

Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla  
Universidad de Sevilla



Trabajo Fin de Grado en el Doble Grado en Física y  
Matemáticas

# Efectos del potencial sobre la ecuación no lineal de Schrödinger

por Manuel Vera Moreno

Dirigido por: Prof. Dr. Renato Álvarez Nodarse y  
Profa. Dra. Niurka Rodríguez Quintero.

Fecha de presentación: 16 de junio de 2020



# Resumen

El objetivo principal de este trabajo es el estudio de la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) y de sus propiedades. En primer lugar se obtiene la solución tipo solitón y las leyes físicas más importantes que cumple la propia NLS. A continuación, se consideran algunas perturbaciones de la NLS mediante la inclusión de una fuerza paramétrica, disipación y un potencial externo. Para estudiar dicha NLS perturbada se ha usado el método de coordenadas colectivas que en algunos casos permite obtener las soluciones analíticas de la ecuación.

# Abstract

The main aim of this work is the study of the nonlinear Schrödinger equation (NLS) and its properties. First, the soliton-type solution and the most important physical laws that the NLS itself satisfies are obtained. Next, some perturbations of the NLS are considered by including a parametric force, dissipation, and an external potential. In order to study this perturbed NLS, the collective coordinate method has been used, which in some cases allows us to obtain the analytical solutions of the equation.



# Índice general

<b>1. La ecuación no lineal de Schrödinger</b>	<b>1</b>
1.1. Solitones . . . . .	1
1.2. Transformaciones de Galileo . . . . .	14
1.3. Leyes de conservación . . . . .	15
<b>2. Ecuación NLS bajo perturbaciones</b>	<b>23</b>
2.1. Preliminares . . . . .	23
2.2. Modelo disipativo-paramétrico . . . . .	25
2.3. Análisis de un potencial complejo . . . . .	28
2.3.1. Potencial complejo lineal-disipativo . . . . .	31
2.3.2. Potencial complejo parabólico-disipativo . . . . .	35
2.3.3. Potencial complejo periódico-disipativo . . . . .	38
<b>Conclusiones</b>	<b>46</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>47</b>
<b>A. Resultados auxiliares</b>	<b>51</b>
A.1. Propiedades de las funciones elípticas de Jacobi . . . . .	51
A.2. Algunas integrales útiles . . . . .	53



# Capítulo 1

## La ecuación no lineal de Schrödinger

En este capítulo vamos a tratar la derivación de la ecuación de Schrödinger no lineal así como la obtención de su solución exacta y sus leyes de conservación más importantes, incluyendo la evolución de la solución *solitónica* bajo distintos conjuntos de parámetros.

### 1.1. Solitones

La ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) surge en una amplia variedad de problemas físicos en mecánica de fluidos, física de plasma y óptica no lineal. Ejemplos importantes en este ámbito incluyen: el autoenfoco de haces en óptica no lineal, el modelado de propagación de pulsos electromagnéticos en fibras ópticas no lineales que actúan como guías de onda y la estabilidad de las ondas de Stokes en el agua (ver sección 10.1 en [5]).

Por otro lado, la NLS tiene la propiedad de ser completamente integrable, es decir, se puede resolver exactamente y encontrar infinitas cantidades que se conservan derivadas de la propia ecuación. Para mostrar esta propiedad, Zakharov y Shabat (1972), dos físicos modernos, desarrollaron el ingenioso método del *inverse scattering* que permitía el estudio de las soluciones tipo *solitón*.

La definición de solitón que utilizaremos es la de una onda localizada en el espacio que se propaga sin deformarse y que emerge de la interacción con otros solitones sin sufrir ningún cambio en su forma o su velocidad, salvo un cambio de fase.

Antes de pasar a la obtención de la NLS definamos que es una onda plana para familiarizarnos con los parámetros que involucra.

**Definición 1.1.1.** *Una onda plana en una dimensión es aquella que tiene la forma*

$$\varphi(x, t) = a(x, t)e^{i(kx - \omega t)},$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular de onda,  $k$  es el número de onda y  $a(x, t)$  es la función amplitud de la onda.

En primer lugar, vamos a dar una idea de cómo obtener la ecuación no lineal de Schrödinger sin perturbación a partir de la función amplitud compleja  $a(x, t) \in \mathbb{C}$  de una onda arbitraria, a priori, y la relación de dispersión no lineal (función que relaciona  $\omega$  con  $k$  y el módulo al cuadrado de la amplitud  $|a|^2$ ) dada por

$$\omega = \omega(k, |a|^2). \quad (1.1)$$

Asumimos que  $\max_{x,t} |a(x, t)|$  es suficientemente pequeño en la relación de dispersión (1.1) y procedemos a realizar un desarrollo formal de Taylor hasta orden 2 de la función  $\omega$  en torno a  $k = k_0$  y  $|a|^2 = 0$ .

Sea  $f = f(x, y)$  una función de dos variables con derivadas parciales hasta orden 2, su desarrollo de Taylor de orden dos en torno al punto  $s = (x_0, y_0)$  vendrá dado por

$$\begin{aligned} f \approx & f(s) + \frac{\partial f}{\partial x}(s)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(s)(y - y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s)(x - x_0)^2 + \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(s)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(s)(y - y_0)^2. \end{aligned}$$

Tomando  $f = \omega$ ,  $(x, y) = (k, |a|^2)$  y  $s = (x_0, y_0) = (k_0, 0)$ , se tiene

$$\begin{aligned} \omega \approx & \omega(s) + \frac{\partial \omega}{\partial k}(s)(k - k_0) + \frac{\partial \omega}{\partial |a|^2}(s)|a|^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}(s)(k - k_0)^2 + \\ & + \frac{\partial^2 \omega}{\partial k \partial |a|^2}(s)(k - k_0)|a|^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial (|a|^2)^2}(s)|a|^4. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Como  $a$  es pequeña entonces  $|a|^2$  también, de modo que podemos despreciar los dos últimos sumandos. Por otro lado, definamos

$$\omega_0 = \omega(s), \quad \omega'_0 = \frac{\partial \omega}{\partial k}(s), \quad \omega''_0 = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}(s),$$

y, además, denotemos a

$$\mu = - \left( \frac{\partial \omega}{\partial |a|^2} \right)_{|a|^2=0} = cte > 0,$$

como el parámetro de no linealidad. Con estas consideraciones la expresión (1.2) se transforma en

$$\omega \approx \omega_0 + (k - k_0)\omega'_0 + \frac{1}{2}(k - k_0)^2\omega''_0 - \mu|a|^2. \quad (1.3)$$

Para continuar con la obtención de la NLS recurrimos a lo que se conoce como el



*Principio de Correspondencia.* Este principio establece una relación límite entre la mecánica clásica y la cuántica, es decir, la física clásica se obtiene como límite de la cuántica y las cantidades que conocemos en clásica como el momento cinético  $p$  y la energía  $E$  se le hacen corresponder los operadores  $\hat{p}$  y  $\hat{E}$ , respectivamente. Las formas de estos operadores en una dimensión son las siguientes:

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \quad (1.4)$$

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \quad (1.5)$$

Conociendo la fórmula de Planck,  $E = h\nu = \hbar\omega$ , que describe la cuantización energética y por la hipótesis de *De Broglie*,  $p = \hbar k$ , que establece la relación onda-corpúsculo (partícula tratada como onda y viceversa), podemos identificar las cantidades  $\omega$  y  $k$ , respectivamente. Así, mediante (1.4) y (1.5) se tiene la siguiente correspondencia<sup>1</sup> (salvo constantes  $\omega_0$  y  $k_0$ )

$$(\omega - \omega_0) \longrightarrow i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad (1.6)$$

$$(k - k_0) \longrightarrow -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad (1.7)$$

donde los operadores (1.6) y (1.7) actúan sobre la función amplitud  $a(x, t)$ .

