(zI - U_\lambda) &= (z - a_k)(-\overline{a_k}) \left[ \det(zI - U'_\lambda) + \left( -\frac{z}{\overline{a_k}} - z \right) \det(zI - A') \right] \\ &\quad + (1 - |a_k|^2) [\det(zI - U'_\lambda) + (-z) \det(zI - A')], \end{aligned}$$

donde  $A'$  es la  $(k-1) \times (k-1)$  matriz triangular superior que representa la compresión del operador desplazamiento con ceros  $a_1, \dots, a_{k-1}$  y  $U'_\lambda$  su 1-dilatación unitaria. Si hacemos uso de la hipótesis de inducción, tenemos

$$\begin{aligned} \det(zI - U_\lambda) &= (1 - \overline{a_k}z) \det(zI - U'_\lambda) + z [(z - a_k) - (1 - \overline{a_k}z)] \det(zI - A') \\ &= (1 - \overline{a_k}z) \left[ z \prod_{i=1}^{k-1} (z - a_i) - \lambda \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \overline{a_i}z) \right] \\ &\quad + z [(z - a_k) - (1 - \overline{a_k}z)] \prod_{i=1}^{k-1} (z - a_i) = \\ &= z \prod_{i=1}^k (z - a_i) - \lambda \prod_{i=1}^k (1 - \overline{a_i}z). \end{aligned}$$

En consecuencia, los autovalores de  $U_\lambda$  son aquellos que verifican

$$\begin{aligned} \det(zI - U_\lambda) = 0 &\iff z \prod_{i=1}^k (z - a_i) - \lambda \prod_{i=1}^k (1 - \overline{a_i}z) = 0 \iff \\ &\iff z \prod_{i=1}^k \frac{z - a_i}{1 - \overline{a_i}z} = \lambda \iff B(z) = \lambda \end{aligned}$$

**Proposición 2.7.** Sea  $B$  un producto de Blaschke y sea  $A$  la matriz en forma estándar 1.30 asociada. Entonces todos los autovalores de  $A$ , y por tanto los ceros de  $B$ , están en el interior de  $W(A)$ .

**Demostración.** Cambiar el orden de los ceros de  $B$  no altera el operador  $A$  en sí ni su extensión numérica, simplemente cambia el orden de las columnas. Por lo que si tomamos un autovalor  $a \in W(A)$ , podemos considerar

$$A = \begin{bmatrix} a & \sqrt{1-|a|^2}\sqrt{1-|b|^2} & \star \\ 0 & b & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \star \end{bmatrix}.$$

Si tomamos ahora vectores de norma 1 de la forma  $x = (x_1 \ x_2 \ 0 \dots 0)^T$  podemos ver que la extensión numérica de

$$A_2 = \begin{bmatrix} a & \sqrt{1-|a|^2}\sqrt{1-|b|^2} \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

está contenido en  $W(A)$ . Por la Proposición 1.19,  $W(A_2)$  no es más que la elipse de focos  $a$  y  $b$  y eje menor  $\sqrt{1-|a|^2}\sqrt{1-|b|^2}$ . Esta elipse es no degenerada y contiene al autovalor  $a$ , luego es un punto interior de  $W(A)$ . |

**Definición 2.8.** Se define una línea de apoyo de  $W(A)$  como una curva que corta a la frontera de  $W(A)$  en un punto (posiblemente con multiplicidad mayor que 1) o todo un intervalo.

**Lema 2.9.** Sea  $n > 1$  y  $A$  una matriz  $n \times n$ . Todo punto de  $W(A)$  en la curva definida por la frontera de esta, que no sea diferenciable, es un autovalor de  $A$ .

**Demostración.** Sea  $w$  en la frontera de  $W(A)$  no diferenciable. Como  $W(A)$  es cerrado y convexo, existen dos diferentes líneas de apoyo que pasan por  $w$ .

Como  $w \in W(A)$ , existe un vector unitario  $x \in \mathbb{C}^n$  tal que  $w = \langle x | Ax \rangle$ . Si  $x$  y  $Ax$  son linealmente dependientes entonces  $w$  es un autovalor y ya habríamos terminado. Supongamos que son linealmente independientes y consideremos el subespacio de  $\mathbb{C}^n$  dado por  $S = \langle x, Ax \rangle$ . Sea  $A_S = P_S A|_S$  sobre  $S$ , con  $P_S$  la proyección ortogonal sobre  $S$ . Vemos que

$$\langle x | A_S x \rangle = \langle x | P_S A|_S \rangle = \langle x | Ax \rangle = w, \quad (2.3)$$

de modo que  $w \in W(A|_S)$ . Por la proposición 1.19  $W(A|_S)$  es un disco elíptico. Este tiene que ser degenerado (un segmento) porque si no, el punto  $w$  sería interior o la frontera sería diferenciable. Además,  $w$  se debe encontrar en uno de los extremos del segmento por el mismo razonamiento que antes. En consecuencia,  $w$  es un autovalor de  $A|_S$ , de manera que

$$Ax = P_S A|_S x = A|_S x = wx. \quad (2.4)$$

Llegamos así a que  $w$  es un autovalor de  $A$ . |

**Lema 2.10.** Sea  $A$  una matriz  $(n-1) \times (n-1)$  en forma estándar y, para cada  $\lambda \in \mathbb{T}$ , sea  $U_\lambda$  la 1-dilatación unitaria de  $A$ . Entonces los autovalores de  $U_\lambda$  son todos distintos y son los vértices de un polígono convexo de  $n$  lados inscrito en  $\mathbb{T}$  y que circunscribe a  $W(A)$  con cada lado tangente a la frontera de la extensión numérica en exactamente un punto.

**Demostración.** Por la Proposición 1.5 y el Teorema 2.6 es claro que los autovalores,  $w_1, \dots, w_n$  de  $U_\lambda$  son distintos. Ordenamos estos por argumento creciente. También es obvio, por ser la matriz unitaria (sus autovalores son de módulo 1), que el polígono que forman está inscrito en  $\mathbb{T}$ . Es por ello que lo realmente interesante de la prueba es demostrar que dicho polígono circunscribe a  $W(A)$ .

En primer lugar, veamos que el segmento que une  $w_{n-1}$  y  $w_n$  corta a  $W(A)$ . Esta prueba se puede adaptar fácilmente a cualquier par de vértices  $w_j$  y  $w_{j+1}$  (los índices son tomados módulo  $n$ ).

Sea  $V = [I_{n-1}, 0]$ , que denota a una matriz  $(n-1) \times n$ . Como  $U_\lambda$  es unitaria, y por tanto normal, es unitariamente equivalente a una matriz  $(n+1) \times (n+1)$  diagonal  $D$  formada por los autovalores de  $U_\lambda$ . En consecuencia podemos escribir

$$A = VU_\lambda V^* = VXD X^* V^*$$

para una cierta matriz,  $n \times n$ ,  $X$  unitaria. Llamando  $V_1 = VX$  ( $(n-1) \times n$ ) tenemos que  $A = V_1 D V_1^*$ . Tomemos ahora la matriz,  $n \times n$ ,  $E_j = (e_{lm})$  tal que  $e_{jj} = 1$  y el resto ceros. Tenemos que

$$A = V_1 \left( \sum_{j=1}^n w_j E_j \right) V_1^*.$$

También se cumple que

$$\sum_{j=1}^n E_j = I_n$$

y por tanto,

$$\sum_{j=1}^n V_1 E_j V_1^* = I_{n-1}.$$

Consideremos ahora  $K_j = \ker(V_1 E_j V_1^*) \subseteq \mathbb{C}^{n-1}$ , vamos a encontrar un  $x \in \bigcap_{j=1}^{n-2} K_j \subset \mathbb{C}^{n-1}$ . Para ello, vamos a demostrar que esta intersección es no vacía por inducción sobre  $m$  para  $1 \leq m \leq n-2$ , viendo que

$$\dim \left( \bigcap_{j=1}^m K_j \right) \geq n-1-m.$$

Sin centrarnos en los elementos del producto de matrices, nos queda una matriz de la forma

$$V_1 E_j V_1^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 v & \alpha_2 v & \cdots & \alpha_{n-1} v \end{pmatrix}$$

con  $\alpha_i \in \mathbb{C}$  para todo  $i = 1, \dots, n-1$  y  $v \in \mathbb{C}^{n-1}$ . Con lo que  $\text{rg}(V_1 E_j V_1^*) \leq 1$  y por tanto

$$\dim \ker(V_1 E_j V_1^*) = n-1 - \text{rg}(V_1 E_j V_1^*) \geq n-2.$$

Esto es genérico para cualquier  $j$  luego  $\dim K_j \geq n-2 \forall j = 1, \dots, n$ , verificando así el primer paso de la demostración.

Vamos a suponer que  $\dim \left( \bigcap_{j=1}^m K_j \right) \geq n-1-m$  para  $1 \leq m \leq n-3$ . Si tenemos en cuenta nuestra hipótesis de inducción así como la fórmula de la dimensión de la intersección

$$\dim(S \cap T) = \dim S + \dim T - \dim(S + T), \quad (2.5)$$

llegamos a que

$$\begin{aligned} \dim \left( \bigcap_{j=1}^{m+1} K_j \right) &= \dim \left( \bigcap_{j=1}^m K_j \right) + \dim K_{m+1} - \dim \left( \left( \bigcap_{j=1}^m K_j \right) + K_{m+1} \right) \geq \\ &\geq (n-1-m) + (n-2) - (n-1) = n-1-(m+1). \end{aligned}$$

Se verifica entonces la desigualdad para todo  $1 \leq m \leq n-2$  planteada y tomando  $m = n-2$  tenemos que

$$\dim \left( \bigcap_{j=1}^{n-2} K_j \right) \geq 1.$$

Existe por tanto, un vector unitario  $x_0 \in \bigcap_{j=1}^{n-2} K_j$  con el que vamos a encontrar un punto de  $W(A)$  que pertenece también al segmento que une  $w_{n-1}$  y  $w_n$ .

$$\begin{aligned} \langle x_0 | A x_0 \rangle &= \langle x_0 | \sum_{j=1}^n w_j V_1 E_j V_1^* x_0 \rangle = \\ &= w_{n-1} \langle x_0 | V_1 E_{n-1} V_1^* x_0 \rangle + w_n \langle x_0 | V_1 E_n V_1^* x_0 \rangle = w_{n-1} \alpha_{n-1} + w_n \alpha_n. \end{aligned}$$

Además  $\alpha_j = \langle x_0 | V_1 E_j V_1^* x_0 \rangle = \langle V_1^* x_0 | E_j V_1^* x_0 \rangle = |(V_1^* x_0)_j|^2 \geq 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$  y

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} + \alpha_n &= \langle x_0 | V_1 E_{n-1} V_1^* x_0 \rangle + \langle x_0 | V_1 E_n V_1^* x_0 \rangle = \\ &= \langle x_0 | \sum_{j=1}^n V_1 E_j V_1^* x_0 \rangle = \langle x_0 | I_{n-1} x_0 \rangle = \|x_0\|^2 = 1. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\langle x_0 | A x_0 \rangle \in W(A)$  pertenece al segmento formado por  $w_n$  y  $w_{n+1}$ . Solo nos quedaría probar que este es un punto de tangencia. Supongamos que existen



$x$ ,  $y$  vectores de norma uno linealmente independientes con  $\langle x|Ax\rangle$  y  $\langle y|Ay\rangle$  pertenecientes al segmento formado por  $w_{n-1}$  y  $w_n$ . De la misma manera que hicimos antes, vemos que

$$\langle x|Ax\rangle = \sum_{j=1}^n w_j \langle x|V_1 E_j V_1^* x\rangle$$

luego necesariamente para que esté en el segmento,  $\langle x|V_1 E_j V_1^* x\rangle = 0$  para todo  $j = 1, \dots, n-2$ . Entonces para dichos  $j$  se verifica

$$0 = \langle x|V_1 E_j V_1^* x\rangle = \langle V_1^* x|E_j V_1^* x\rangle = |(V_1^* x)_j|^2.$$

En consecuencia  $V_1 E_j V_1^* x = 0$  para todo  $j = 1, \dots, n-2$ . Análogamente se tiene para  $y$ , luego  $x, y \in \bigcap_{j=1}^{n-2} K_j$ . Como  $x$  e  $y$  son linealmente independientes, tenemos que  $\dim\left(\bigcap_{j=1}^{n-2} K_j\right) \geq 2$ . Así, una vez más a través de la fórmula de la dimensión, llegamos a que

$$\begin{aligned} \dim\left(\bigcap_{j=1}^{n-1} K_j\right) &= \dim\left(\bigcap_{j=1}^{n-2} K_j\right) + \dim K_{n-1} - \dim\left(\left(\bigcap_{j=1}^{n-2} K_j\right) + K_{n-1}\right) \geq \\ &2 + (n-2) - n + 1 = 1. \end{aligned}$$

Podemos entonces tomar  $u \in \bigcap_{j=1}^{n-1} K_j$  vector unitario de tal modo que

$$\begin{aligned} \langle u|Au\rangle &= \sum_{j=1}^n w_j \langle u|V_1 E_j V_1^* u\rangle = w_n \langle u|V_1 E_n V_1^* u\rangle = \\ &= w_n \langle u|\sum_{j=1}^n V_1 E_j V_1^* u\rangle = w_n \langle u|u\rangle = w_n, \end{aligned} \tag{2.6}$$

o equivalentemente  $w_n \in W(A) \cap \mathbb{T} = \emptyset$ , llegando así a una contradicción con la Observación 1.3.1. |

**| Teorema 2.11.** *Sea  $A$  una matriz en forma estándar y consideremos la familia de 1-dilataciones unitarias  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{T}}$  descritas por 1.31. Entonces  $W(A) = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{T}} W(U_\lambda)$ .*

**Demostración.** Consideremos  $\lambda \in \mathbb{T}$  y la respectiva 1-dilatación  $U_\lambda$  asociada a  $A$ . Entonces se cumple que  $A = P^* U_\lambda P$  con  $P$  la matriz  $n \times (n-1)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Si consideramos  $x \in \mathbb{C}^{n-1}$  con  $\|x\| = 1$ , se cumple que  $Px \in \mathbb{C}^n$  con  $\|Px\| = 1$ .

Si  $\alpha \in W(A)$ , existe un  $x_\alpha$  unitario con

$$\alpha = \langle x_\alpha | Ax_\alpha \rangle = \langle x_\alpha | P^* U_\lambda P x_\alpha \rangle = \langle P x_\alpha | U_\lambda P x_\alpha \rangle.$$

Por tanto,  $\alpha \in W(U_\lambda)$  para todo  $\lambda \in \mathbb{T}$ , y equivalentemente  $W(A) \subseteq \bigcap_{\lambda \in \mathbb{T}} W(U_\lambda)$ .

Vamos a ver que la contención no es estricta. Consideremos  $\beta \notin W(A)$ . Si  $\beta \notin \mathbb{D}$  entonces no se encuentra en la intersección de la extensión numérica de dos 1-dilataciones distintas; y por tanto  $\beta \notin \bigcap_{\lambda \in \mathbb{T}} W(U_\lambda)$ . Asumimos entonces que  $\beta \in \mathbb{D}$ .

Por el Teorema de Toeplitz-Hausdorff 1.16  $W(A)$  es convexo y cerrado y existe una recta separando  $\beta$  de  $W(A)$ .

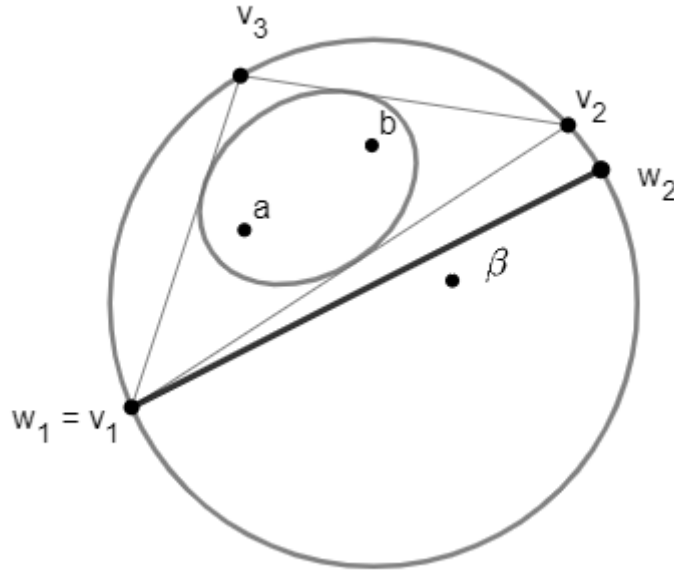


Figura 2.3: Separación de  $\beta$  y  $W(A)$ . En principio no tiene por qué ser  $W(A)$  una elipse, pero se ha representado así por sencillez.

Esta recta corta a  $\mathbb{T}$  en dos puntos,  $w_1$  y  $w_2$ . Si recordamos bien, nuestra matriz  $A$  en forma estándar proviene de un producto de Blaschke  $B_1$ . Si tomamos  $\tilde{\lambda} = B(w_1)$  con  $B(z) = zB_1(z)$ , se cumple que los autovalores de  $U_{\tilde{\lambda}}$  forman, según 2.6, un polígono de  $n$  lados que, por el lema 2.10, circunscribe a  $W(A)$ . Si nos fijamos en la

Figura 2.3, es inmediato afirmar que entonces  $\beta$  no pertenece al polígono dado. Como  $U_{\tilde{\lambda}}$  es una matriz unitaria, la extensión numérica no es más que el cierre convexo de los autovalores, en otras palabras, el polígono convexo de  $n$  lados mencionado. Como  $\beta \notin U_{\tilde{\lambda}}$  tenemos que  $\beta \notin \bigcap_{\lambda \in \mathbb{T}} W(U_{\lambda})$ . Llegamos así a que la contención no es estricta y por tanto  $W(A) = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{T}} W(U_{\lambda})$ . |

**| Teorema 2.12.** *Sea  $B$  un producto de Blaschke de grado  $n$  satisfaciendo  $B(0) = 0$ . Existe entonces una curva  $\mathcal{C}$  convexa tal que para todo  $\lambda \in \mathbb{T}$ , si  $z_j$  con  $j = 1, \dots, n$  (ordenados en orden de argumento creciente) son los puntos de  $\mathbb{T}$  para los que  $B(z_j) = \lambda$ , entonces el segmento que une  $z_j$  y  $z_{j+1}$  (donde los índices están tomados módulo  $n$ ) es tangente a  $\mathcal{C}$  en precisamente un punto. Además, cada punto de la curva  $\mathcal{C}$  se obtiene de esta manera. Luego la curva  $\mathcal{C}$  es una  $n$ -curva de Poncelet.*

**Demostración.** Consideremos el producto de Blaschke  $B_1(z) = \frac{B(z)}{z}$  y la matriz  $A$  en forma estándar que representa la compresión  $S_{B_1}$ . Por el Teorema 2.6 sabemos que los autovalores de la 1-dilatación  $U_{\lambda}$  son los puntos  $z_j$  con  $j = 1, \dots, n$ , donde  $B(z_j) = \lambda$ . Por el Lema 2.10 sabemos que el segmento  $\overline{z_j z_{j+1}}$  es tangente a la frontera de  $W(A)$  en exactamente un punto. Esta va a ser nuestra curva  $\mathcal{C}$ . Justificamos así los dos primeros puntos del teorema.

Para obtener el último resultado, tomemos  $\alpha_0$  en la curva  $\mathcal{C}$  y tracemos la línea tangente  $l$  a la curva pasando por  $\alpha_0$ . Esta recta corta a la circunferencia  $\mathbb{T}$  en dos puntos,  $w_1$  y  $w_2$ . Como sabemos hay exactamente  $n$  puntos  $z_1, \dots, z_n$  en la circunferencia que verifican  $B(z_j) = B(w_1)$ , con  $w_1 = z_k$  para algún  $k$ . Por el Lema 2.10 el polígono de vértices  $z_1, \dots, z_n$  circunscribe  $W(A)$ . Así los segmentos  $\overline{z_{k-1} w}$  y  $\overline{w_1 z_{k+1}}$  son tangentes a la frontera de  $W(A)$ . Como  $W(A)$  es compacto y convexo, existen exactamente dos tangentes a  $W(A)$  desde  $w_1$ . Entonces,  $w_2 = z_{k-1}$  o  $w_2 = z_{k+1}$ . En cualquier caso,  $B(w_1) = B(w_2)$ . |

Por fin, hemos conectado los tres conceptos principales de este trabajo: productos de Blaschke, extensión numérica y teorema de Poncelet. Tenemos un método que nos permite construir  $n$ -curvas de Poncelet a partir de los productos de Blaschke y a través de la extensión numérica. De manera resumida, consideramos un producto de Blaschke  $B$  de grado  $n$ , y la familia de polígonos  $\{P_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{T}}$ , donde  $P_{\lambda}$  no es más que el polígono de  $n$  lados inscrito en  $\mathbb{T}$  y con vértices las  $n$  soluciones de  $B(z) = \lambda$ . La intersección de estos polígonos describe un conjunto cuya frontera  $\mathcal{C}$  no es más que una  $n$ -curva de Poncelet. De manera equivalente podemos construir la misma curva. Comprobamos en primer lugar si  $B(0) = 0$ . Si es así, tomamos los  $n - 1$  ceros restantes de  $B$ , si no, lo transformamos como en la Proposición 2.4 en un producto de Blaschke  $C$  que cumpla  $C(0) = 0$  y nos quedamos con los  $n - 1$  ceros

restantes de  $C$ . Este producto de Blaschke identifica los mismos puntos que  $B$  con lo que va a derivar en la misma curva. Consideramos el producto de Blaschke  $B_1$  con los  $n - 1$  ceros de antes. Entonces, la frontera de la extensión numérica de la matriz en forma estándar que representa a  $S_{B_1}$  no es más que la curva  $\mathcal{C}$ .

Una pregunta surge a raíz de esto y es si toda curva de Poncelet se construye de esta forma, o equivalentemente si toda curva de Poncelet proviene de un producto de Blaschke. Demostrar esto no es un trabajo sencillo. Podemos ver en concreto en la Figura 2.4 una representación de la curva [16, p. 131]. Esta es un ejemplo de una curva de Poncelet que no proviene de un producto de Blaschke. Podemos afirmar esto porque si fuese así, sería una elipse, porque como veremos en la Sección 3.1: toda 3-curva de Poncelet proveniente de un producto de Blaschke es una elipse.

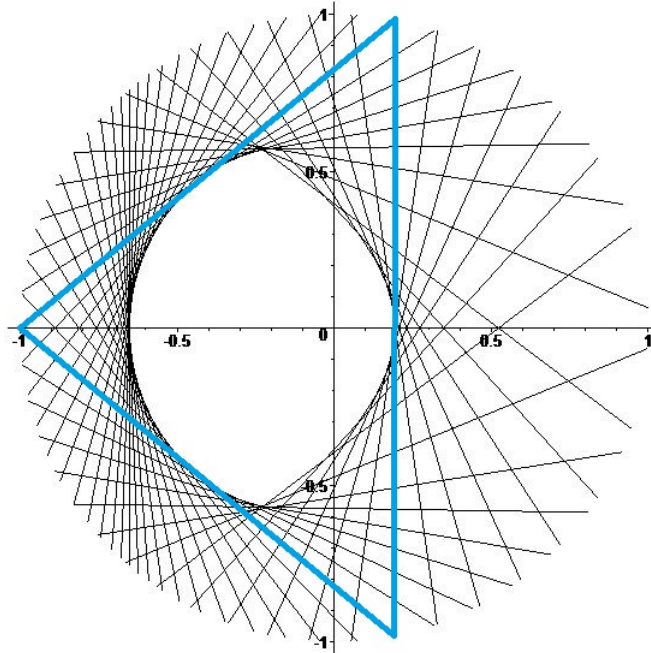


Figura 2.4: *Curva de Poncelet que no proviene de un producto de Blaschke.*

La siguiente pregunta es cuándo estas curvas van a ser, así como en el Teorema de Poncelet, elipses. En el siguiente capítulo vamos a estudiar condiciones suficientes, y en algunos casos necesarias, para que la curva obtenida con el método anterior sea una elipse. Llamaremos entonces elipses de Blaschke a aquellas elipses que, mediante el método descrito en este capítulo u otro que veremos posteriormente, se puedan construir a través de un producto de Blaschke.

## 2.2 La clase $S_n$ .

Como hemos podido ver el conjunto de matrices en forma estándar es bastante importante y define una clase de matrices que nos permiten construir curvas de Poncelet. Esta clase de matrices son muy estudiadas y tienen su nombre propio dentro del campo del álgebra lineal.

**| Definición 2.13.** Se define la clase  $S_n$  como el conjunto de matrices  $A$   $n \times n$  que cumplen

1.  $A$  es una contracción.
2. Todos los autovalores de  $A$  se encuentran en  $\mathbb{D}$ .
3.  $\text{rg}(I - A^*A) = \text{rg}(I - AA^*) = 1$ .

**Proposición 2.14.** La clase  $S_n$  no es más que el conjunto de matrices que representan la compresión del operador desplazamiento  $S_B$  para un determinado producto de Blaschke  $B$  de grado  $n$ .

**Demostración.** La demostración de este resultado se encuentra en [11, p. 361]. **|**

**Observación 2.15.** Recordemos que uno de nuestros intereses es trabajar con la extensión numérica de una matriz y esta se conserva ante transformaciones unitarias. Es por ello que una matriz  $A$  en  $S_n$  no tiene por qué estar necesariamente en forma estándar, pero podemos considerar que es así.

Para todo aquel lector que esté interesado en profundizar sobre el tema, recomendamos [19] y [10].

**Proposición 2.16.** Sea  $U$  una matriz unitaria  $n \times n$  con autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  distintos. Entonces, el conjunto de matrices  $(n-1) \times (n-1)$  que se pueden 1-dilatar a  $U$ , no es más que el conjunto de matrices unitariamente equivalentes a una de la forma  $U_1 \oplus T_1$ , donde  $U_1$  es una matriz  $m \times m$  unitaria ( $0 \leq m \leq n-1$ ) cuyos autovalores son algunos de los  $\lambda_j$  y  $T_1$  es una matriz en  $S_{n-m-1}$  con  $W(T_1)$  circunscrito por el polígono de  $n-m$  lados formado por los  $m$   $\lambda_j$  restantes.

**Demostración.** Si  $A$  es una matriz que admite  $U$  como 1-dilatación unitaria, entonces por la Proposición 1.26 es una contracción, además se puede comprobar que  $\text{rg}(I_{n-1} - A^*A) \leq 1$ . Si tenemos en cuenta que  $U$  es una 1-dilatación de  $A$ , se tiene que  $U$  es de la forma (unitariamente equivalente a)

$$U = \begin{pmatrix} A & b \\ c & \alpha \end{pmatrix}$$

con  $\alpha \in \mathbb{C}$  y  $b$  y  $c$  matrices  $(n-1) \times 1$  y  $1 \times (n-1)$  respectivamente. Luego, realizando una multiplicación por bloques

$$I_n = U^* U = \begin{pmatrix} A^* & c^* \\ b^* & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ c & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* A + c^* c & A^* b + \alpha c^* \\ b^* A + \bar{\alpha} c & b^* b + |\alpha|^2 \end{pmatrix}.$$

Debido a esto, necesariamente se tiene que cumplir

$$I_{n-1} = A^* A + c^* c \Rightarrow I_n - A^* A = c^* c \Rightarrow \text{rg}(I_n - A^* A) \leq 1.$$

Por otro lado, como  $A$  es una contracción, por el Teorema 3.2 de [19, p. 8] podemos escribir  $A = U_1 \oplus T_1$ , con  $U_1$  una matriz  $m \times m$  unitaria y  $T_1$  una matriz de dimensión  $(n-m-1) \times (n-m-1)$  con todos los autovalores de módulo distinto de 1. Se dice entonces que  $T_1$  es no unitaria. Como  $A$  es una contracción, necesariamente  $T_1$  también lo es. Además,  $\text{rg}(I_n - A^* A) = \text{rg}(I_{n-m-1} - T_1^* T_1) \leq 1$  donde  $I_k$  denota a la matriz identidad  $k \times k$ , por tanto  $T_1$  pertenece a la clase  $S_{n-m-1}$ . Como  $U$  es una 1-dilatación de  $A$ , necesariamente se tiene que cumplir que  $U = U_1 \oplus U_2$ , donde  $U_2$  es una 1-dilatación de la matriz  $T_1$ . Entonces, por el Lema 2.10,  $W(T_1)$  está inscrito en el polígono de  $n-m$  lados formado por los autovalores de  $U_2$ .