Luego (1.3) se transforma en

$$i\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right) = -i\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)\omega'_0 + \frac{1}{2}\left[-i\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)\right]^2\omega''_0 - \mu|a|^2a, \quad (1.8)$$

$$i(a_t + \omega'_0 a_x) + \frac{1}{2}\omega''_0 a_{xx} + \mu|a|^2a = 0.$$

Llegados a este punto nos interesa recordar algunos conceptos de la mecánica clásica como es el caso de un sistema de referencia inercial que se mueve con una velocidad lineal de grupo  $\omega'_0$ , y realizar en este marco de referencia un cambio de variables del tipo  $y = x - \omega'_0 t$  y  $\tau = t$ , donde  $a(x, t) = A(x - \omega'_0 t, t) = A(y, \tau)$ , de modo que se tiene

$$a_x = \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial A}{\partial \tau}\right)\left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right) = A_y,$$

$$a_t = \left(\frac{\partial a}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial A}{\partial \tau}\right)\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right) = -\omega'_0 A_y + A_\tau,$$

<sup>1</sup>Estamos usando el *Principio de Correspondencia de Bohr* (véase, por ejemplo, la sección 20 del capítulo 3 en [8]).

$$a_{xx} = \left( \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \right) = \left( \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial A_y}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) = A_{yy}.$$

Así conseguimos eliminar  $a_x$  en la ecuación (1.8) y obtenemos:

$$iA_\tau + \frac{1}{2}\omega_0'' A_{yy} + \mu|A|^2 A = 0. \quad (1.9)$$

Si multiplicamos (1.9) por  $\hbar$  y realizamos la siguiente identificación:

$$\omega_0'' = \frac{\hbar}{m_0}, \quad \mu = \frac{\lambda}{\hbar}, \quad \Psi(z, \tilde{\tau}) = A(y, \tau),$$

llegamos a la ecuación no lineal de Schrödinger

$$i\hbar\Psi_{\tilde{\tau}} + \frac{\hbar^2}{2m_0}\Psi_{zz} + \lambda|\Psi|^2\Psi = 0, \quad \lambda > 0. \quad (1.10)$$

A partir de aquí trabajamos con la ecuación (1.10) adimensional para lo que realizamos el siguiente cambio de variables

$$x = \frac{z}{X_c}, \quad t = \frac{\tilde{\tau}}{T_c}, \quad \psi = \frac{\Psi}{S_c}, \quad (1.11)$$

donde

$$X_c = \sqrt{\frac{\hbar^2\gamma}{2m_0\lambda}}, \quad T_c = \frac{\gamma\hbar}{\lambda}, \quad S_c = 1, \quad (1.12)$$

y de esa manera, tratando  $\psi(x, t)$  como función de onda, la ecuación (1.10) se transforma en la siguiente:

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \gamma|\psi|^2\psi = 0, \quad \gamma > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0. \quad (1.13)$$

Buscamos la solución exacta de la ecuación (1.13) mediante el método de separación de variables escogiendo  $\psi(x, t) = \phi(x)T(t)$ , con  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dos veces diferenciable y  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una vez diferenciable,

$$i\phi(x)T'(t) + \phi''(x)T(t) + \gamma|\phi(x)T(t)|^2\phi(x)T(t) = 0.$$

Dividiendo por  $\phi(x)T(t)$ , obtenemos

$$i\frac{T'(t)}{T(t)} + \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} + \gamma|\phi(x)T(t)|^2 = 0,$$

donde debido a la no linealidad del módulo al cuadrado de la función de onda de la ecuación (1.13) no podemos obtener las ecuaciones dependientes de una sola va-

riable. Por este motivo se recurre a un método de separación de variables donde se propone soluciones del tipo onda viajera.

Sea  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función compleja arbitraria dos veces diferenciable y dependiente de  $X$ , con  $m, n \in \mathbb{R}$  y  $U \in \mathbb{R}$  constante a determinar, se define:

$$\psi(x, t) = \phi(X)e^{i(mX-nt)}, \quad X = x - Ut. \quad (1.14)$$

Mediante una sustitución de (1.14) en (1.13) se tienen las siguientes derivadas:

$$i\psi_t = [-iU\phi' + (mU + n)\phi]e^{i(mX-nt)}, \quad (1.15)$$

$$\psi_x = \phi'e^{i(mX-nt)} + im\phi e^{i(mX-nt)} = [\phi' + im\phi]e^{i(mX-nt)},$$

$$\psi_{xx} = [\phi'' + im\phi']e^{i(mX-nt)} + [\phi' + im\phi](im)e^{i(mX-nt)},$$

$$\psi_{xx} = [\phi'' + 2im\phi' - m^2\phi]e^{i(mX-nt)}, \quad (1.16)$$

donde  $\phi' = d\phi/dX$  y  $\phi'' = d^2\phi/dX^2$ .

De este modo, sustituyendo las derivadas (1.15) y (1.16) en (1.13) se obtiene:

$$[\phi'' + i(2m - U)\phi' + (mU + n - m^2)\phi + \gamma|\phi|^2\phi]e^{i(mX-nt)} = 0,$$

y puesto que la exponencial no se anula, llegamos a la ecuación

$$\phi'' + i(2m - U)\phi' + (mU + n - m^2)\phi + \gamma|\phi|^2\phi = 0. \quad (1.17)$$

Para obtener la solución tipo solitón se estudia la ecuación

$$\phi'' - \alpha\phi + \gamma\phi^3 = 0, \quad (1.18)$$

que se deduce de (1.17) asumiendo lo siguiente:

a)  $\phi \in \mathbb{R}$ .

b)  $2m - U = 0$ .

c)  $mU + n - m^2 = -\alpha$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Antes de continuar, vamos a dar un significado físico a las suposiciones anteriores. Sabemos que tanto el exponente de la exponencial como  $X$  están en coordenadas adimensionales por lo que conviene reescribirlos en las variables  $z$  y  $\tilde{\tau}$ , es decir, a

partir del cambio (1.11) se tiene

$$mX - nt = mx - (mU + n)t = (m/X_c)z - [(mU + n)/T_c] \tilde{\tau}, \quad (1.19)$$

$$X = x - Ut = (1/X_c)z - (U/T_c) \tilde{\tau}. \quad (1.20)$$

Ahora bien, dado que la solución propuesta con dimensiones sería

$$\Psi(z, \tilde{\tau}) = g(z - v\tilde{\tau})e^{i(kz - \omega\tilde{\tau})}, \quad (1.21)$$

siendo  $v$  la velocidad del centro del solitón, es posible deducir  $m$  y  $n$  en función de constantes dimensionales, y la relación entre  $U$  y  $v$ . De ese modo, si observamos (1.21) y (1.14), y establecemos una comparación entre exponentes y posiciones del centro del solitón, usando (1.19) y (1.20), respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned} (m/X_c)z - [(mU + n)/T_c] \tilde{\tau} &= kz - \omega\tilde{\tau}, \\ Z = X_c X = z - (UX_c/T_c) \tilde{\tau} &= z - v\tilde{\tau}, \end{aligned}$$

de lo que se sigue

$$v = \frac{X_c}{T_c} U, \quad k = \frac{m}{X_c}, \quad \omega = \frac{mU + n}{T_c},$$

y despejando y utilizando el cambio (1.12) se llega a

$$U = \sqrt{\frac{2m_0\gamma}{\lambda}} v, \quad m = \sqrt{\frac{\gamma}{2m_0\lambda}} \hbar k, \quad n = \frac{\gamma}{\lambda} (\hbar\omega - \hbar kv).$$

De lo anterior se sigue que las imposiciones b) y c) tienen el siguiente significado físico, respectivamente

- $2m - U = 0$  equivale a

$$2\sqrt{\frac{\gamma}{2m_0\lambda}} \hbar k - \sqrt{\frac{2m_0\gamma}{\lambda}} v = \sqrt{\frac{2m_0\gamma}{\lambda}} \left[ \frac{\hbar k}{m_0} - v \right] = 0,$$

que es equivalente a la fórmula de *De Broglie*  $p = \hbar k = m_0 v$ .

- $\alpha = m^2 - mU - n$  equivale a

$$\alpha = \frac{\gamma \hbar^2 k^2}{2m_0\lambda} - \frac{\gamma}{\lambda} \hbar kv - \frac{\gamma}{\lambda} \hbar\omega + \frac{\gamma}{\lambda} \hbar kv = \frac{\gamma}{\lambda} \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} - \hbar\omega \right) = \frac{\gamma}{\lambda} \left( \frac{p^2}{2m_0} - h\nu \right),$$

donde  $(\alpha/\gamma)\lambda$  nos da la diferencia de energía entre una partícula libre y un fotón (o conjunto de fotones).

La ecuación (1.18) aparece a la hora de resolver distintas ecuaciones de la Física-

Matemática como la ecuación de Sine-Gordon o la ecuación de Korteweg-deVries (KdV), (véase para más detalle [3]), cuya solución se expresa a través de las funciones elípticas de Jacobi. Introducimos así la siguiente definición:

**Definición 1.1.2.** *Sea  $\kappa \in \mathbb{R}$  con  $0 \leq \kappa^2 \leq 1$ . Se define la integral elíptica incompleta de primera especie como*

$$w = E(x, \kappa^2) = \int_0^x \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\kappa^2v^2)}}. \quad (1.22)$$

La inversa de  $E$  nos da la primera de las funciones elípticas de Jacobi

$$\operatorname{sn}(w, \kappa^2) = x = E^{-1}(w, \kappa^2). \quad (1.23)$$

A partir de (1.23) se expresan otras dos funciones elípticas importantes en nuestro trabajo,

$$\operatorname{cn}^2(w, \kappa^2) = 1 - \operatorname{sn}^2(w, \kappa^2), \quad (1.24)$$

$$\operatorname{dn}^2(w, \kappa^2) = 1 - \kappa^2 \operatorname{sn}^2(w, \kappa^2). \quad (1.25)$$

Para encontrar la solución de (1.18), proponemos el “ansatz”

$$\phi(X) = A \operatorname{dn}(BX, \kappa^2), \quad (1.26)$$

con  $A = A(\kappa^2), B = B(\kappa^2) \in \mathbb{R}$ .