Recíprocamente, si  $A = U_1 \oplus T_1$  tiene las propiedades mencionadas, entonces por el Lema 2.10,  $T_1$  se dilata en la matriz  $(n-m) \times (n-m)$  unitaria  $U_2$  cuyos autovalores son los  $\lambda_j$  distintos a los autovalores de  $U_1$ . Por tanto,  $A$  se dilata en la matriz  $U_1 \oplus U_2$  que es unitariamente equivalente a  $U$ , como queríamos probar. |

**| Teorema 2.17.** *Para todo polígono  $P$  de  $n+1$  lados inscrito en  $\mathbb{T}$  y cualesquiera  $v_1, \dots, v_n$  puntos cada uno en un lado de  $P$  y ninguno un vértice, existe un producto de Blaschke  $B$  de grado  $n$  tal que  $W(S_B)$  está circunscrito por  $P$  con los  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  como puntos de tangencia.*

**Demostración.** Supongamos que  $P$  tiene  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{T}$  como vértices ordenados con argumento creciente y  $v_j = t_j \lambda_j + (1-t_j) \lambda_{j+1}$  con  $0 < t_j < 1$  para  $j = 1, \dots, n$ . Tomemos

$$x_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} \\ \sqrt{1-t_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{t_2} \\ \sqrt{1-t_2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad x_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sqrt{t_n} \\ \sqrt{1-t_n} \end{pmatrix}$$

vectores en  $\mathbb{C}^{n+1}$ , y sea  $H \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$  el subespacio de dimensión  $n$  generado por los  $x_j$  con  $j = 1, \dots, n$ . Sea

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n+1} \end{pmatrix}$$

y definimos el operador  $T = P_H U|_H$ , donde  $P_H$  es la proyección ortogonal de  $\mathbb{C}^{n+1}$  en  $H$ . Entonces

$$\langle x_j | T x_j \rangle = \langle x_j | U x_j \rangle = \lambda_j t_j + \lambda_{j+1}(1 - t_j) = v_j$$

para todo  $j$ . En consecuencia, todos los  $v_j$  están en  $W(T)$ . Por otro lado, como  $T$  se puede 1-dilatar en  $U$ , por la Proposición 2.16 podemos escribir  $T = U_1 \oplus T_1$  con  $U_1$  unitaria y  $T_1$  perteneciente a algún  $S_m$  con  $m < n$ . Supongamos que  $U_1$  está presente en esta descomposición. Como los autovalores de  $U_1$  son todos autovalores de  $U$ , algún  $\lambda_k$  es autovalor de  $U_1$  para el cual  $\lambda_{k+1}$  no lo es. Supongamos que  $1 \leq k \leq n$ . Como  $W(T_1)$  está circunscrito por el polígono de  $m + 1$  lados formado por  $m + 1$  de los  $\lambda_j$  incluyendo  $\lambda_{k+1}$ , pero no  $\lambda_k$  y  $W(T)$  es el cierre convexo de  $W(U_1) \cup W(T_1)$ , deducimos así que  $v_k$  no está en  $W(T)$  pues la única manera de conseguir este punto es a través del segmento que une  $\lambda_k$  y  $\lambda_{k+1}$ . Este primero pertenece a  $W(U_1)$ , mientras que el segundo no pertenece ni a  $W(T_1)$  ni a  $W(U_1)$ . Una representación de este hecho se encuentra en la Figura 2.5.

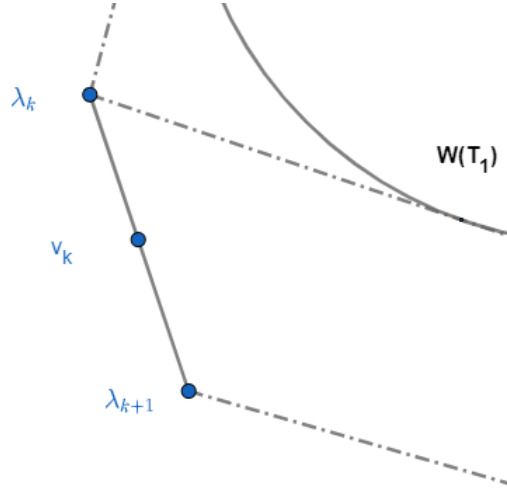


Figura 2.5: Imagen geométrica de la demostración del Teorema 2.17.

Esto entra en contradicción con que todos los  $v_j$  con  $j = 1, \dots, n$  están en  $W(T)$ . Si ahora  $k = n + 1$ , es decir,  $\lambda_{n+1}$  es autovalor de  $U_1$ , pero  $\lambda_1$  no lo es. Entonces,

suponiendo que  $j$  es el menor índice para el cual  $\lambda_j, \dots, \lambda_{n+1}$  son todos autovalores de  $U_1$ , como vimos antes, se tiene que  $v_{j-1}$  no está en  $W(T)$ , una vez más una contradicción. Por tanto,  $T = T_1$  es una compresión del operador desplazamiento y en consecuencia, es de la forma  $S_B$  con  $B$  un determinado producto de Blaschke de grado  $n$ . Como ya sabemos por la Proposición 2.10, esto indica que  $W(T)$  está inscrito en  $P$  con  $v_j$  con  $j = 1, \dots, n$  puntos de tangencia. |

Con estos resultados terminamos esta sección. Aunque al lector le parezcan en un principio algo alejados de lo que hemos estudiado al comienzo de esta segunda parte, estos serán relevantes a la hora de demostrar en la sección 3.3 si las elipses de Poncelet provienen de productos de Blaschke o no.



## 3 | n-Elipses de Blaschke.

### 3.1 3-elipses de Blaschke.

En la sección anterior hemos hablado de curvas de Poncelet obtenidas con  $n$ -productos de Blaschke. Esta vez nos vamos a centrar en las que obtenemos para  $n = 3$ , que como vamos a ver más adelante, se corresponden con elipses. Es por ello que hablamos de 3-elipses de Blaschke.

**| Teorema 3.1.** *Sea  $B$  el producto de Blaschke con ceros  $0, a_1, a_2 \in \mathbb{D}$ . Para  $\lambda \in \mathbb{T}$ , sean  $z_1, z_2, z_3$  las soluciones de  $B(z) = \lambda$ . Entonces las líneas que unen  $z_j$  y  $z_k$  con  $j \neq k$ , son tangentes a la elipse de ecuación*

$$|w - a_1| + |w - a_2| = |1 - \overline{a_1}a_2|. \quad (3.1)$$

*Recíprocamente, todo puto de la elipse es tangente a una recta que une dos puntos de  $\mathbb{T}$  que  $B$  identifica.*

**Demostración.** Con las herramientas que ya tenemos simplemente tenemos que encadenar una proposición tras otra. Si consideramos el producto de Blaschke  $B_1$  con ceros  $a_1, a_2$  y su matriz asociada  $2 \times 2$  en forma estándar

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \sqrt{1 - |a_1|^2} \sqrt{1 - |a_2|^2} \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Por la Proposición 1.19 la extensión numérica de  $A$  no es más que la elipse de focos  $a_1$  y  $a_2$ , y eje menor  $\sqrt{1 - |a_1|^2} \sqrt{1 - |a_2|^2}$ . Si tenemos en cuenta la geometría de la elipse, la cual podemos ver en la Figura 3.1, tenemos que el semieje mayor es

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{|a_1 - a_2|^2}{4} + \frac{(1 - |a_1|^2)(1 - |a_2|^2)}{4}} = \\ & = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \overline{a_1}a_2 - \overline{a_2}a_1 + |a_1a_2|^2} = \frac{1}{2} |1 - \overline{a_1}a_2|. \end{aligned}$$

Por lo que la extensión numérica de  $A$  no es más que la elipse de ecuación

$$|w - a_1| + |w - a_2| = |1 - \overline{a_1}a_2|.$$

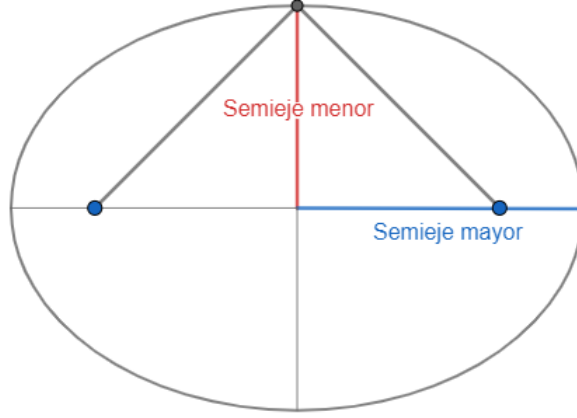


Figura 3.1: Focos y semiejes de una elipse genérica

Por el Teorema 2.6 sabemos que para cada  $\lambda \in \mathbb{T}$ , las soluciones de  $B(z) = \lambda$  no son más que los autovalores de la 1-dilatación  $U_\lambda$  de  $A$ . Por el Lema 2.10, estas forman un triángulo que circunscribe a  $W(A)$  es decir, a la elipse que hemos descrito anteriormente. Finalizamos así el teorema. |

**Observación 3.2.** Es posible demostrar el resultado anterior sin elaborar todos los resultados anteriores sobre la extensión numérica y el operador desplazamiento. Si recordamos la Proposición 1.7 se puede escribir

$$F(z) = \frac{B(z)/z}{B(z) - \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{z - z_i}.$$

Se puede demostrar aritméticamente que

$$\zeta_j = \frac{m_{j+1}z_j + m_j z_{j+1}}{m_j + m_{j+1}} \quad (3.2)$$

con  $j = 1, 2, 3$  módulo 3, es un punto de la elipse tangente al segmento formado por los ya descritos  $z_j$  y  $z_{j+1}$ .

**Ejemplo 3.3.** Si consideramos el producto de Blaschke

$$B(z) = z \frac{z - \frac{1}{2}(1+i)}{1 - \frac{z}{2}(1-i)} \frac{z + \frac{1}{2}(1+i)}{1 + \frac{z}{2}(1-i)}$$

obtenemos la elipse de ecuación

$$\left| w - \frac{1}{2}(1+i) \right| + \left| w + \frac{1}{2}(1+i) \right| = \frac{3}{2}.$$

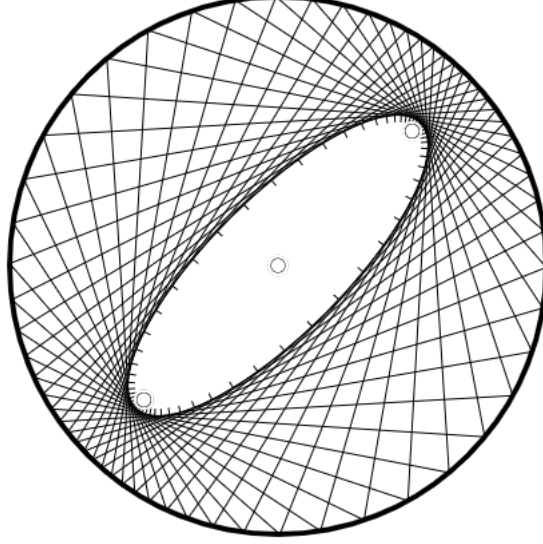


Figura 3.2: 3-elipse de Blaschke a partir del producto con ceros  $0, \frac{1}{2}(1+i)$  y  $-\frac{1}{2}(1+i)$ .

**Proposición 3.4.** Sea  $E$  una elipse con focos  $a_1$  y  $a_2$ . Si  $E$  puede ser circunscrito en un triángulo  $T$  inscrito en  $\mathbb{T}$ , entonces  $E$  es una 3-elipse de Blaschke con focos  $a_1$  y  $a_2$  y eje mayor  $|1 - \overline{a_1}a_2|$ .

**Demostración.** Por el Teorema 3.1 sabemos que existe una elipse  $E_1$  con focos en  $a_1$  y  $a_2$  que tiene la propiedad que dado un punto  $z \in \mathbb{T}$ , existe un triángulo,  $T_z$ , que la circunscribe y está inscrito en  $\mathbb{T}$  con un vértice en  $z$ .

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el eje mayor de  $E$  es más largo que el eje mayor de  $E_1$ . Como ambas tienen los mismos focos, es evidente que  $E_1$  está en el interior de  $E$ . Sean  $z_1, z_2, z_3$  los vértices del triángulo  $T$ . Consideremos ahora el triángulo  $T_{z_1}$  que circunscribe a  $E_1$  y con vértices  $z_1, w_2, w_3$ .

Como  $E$  es mayor que  $E_1$  y las elipses son cofocales, el argumento de  $w_2$  debe ser mayor que el de  $z_2$ ; es decir, el segmento uniendo  $z_1$  y  $w_2$  se encuentra por debajo del que une  $z_1$  y  $z_2$ . Análogamente, el segmento que une  $z_1$  y  $w_3$  está por encima del segmento que une  $z_1$  y  $z_3$ . Pero entonces, el segmento que une  $w_2$  y  $w_3$  se encuentra fuera de  $E$  y por tanto, no es tangente a  $E_1$ . Esto implica que la única posibilidad sea que  $E$  y  $E_1$  coincidan. Finalizando así la prueba.

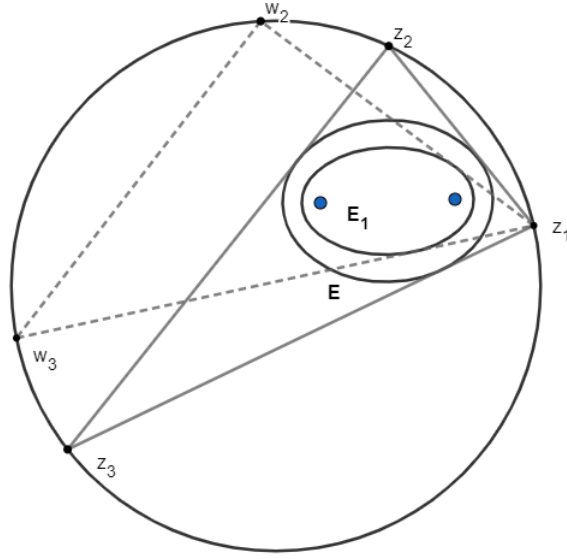


Figura 3.3: Esquema de la demostración de la Proposición 3.4.

### 3.1.1 3-Elipsoes de Blaschke y condiciones de Cayley

Un producto de Blaschke  $B$  de grado 3, con ceros en  $0, a$  y  $b$  en el interior del disco unidad  $\mathbb{D}$  tiene asociado una elipse de la siguiente forma. Dado  $\lambda \in \mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ , existen tres soluciones distintas  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{T}$  de la ecuación  $B(z) = \lambda$ . Se verifica que las rectas que unen los puntos  $z_i z_j$  son tangentes a la elipse  $E$  de ecuación

$$|w - a| + |w - b| = |1 - \bar{a}b|.$$

Se tiene así que la circunferencia unidad  $\mathbb{T}$  y la elipse  $E$  forman una 3-configuración de Poncelet. Las condiciones de Cayley asociadas al teorema de Poncelet nos dicen que una condición equivalente para que se tenga una 3-configuración es que el desarrollo de la función  $\sqrt{\det(t\mathbb{T} + E)}$  en  $t = 0$  tenga un término cuadrático igual a cero. El orden es importante, pues el triángulo debe estar inscrito en  $\mathbb{T}$  y circunscrito a  $E$ . Se puede ver el enunciado general para cónicas sin puntos singulares en ([7, p. 4]).