Derivando (1.26) se tiene

$$\begin{aligned} \phi'(X) &= -AB\kappa^2 \operatorname{sn}(BX, \kappa^2) \operatorname{cn}(BX, \kappa^2), \\ \phi''(X) &= -AB^2\kappa^2 [\operatorname{cn}^2(BX, \kappa^2) - \operatorname{sn}^2(BX, \kappa^2)] \operatorname{dn}(BX, \kappa^2), \end{aligned}$$

donde las derivadas de las tres funciones elípticas  $\operatorname{sn}(w, \kappa^2)$ ,  $\operatorname{cn}(w, \kappa^2)$  y  $\operatorname{dn}(w, \kappa^2)$  antes mencionadas, las podemos encontrar en el Teorema A.1.1 del Apéndice A.

Así, sustituyendo (1.26) y (1.27) en (1.18), obtenemos

$$-B^2\kappa^2 [\operatorname{cn}^2(BX, \kappa^2) - \operatorname{sn}^2(BX, \kappa^2)] - \alpha + \gamma A^2 \operatorname{dn}^2(BX, \kappa^2) = 0, \quad (1.27)$$

y usando las relaciones (1.24) y (1.25) se tiene

$$-B^2\kappa^2 [1 - 2\operatorname{sn}^2(BX, \kappa^2)] - \alpha + \gamma A^2 [1 - \kappa^2 \operatorname{sn}^2(BX, \kappa^2)] = 0,$$

de manera que agrupando llegamos a

$$(2B^2\kappa^2 - \gamma A^2\kappa^2) \operatorname{sn}^2(BX, \kappa^2) + (\gamma A^2 - B^2\kappa^2 - \alpha) = 0. \quad (1.28)$$

Dado que  $\{1, \operatorname{sn}^2(w, \kappa^2)\}$  es un conjunto linealmente independiente, de la ecuación (1.28) se deduce que

$$2B^2\kappa^2 - \gamma A^2\kappa^2 = 0, \quad (1.29)$$

$$\gamma A^2 - B^2\kappa^2 - \alpha = 0. \quad (1.30)$$

De la primera ecuación (1.29) deducimos  $2B^2 = \gamma A^2$  que sustituido en la segunda (1.30) resulta  $(2 - \kappa^2)B^2 = \alpha$  y así,

$$B = \pm\sqrt{\alpha}(2 - \kappa^2)^{-1/2}, \quad A = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}(2 - \kappa^2)^{-1/2},$$

donde  $2 - \kappa^2 > 0; \kappa^2 < 2$ .

La solución general de (1.18) vendrá dada por

$$\phi(X) = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}(2 - \kappa^2)^{-1/2} \cdot \operatorname{dn}(\pm\sqrt{\alpha}(2 - \kappa^2)^{-1/2}X, \kappa^2). \quad (1.31)$$

Una vez obtenida la solución general podemos multiplicar por  $\phi'$  la ecuación (1.18) para conseguir ciertas propiedades físicas:

$$\phi'\phi'' - \alpha\phi'\phi + \gamma\phi'\phi^3 = 0,$$

de lo que se sigue

$$\frac{d}{dX} \left( \frac{\phi'^2}{2} - \alpha\frac{\phi^2}{2} + \gamma\frac{\phi^4}{4} \right) = 0.$$

Esto significa que la expresión entre paréntesis es una constante que denotaremos por  $E_0$ , luego tenemos

$$E_0 = \frac{1}{2}\phi'^2 - \frac{\alpha}{2}\phi^2 + \frac{\gamma}{4}\phi^4, \quad E_0 \in \mathbb{R}. \quad (1.32)$$

Sustituyendo en (1.32) la solución general (1.31) y su segunda derivada; y definiendo por simplicidad

$$\xi = BX = \pm\sqrt{\alpha}(2 - \kappa^2)^{-1/2}X,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\phi'^2 &= \frac{\alpha^2}{\gamma}\kappa^4(2 - \kappa^2)^{-2} \operatorname{sn}^2(\xi, \kappa^2) \operatorname{cn}^2(\xi, \kappa^2), \\ \frac{\alpha}{2}\phi^2 &= \frac{\alpha^2}{\gamma}(2 - \kappa^2)^{-1} \operatorname{dn}^2(\xi, \kappa^2), \end{aligned}$$

$$\frac{\gamma}{4}\phi^4 = \frac{\alpha^2}{\gamma}(2 - \kappa^2)^{-2} \operatorname{dn}^4(\xi, \kappa^2),$$

y así, se llega a

$$E_0(\kappa^2) = \frac{\alpha^2}{\gamma}(2 - \kappa^2)^{-2} [\kappa^4 \operatorname{sn}^2(\xi, \kappa^2) \operatorname{cn}^2(\xi, \kappa^2) - (2 - \kappa^2) \operatorname{dn}^2(\xi, \kappa^2) + \operatorname{dn}^4(\xi, \kappa^2)],$$

que podemos simplificar usando la relación

$$\kappa^2 \operatorname{sn}^2(\xi, \kappa^2) \kappa^2 \operatorname{cn}^2(\xi, \kappa^2) = (1 - \operatorname{dn}^2(\xi, \kappa^2)) (\kappa^2 - 1 + \operatorname{dn}^2(\xi, \kappa^2)),$$

de manera que el corchete en la expresión de  $E_0(\kappa^2)$  anterior se reduce a

$$(1 - \operatorname{dn}^2(\xi, \kappa^2))(\kappa^2 - 1 + \operatorname{dn}^2(\xi, \kappa^2)) - (2 - \kappa^2) \operatorname{dn}^2(\xi, \kappa^2) + \operatorname{dn}^4(\xi, \kappa^2) = -(1 - \kappa^2).$$

De esta forma obtenemos  $E_0$  en función de  $\kappa^2$ ,

$$E_0(\kappa^2) = -\frac{\alpha^2}{\gamma} \left[ \frac{1 - \kappa^2}{(2 - \kappa^2)^2} \right]. \quad (1.33)$$

Esta cantidad  $E_0$  la podemos entender como la suma de la energía cinética y potencial procedente de la ecuación de movimiento (1.18), que se puede interpretar a partir de la segunda ley de Newton:

$$\begin{aligned} \phi'' &= \alpha\phi - \gamma\phi^3 = -\frac{dV}{d\phi}, \\ V(\phi) &= \frac{1}{2}\phi^2 \left( \frac{\gamma}{2}\phi^2 - \alpha \right), \\ E_c &= \frac{\phi'^2}{2}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

donde  $V(\phi)$  y  $E_c$  representan el potencial y la energía cinética, respectivamente. Así, podemos decir que  $E_0 = E_c + V$  juega el papel de la energía total del sistema.

Pasamos a un análisis gráfico del potencial (1.34) y de las líneas constantes de energía  $E_0$  en cada caso.

Los ceros del potencial en nuestro caso están en  $\phi = 0$ ,  $\phi = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}$ , y representan los puntos de retorno del sistema. Los ceros de la derivada del potencial  $V'(\phi)$  están en  $\phi = 0$  y  $\phi = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$  y representan los puntos de equilibrio del sistema; de los cuales uno es inestable ( $\phi = 0$ ) y los demás son estables. Llegados hasta aquí, podemos diferenciar el comportamiento de la función  $\phi$  dependiendo del signo que tenga la energía (1.33). Por otro lado, si tomamos la expresión (1.32) podemos, también,

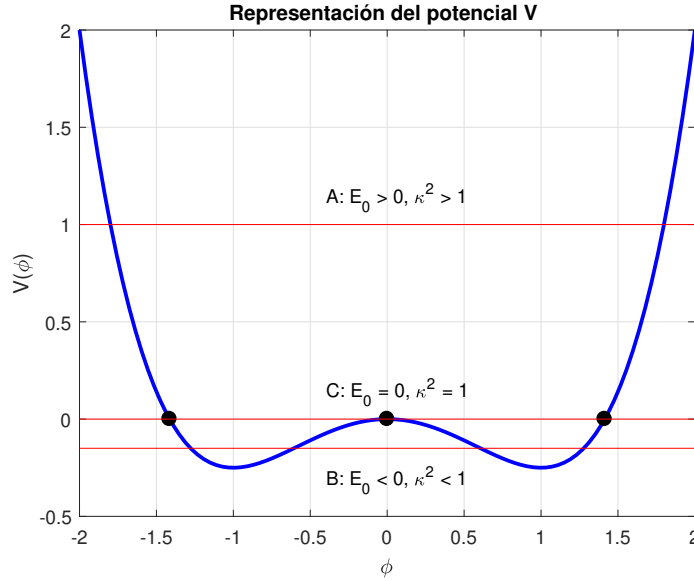


Figura 1.1: Potencial de la ecuación (1.34) para  $\alpha = \gamma = 1$ .

obtener las órbitas en cada caso mediante la ecuación

$$\phi' = \pm \sqrt{2 \left[ E_0 - \frac{1}{2} \phi^2 \left( \frac{\gamma}{2} \phi^2 - \alpha \right) \right]} = \pm \sqrt{2 [E_0 - V(\phi)]}. \quad (1.35)$$

Con ello, existen tres posibilidades:

- **Caso A:** *Pequeñas oscilaciones en torno a los puntos de equilibrio estables,  $E_0 < 0$  ( $\kappa^2 < 1$ ).* En este caso la función  $\phi$  describe oscilaciones entre los siguientes límites:

$$-\sqrt{2\alpha/\gamma} < \phi < 0, \quad 0 < \phi < +\sqrt{2\alpha/\gamma},$$

que en el caso de la Figura 1.1, son

$$-\sqrt{2} < \phi < 0, \quad 0 < \phi < +\sqrt{2},$$

donde la “partícula” se moverá entre los puntos de corte de la energía fija  $E_0$  y el potencial  $V(\phi)$  oscilando alrededor de los puntos de equilibrio estable  $\phi = \pm 1$ . En cuanto a las órbitas, en este caso tenemos el siguiente comportamiento: Observamos dos órbitas separadas (ver Figura 1.2) que representan las pequeñas oscilaciones alrededor de  $\phi = \pm 1$  identificando, así, ambos signos de la derivada de  $\phi$ .

- **Caso B:** *Grandes oscilaciones entorno a los puntos de equilibrio estables,  $E_0 > 0$  ( $\kappa^2 > 1$ ).* En este caso los puntos de corte de  $E_0$  y  $V(\phi)$  se encuentran por encima de  $V(\phi) = 0$ , de manera que para describir el comportamiento de



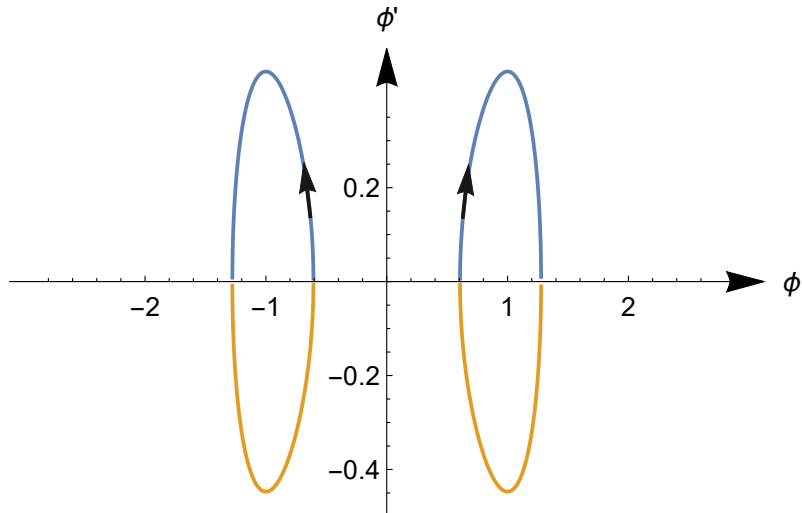


Figura 1.2: Diagrama de órbitas de la ecuación (1.35) para  $\alpha = \gamma = 1$  y  $E_0 = -0,15 < 0$ .

la “partícula”, ésta necesita pasar por los tres puntos de equilibrio, tanto los estables como el inestable, haciendo que presente oscilaciones mayores que en el caso anterior. Por otro lado, podemos obtener la solución general a partir de la definición (1.22), notando que como  $\kappa^2 > 1$  entonces  $1/\kappa^2 < 1$  y así se cumple (véase la Proposición A.1.1 del Apéndice A):

$$\operatorname{dn}(BX, \kappa^2) = \operatorname{cn}(B\kappa X, 1/\kappa^2),$$

donde, a partir de la solución general (1.31), se tiene:

$$\phi(X) = \pm \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}} (2 - \kappa^2)^{-1/2} \cdot \operatorname{cn}(\pm \sqrt{\alpha\kappa} (2 - \kappa^2)^{-1/2} X, 1/\kappa^2).$$

Las orbitas vienen representadas de la siguiente forma: Vemos una órbita am-

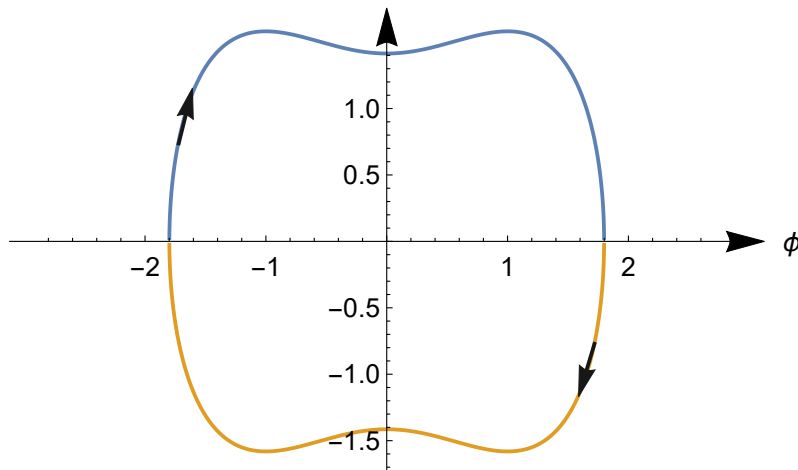


Figura 1.3: Diagrama de órbitas de la ecuación (1.35) para  $\alpha = \gamma = 1$  y  $E_0 = 1 > 0$ .

plia recorrida en un mismo sentido representando la gran oscilación del sistema (ver Figura 1.3).

- Caso C: *Pérdida de oscilaciones*,  $E_0 = 0$  ( $\kappa^2 = 1$ ). Este caso divide las dos regiones donde encontrábamos comportamientos oscilatorios. Es lo que se conoce como separatriz, es decir, separa las oscilaciones pequeñas del caso A, de la gran oscilación en el caso B. Por este motivo, las órbitas son *peculiares*: Nos encontramos en el caso particular donde la órbita correspondiente a la

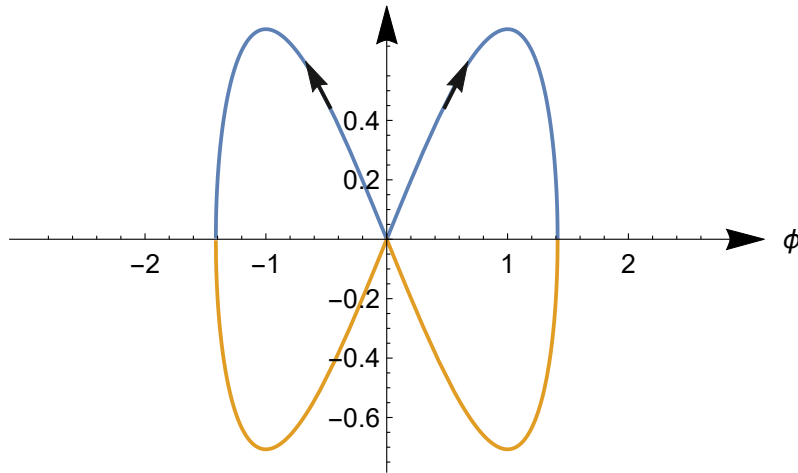


Figura 1.4: Diagrama de órbitas de la ecuación (1.35) para  $\alpha = \gamma = 1$  y  $E_0 = 0$ .

solución positiva de (1.31) comparte el punto  $(\phi, \phi') = (0, 0)$  con la órbita de la solución negativa de (1.31), debido a que la energía del punto cero coincide con un punto de equilibrio y retorno del potencial, ver Figura 1.4.

De esta forma, cuando se toma  $\kappa^2 = 1$  podemos llegar a una solución conocida a partir de (1.22)

$$w = E(x, 1) = \int_0^x \frac{dv}{1-v^2} = \int_0^x \frac{1/2}{1-v} dv + \int_0^x \frac{1/2}{1+v} dv,$$

donde se ha usado la descomposición en fracciones simples, obteniéndose:

$$w = E(x, 1) = \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right),$$

de manera que despejando  $x$  se tiene directamente,

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(w, 1) &= x = \frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1} = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}} = \tanh w, \\ \operatorname{cn}(w, 1) &= \operatorname{dn}(w, 1) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(w, 1)} = \frac{1}{\cosh w} = \operatorname{sech} w. \end{aligned}$$

Para este caso se cumple que las funciones elípticas de Jacobi son

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}(x, 1) &= \operatorname{dn}(x, 1) = \operatorname{sech} x, \\ \operatorname{sn}(x, 1) &= \tanh x, \end{aligned} \quad (1.36)$$

que usando la relación (1.36) en (1.31), y teniendo en cuenta que la secante hiperbólica es una función par, es decir,  $\operatorname{sech}(x) = \operatorname{sech}(-x)$ , nos da

$$\phi(X) = \pm \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}} \operatorname{sech}(\sqrt{\alpha}X).$$

Luego

$$\psi(x, t) = \pm \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}} \operatorname{sech} [\sqrt{\alpha}(x - Ut)] e^{i[mx - (n+mU)t]}, \quad (1.37)$$

donde las constantes  $n$  y  $m$  vienen dadas por:  $m = U/2$  y  $n = -\alpha - U^2/4$  (ver suposiciones a), b) y c) de la página 5). A partir de aquí, sin pérdida de generalidad, se tomará la solución positiva.