En primer lugar, analice mos un ejemplo y los problemas que nos podemos encontrar para verificarlo. Consideremos los valores  $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, b = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}i$ . La ecuación

de la elipse  $E$  asociada es

```
a:=1/2+1/2*I:b:=-3/4+1/4*I:
w:=x+I*y:
fa:=evalc(abs(w-a)^2);
```

$$fa := x^2 - x + 1/2 + y^2 - y$$

```
> fb:=evalc(abs(w-b)^2):
> f0:=evalc(abs(1-conjugate(a)*b)^2);
```

$$f0 := \frac{29}{16}$$

```
> E:=(fa+fb-f0)^2-4*fa*fb;
```

$$E := \frac{\left(2x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{11}{16} + 2y^2 - \frac{3}{2}y\right)^2}{\left(x^2 - x + \frac{1}{2} + y^2 - y\right)\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{8} + y^2 - \frac{1}{2}y\right)}$$

```
> expand(E);
```

$$-\frac{19}{16}x^2 + \frac{89}{16}y^2 - x^2 - 7y^2 + \frac{5}{2}xy - \frac{199}{256}$$

Tenemos entonces que la matriz asociada a la elipse  $E$  es

$$M_E = \begin{bmatrix} -\frac{199}{256} & -\frac{19}{32} & \frac{89}{32} \\ -\frac{19}{32} & -1 & 5/4 \\ \frac{89}{32} & \frac{5}{4} & -7 \end{bmatrix}.$$

La ecuación para la circunferencia unidad es  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ , y su matriz asociada es

$$M_T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

```
> with(LinearAlgebra):
> ME:=Matrix([[-199/256, -19/32, 89/32],[-19/32,-1,5/4],[89/32, 5/4, -7]]);
```

$$ME := \begin{bmatrix} -199 & -19 & 89 \\ \hline 256 & 32 & 32 \\ -19 & & \\ \hline -19 & -1 & 5/4 \\ 32 & & \\ \hline 89 & & \\ \hline - & 5/4 & -7 \\ 32 & & \end{bmatrix}$$

```
> MT:=Matrix([[-1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]]);
```

$$MT := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> E1:=sqrt(Determinant(t*MT + ME));
```

$$E1 := \frac{(-4096 t^3 + 29584 t^2 - 29928 t + 7569)^{1/2}}{64}$$

```
> taylor(E1, t=0,4);
```

$$\frac{87}{64} - \frac{43}{16}t - \frac{32}{87}t^2 + 0(t^3) + 0(t^4)$$

El término en  $t^2$  tiene coeficiente nulo y, en efecto, las dos cónicas forman una 3-configuración de Poncelet. En la figura 3.4 aparece este caso. Se pueden ver otros ejemplos de las condiciones de Cayley en [17, p. 45-48].

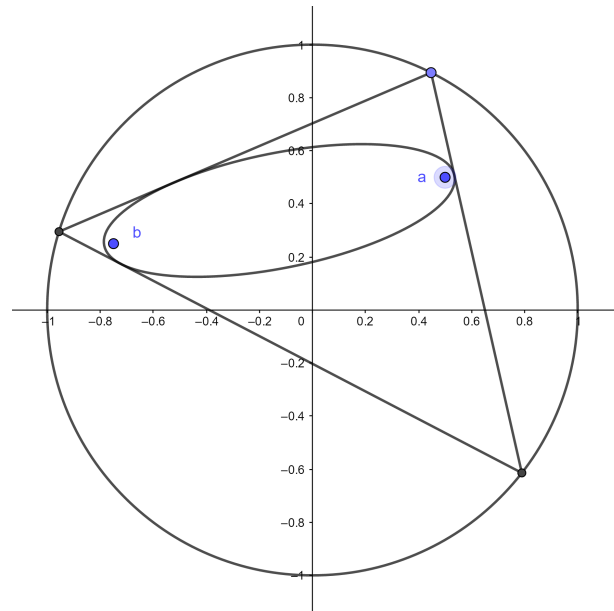


Figura 3.4: 3-ellipse.

El problema que planteamos ahora es dar una prueba de que la elipse  $E$  y la circunferencia  $\mathbb{T}$  forman una 3-configuración de Poncelet basada en las condiciones de Cayley. En [6] hay una prueba geométrica.

Podemos hacer una prueba mediante cálculo simbólico en MAPLE.

```
restart:with(LinearAlgebra):
a:=a1+a2*I:b:=b1+b2*I:
w:=x+y*I:
```

```

fa:=evalc(abs(w-a)^2):
fb:=evalc(abs(w-b)^2):
f0:=evalc(abs(1-conjugate(a)*b)^2):
E:=(fa+fb-f0)^2-4*fa*fb:
M00:=subs([x=0,y=0],E):
M01:=coeff(subs(y=0,E), x):
M02:=coeff(subs(x=0,E), y):
M11:=coeff(E, x^2):
M12:=coeff(coeff(E,x), y):
M22:=coeff(E, y^2):
ME:=Matrix([ [M00, 1/2*M01, 1/2*M02],
[1/2*M01, M11, 1/2*M12],
[1/2*M02, 1/2*M12, M22]]):
xx:=Vector([1,x,y]):
expand(Transpose(xx) . ME . xx - E);

```

0