La solución (1.37) de (1.13) es de tipo solitón, ya que, por la definición citada al comienzo de la sección, se encuentra localizada en el espacio y se propaga sin deformarse. Además, posee una propiedad importante: si fijamos  $E_0 = 0$  y observamos tanto la Figura 1.1 como la 1.4, podemos interpretar el comportamiento de dicha solución como si una “partícula” se moviera desde un punto de retorno ( $\phi = 0$ ) hasta otro punto de retorno, en este caso  $+\sqrt{2}$ . Por otro lado, para que se cumpla que la energía asociada a la “partícula” sea cero ( $E_0 = 0$ ), es necesario que la energía potencial negativa ( $V < 0$ ) que adquiere se convierta en energía cinética ( $E_c$ ), de ahí que  $E_c + V = 0$ . Véase una discusión más detallada en [3].

La representación del módulo al cuadrado de (1.37) nos muestra una curva que se propaga sin cambiar su forma con velocidad constante  $U$  como si fuera un pulso. Podemos observarlo en las figuras representadas en 1.5.

La amplitud y velocidad de onda son parámetros independientes, donde el solitón solo existe si  $\gamma > 0$ , de manera que aumentando la velocidad el “pulso” se propagará más rápido sin modificar el valor del máximo que aparece en la Figura 1.5, ni la forma de la onda.

El siguiente paso es estudiar una serie de propiedades para este tipo de soluciones tales como las leyes de conservación generales para la NLS, y particularmente para el caso solitón, y las transformaciones de Galileo.

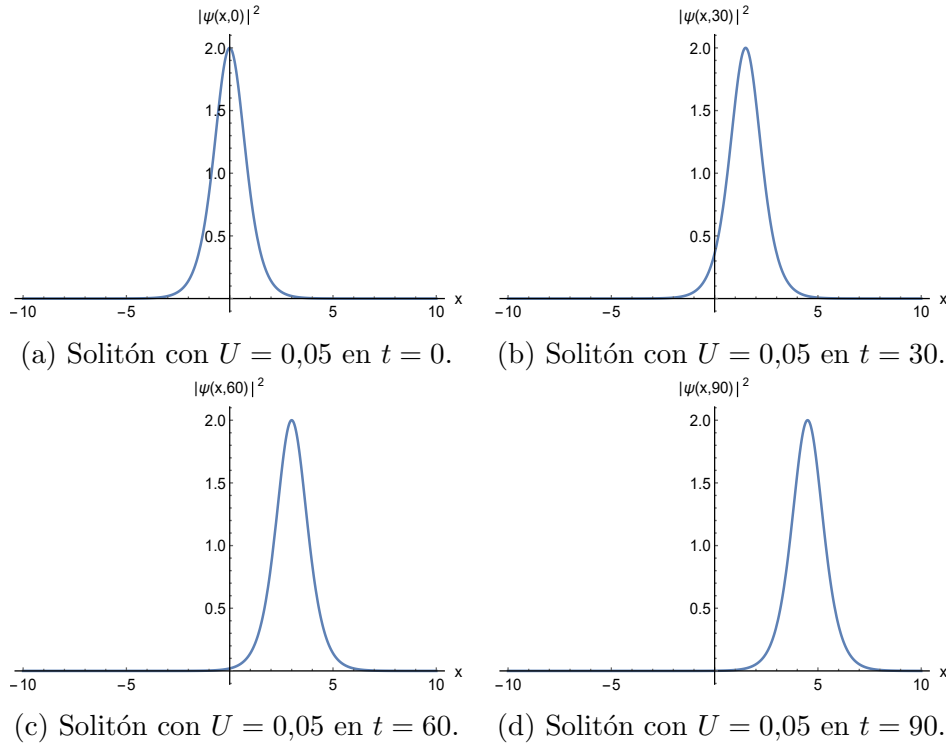


Figura 1.5: Evolución del solitón a una velocidad determinada.

## 1.2. Transformaciones de Galileo

En este apartado vamos a demostrar que la ecuación (1.13) es invariante bajo las transformaciones de Galileo.

**Teorema 1.2.1** (Sección 10.4, [5]). *Sea  $\psi$  la solución de (1.13) y definimos las siguientes transformaciones:*

- *Espacial:*      $\bar{x} = x - Ut$
- *Temporal:*     $\bar{t} = t$
- *Solución:*      $\bar{\psi} = \psi \exp \left[ -\frac{iU}{2} \left( x - \frac{1}{2}Ut \right) \right]$

Entonces la nueva función  $\bar{\psi}$  es solución de la ecuación:

$$i\bar{\psi}_{\bar{t}} + \bar{\psi}_{\bar{x}\bar{x}} + \gamma |\bar{\psi}|^2 \bar{\psi} = 0. \quad (1.38)$$

*Demostración.* Veamos esa invariancia en la ecuación. Para ello partiremos de la

ecuación (1.13) y llegaremos a (1.38). Un cálculo directo nos da

$$\psi_t = \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{t}} - U \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} - i \frac{U^2}{4} \bar{\psi} \right] e^{\frac{iU}{2}(x - \frac{1}{2}Ut)}, \quad (1.39)$$

$$\psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \left[ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} + \frac{iU}{2} \bar{\psi} \right] e^{\frac{iU}{2}(x - \frac{1}{2}Ut)},$$

$$\psi_{xx} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \left[ \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x}^2} + iU \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} - \frac{U^2}{4} \bar{\psi} \right] e^{\frac{iU}{2}(x - \frac{1}{2}Ut)}. \quad (1.40)$$

El módulo al cuadrado se queda invariante porque la exponencial compleja se simplifica con su conjugada; de esa forma sustituyendo (1.39) y (1.40) en (1.13), y sacando factor común la exponencial, obtenemos lo siguiente:

$$\left[ i\bar{\psi}_t + \bar{\psi}_{\bar{x}\bar{x}} + \gamma |\bar{\psi}|^2 \bar{\psi} \right] e^{\frac{iU}{2}(x - \frac{1}{2}Ut)} = 0.$$

Dado que la exponencial no se anula, se sigue que

$$i\bar{\psi}_t + \bar{\psi}_{\bar{x}\bar{x}} + \gamma |\bar{\psi}|^2 \bar{\psi} = 0.$$

□

Esto nos prueba que la transformación de la solución de la forma establecida es también solución, y, por tanto, la ecuación es invariante bajo las transformaciones de Galileo.

### 1.3. Leyes de conservación

La ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) también presenta leyes de conservación al igual que la ecuación de Schrödinger. En concreto, en este apartado vamos a demostrar tres leyes que cumple la solución: conservación de la carga, momento y energía, respectivamente. En estas leyes están involucradas tanto la solución  $\psi(x, t)$  como sus derivadas  $\psi_t$ ,  $\psi_x$  y  $\psi_{xx}$ , donde se exige la existencia de las derivadas parciales hasta orden 2 en  $x$  y hasta orden 1 en  $t$ . Por otro lado, impondremos que sean funciones de cuadrado integrable en  $\mathbb{R}$ , y, además, que vayan lo suficientemente rápido a cero en el infinito, para que de esta forma se anulen en los límites  $\pm\infty$  tanto  $\psi$  como sus derivadas.

**Definición 1.3.1.** *Se definen las cantidades:*

- *Densidad de carga:*

$$\rho(x, t) = \psi\psi^* = |\psi|^2. \quad (1.41)$$

- *Densidad de momento:*

$$\mathcal{P}(x, t) = \frac{i}{2} (\psi \psi_x^* - \psi^* \psi_x). \quad (1.42)$$

- *Densidad de energía no lineal:*

$$\mathcal{E}(x, t) = |\psi_x|^2 - \frac{1}{2} \gamma |\psi|^4. \quad (1.43)$$

Demostremos a continuación que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = cte = C_1, \quad (1.44)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2} (\psi \psi_x^* - \psi^* \psi_x) dx = cte = C_2, \quad (1.45)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ |\psi_x|^2 - \frac{1}{2} \gamma |\psi|^4 \right] dx = cte = C_3, \quad (1.46)$$

donde el asterisco denota el complejo conjugado.