```

MT:=Matrix([ [-1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]]):
E1:=sqrt(Determinant(t*MT + ME)):
expr1:=subs(t=0, diff(E1,t$2)):
numexpr1:=numer(expr1) :
expand(numexpr1);

```

0

Verificando así que la circunferencia  $\mathbb{T}$  y una elipse proveniente de un producto de Blaschke forman una 3-configuración de Poncelet. Esto podría ser una prueba alternativa a la demostración del Teorema 3.1.

## 3.2 4-Curvas de Blaschke.

### 3.2.1 Curva generadora de la frontera.

Tras estudiar el caso de las 3-elipses, vamos a pasar a las 4-elipses. Este avance a priori parece inmediato, pero su construcción es mucho más compleja. Para tratar



estas elipses tenemos que recurrir al trabajo de Kippenhahn [14] sobre la extensión numérica de matrices.

**Proposición 3.5.** Dada una matriz  $A$  cuadrada  $n \times n$ , se puede descomponer como

$$A = H_A + iK_A \quad (3.3)$$

donde  $H_A$  y  $K_A$  son matrices hermíticas. A  $H_A$  se conoce como la parte real de  $A$  y a  $K_A$  la parte imaginaria.

**Demostración.** Basta escribir

$$H_A = \frac{A + A^*}{2} ; K_A = \frac{A - A^*}{2i}.$$

**Teorema 3.6.** Si  $A = H_A + iK_A$  y  $H_A$  tiene autovalores  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$  mientras que  $K_A$  tiene autovalores  $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_n$ , entonces  $W(A)$  está contenido en el rectángulo formado por las rectas  $x = \alpha_1$ ,  $x = \alpha_n$ ,  $y = \beta_1$  e  $y = \beta_n$ . Los lados del rectángulo comparten o un punto o todo un intervalo.

**Demostración.** Vamos a dar una ligera idea de la primera parte; el resto, como ya hemos mencionado, se encuentra en [14]. Si tenemos en cuenta que tanto la parte real de  $A$  como su parte imaginaria son matrices hermíticas, sus autovalores son reales. No solo eso, sino que son matrices normales, y como ya hemos visto en el Ejemplo 1.17, su extensión numérica no es más que el cierre convexo de sus autovalores. En consecuencia, la extensión numérica de  $H_A$  y  $K_A$  serán intervalos reales cerrados y acotados.

Por otro lado, si  $z \in W(A)$ , entonces  $z \in W(H_A) + iW(K_A)$ . Tomemos  $v \in \mathbb{C}^n$  cumpliendo tal que  $\langle v | Av \rangle = z$ . Se cumple entonces que

$$\langle v | H_A v \rangle = \frac{\langle v | Av \rangle + \langle v | A^* v \rangle}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2} = \Re(z) \in W(H_A).$$

De manera totalmente análoga se cumple que  $\Im(z) \in W(K_A)$ , terminando así la primera parte de la demostración.

Este teorema nos permite acotar la frontera de la extensión numérica de una cierta matriz  $A$ . Si realizásemos un giro de la extensión numérica a través de un *giro de la matriz* podríamos hallar nuevos límites del conjunto. Repitiendo este proceso *encajonaríamos* la región lo suficiente como para conocer la frontera de  $W(A)$ .

El proceso de girar la matriz no es más que tomar  $e^{-i\varphi} A$ , lo que provoca un giro en  $W(A)$ , ya que por el Teorema 1.15,  $W(e^{-i\varphi} A) = e^{-i\varphi} W(A)$ . Como se cumple que

$$e^{-i\varphi} A = (\cos \varphi H_A + \sin \varphi K_A) + i (\cos \varphi K_A - \sin \varphi H_A)$$

y la parte real de una matriz es única, para hallar los autovalores de  $H_{e^{-i\varphi} A}$  tenemos que resolver la ecuación

$$\det [\cos \varphi H_A + \sin \varphi K_A - \lambda I] = 0. \quad (3.4)$$

Una vez halladas las rectas que limitan la extensión numérica de  $W(e^{-i\varphi} A)$  simplemente tendríamos que rotar estas mismas de vuelta.

Todo este proceso es el que llevó a Kippenhan a desarrollar su principal teorema, aunque antes de hablar de este vamos a introducir una serie de conceptos.

**Observación 3.7.** Podemos ver  $\mathbb{C}$  dentro de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  identificando  $x + iy$  con  $(x, y, 1)$ . Así mismo, podemos ver este espacio dentro de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  de la manera natural.

**Definición 3.8.** Dada una curva  $\mathcal{C}$  en  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  definimos su parte real como el conjunto de puntos  $\mathcal{C} \cap \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

**Definición 3.9.** Sea  $\mathcal{C}$  una curva dada por la ecuación homogénea  $f(x, y, z) = 0$  y consideremos la curva (dual) que verifican las rectas tangentes ( $ux + vy + wz = 0$ ) dada por  $\phi(u, v, w) = 0$ . El grado de  $f$  se dice que es el grado de  $\mathcal{C}$  y el grado de  $\phi$  su clase.

**Teorema 3.10 (Kippenhahn).** Dada una matriz  $n \times n$   $A = H_A + iK_A$ , el polinomio de grado  $n$  dado por

$$L_A(u, v, w) = \det[uH_A + vK_A + wI] = 0 \quad (3.5)$$

determina una curva de clase  $n$  en coordenadas homogéneas del plano complejo dual ( $(u, v, w)$  denotan rectas). El cierre convexo del dual de la curva definida por  $L_A(u, v, w) = 0$  no es más que  $W(A)$ .

**Demostración.** La prueba de este teorema se encuentra en el artículo de Kippenhahn [14].

**Observación 3.11 (Curva generadora de la frontera).** El dual de la curva definida por  $L_A(u, v, w) = 0$  es una curva algebraica en  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . La parte real de esta curva se denomina *curva generadora de la frontera* y se denota por  $C(A)$ .

Es importante destacar que, pese a ser un concepto original de Kippenhan, él mismo en [14] comete una serie de errores que hay que tener en cuenta pues si no,

dificultan la comprensión del artículo. En el transcurso de este, trata indistintamente  $C(A)$  y  $L_A(u, v, w) = 0$  como si fuesen la misma curva; cuando la primera está en el plano complejo y es la que genera  $W(A)$ , mientras la segunda se encuentra en el espacio dual.

**Proposición 3.12.** Para el caso en el que  $A$  sea una matriz  $3 \times 3$  se puede demostrar que existe una transformación afín de la curva  $L_A$  de manera que nos queda una curva en coordenadas inhomogéneas de la forma

$$(v-1)^2(u-1) = \alpha u^2 + \beta u + \gamma u + \delta \quad (3.6)$$

con  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  reales.

**Demostración.** La prueba de este resultado se encuentra en [14, p. 203].

**Teorema 3.13.** Dada una matriz  $A$ ,  $3 \times 3$ , se cumple uno de los siguientes resultados:

1. El determinante  $L_A$  en 3.5 se factoriza en tres factores lineales y  $C(A)$  consiste en 3 puntos.
2. El determinante  $L_A$  se factoriza en un factor lineal y otro cuadrático, y  $C(A)$  es un punto y una elipse.
3. El determinante  $L_A$  es irreducible y  $C(A)$  es una curva de grado 4 con una doble tangente y una cúspide. La frontera de  $W(A)$  contiene un tramo recto.
4. El determinante  $L_A$  es irreducible y  $C(A)$  es una curva de grado 6 formada por un óvalo y una curva con tres cúspides en su interior.

**Demostración.** Una discusión de la ecuación (3.6) nos lleva a demostrar todos los casos posibles. Para ellos vamos a tomar la ecuación en coordenadas homogéneas

$$x_0^2 y_1 = \alpha(x_1 - a_1 x_2)(x_1 - a_2 x_2)(x_1 - a_3 x_2). \quad (3.7)$$

Esta clasificación se vuelve más clara cuando tratamos  $(x'_0 : x'_1 : x'_2)$  como coordenadas homogéneas de un punto. En cada caso, la ecuación (3.7) representa una curva de orden tres, y de entre todas las curvas de este tipo tenemos que separar aquellas correspondientes al dual de la curva generadora de la frontera de la extensión.

Como podemos ver la curva en el dual es una cúbica estándar. La clasificación de estas es conocida y se encuentra en [1]. Para más detalles de la demostración puede referirse a [14], aunque para la demostración hace uso de la notación clásica. Una prueba alternativa más actual se encuentra en [2, p.585].

Veamos un ejemplo de cada uno de los tres últimos tipos de curva que se pueden obtener.

**Ejemplo 3.14.** Tomemos la matriz

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A través de  $L_{A_2}(u, v, w) = 0$  se define la curva en el espacio dual

$$\frac{1}{2}u^3 + \frac{5}{2}u^2w + 3uw^2 - \frac{1}{2}uv^2 + w^3 - \frac{1}{2}wv^2 = 0.$$

Al calcular el dual de esta curva obtenemos la curva en el plano proyectivo complejo. En este caso, la curva se define como intersección de dos curvas

$$\begin{aligned} BGC_1(\lambda, \mu, \nu) &= 2\lambda^2\mu - 4\lambda\nu\mu + \nu^2\mu + 2\mu^3 = 0 \\ BGC_2(\lambda, \mu, \nu) &= 2\lambda^3 - 6\lambda^2\nu + 5\lambda\nu^2 - \nu^3 + 2\lambda\mu^2 - 2\nu\mu^2 = 0. \end{aligned}$$

Si deshomogeneizamos esta ecuación, en el espacio afín nos queda:

$$C(A_2) \equiv \begin{cases} \mu(2\lambda^2 - 4\lambda + 1 + 2\mu^2) = 0 \\ (\lambda - 1)(2\lambda^2 - 4\lambda + 1 + 2\mu^2) = 0 \end{cases}$$

que no es más que una circunferencia y un punto. Estamos entonces en el caso (2) del Teorema 3.13.

**Ejemplo 3.15.** Si consideramos la matriz

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

A través de  $L_{A_3}(u, v, w) = 0$  se obtiene la curva dual

$$-\frac{1}{2}wu^2 + w^3 - \frac{1}{2}wv^2 + \frac{1}{8}v^2u\sqrt{2} = 0.$$

Para obtener  $C(A_3)$  tenemos que calcular la parte real del dual de la curva anterior. Primero obtenemos el dual de la curva como  $BCG(\lambda, \mu, \nu) = 0$  donde

$$\begin{aligned} BGC(\lambda, \mu, \nu) &= \nu^4\mu^2 - 32\nu^2\mu^4 + 64\mu^6 - \nu^5\lambda\sqrt{2} + 40\nu^3\mu^2\lambda\sqrt{2} \\ &- 96\nu\mu^4\lambda\sqrt{2} - 12\nu^4\lambda^2 - 4\nu^2\mu^2\lambda^2 + 192\mu^4\lambda^2 - 22\nu^3\lambda^3\sqrt{2} - 48\nu\mu^2\lambda^3\sqrt{2} \\ &- 8\nu^2\lambda^4 + 84\mu^2\lambda^4 + 48\nu\lambda^5\sqrt{2} + 64\lambda^6. \end{aligned}$$

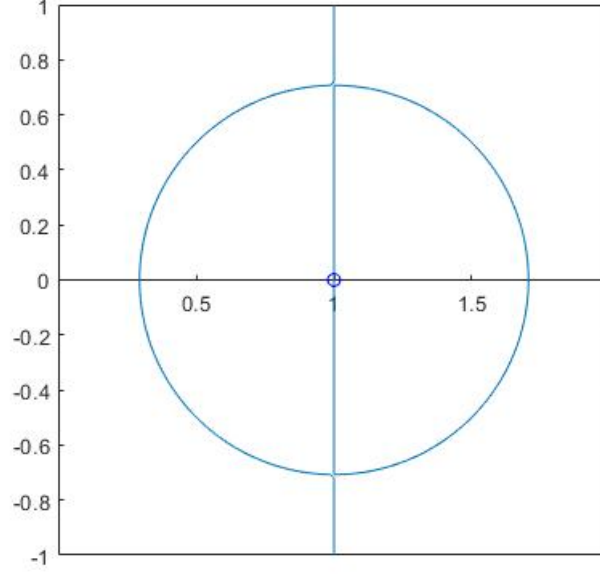


Figura 3.5: *Curva generadora de la frontera de la matriz  $A_2$ .*

Para obtener  $C(A_3)$ , en este caso, simplemente tenemos que deshomogeneizar la tercera componente, es por ello que

$$C(A_3) \equiv \mu^2 - 32\mu^4 + 64\mu^6 - \lambda\sqrt{2} + 40\mu^2\lambda\sqrt{2} - 96\mu^4\lambda\sqrt{2} - 12\lambda^2 - 4\mu^2\lambda^2 + 192\mu^4\lambda^2 - 22\lambda^3\sqrt{2} - 48\mu^2\lambda^3\sqrt{2} - 8\lambda^4 + 84\mu^2\lambda^4 + 48\lambda^5\sqrt{2} + 64\lambda^6 = 0.$$

Para este ejemplo nos encontramos en el caso (3) del Teorema 3.13.

**Ejemplo 3.16.** Consideremos como último ejemplo el caso en que

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Una vez más, calculamos  $L_{A_4}(u, v, w) = 0$  y obtenemos la curva en el espacio dual

$$w^2 u \sqrt{2} + w^3 - \frac{1}{2} w v^2 - \frac{1}{4} v^2 u \sqrt{2} = 0.$$

Calculamos ahora el dual de esta curva y obtenemos la curva en el espacio real

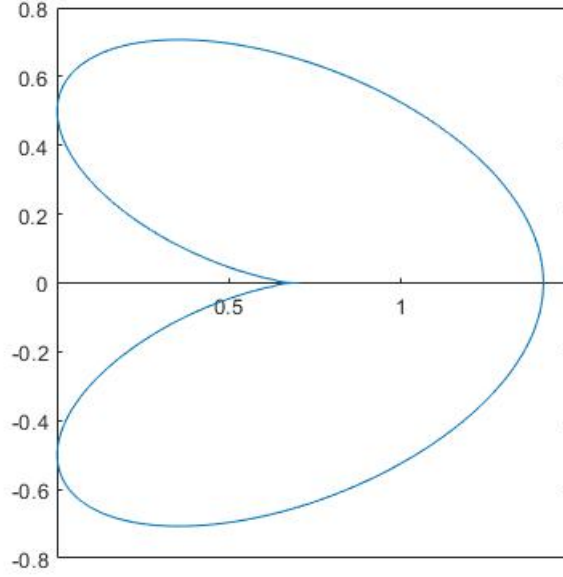


Figura 3.6: Curva generadora de la frontera de la matriz  $A_3$ .

representada por

$$\begin{aligned} BGC(\lambda, \mu, \nu) = & 2\nu^4 - 7\nu^3\lambda\sqrt{2} + 18\nu^2\lambda^2 - 10\nu\lambda^3\sqrt{2} + 4\lambda^4 \\ & - 16\nu^2\mu^2 - 4\nu\lambda\mu^2\sqrt{2} + 13\lambda^2\mu^2 + 32\mu^4 = 0. \end{aligned}$$

Si deshomogeneizamos la tercera componente obtenemos la curva afín en el plano complejo

$$C(A_4) \equiv 2 - 7\lambda\sqrt{2} + 18\lambda^2 - 10\lambda^3\sqrt{2} + 4\lambda^4 - 16\mu^2 - 4\lambda\mu^2\sqrt{2} + 13\lambda^2\mu^2 + 32\mu^4 = 0.$$

En este último ejemplo, nos encontramos en el caso (4) de la clasificación del Teorema 3.13.

### 3.2.2 4-Elipses de Blaschke.

Como lo que buscamos son elipses, es claro que nos interesa que dentro del Teorema 3.13 se cumpla el caso (2). No solo esto, sino que el punto aislado que nos

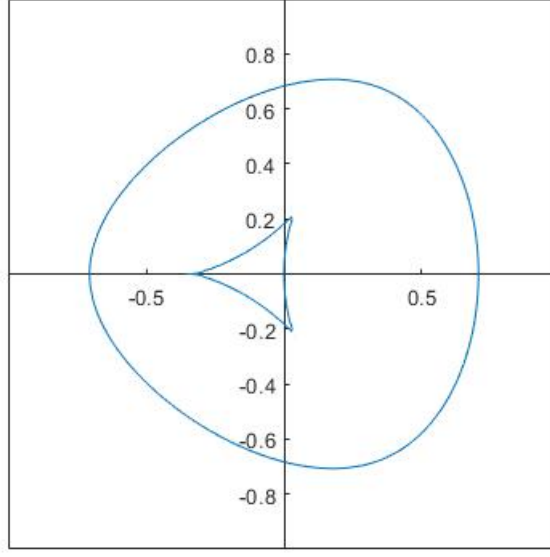


Figura 3.7: Curva generadora de la frontera de la matriz  $A_4$ .

queda se encuentre en el interior de la elipse, de modo que al hacer el cierre convexo nos quede solo esta primera. Para ver esto, consideremos dos matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ y } A_1 = \begin{pmatrix} a & s & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

con  $s \geq 0$ .

Para la matriz  $A_1$ , haciendo uso de la Proposición 1.19, así como del Lema 1.22, es obvio que  $W(A_1)$  es el cierre convexo del punto  $c$  unión la elipse de focos  $a$  y  $b$  y eje menor  $s$ . Entonces, la curva  $C(A)$  es una elipse y un punto si y solo si  $C(A) = C(A_1)$ , y haciendo uso de la clasificación de Kippenhahn, esto ocurre si y solo si  $L_A = L_{A_1}$ . Veamos, no muy detalladamente, cuándo se da este caso.

Primero, calculamos  $H_A$ ,  $K_A$  y formamos la matriz  $uH_A + vK_A + wI$ . Obtenemos así

$$\begin{pmatrix} u\Re(a) + v\Im(a) + w & (u - iv)\frac{x}{2} & (u - iv)\frac{y}{2} \\ (u + iv)\frac{\bar{x}}{2} & u\Re(b) + v\Im(b) + w & (u - iv)\frac{z}{2} \\ (u + iv)\frac{y}{2} & (u + iv)\frac{\bar{z}}{2} & u\Re(c) + v\Im(c) + w \end{pmatrix}.$$

De manera similar formamos  $uH_{A_1} + vK_{A_1} + wI$ , recalando que  $s \geq 0$ .

$$\begin{pmatrix} u\Re(a) + v\Im(a) + w & (u - iv)\frac{s}{2} & 0 \\ (u + iv)\frac{s}{2} & u\Re(b) + v\Im(b) + w & 0 \\ 0 & 0 & u\Re(c) + v\Im(c) + w \end{pmatrix}.$$

Podemos escribir los respectivos determinantes como polinomios en  $\mathbb{C}[u, v][w]$  de la forma

$$C_3(u, v) + C_2(u, v)w + C_1(u, v)w^2 + w^3$$

donde  $C_j(u, v)$  denota un polinomio homogéneo de grado  $j$ . Comparemos ahora los coeficientes de  $L_A$  y  $L_{A_1}$ . Observando las respectivas matrices podemos apreciar que los coeficientes de  $w^3$  y  $w^2$  son iguales para ambos polinomios.

A partir del coeficiente que acompaña a  $w$  llegamos a la primera condición para que  $L_A$  sea igual a  $L_{A_1}$

$$s^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2.$$

Si consideramos ahora el coeficiente que acompaña al término constante llegamos a la condición

$$s^2 c = a|z|^2 + b|y|^2 + c|x|^2 - x\bar{y}z. \quad (3.9)$$

A partir de estas condiciones construimos el siguiente teorema.

**| Teorema 3.17.** Sean  $a, b, c \in \mathbb{C}$ , y sean  $x, y, z \in \mathbb{C}$  con al menos uno no nulo. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Entonces la curva de Kippenhahn  $C(A)$  es un punto autovalor de  $A$  y una elipse si y solo si alguno de los autovalores  $\lambda$  verifica

$$(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2)\lambda = a|z|^2 + b|y|^2 + c|x|^2 - x\bar{y}z. \quad (3.10)$$

Si se satisface esta condición, entonces  $C(A)$  es la unión de  $\lambda$  y la elipse con foco en los otros dos autovalores de  $A$ . La longitud del eje menor de esta es  $s = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}$ .

**Demostración.** Ya hemos indicado anteriormente un pequeño esbozo de lo que podría ser una demostración. Para más detalles de la misma se recomienda la referencia [13]. |



**Observación 3.18.** Nos restringimos al estudio de matrices triangulares superiores porque, como sabemos por el Lema de Schur, toda matriz es unitariamente equivalente a una matriz triangular superior y la extensión numérica es invariante para matrices unitariamente equivalentes.

**Proposición 3.19.** Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

con

$$x = \sqrt{1-|a|^2}\sqrt{1-|b|^2}, \quad y = -\bar{b}\sqrt{1-|a|^2}\sqrt{1-|c|^2}$$

y

$$z = \sqrt{1-|b|^2}\sqrt{1-|c|^2}$$

la representación usual de la compresión del operador desplazamiento correspondiente al producto de Blaschke  $B_1$  con ceros  $a, b, c \in \mathbb{D}$ . Entonces  $W(A)$  es un disco elíptico con foco  $a$  y  $b$  si y solo si

$$(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2)c = a|z|^2 + b|y|^2 + c|x|^2 - x\bar{y}z. \quad (3.11)$$

**Demostración.**  $\boxed{\Leftarrow}$  Sabemos por el Teorema 3.17 que la condición (3.11) se satisface si y solo si  $C(A)$  consiste en una elipse y un autovalor de  $A$ . Como  $A$  es una matriz en forma estándar, dicho autovalor tiene que estar en el interior de  $W(A)$ , con lo que  $W(A)$  es en consecuencia un disco elíptico.

$\boxed{\Rightarrow}$  Supongamos que la frontera de  $W(A)$  es una elipse con focos en  $a$  y  $b$ . Como  $A$  representa al operador  $S_{B_1}$ , sabemos que el autovalor  $c$  se encuentra en el interior de la elipse. Si tomamos entonces  $A_1$  como en (3.8), se tiene que  $W(A_1) = W(A)$ . Se cumple, por tanto, que  $L_A = L_{A_1}$  y en consecuencia se debe verificar la ecuación (3.11). |

Antes de pasar a dar una condición necesaria y suficiente que debe cumplir un determinado 4-producto de Blaschke para que de lugar a una elipse, vamos a definir una serie de conceptos.

**Definición 3.20.** Decimos que un producto de Blaschke  $B$  es factorizable si puede ser escrito como

$$B = C \circ D$$

con  $C$  y  $D$  dos productos de Blaschke.

**Observación 3.21.** Nos centramos ahora en descomponer productos de Blaschke  $B$  de grado 4. Como ya discutimos en la Proposición 2.4 podemos considerar sin pérdida de generalidad que  $B$  tiene un cero en 0. Para ello basta considerar la función

$$\psi_c(z) = \frac{c - z}{1 - \bar{c}z} \quad (3.12)$$

con  $c \in \mathbb{D}$  y tomar  $\psi_{B(0)} \circ B$ . Así  $B$  es factorizable, es decir,  $B = C \circ D$  si y solo si  $B = C \circ \psi_{D(0)}^{-1} \circ \psi_{D(0)} \circ D$  si y solo si existen productos de Blaschke  $C_1$  y  $D_1$  con  $B = C_1 \circ D_1$  y  $D_1(0) = 0$ . Como además hemos considerado que  $B(0) = 0$ , necesariamente se tiene que cumplir que  $C_1(0) = 0$ . Es por ello que nos podemos limitar simplemente a estudiar los productos de Blaschke factorizables de la forma

$$B(z) = \left( z \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} \right) \circ \left( z \frac{c - z}{1 - \bar{c}z} \right) \quad (3.13)$$

**Lema 3.22.** Sea  $a, c \in \mathbb{C}$ . Para  $\psi_c(a) = \frac{c-a}{1-\bar{c}a}$ , se cumple

$$1 - |\psi_c(a)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |a|^2)}{|1 - \bar{c}a|^2}. \quad (3.14)$$

**Teorema 3.23.** Sea  $B_1$  un producto de Blaschke de grado 3 con ceros en  $a, b, c \in \mathbb{D}$ , y sea  $B$  el producto de Blaschke definido por  $B(z) = zB_1(z)$ . Entonces  $B$  factorizable si y solo si la extensión numérica de la matriz representando la compresión del operador  $S_{B_1}$  es un disco elíptico.

**Demostración.** Para ambas implicaciones vamos a hacer uso del siguiente cálculo. Sea  $A$  la matriz en forma estándar representando  $S_{B_1}$ . Esta verifica, siguiendo la notación de (3.8)

$$x = \sqrt{1 - |a|^2} \sqrt{1 - |b|^2}, \quad y = -\bar{b} \sqrt{1 - |a|^2} \sqrt{1 - |c|^2},$$

y

$$z = \sqrt{1 - |b|^2} \sqrt{1 - |c|^2}.$$

Así se tiene que

$$\begin{aligned} & c|x|^2 + b|y|^2 + a|z|^2 - x\bar{y}z = \\ & = c(1 - |a|^2)(1 - |b|^2) + b|b|^2(1 - |a|^2)(1 - |c|^2) \\ & \quad + a(1 - |b|^2)(1 - |c|^2) + b(1 - |a|^2)(1 - |b|^2)(1 - |c|^2) = \\ & = c(1 - |a|^2)(1 - |b|^2) + a(1 - |b|^2)(1 - |c|^2) + b(1 - |a|^2)(1 - |c|^2) \end{aligned} \quad (3.15)$$

y

$$\begin{aligned} s &= |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = \\ &= (1 - |a|^2)(1 - |b|^2) + |b|^2(1 - |a|^2)(1 - |c|^2) + (1 - |b|^2)(1 - |c|^2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

$\Rightarrow$  Supongamos que  $B$  se puede descomponer de la forma (3.13). Es evidente por tanto, que  $B(z) = C(z\psi_c(z))$ , donde  $C(z) = z\psi_\alpha(z)$  para un determinado  $\alpha \in \mathbb{D}$ . Como  $\psi_c$  es su propio inverso, es fácil comprobar que  $B(\psi_c(z)) = B(z)$ . De manera que  $\psi_c$  permuta los ceros de  $B$ . A través de la definición,  $\psi_c$  permuta 0 con  $c$ . Como los ceros de  $B$  son 0,  $a, b, c \in \mathbb{D}$  se cumple que  $b = \psi_c(a)$ . Comprobemos ahora que la extensión numérica de  $S_{B_1}$  es un disco elíptico con focos en  $a$  y en  $b = \psi_c(a)$ . Es por ello que tenemos que demostrar que

$$(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2)c = a|z|^2 + b|y|^2 + c|x|^2 - x\bar{y}z.$$

Rotar los ceros de  $B$  a través de un factor  $\lambda \in \mathbb{T}$  no cambia ni la forma de la extensión numérica ni la ecuación anterior. De manera que podemos suponer que  $c \in \mathbb{R}$ .

Calculemos primero  $s^2$  y  $a|z|^2 + b|y|^2 + c|x|^2 - x\bar{y}z$  para nuestra matriz. Usando que  $b = \frac{c-a}{1-\bar{c}a}$ , el Lema 3.22 y la ecuación (3.15) llegamos a

$$s^2 = (1 - |a|^2)(1 - |c|^2) \frac{(1 - |a|^2) + |a - c|^2 + (1 - |c|^2)}{|1 - \bar{c}a|^2}.$$

Como hemos tomado  $c \in \mathbb{R}$ , simplificando tenemos

$$s^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |c|^2)}{|1 - \bar{c}a|^2} (2 - 2c\Re(a)).$$

La ecuación (3.16) y el Lema 3.22 dan lugar a

$$\begin{aligned} a|z|^2 + b|y|^2 + c|x|^2 - x\bar{y}z &= c \frac{(1 - |a|^2)^2(1 - |c|^2)}{|1 - \bar{c}a|^2} + a \frac{(1 - |a|^2)(1 - |c|^2)^2}{|1 - \bar{c}a|^2} + b(1 - |a|^2)(1 - |c|^2) \\ &= \frac{(1 - |a|^2)(1 - |c|^2)}{|1 - \bar{c}a|^2} (c(1 - |a|^2) + a(1 - |c|^2) + (c - a)(1 - \bar{c}a)) \\ &= c \frac{(1 - |a|^2)(1 - |c|^2)}{|1 - \bar{c}a|^2} (2 - 2c\Re(a)) = cs^2. \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.17, la curva generadora de la frontera  $C(A)$  está formada por una elipse y un punto (autovalor de  $A$ ). Como ya vimos en la Proposición 2.7, los

autovalores de  $A$  se encuentran en el interior de  $W(A)$  de modo que necesariamente  $W(A)$  es una elipse.

⇐ En este sentido, si asumimos que  $W(A)$  es un disco elíptico vamos a demostrar que esto implica que los ceros de  $B$  son  $0, a, c$  y  $\psi_c(a)$ . Si esto es así, entonces los ceros de  $B$  son los mismos que los del producto de Blaschke

$$\left(z \frac{z - \beta}{1 - \bar{\beta}z}\right) \circ \left(z \frac{c - z}{1 - \bar{c}z}\right)$$

donde  $\beta = a \frac{c-a}{1-\bar{c}a}$ . Por tanto,  $B$  sería factorizable. Supongamos entonces que los ceros de  $B$  son  $0, a, b, c \in \mathbb{D}$  y que la extensión numérica de  $A$  es una elipse. En este caso, el Teorema 3.17, nos indica que uno de los autovalores  $\lambda$ , debe verificar

$$s^2 \lambda = a|z|^2 + b|y|^2 + c|x|^2 - x\bar{y}z. \quad (3.17)$$

Si reordenamos los ceros de  $B_1$  en la matriz  $A$  seguimos teniendo una matriz que representa el operador  $S_{B_1}$ , luego tiene la misma extensión numérica. Así, podemos asumir que dicho  $\lambda$  no es más que  $c$ , y vamos entonces a demostrar que  $b = \psi_c(a)$ . Para ver esto, si sustituimos las ecuaciones (3.15) y (3.16) en (3.17)

$$c|b|^2(1 - |a|^2) + c(1 - |b|^2) = a(1 - |b|^2) + b(1 - |a|^2).$$

Si despejamos ahora  $c$

$$c = \frac{a(1 - |b|^2) + b(1 - |a|^2)}{1 - |ab|^2}. \quad (3.18)$$

En consecuencia

$$\psi_c(a) = \frac{c - a}{1 - \bar{c}a} = \frac{b - a|b|^2 - b|a|^2 + a|ab|^2}{1 - |a|^2 - a\bar{b} + a\bar{b}|a|^2} = b.$$

Finalizamos así la demostración. |

**Observación 3.24.** Se puede observar que para la matriz  $3 \times 3$  que hemos considerado en la 3.19 la longitud del eje menor es

$$s = \left(\text{tr}(A^*A) - |a|^2 - |b|^2 - |c|^2\right)^{1/2}. \quad (3.19)$$

**Proposición 3.25.** Sea  $B$  un producto de Blaschke de grado 4. Entonces la curva asociada a  $B$  es una elipse si y solo si  $B$  es factorizable.

**Demostración.** La prueba es una consecuencia directa del Teorema 3.23, basta considerar  $C = \psi_{B(0)} \circ B$ . Ambos son productos de Blaschke y forman la misma curva pues ambos identifican los mismos puntos de la circunferencia. Ahora no tenemos más que aplicar el Teorema 3.23 y tener en cuenta que  $\psi_{B(0)}$  es un isomorfismo. |

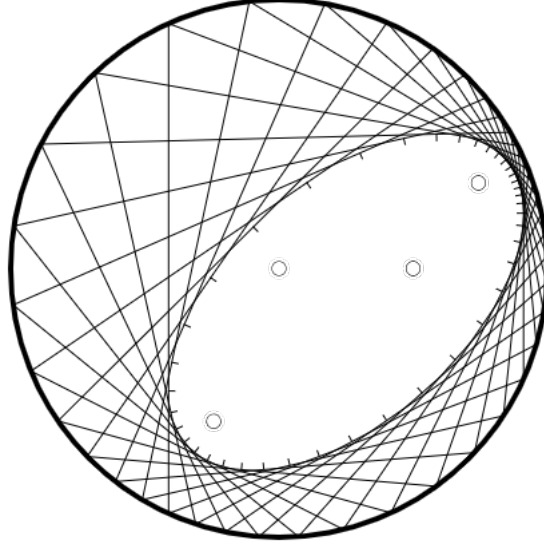


Figura 3.8: 4-Elipse de Blaschke a través de  $B(z) = \left( z \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{z}{2}} \right) \circ \left( z \frac{z - i\frac{1}{2}}{1 + \frac{z}{2}} \right)$ .

### 3.3 $n$ -Elipses convexas de Blaschke.

Las curvas de Poncelet que hemos considerado hasta ahora han estado inscritas en polígonos convexos. Sin embargo, el teorema de Poncelet también considera elipses inscritas en polígonos no convexos. Es por ello que es útil tomar una nueva definición que nos permita aclarar la distinción.

**Definición 3.26.** *Dada una elipse de Poncelet  $\mathcal{E}$  decimos que es una elipse convexa de Poncelet si alguno de los polígonos inscritos en  $\mathbb{D}$  que circunscriben a  $\mathcal{E}$  es convexo.*

Una vez que tenemos esta definición podemos encontrar un importante Teorema de unicidad al respecto, pero para obtener este primero tenemos que asentar una serie de resultados.

**Teorema 3.27.** *Existe una única función multiplicidad de intersección  $I_p(C, D)$  para todas las curvas  $C$  y  $D$  en  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  cumpliendo las siguientes propiedades.*

1.  $I_p(C, D) = I_p(D, C)$ .
2.  $I_p(C, D) = \infty$  si  $p$  pertenece a una componente común de  $C$  y  $D$ , en otro caso  $I_p(C, D)$  es un entero no negativo.
3.  $I_p(C, D) = 0$  si y solo si  $p \notin C \cap D$ .

4. Dos líneas se cortan en  $p$  con multiplicidad de intersección 1 en su único punto de intersección.
5. Si  $C_1$  y  $C_2$  están definidas por polinomios homogéneos  $P_1(x, y, z)$  y  $P_2(x, y, z)$  y sea  $C$  definida por

$$P(x, y, z) = P_1(x, y, z)P_2(x, y, z)$$

entonces

$$I_p(C, D) = I_p(C_1, D) + I_p(C_2, D).$$

6. Si  $C$  y  $D$  están definidas por los polinomios homogéneos  $P(x, y, z)$  y  $Q(x, y, z)$  de grados  $n$  y  $m$ , y  $E$  está definido por el polinomio  $PR + Q$  con  $R(x, y, z)$  homogéneo de grado  $m - n$  entonces

$$I_p(C, D) = I_p(C, E).$$

**Demostración.** La función multiplicidad de intersección tiene distintas definiciones, nosotros usamos la de Kirwan [15], pero puede, si el lector lo prefiere, hacer uso de las construcciones de [8] y/o [1]. En esta primera puede encontrar la demostración del teorema. |

A partir de la definición de multiplicidad de intersección se enuncia el Teorema de Bézout.

**| Teorema 3.28 (Teorema de Bézout).** Si  $C$  y  $D$  son dos curvas proyectivas de grado  $n$  y  $m$  en  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  que no tienen ninguna componente en común, entonces hay exactamente  $n \cdot m$  puntos de intersección contando multiplicidad, es decir

$$\sum_{p \in C \cap D} I_p(C, D) = n \cdot m.$$