Partimos de la ecuación (1.13)

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \gamma |\psi|^2 \psi = 0, \quad (1.47)$$

y su compleja conjugada

$$-i\psi_t^* + \psi_{xx}^* + \gamma |\psi|^2 \psi^* = 0. \quad (1.48)$$

Multiplicando (1.47) por  $\psi^*$ , y (1.48) por  $\psi$ , obtenemos que

$$i\psi_t \psi^* + \psi_{xx} \psi^* + \gamma |\psi|^4 = 0, \quad -i\psi \psi_t^* + \psi \psi_{xx}^* + \gamma |\psi|^4 = 0.$$

Si las restamos:

$$i(\psi_t \psi^* + \psi \psi_t^*) + (\psi_{xx} \psi^* - \psi \psi_{xx}^*) = 0.$$

Ahora bien, como

$$\psi_{xx} \psi^* = \frac{\partial}{\partial x} (\psi_x \psi^*) - |\psi_x|^2, \quad \psi \psi_{xx}^* = \frac{\partial}{\partial x} (\psi \psi_x^*) - |\psi_x|^2,$$

entonces

$$i \frac{\partial}{\partial t} (\psi \psi^*) + \frac{\partial}{\partial x} (\psi_x \psi^* - \psi \psi_x^*) = 0,$$

de donde se sigue la siguiente ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J_\rho}{\partial x} = 0, \quad (1.49)$$

y donde

$$J_\rho(x, t) = -i(\psi_x \psi^* - \psi \psi_x^*) = 2\mathcal{P}(x, t). \quad (1.50)$$

Integrando (1.49) en la variable espacial  $x$  entre  $-\infty$  y  $+\infty$ , se tiene para el segundo sumando

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} (\psi_x \psi^* - \psi \psi_x^*) dx = [\psi_x \psi^* - \psi \psi_x^*]_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

donde se ha usado que  $\psi$  y sus derivadas cumplen las condiciones de contorno del comienzo de la sección.

Para el primer sumando tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i \frac{\partial}{\partial t} (\psi \psi^*) dx = i \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx,$$

donde se ha utilizado el teorema de derivación con respecto a parámetros. De esta forma llegamos a

$$i \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = 0,$$

de donde se sigue el resultado (1.44).

Pasemos ahora a demostrar la siguiente ley de conservación (1.45). Procedemos a multiplicar la ecuación (1.47) por  $\psi_x^*$  y su conjugada (1.48) por  $\psi_x$ ,

$$i\psi_t \psi_x^* + \psi_{xx} \psi_x^* + \gamma |\psi|^2 \psi \psi_x^* = 0, \quad -i\psi_x \psi_t^* + \psi_x \psi_{xx}^* + \gamma |\psi|^2 \psi_x \psi^* = 0.$$

Si las sumamos obtenemos

$$i(\psi_t \psi_x^* - \psi_x \psi_t^*) + (\psi_{xx} \psi_x^* + \psi_x \psi_{xx}^*) + \gamma |\psi|^2 (\psi \psi_x^* + \psi_x \psi^*) = 0. \quad (1.51)$$

El siguiente paso es derivar respecto de  $x$  (suponiendo la función  $\psi$  tres veces diferenciable) las ecuaciones (1.47) y (1.48), y multiplicarlas por  $\psi^*$  y  $\psi$ , respectivamente, de manera que obtenemos

$$\begin{aligned} i\psi_{xt} \psi^* + \psi_{xxx} \psi^* + \gamma (|\psi|^2 \psi)_x \psi^* &= 0; \\ -i\psi \psi_{xt}^* + \psi \psi_{xxx}^* + \gamma \psi (|\psi|^2 \psi^*)_x &= 0. \end{aligned}$$

Sumando ambas se obtiene

$$i(\psi_{xt}\psi^* - \psi\psi_{xt}^*) + (\psi_{xxx}\psi^* + \psi\psi_{xxx}^*) + \gamma [(|\psi|^2\psi)_x\psi^* + \psi(|\psi|^2\psi^*)_x] = 0. \quad (1.52)$$

Restando (1.51) a la ecuación (1.52) obtenemos

$$\underbrace{i(\psi_{xt}\psi^* + \psi_x\psi_t^* - \psi\psi_{xt}^* - \psi_t\psi_x^*)}_{A_1} + \underbrace{(\psi_{xxx}\psi^* + \psi_{xxx}^*\psi)}_{A_2} - \underbrace{(\psi_{xx}\psi_x^* + \psi_{xx}^*\psi_x)}_{A_3} + \underbrace{\gamma [(|\psi|^2\psi)_x\psi^* + \psi(|\psi|^2\psi^*)_x] - \gamma|\psi|^2(\psi\psi_x^* + \psi^*\psi_x)}_{A_4} = 0. \quad (1.53)$$

Para las expresiones  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , se tiene que

$$\begin{aligned} A_1 &= i(\psi_{xt}\psi^* + \psi_x\psi_t^* - \psi\psi_{xt}^* - \psi_t\psi_x^*) = i\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi_x - \psi\psi_x^*) \\ A_2 &= \psi_{xx}\psi_x^* + \psi_{xx}^*\psi_x = \frac{\partial}{\partial x}(\psi_x\psi_x^*) \\ A_3 &= \psi_{xxx}\psi^* + \psi_{xxx}^*\psi = \frac{\partial}{\partial x}(\psi^*\psi_{xx} + \psi\psi_{xx}^*) - \frac{\partial}{\partial x}(\psi_x\psi_x^*) \\ A_4 &= \gamma [(|\psi|^2\psi)_x\psi^* + \psi(|\psi|^2\psi^*)_x] - \gamma|\psi|^2(\psi\psi_x^* + \psi^*\psi_x) = 4\gamma|\psi|^3\frac{\partial}{\partial x}|\psi|. \end{aligned}$$

Luego (1.53) se transforma en

$$i\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi_x - \psi\psi_x^*) + \frac{\partial}{\partial x}(\psi^*\psi_{xx} + \psi\psi_{xx}^*) - 2\frac{\partial}{\partial x}(\psi_x\psi_x^*) + \gamma\frac{\partial}{\partial x}|\psi|^4 = 0. \quad (1.54)$$

Multiplicando por  $(-1/2)$  la ecuación (1.54), se tiene la ecuación de continuidad del momento

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \frac{\partial J_{\mathcal{P}}}{\partial x} = 0,$$

donde

$$J_{\mathcal{P}}(x, t) = \psi_x\psi_x^* - \frac{1}{2}(\psi^*\psi_{xx} + \psi\psi_{xx}^*) - \frac{\gamma}{2}|\psi|^4 = \mathcal{E}(x, t) - \frac{1}{2}(\psi^*\psi_{xx} + \psi\psi_{xx}^*). \quad (1.55)$$

Integrando (1.54) respecto a  $x$  entre  $-\infty$  y  $+\infty$  y usando un razonamiento similar al anterior, obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} i(\psi^*\psi_x - \psi\psi_x^*) dx = 0,$$

o equivalentemente,

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2}(\psi\psi_x^* - \psi^*\psi_x) dx = 0,$$



lo que prueba (1.45).

Finalmente probemos la última expresión (1.46); en este caso multiplicamos la ecuación (1.47) por  $\psi_t^*$  y (1.48) por  $\psi_t$ ,

$$\begin{aligned} i|\psi_t|^2 + \psi_{xx}\psi_t^* + \gamma|\psi|^2\psi\psi_t^* &= 0, \\ -i|\psi_t|^2 + \psi_{xx}^*\psi_t + \gamma|\psi|^2\psi^*\psi_t &= 0, \end{aligned}$$

y las sumamos

$$(\psi_{xx}\psi_t^* + \psi_{xx}^*\psi_t) + \gamma|\psi|^2(\psi\psi_t^* + \psi^*\psi_t) = 0. \quad (1.56)$$

Así, usando que

$$\begin{aligned} \gamma|\psi|^2(\psi\psi_t^* + \psi^*\psi_t) &= \gamma|\psi|^2\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) = \frac{\gamma}{2}\frac{\partial}{\partial t}(|\psi|^2)^2, \\ \psi_{xx}\psi_t^* + \psi_{xx}^*\psi_t &= \frac{\partial}{\partial x}(\psi_t^*\psi_x + \psi_t\psi_x^*) - \frac{\partial}{\partial t}(\psi_x\psi_x^*), \end{aligned}$$

(1.56) se transforma en

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ |\psi_x|^2 - \frac{\gamma}{2}|\psi|^4 \right] - \frac{\partial}{\partial x}(\psi_t^*\psi_x + \psi_t\psi_x^*) = 0. \quad (1.57)$$

De manera que se obtiene la ecuación de continuidad de la energía

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial J_{\mathcal{E}}}{\partial x} = 0,$$

donde

$$J_{\mathcal{E}}(x, t) = -(\psi_t^*\psi_x + \psi_t\psi_x^*). \quad (1.58)$$

Análogamente, podemos integrar (1.57) respecto a  $x$  y aplicar el teorema de derivación respecto a parámetros como en los dos casos anteriores

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ |\psi_x|^2 - \frac{\gamma}{2}|\psi|^4 \right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}(\psi_t^*\psi_x + \psi_t\psi_x^*) dx,$$

y usando de nuevo las condiciones de contorno impuestas en  $\psi$  y sus derivadas, nos da

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ |\psi_x|^2 - \frac{\gamma}{2}|\psi|^4 \right] dx = 0,$$

lo que prueba (1.46).

Las constantes de movimiento  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  tienen su significado físico; en este caso,

están relacionadas con el número de partículas, el momento, y la energía del sistema gobernados por la ecuación no lineal de Schrödinger. Además, estas leyes se ven reflejadas en distintos fenómenos de inestabilidad en otros problemas físicos, como por ejemplo las ondas no lineales en el agua, olas del océano, ondas en plasma, pulsos de calor en un sólido, óptica no lineal y la inestabilidad no lineal en fluidos. (Véase sección 10.5 de [5] para más detalle).