Como consecuencia de este teorema tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 3.29.** Sean  $C$  y  $D$  curvas algebraicas y  $P$  un punto en  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Entonces  $I_p(C, D) = 1$  si y solo si  $P$  es un punto no singular de  $C$  y  $D$  y las líneas tangentes de  $C$  y  $D$  en  $P$  son distintas.

**Demostración.** La demostración de este resultado, al igual que el anterior, se encuentra en [15]. |

Estamos ahora preparados para enunciar y demostrar el teorema clave que va a dar como consecuencia el resultado que buscamos.

**| Teorema 3.30.** Sea  $A$  una matriz  $n \times n$  ( $n \geq 2$ ) y sea  $E$  un disco elíptico en el plano. Supongamos que  $W(A)$  y  $E$  tienen  $l \geq 1$  rectas de apoyo  $L_1, \dots, L_l$  en común con  $m$  ( $0 \leq m \leq l$ ) de las intersecciones  $L_k \cap W(A) \cap E$  no vacías. Si  $l + m \geq 2n + 1$ , entonces  $E \subseteq W(A)$ . En este caso, el número  $2n + 1$  es la cota óptima, en el sentido de que si  $l + m < 2n + 1$ , no se cumple el resultado.

**Demostración.** Sea  $L$  alguna de las líneas de apoyo de  $W(A)$  y  $E$ , y sea  $P$  el punto de tangencia de  $L$  y  $\partial E$ . Consideremos además, como hicimos en 3.2,  $C(A)$  la curva generadora de la frontera de  $W(A)$ . En un principio, tenemos distintos casos que considerar.

1.  $P$  no está en  $W(A)$ . Como  $L$  es tangente a  $C(A)$ , se corresponde, por dualidad, con el punto  $L^*$  intersección de  $C(A)^*$  y  $\partial E^*$ . Entonces  $I_{L^*}(C(A)^*, \partial E^*) \geq 1$  por la definición de la multiplicidad de intersección.
2.  $P$  está en  $W(A)$  y en  $C(A)$ . En este caso el punto de intersección  $L^*$  de  $C(A)^*$  y  $\partial E^*$  tiene una línea tangente  $P^*$  en común. Entonces  $I_{L^*}(C(A)^*, \partial E^*) \geq 2$  por 3.29.
3.  $P$  está en  $W(A)$  pero no en  $C(A)$ . Este caso podría corresponderse con el del Ejemplo 3.6, donde existen puntos en  $W(A)$  que no están en  $C(A)$ . Esto implica que  $L$  es tangente a  $C(A)$  en otros dos puntos  $Q$  y  $R$ . Tenemos entonces que considerar otros dos casos:
  - a)  $Q$  y  $R$  se encuentran en componentes distintas, denotadas  $C_1$  y  $C_2$  de  $C(A)$ . Entonces  $C_1^*$  y  $C_2^*$  son componentes de  $C(A)^*$  y

$$I_{L^*}(C(A)^*, \partial E^*) \geq I_{L^*}(C_1^*, \partial E^*) + I_{L^*}(C_2^*, \partial E^*) \geq 1 + 1 = 2,$$

donde la primera desigualdad se da por una de las propiedades la multiplicidad de intersección.

- b)  $Q$  y  $R$  se encuentran en la misma componente  $C$  de  $C(A)$ . En este caso el punto  $L_*$  en  $C^*$  tiene al menos dos líneas tangentes  $Q^*$  y  $R^*$  a  $C(A)^*$ . Así  $L^*$  es un punto singular de  $C(A)^*$  y deducimos de 3.29 que  $I_{L^*}(C(A)^*, \partial E^*) \geq 2$ .

En todos los casos considerados  $I_{L^*}(C(A)^*, \partial E^*)$  es al menos tan grande como la cantidad (1 o 2) que contribuye la línea de apoyo  $L$  a la suma  $l + m$ . Entonces si  $l + m \geq 2n + 1$ ,  $\sum_j I_{L_j^*}(C(A)^*, \partial E^*) \geq 2n + 1$ . Como los grados de  $C(A)^*$  y  $\partial E^*$  son  $n$  y  $2$ , respectivamente, el teorema de Bézout 3.28 implica que  $C(A)^*$  y  $\partial E^*$  tiene componentes en común. Inferimos de la irreducibilidad de la elipse  $\partial E^*$  que  $\partial E^*$  es una

componente de  $C(A)^*$ . Entonces  $\partial E$  es una componente de  $C(A)$  como requeríamos y  $E \subseteq W(A)$ .

Para ver que  $2n+1$  es la cota óptima, consideremos  $E = \overline{\mathbb{D}}$  y  $n = 3$ ,  $l = 5$  (se verifica que  $n \geq 2$  y  $n \leq l \leq 2n$ ). Sea  $P$  el polígono de 5 lados con vértices  $a_1, \dots, a_5$  que circunscribe a  $E$  con  $b_j$  con  $j = 1, \dots, 5$  puntos de tangencia. Sea ahora  $m = 2n - l = 1$  y tomemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 \end{pmatrix}.$$

Por ser  $A$  una matriz diagonal su extensión numérica no es más que el cierre convexo de sus autovalores, es decir, el polígono que une  $b_1$ ,  $a_3$  y  $a_5$ . Este polígono cumple que tiene  $l = 5$  líneas de apoyo en común con  $E$  y  $m = 1$  intersecciones  $L_k \cap W(A) \cap E$  no vacías, donde  $L_k$  con  $k = 1, \dots, l$  denota a las líneas de apoyo, es decir, los lados del polígono  $P$ . Sin embargo, como podemos ver en la Figura 3.9 no se cumple que  $E \subseteq W(A)$ . |

**Observación 3.31.** Es importante aclarar que en un principio el caso (1) de 3.30 se puede dar, pero es cuando imponemos la condición  $l + m \geq 2n + 1$  cuando descartamos esta posibilidad.

Lo que nos interesa de este teorema no es el resultado en sí, sino la proposición que este implica.

**Proposición 3.32.** Sea  $E$  un disco elíptico contenido en  $\mathbb{D}$ . Entonces  $E$  es la extensión numérica de una matriz  $A$ ,  $n \times n$ , en forma estándar si y solo si  $\partial E$  es una  $(n+1)$ -elipse de Poncelet convexa. En este caso,  $A$  es única salvo transformaciones unitarias.

**Demostración.**  $\Rightarrow$  La condición necesaria está ya probada. Como sabemos toda curva que proviene de una matriz en forma estándar es una curva convexa de Poncelet.

$\Leftarrow$  Para probar la condición suficiente, sea  $P$  uno de los polígonos de  $n+1$  lados tangentes a  $\partial E$  con  $v_1, \dots, v_{n+1}$  puntos de tangencia. Por el Teorema 2.17 existe una matriz  $A$  en forma estándar tal que  $W(A)$  está circunscrito por  $P$  con  $v_1, \dots, v_n$  puntos de tangencia. Entonces  $E$  y  $W(A)$  tienen  $n+1$  líneas de apoyo en común con  $n$  puntos de intersección. De modo que, por el Teorema 3.30,  $E \subseteq W(A)$ . Para probar la igualdad  $E = W(A)$ , sea  $\lambda_1 = \lambda'_1$  un punto arbitrario de  $\mathbb{T}$ . Dibujamos sucesivamente desde  $\lambda_j$  (respectivamente  $\lambda'_j$ ),  $j = 1, \dots, n+1$ , líneas tangentes a  $\partial E$  (respectivamente a  $\partial W(A)$ ), que cortan a  $\mathbb{T}$  en  $\lambda_{j+1}$  (respectivamente  $\lambda'_{j+1}$ ). Como por



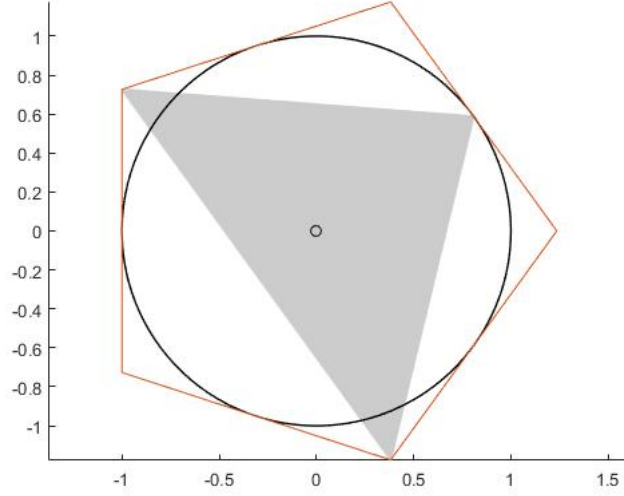


Figura 3.9: Ejemplo de la extensión numérica de una matriz (triángulo gris) y una cónica (círculo) que verifican las condiciones del Teorema 3.30 pero no la cota  $l + m \geq 2n + 1$ , siendo  $l = 5$ ,  $n = 3$  y  $m = 1$ . Podemos apreciar como el círculo no se encuentra en el interior de la región gris.

hipótesis  $\partial E$  es una elipse de Poncelet convexa y todas las curvas provenientes de una matriz en forma estándar son curvas convexas de Poncelet, podemos suponer  $\lambda_j = e^{i\theta_j}$  (respectivamente  $\lambda'_j = e^{i\theta'_j}$ ) con  $\theta_1 = \theta'_1$  y  $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{n+2} = \theta_1 + 2\pi$  (respectivamente  $0 \leq \theta'_1 < \theta'_2 < \dots < \theta'_{n+2} = \theta'_1 + 2\pi$ ). Como  $E \subseteq W(A)$ , es fácil de ver que  $\theta_j \geq \theta'_j$  para todo  $j$  y, más aún, si  $\theta_{j_0} > \theta'_{j_0}$  para algún  $j_0$ , entonces  $\theta_k > \theta'_k$  para todo  $k \geq j_0$ . Como  $\theta_{n+2} = \theta'_{n+2}$  necesariamente se tiene que cumplir  $\theta_j = \theta'_j$ . Así  $\partial E$  y  $\partial W(A)$  están circunscritas por el mismo conjunto de polígonos de  $n + 1$  lados con vértices en  $\mathbb{T}$ . Si recordamos que  $E$  y  $W(A)$  son la intersección de la región delimitada por cada uno de estos polígonos, concluimos que  $E = W(A)$ . |

**Observación 3.33.** Esta proposición se puede enunciar de manera equivalente como que toda elipse convexa de Poncelet proviene de un producto de Blaschke y por tanto, es una elipse de Blaschke.

Hemos llegado a un resultado bastante importante, y es que toda elipse  $E$  en  $\mathbb{D}$  circunscrita por un polígono convexo  $P$  inscrito en  $\mathbb{T}$  proviene de un producto de Blaschke  $B$ . Hemos caracterizado, dentro de la familia de elipses de Poncelet, a una gran parte de ellas. Aún así, todavía nos queda ver una condición necesaria y/o suficiente de elipses inscritas en polígonos no convexos.



## 4 | (n,p)-Elipses de Blaschke.

### 4.1 Automorfismos del disco elípticos.

Si recapitulamos lo que hemos visto hasta ahora, sabemos que los productos Blaschke de grado 3 nos proporcionan siempre elipses. Por otro lado, conocemos una condición necesaria y suficiente para que los productos de Blaschke de grado 4 nos proporcionen de nuevo estas cónicas. Sin embargo, para productos de Blaschke de grado  $n$  hemos visto que estas no siempre aparecen. Nuestro interés ahora va a ser ver cuándo los productos de Blaschke nos proporcionan elipses mediante una generalización de la construcción que ya habíamos hecho para las curvas de Poncelet. Este proceso de construcción no va a ser detallado, mostrando simplemente los resultados principales que nos van a permitir construir elipses de Poncelet a través de productos de Blaschke. Para toda aquella persona interesada en las demostraciones de estos puede dirigirse a la referencia [6] para más detalles.

**Definición 4.1 (Automorfismos del disco).** Sean  $\phi \in \mathbb{R}$  y  $a \in \mathbb{D}$  construimos el automorfismo del disco  $M_{\phi,a} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  definido por

$$M_{\phi,a}(z) = e^{i\phi} \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}. \quad (4.1)$$

**Observación 4.2.** Si nos fijamos en la expresión de  $M_{\phi,a}$  podemos darnos cuenta de que no es más que un producto de Blaschke de grado 1. Si recordamos la Proposición 1.3 se sigue que  $M_{\phi,a} : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ ,  $M_{\phi,a}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$  y  $M_{\phi,a}(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ . Un simple cálculo nos permite comprobar que la inversa de esta función no es más que  $M_{ae^{i\phi}, 2\pi-\phi}$ .

Los automorfismos del disco van a ser la base de la construcción de nuevas elipses de Blaschke. Sin embargo, no todos nos sirven, requerimos de un tipo de automorfismo en concreto.

**| Definición 4.3 (Automorfismos del disco elípticos).** Si consideramos  $M_{a,\phi}$  distinto de la identidad, resolviendo la ecuación  $M_{a,\phi}(z) = z$  vemos que tiene a lo más dos puntos fijos. Definimos entonces:

- Si hay un solo punto fijo dentro de  $\mathbb{D}$  (el otro está fuera de  $\overline{\mathbb{D}}$ ) decimos que es elíptico.
- Si hay exactamente un punto fijo (de multiplicidad 2) en  $\mathbb{T}$ , decimos que el automorfismo es parabólico.
- Hay exactamente dos puntos fijos, ambos en  $\mathbb{T}$ , el automorfismo se dice que es hiperbólico.

**Lema 4.4.** Para  $a \in \mathbb{D}$  y  $\phi \in [0, 2\pi)$ , el automorfismo no trivial  $M_{a,\phi}$  no trivial es elíptico si y solo si  $|a| < |\cos \frac{\phi}{2}|$  o  $a = 0$ .

**| Teorema 4.5 (Frantz).** Sean  $a \in \mathbb{D}$  y  $\phi \in [0, 2\pi)$  tal que  $M_{a,\phi}$  sea un automorfismo elíptico. Entonces el conjunto de líneas  $\{\overleftrightarrow{zM_{a,\phi}(z)} : z \in \mathbb{T}\}$ , donde  $\overleftrightarrow{zM_{a,\phi}(z)}$  denota el segmento que une  $z$  y  $M_{a,\phi}(z)$ , es el conjunto de rectas tangentes a la elipse  $E_a^\phi$  con focos en  $a$  y  $ae^{i\phi}$  y eje mayor de longitud  $2 \sin \frac{\phi}{2}$ .

Cuando la elipse es degenerada (es decir cuando  $\phi = 0$ ), las líneas  $\overleftrightarrow{zM_{a,\phi}(z)}$  son concurrentes en  $a$ .

**Demostración.** Puede encontrar la prueba de este Teorema en [6, p. 179]. |

Parece que los automorfismos elípticos son bastante prometedores a la hora de determinar elipses que provengan de productos de Blaschke. Sin embargo, por lo general la elipse obtenida en el Teorema 4.5 no es una elipse de Poncelet. En este proceso de trazar líneas tangentes alrededor de la elipse, puede que no volvamos al punto de partida como sí ocurre con las elipses de Poncelet. De manera que tendremos que buscar automorfismos del disco elípticos que dada una serie de iteraciones vuelva al punto inicial.

**Observación 4.6.** Denotamos como *automorfismos del disco canónicos* a aquellos de la forma  $M_{0,\phi}$ . Es evidente que estos no son más que un giro antihorario de ángulo  $\phi$ . Además, todo automorfismo elíptico del disco  $M_{a,\phi}$  es conjugado a un automorfismo del disco canónico, es decir, existe  $\psi \in \mathbb{R}$  tal que

$$M_{a,\phi} = M_{b,0} \circ M_{0,\psi} \circ M_{b,0} \quad (4.2)$$

con  $b \in \mathbb{D}$  un punto fijo de  $M_{a,\phi}$ . Observar también que  $M_{b,0}$  es un automorfismo elíptico que es su propio inverso.

A la  $n$ -ésima iteración de  $M_{a,\phi}$ , es decir  $M_{a,\phi} \circ M_{a,\phi} \circ \dots \circ M_{a,\phi}$ , la denotamos por  $M_{a,\phi}^{(n)}$ . Esta es la identidad si y solo si  $M_{0,\psi}^{(n)} = M_{0,\pi+n(\pi+\psi)}$  es la identidad ya que

$$M_{a,\phi}^{(n)} = M_{b,0} \circ M_{0,\psi}^{(n)} \circ M_{b,0} = M_{b,0} \circ M_{0,\pi+n(\pi+\psi)} \circ M_{b,0}.$$