Para acabar esta sección estudiaremos las ecuaciones de continuidad, así como las leyes de conservación para el caso particular del solitón (1.37). Recordemos, además, que  $X = x - Ut$ ,  $m = U/2$  y  $mU + n = -\alpha + U^2/4$ .

En primer lugar, empezamos con la densidad de carga  $\rho$  y su ley de conservación. De (1.41) y (1.50) se tienen las expresiones

$$\begin{aligned}\rho(x, t) &= \psi\psi^* = |\phi|^2 = \frac{2\alpha}{\gamma} \operatorname{sech}^2(\sqrt{\alpha}(x - Ut)), \\ J_\rho(x, t) &= \frac{4\alpha m}{\gamma} \operatorname{sech}^2(\sqrt{\alpha}X) = \frac{2\alpha U}{\gamma} \operatorname{sech}^2(\sqrt{\alpha}(x - Ut)).\end{aligned}$$

Ahora bien, (1.44) se transforma, en este caso, en:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, t) dx = \frac{2\alpha}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\sqrt{\alpha}(x - Ut)) dx = \frac{2\alpha}{\gamma} \left[ \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \right] = \frac{4\sqrt{\alpha}}{\gamma},$$

de manera que la constante en (1.44) será

$$C_1 = \frac{4\sqrt{\alpha}}{\gamma}.$$

En segundo lugar, veamos la densidad de momento  $\mathcal{P}$  y su ley de conservación. De (1.42) y (1.55) obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x, t) &= \frac{1}{2} J_\rho(x, t) = \frac{\alpha U}{\gamma} \operatorname{sech}^2(\sqrt{\alpha}(x - Ut)), \\ J_{\mathcal{P}}(x, t) &= \frac{\alpha U^2}{\gamma} \operatorname{sech}^2(\sqrt{\alpha}(x - Ut)).\end{aligned}$$

De la expresión (1.45) se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(x, t) dx = \frac{\alpha}{\gamma} U \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\sqrt{\alpha}(x - Ut)) dx = \frac{\alpha}{\gamma} U \left[ \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \right] = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\gamma} U.$$

Notemos que dicha integral ya la hemos resuelto para el caso anterior. Así, en este

caso obtenemos

$$C_2 = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\gamma}U.$$

Finalmente, calculemos la densidad de energía no lineal  $\mathcal{E}$  y su constante de la ley de conservación. De (1.43) y (1.58) se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x, t) &= \frac{2\alpha^2}{\gamma} \operatorname{sech}^2(\sqrt{\alpha}X) \left[ \tanh^2(\sqrt{\alpha}X) - \operatorname{sech}^2(\sqrt{\alpha}X) + \frac{U^2}{4\alpha} \right], \\ J_{\mathcal{E}}(x, t) &= \frac{4\alpha}{\gamma}U \operatorname{sech}^2(\sqrt{\alpha}X) \left[ \alpha \tanh^2(\sqrt{\alpha}X) - \frac{\alpha}{2} + \frac{U^2}{8} \right].\end{aligned}$$

De la misma manera, (1.46) nos ayuda a encontrar la última constante  $C_3$ . Como

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x, t) dx &= \frac{2\alpha^2}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\sqrt{\alpha}X) \tanh^2(\sqrt{\alpha}X) dx - \\ &- \frac{2\alpha^2}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^4(\sqrt{\alpha}X) dx + \frac{\alpha U^2}{2\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\sqrt{\alpha}X) dx = \\ &= \frac{2\alpha^2}{\gamma} \left[ \frac{2}{3\sqrt{\alpha}} \right] - \frac{2\alpha^2}{\gamma} \left[ \frac{4}{3\sqrt{\alpha}} \right] + \frac{\alpha U^2}{2\gamma} \left[ \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \right] = \\ &= \frac{\sqrt{\alpha}}{\gamma} \left[ U^2 - \frac{4\alpha}{3} \right],\end{aligned}$$

se sigue que

$$C_3 = \frac{\sqrt{\alpha}}{\gamma} \left[ U^2 - \frac{4\alpha}{3} \right].$$

Hemos concluido esta sección con el cálculo de las tres constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , obtenidas a partir de las leyes de conservación conocidas (para más detalles del cálculo de las integrales, ver el Apéndice A).



# Capítulo 2

## Ecuación no lineal de Schrödinger bajo perturbaciones

### 2.1. Preliminares

El objetivo de incluir perturbaciones (términos no homogéneos) tales como fuerzas de disipación, elásticas, paramétricas, electromagnéticas, etc, en la NLS es poder modelar muchos de los problemas que aparecen hoy en día en la física (para más información ver, por ejemplo, [2]). En este capítulo explicaremos brevemente qué le ocurre a la ecuación no lineal y a sus soluciones cuando se introducen perturbaciones en ella. Concretamente consideraremos el caso de perturbaciones con fuerzas paramétricas, disipación, y potenciales complejos.

En este capítulo nos va a hacer falta introducir el concepto de lagrangiano  $L$  y las ecuaciones de Euler-Lagrange (E-L). Tanto  $L$  como las ecuaciones están definidas en mecánica teórica a partir de las denominadas coordenadas generalizadas o colectivas  $\{q_j\}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  que representan el conjunto de  $N$  “posiciones” (posición lineal, ángulo,...) que describen a la partícula en un sistema dado. A su vez, se definen los momentos generalizados como  $\{p_j\}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  que representan la cantidad de momento asociada a cada coordenada  $q_j$ .

Por ejemplo, en el caso de un *péndulo simple* con posición fijada en un techo rígido, la coordenada generalizada que se utiliza es el ángulo  $\theta$  entre la cuerda y la perpendicular al plano del techo.

**Definición 2.1.1.** *Se define el lagrangiano de un sistema dependiente del tiempo como la función*

$$(q_1, \dots, q_j, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_j, \dots, \dot{q}_N; t) \mapsto L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2.1)$$

donde  $\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , se denominan velocidades generalizadas. Además, si

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (2.2)$$

entonces  $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  no depende explícitamente del tiempo.

En este trabajo se va a tratar el lagrangiano independiente del tiempo de manera explícita por lo que estaremos bajo la condición (2.2).

Por otro lado, las ecuaciones E-L en ausencia de causas externas, están definidas a partir de (2.1) y de las coordenadas y velocidades generalizadas,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, \dots, N.$$

Si consideramos una función  $F = F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  responsable de las fuerzas externas como la disipación, entonces las ecuaciones vienen dadas por

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

Véase los capítulos 1 y 2 de [6] para más detalle.

Otro aspecto que debemos tener en cuenta, y usaremos en los modelos posteriores, son las ecuaciones E-L en el ámbito de la teoría cuántica de campos (TCC). Aquí las coordenadas generalizadas son tratadas como un campo continuo  $u$  que describe la evolución del sistema. Por un lado, denotemos por  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$  el cuadrivector posición y  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  el cuadrivector derivada covariante, utilizados en esta teoría.

**Definición 2.1.2.** *Se define la densidad lagrangiana independiente del tiempo explícitamente a la función*

$$(u, \partial_\mu u) \mapsto \mathcal{L} = \mathcal{L}(u, \partial_\mu u), \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Además, se cumple que en una dimensión

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L} dx.$$

De la misma forma se pueden definir las ecuaciones E-L para el campo  $u$  utilizando la notación de Einstein, es decir, índice  $\mu$  repetido indica suma para cada  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , que podemos observar en el siguiente ejemplo

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_0 A^0 + \partial_1 A^1 + \partial_2 A^2 + \partial_3 A^3 = \partial_t A^t + \partial_x A^x + \partial_y A^y + \partial_z A^z.$$

De esa manera, las ecuaciones E-L en ausencia de causas externas son

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0.$$

Si consideramos una función densidad del tipo  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(u, \partial_\mu u)$  responsable de las causas externas, entonces

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\partial_0 u)},$$

en particular, nosotros trabajaremos en una dimensión por lo que las ecuaciones E-L serían

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(u_t)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(u_x)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(u_t)}. \quad (2.4)$$

Para una discusión más detallada consultar [10, Capítulo 2].

Tras este breve resumen procedemos a analizar los modelos y potenciales complejos.

## 2.2. Modelo disipativo-paramétrico

En este modelo incluimos las perturbaciones disipativas de la forma  $-i\rho\psi$  con  $\rho > 0$ , y paramétricas, a partir de una fuerza de la forma  $f(t) = re^{i\nu t}$  con  $r, \nu > 0$ . Así, la NLS perturbada quedará en la forma:

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \gamma|\psi|^2\psi = f(t)\psi^* - i\rho\psi. \quad (2.5)$$

Ante todo, vamos a encontrar la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$  y la densidad de disipación  $\mathcal{F}$  (que es la responsable de la causa externa) para que al introducirlas en las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.4) se obtenga la ecuación (2.5).