Esta condición se cumple para un determinado  $n$  si y solo si  $\psi$  es una fracción de  $\pi$ . Así, decimos que  $M_{a,\phi}$  tiene orden  $n$  si  $\psi - \pi = \frac{2\pi p}{n}$  para ciertos enteros  $p$  y  $n$  con  $1 \leq p < n$  y  $\text{mcd}(p, n) = 1$ . Además, decimos que  $M_{a,\phi}$  tiene orden convexo  $n$  si  $p = 1$  o  $p = n - 1$ . El que digamos que, los automorfismos del disco elípticos que cumplen esta condición, tienen orden convexo, no es casualidad y esto se verá más adelante.

Este proceso de iterar va a ser el que nos permitirá construir los polígonos que circunscriban la elipse. Tomamos  $z \in \mathbb{T}$  y  $M_{a,\phi}^{(k)}(z)$  con  $k \in \mathbb{N}$  el conjunto de vértices. Para que nos de un polígono se tiene que cumplir que el automorfismo sea de orden finito y tengamos así un número finito de puntos.

**Lema 4.7.** Con la notación ya mencionada, supongamos que  $M_{a,\phi}$  tiene orden  $n$  con  $\psi - \pi = \frac{2\pi p}{n}$ . Entonces para un  $z \in \mathbb{T}$  cualquiera pero fijo, el polígono con vértices  $M_{a,\phi}^{(k)}(z)$  con  $k = 1, \dots, n$  envuelve la circunferencia unidad  $p$  veces si  $p < \frac{n}{2}$  y  $n - p$  veces si  $p > \frac{n}{2}$ . En particular, el polígono es convexo si y solo si  $p = 1$  o  $p = n - 1$ .

**Demostración.** La demostración de este Lema puede encontrarse en [6, p. 182].

**Proposición 4.8.** Conocidos el punto fijo  $b$  y el ángulo de rotación  $\psi$  podemos encontrar  $a$  y  $\phi$

$$a = \frac{b(1 + e^{i\psi})}{|b|^2 + e^{i\psi}}; \quad \phi = \arg \left( \frac{|b|^2 + e^{i\psi}}{1 + |b|^2 e^{i\psi}} \right). \quad (4.3)$$

## 4.2 Familia de $(n, p)$ -elipses.

Como mencionamos anteriormente, las elipses de Poncelet no tienen por qué ser convexas. Nuestro interés al emplear los automorfismos elípticos del disco es construir elipses de Blaschke, pero con la peculiaridad ahora de los polígonos que la circunscriben pueden ser no convexas. Para identificarlas necesitamos de notación adicional.

**Definición 4.9 (( $n, p$ )-elipses de Blaschke.).** Dado un producto de Blaschke  $B$  de grado  $n$ . Para  $\lambda \in \mathbb{T}$  denotamos por  $z_1, \dots, z_n$  los  $n$  distintos puntos en  $\mathbb{T}$  asociados a  $B(z) = \lambda$  y ordenados por argumento creciente. Para  $1 \leq p < n$  y  $\text{mcd}(n, p) = 1$  llamamos a una elipse de Blaschke una  $(n, p)$ -elipse asociada a  $B$  si tiene la propiedad

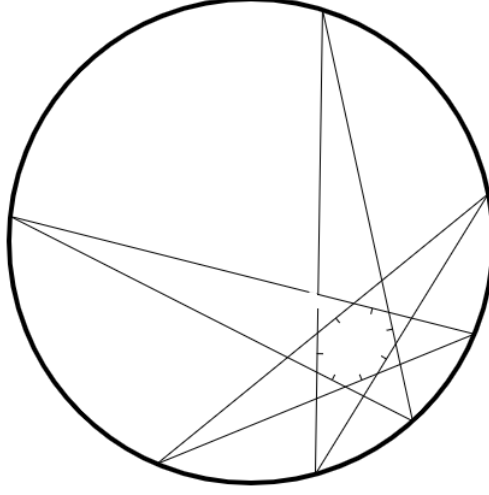


Figura 4.1: Cadena poligonal  $M_{a,\phi}^{(k)}(z)$ ,  $k = 0, \dots, 7$  con  $p = 3$  para un automorfismo elíptico del disco de orden 7. Dado un vértice del polígono, el siguiente al que está conectado es correspondiente con su imagen por  $M_{a,\phi}$

de que para todo  $\lambda \in \mathbb{T}$  la elipse está inscrito en (el no necesariamente convexo) polígono formado con los  $n$  vértices  $z_1, \dots, z_n$  uniendo  $z_j$  con  $z_{j+p}$  para  $j = 1, \dots, n$  con los subíndices de los vértices tomados módulo  $n$ .

**Lema 4.10.** Sea  $a \in \mathbb{D}$ ,  $\phi \in [0, 2\pi)$  cumpliendo  $|a| < |\cos \frac{\phi}{2}|$ . Entonces se cumple lo siguiente:

- Si  $M_{a,\phi}$  es de orden  $n > 1$ , entonces existe un producto de Blaschke  $B$  de grado  $n$  tal que  $B \circ M_{a,\phi} = B$ . Además, para todo producto de Blaschke  $C$  de grado  $n$  con  $C \circ M_{a,\phi} = C$ , existe un entero  $p$  con  $1 \leq p < n$  y  $\text{mcd}(n, p) = 1$  tal que  $E_a^\phi$  es una  $(n, p)$ -elipse de Blaschke asociada a  $C$ .
- Si  $M_{a,\phi}$  es de orden infinito, no existe ningún producto de Blaschke  $C$  cumpliendo  $C \circ M_{a,\phi} = C$  y ningún polígono inscrito en  $\mathbb{T}$  que circunscriba a  $E_a^\phi$ .

**Demostración.** Puede encontrar la prueba detallada en [6, p. 185] |

Nos encontramos ahora preparados para describir un conjunto de productos de Blaschke que dan lugar a elipses de Blaschke de la forma  $E_a^\phi$ . Una vez conocidos estos, vamos a ser capaces de encontrar elipses inscritas en polígonos con  $n$  vértices en  $\mathbb{T}$  para cada  $n \geq 3$ .

**| Teorema 4.11.** Sea  $B$  un producto de Blaschke de grado  $n \geq 2$ ,  $a \in \mathbb{D}$  y  $\phi \in [0, 2\pi)$ . Son equivalentes:

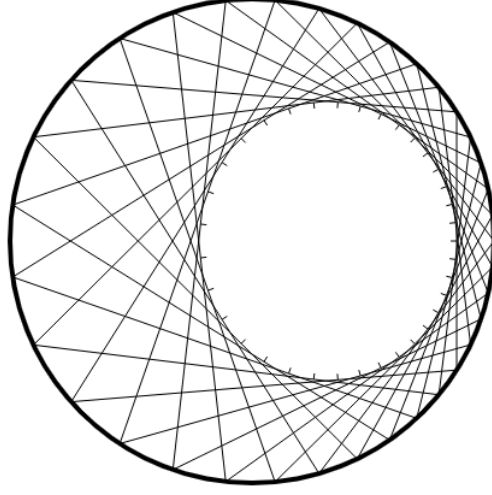


Figura 4.2: Ejemplo de una (7,2)-elipse.

1. La elipse  $E_a^\phi$  es una  $(n,1)$ -elipse de Blaschke asociada a  $B$ .
2. El automorfismo del disco  $M_{a,\phi}$  es elíptico convexo de orden  $n$  y  $B = B \circ M_{a,\phi}$ .
3. El automorfismo del disco  $M_{a,\phi}$  es elíptico convexo de orden  $n$  con punto fijo  $b \in \mathbb{D}$  y

$$B = \tau \circ \left( \frac{b-z}{1-\bar{b}z} \right)^n \quad (4.4)$$

donde  $\tau$  es un automorfismo del disco.

**Demostración.** Una vez más, nos referimos a [6, p. 187] para toda aquella persona interesada en los detalles. |

A partir del Teorema 4.11 podemos deducir un caso particular de producto de Blaschke que va a dar lugar a un conjunto de elipses distintas.

**Proposición 4.12.** Sea  $b \in \mathbb{D}$ ,  $\mu \in \mathbb{T}$ , y  $k, m, n$  enteros positivos tales que  $n = mk$  y  $k \geq 2$ . Sea

$$B(z) = \mu \left( \frac{b-z}{1-\bar{b}z} \right)^n.$$

Para cada  $\lambda \in \mathbb{T}$ ,  $(z_1, \dots, z_n)$  denotan los puntos ordenados satisfaciendo  $B(z) = \lambda$ . Entonces cada uno de los  $m$  polígonos cerrados con lados  $\overleftrightarrow{z_j z_{j+m}}$  circunscribe a la elipse con focos

$$a_1 = b \frac{e^{\frac{2\pi i}{k}} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{k}} - |b|^2} \text{ y } a_2 = b \frac{e^{\frac{2\pi i}{k}} - 1}{|b|^2 e^{\frac{2\pi i}{k}} - 1} \quad (4.5)$$

y eje mayor de longitud  $2 \sin \frac{\phi}{2}$ , donde

$$\phi = \arg \left( \frac{e^{\frac{2\pi i}{k}} - |b|^2}{|b|^2 e^{\frac{2\pi i}{k}} - 1} \right). \quad (4.6)$$

Si  $k = 2$  la elipse no es más que el punto

$$a = \frac{2b}{1 + |b|^2}. \quad (4.7)$$

**Observación 4.13.** Las elipses obtenidas en la proposición anterior son  $(k, 1)$ -elipses de Blaschke y obtenemos una por cada factor  $k$  de  $n$ .

**Proposición 4.14.** Sea  $a \in \mathbb{D}$  y  $\phi \in [0, 2\pi)$  tal que  $M_{a,\phi}$  es un automorfismo elíptico del disco de orden  $n > 1$  con punto fijo  $b \in \mathbb{D}$ . Sea  $B$  un producto de Blaschke cumpliendo  $B \circ M_{a,\phi} = B$ . Si  $n_1, n_2, \dots, n_l$  son todos los divisores de  $n$  mayores que 1, entonces  $B$  da lugar a  $l$  elipses de Poncelet con una de ellas posiblemente degenerada. Los focos de todas estas elipses se encuentran en el círculo centrado en  $\frac{b}{1+|b|^2}$  que pasa por el origen.

**Demostración.** Este resultado no es más que un corolario de todos los resultados expuestos anteriormente. |

A estas alturas conocemos múltiples métodos para construir elipses de Poncelet a través de elipses de Blaschke. En un principio, el uso del operador desplazamiento parece distinto de los automorfismos elípticos del disco. Sin embargo, podemos conectar ambas construcciones empleando teoría de operadores.

**Definición 4.15 (Operador composición).** Dado un automorfismo del disco  $M_{a,\phi}$  se define el operador composición  $C_{M_{a,\phi}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  como

$$C_{M_{a,\phi}}(f) = f \circ M_{a,\phi} \quad (4.8)$$

donde  $\mathcal{B}$  es el conjunto de todos los productos de Blaschke.

**Observación 4.16.** Para todo aquel interesado en comprobar que este operador está bien definido puede consultar [18, p. 16].

Es entonces claro que la condición  $B \circ M_{a,\phi} = B$  es equivalente a que  $B$  sea una autofunción de  $C_{M_{a,\phi}}$  asociada al autovalor 1. Si hacemos uso de esto, así como del Lema 4.10 y la Proposición 4.14, tenemos un resultado particular para esta clase de productos de Blaschke.



**Proposición 4.17.** Sea  $a \in \mathbb{D}$  y  $\phi \in [0, 2\pi)$  tal que  $M_{a,\phi}$  es un automorfismo elíptico del disco de orden  $n > 1$ . Supongamos que  $B$  es un producto de Blaschke de grado  $n$  autofunción del operador composición asociada al autovalor 1. Sean  $n_1, \dots, n_l$  los divisores de  $n$  mayores que 1. Entonces para todo entero  $p_k$  con  $1 \leq p_k < \frac{n}{2}$  y  $\text{mcd}(p_k, n_k) = 1$  existe una  $(n_k, p_k)$ -elipse de Blaschke.

**Ejemplo 4.18.** Si tomamos el producto de Blaschke

$$B(z) = \left( \frac{-0.1 + 0.3i - z}{1 - (-0.1 - 0.3i)z} \right)^6.$$

Construimos una familia de elipses de Blaschke compuesta por una  $(6, 1)$ -elipse (6-elipse), una  $(3, 1)$ -elipse (3-elipse) y una  $(2, 1)$ -elipse (2-elipse correspondiente a un punto). Podemos ver en la Figura 4.3 esta familia de elipses.

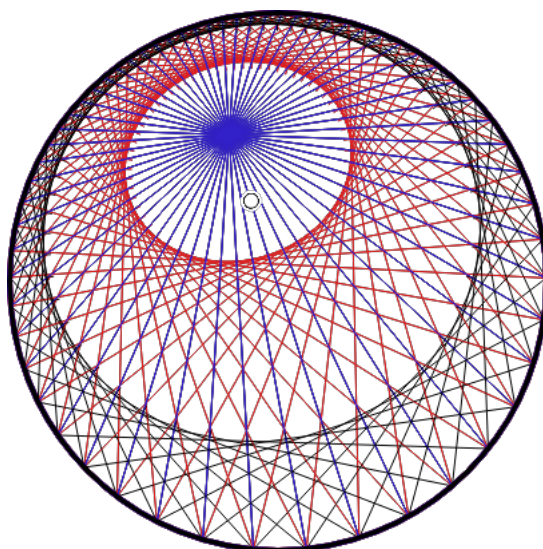


Figura 4.3: Familia de elipses de Blaschke para el Ejemplo 4.18.

Si ahora consideramos todos los resultados de las secciones 1.3, 4 y del Capítulo 2, obtenemos la siguiente proposición que nos permite hilar todo al operador desplazamiento.

**Proposición 4.19.** Sea  $a \in \mathbb{D}$  y  $\phi \in [0, 2\pi)$  tal que  $M_{a,\phi}$  es un automorfismo elíptico del disco de orden  $n > 1$ , y sea  $B$  un producto de Blaschke de grado  $n - 1$ . Supongamos que el producto de Blaschke  $C(z) = zB(z)$  cumple  $C \circ M_{a,\phi} = C$ . Entonces la extensión numérica de  $S_B$  es un disco elíptico.

Como podemos ver, en este capítulo hemos encontrado un método de construcción de elipses de Blaschke de cualquier orden. Hemos dado además un paso más allá, pudiendo construir también elipses que estén inscritas en polígonos que no sean convexos. La pregunta que nos surge ahora es si toda elipse de Poncelet, convexa o no, proviene de un producto de Blaschke (y por tanto son elipses de Blaschke). Ya probamos en la Proposición 3.32 que si el polígono que la circunscribe es convexo entonces proviene de un producto de Blaschke. Sin embargo, si la familia de polígonos que circunscriben a la elipse no es convexa, entonces no tenemos garantía, en principio, de que provengan de un producto de Blaschke.

# Bibliografía

- [1] BIX, R. *Conics and cubics*, second ed. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2006. A concrete introduction to algebraic curves.
- [2] BRIESKORN, E., AND KNÖRRER, H. *Plane algebraic curves*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1986. Translated from the German by John Stillwell.
- [3] CHOI, M.-D., AND LI, C.-K. Constrained unitary dilations and numerical ranges. *J. Operator Theory* 46, 2 (2001), 435–447.
- [4] CONWAY, J. B. *The theory of subnormal operators*, vol. 36 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.
- [5] CONWAY, J. B. *Functions of one complex variable. II*, vol. 159 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [6] DAEPP, U., GORKIN, P., SHAFFER, A., AND VOSS, K. *Finding ellipses*, vol. 34 of *Carus Mathematical Monographs*. MAA Press, Providence, RI, 2018. What Blaschke products, Poncelet’s theorem, and the numerical range know about each other.
- [7] FLATTO, L. *Poncelet’s theorem*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. Chapter 15 by S. Tabachnikov.
- [8] FULTON, W. *Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969. Notes written with the collaboration of Richard Weiss, Mathematics Lecture Notes Series.
- [9] GARNETT, J. B. *Bounded analytic functions*, first ed., vol. 236 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2007.
- [10] GAU, H.-L., AND WU, P. Y. Numerical range of  $S(\phi)$ . *Linear and Multilinear Algebra* 45, 1 (1998), 49–73.

- [11] GAU, H.-L., AND WU, P. Y. Lucas' theorem refined. *Linear and Multilinear Algebra* 45, 4 (1999), 359–373.
- [12] KATZNELSON, Y. *An introduction to harmonic analysis*, third ed. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [13] KEELER, D. S., RODMAN, L., AND SPITKOVSKY, I. M. The numerical range of  $3 \times 3$  matrices. *Linear Algebra Appl.* 252 (1997), 115–139.
- [14] KIPPENHAHN, R. On the numerical range of a matrix. *Linear Multilinear Algebra* 56, 1-2 (2008), 185–225. Translated from the German by Paul F. Zachlin and Michiel E. Hochstenbach [MR0059242].
- [15] KIRWAN, F. *Complex algebraic curves*, vol. 23 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [16] MIRMAN, B. UB-matrices and conditions for Poncelet polygon to be closed. *Linear Algebra Appl.* 360 (2003), 123–150.
- [17] ROJAS-GONZÁLEZ, A. Poncelet's porism. Trabajo de fin de grado, Universidad de Barcelona, junio 2016.
- [18] SHAPIRO, J. H. *Composition operators and classical function theory*. Universitext: Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [19] SZ.-NAGY, B., FOIAS, C., BERCOVICI, H., AND KÉRCHY, L. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, second ed. Universitext. Springer, New York, 2010.
- [20] VASUDEVA, H. L. *Elements of Hilbert spaces and operator theory*. Springer, Singapore, 2017. With contributions from Satish Shirali.