Sea  $u(x, t) = \psi(x, t)$ , y sean la siguiente densidad lagrangiana y densidad de disipación:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\psi_t\psi^* - \psi_t^*\psi) - |\psi_x|^2 + \frac{\gamma}{2}|\psi|^4 - \frac{1}{2}(f(\psi^*)^2 + f^*\psi^2), \quad (2.6)$$

$$\mathcal{F} = -i\rho(\psi_t\psi^* - \psi_t^*\psi). \quad (2.7)$$

Calculando las derivadas parciales en (2.4) para el campo complejo conjugado  $u^* = \psi^*$ , sabiendo que  $|\psi_x|^2 = \psi_x^*\psi_x$  y  $|\psi|^4 = (\psi^*\psi)^2$ , se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\psi_t^*)} = -\frac{i}{2}\psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\psi_x^*)} = -\psi_x, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\psi^*} = \frac{i}{2}\psi_t + \gamma(\psi\psi^*)\psi - f\psi^*,$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\psi_t^*)} = i\rho\psi,$$

e introduciéndolas en la ecuación (2.4) se obtiene (2.5).

A partir de aquí vamos a buscar un tipo de solución específica de la ecuación, las llamadas soluciones estacionarias, es decir, aquellas en las que la velocidad  $U = 0$ .

Recordando la solución general (1.37)

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}} \operatorname{sech} [\sqrt{\alpha}(x - Ut)] e^{i\left[\frac{U}{2}x - \left(\frac{U^2}{4} - \alpha\right)t\right]}, \quad (2.8)$$

de la ecuación NLS (1.13), donde  $\alpha$  es un parámetro relacionado con la amplitud de la onda, vamos a proponer una solución estacionaria de la forma

$$\psi = \psi_a(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \eta(t) \operatorname{sech} [\eta(t)x] e^{i\varphi(t)}. \quad (2.9)$$

Notemos que en ausencia de perturbaciones se conoce, del capítulo anterior, que  $\eta(t)$  es constante y  $d\varphi(t)/dt$  también es constante. Con esta expresión (2.9) suponemos que si las perturbaciones son pequeñas ( $r \ll 1$  y  $\rho \ll 1$ ) entonces la “forma funcional” de la onda no varía, es decir, va a seguir siendo una  $\operatorname{sech}(w)$ . Estas funciones,  $\eta(t)$  y  $\varphi(t)$ , son coordenadas colectivas o generalizadas y se van a obtener sus ecuaciones de evolución a partir de (2.9).

Empezamos calculando los términos que involucran tanto la densidad lagrangiana (2.6) como la densidad de disipación (2.7):

$$\begin{aligned} \psi_t &= \sqrt{2/\gamma} [\dot{\eta} - \eta\eta x \tanh(\eta x) + i\dot{\varphi}\eta] \operatorname{sech}(\eta x) e^{i\varphi}, \\ \psi_x &= -\sqrt{2/\gamma} [\eta^2 \tanh(\eta x) \operatorname{sech}(\eta x) e^{i\varphi}], \\ \frac{i}{2}(\psi_t \psi^* - \psi_t^* \psi) &= -(2/\gamma) \dot{\varphi} \eta^2 \operatorname{sech}^2(\eta x), \\ |\psi_x|^2 &= (2/\gamma) \eta^4 \tanh^2(\eta x) \operatorname{sech}^2(\eta x), \\ |\psi|^4 &= (2/\gamma)^2 \eta^4 \operatorname{sech}^4(\eta x), \\ f(\psi^*)^2 + f^* \psi^2 &= (2/\gamma) 2r \eta^2 \operatorname{sech}^2(\eta x) \cos(\nu t - 2\varphi). \end{aligned}$$

De ese modo, si definimos  $\sigma(t) = \nu t/2 - \varphi(t)$ , resulta:

$$\mathcal{L} = -\frac{2}{\gamma} \eta^2 \left[ \frac{\nu}{2} - \dot{\sigma} + r \cos(2\sigma) + \eta^2 \tanh^2(\eta x) - \eta^2 \operatorname{sech}^2(\eta x) \right] \operatorname{sech}^2(\eta x), \quad (2.10)$$

$$\mathcal{F} = \frac{4}{\gamma} \rho \eta^2 \left[ \frac{\nu}{2} - \dot{\sigma} \right] \operatorname{sech}^2(\eta x). \quad (2.11)$$

A partir de (2.10) y (2.11) podemos obtener el lagrangiano ( $L$ ) y la función disipación ( $F$ ) sin más que integrar en todo el dominio (véase las integrales en A.2 en el



Apéndice A):

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L} dx = -\frac{4}{\gamma} \eta \left[ \frac{\nu}{2} - \dot{\sigma} + r \cos(2\sigma) \right] + \frac{4}{3\gamma} \eta^3,$$

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} dx = \frac{8}{\gamma} \rho \eta \left[ \frac{\nu}{2} - \dot{\sigma} \right].$$

Tomando las coordenadas  $q_1 = \eta$  y  $q_2 = \sigma$ , tenemos que las ecuaciones (2.3) se escriben de la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta} = \frac{\partial F}{\partial \dot{\eta}}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\sigma}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial \dot{\sigma}},$$

de donde se deducen las ecuaciones de movimiento para  $\eta(t)$  y  $\sigma(t)$ :

$$2\nu - 4\dot{\sigma} + 4r \cos(2\sigma) - 4\eta^2 = 0,$$

$$4\dot{\eta} - 8\eta r \sin(2\sigma) + 8\rho\eta = 0,$$

o, equivalentemente,

$$\dot{\sigma} = -\eta^2 + \frac{\nu}{2} + r \cos(2\sigma), \quad (2.12)$$

$$\dot{\eta} = 2\eta(r \sin(2\sigma) - \rho). \quad (2.13)$$

Imponiendo  $\dot{\sigma} = 0$  y  $\dot{\eta} = 0$ , el sistema no lineal formado por las ecuaciones (2.12) y (2.13) tiene dos soluciones estacionarias:

$$\sigma_s^{(+)} = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{\rho}{r} \right), \quad \eta_s^{(+)} = \sqrt{\frac{\nu}{2} + \sqrt{r^2 - \rho^2}},$$

$$\sigma_s^{(-)} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{\rho}{r} \right), \quad \eta_s^{(-)} = \sqrt{\frac{\nu}{2} - \sqrt{r^2 - \rho^2}}.$$

Estas soluciones se pueden reescribir de la forma:

$$\sigma_s = \frac{\pi}{4}(1 - s) + \frac{s}{2} \arcsin \left( \frac{\rho}{r} \right), \quad (2.14)$$

$$\eta_s = \sqrt{\frac{\nu}{2} + s\sqrt{r^2 - \rho^2}}, \quad (2.15)$$

donde se ha tomado  $s = \pm 1$  para el signo del arcoseno y  $0 \leq \rho \leq r$  con  $r > 0$  para que  $\rho/r \leq 1$  y las expresiones anteriores (2.14) y (2.15) estén bien definidas. Además, si  $s = -1$  se tiene  $\nu/2 > \sqrt{r^2 - \rho^2}$  porque asumimos  $\eta_s \in \mathbb{R}$ . El caso  $\eta = 0$  conduce a la solución trivial  $\psi_a = 0$ , y no lo consideraremos.

Estos dos puntos fijos (2.14) y (2.15) se corresponden con dos soluciones estacionarias exactas de la ecuación (2.5), véase [2] para información más detallada.

En resumen, aunque el *ansatz* (2.9) fue propuesto como solución aproximada de (2.5) cuando  $r$  y  $\rho$  son muy pequeños, si sustituimos  $\eta(t) = \eta_s$  y  $\varphi(t) = \nu t/2 - \sigma_s$  en (2.9) se puede comprobar que  $\psi_a(x, t)$  es solución exacta de (2.5) tanto para  $s = 1$  como para  $s = -1$ , cualesquiera sean los valores de  $r$  y  $\rho$  (no necesariamente pequeños).

### 2.3. Análisis de un potencial complejo

En esta sección, una vez se ha estudiado el modelo particular anterior, se va a tratar la ecuación NLS con un potencial complejo dependiente de  $x$ , es decir,  $V = V(x) \in \mathbb{C}$  (no confundir con el potencial (1.34) estudiado en el capítulo 1). La ecuación en derivadas parciales NLS se escribe en este caso como:

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \gamma|\psi|^2\psi = V(x)\psi, \quad (2.16)$$

donde  $\gamma > 0$  y  $V(x) = V_1(x) + iV_2(x)$  con  $V_1, V_2 \in \mathbb{R}$ . De este modo, basándonos en el modelo disipativo-parámétrico podemos proponer una densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$  y una densidad de disipación  $\mathcal{F}$  del tipo:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - V_1(x)\psi\psi^*, \quad (2.17)$$

$$\mathcal{F} = iV_2(x)[\psi_t\psi^* - \psi_t^*\psi], \quad (2.18)$$

donde

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i}{2}(\psi_t\psi^* - \psi_t^*\psi) - |\psi_x|^2 + \frac{\gamma}{2}|\psi|^4,$$

es la densidad lagrangiana de la NLS homogénea (1.13). El término real  $V_1$  se asocia a  $\mathcal{L}$  al igual que la fuerza paramétrica en el caso particular de la sección 2.2 y la parte compleja  $iV_2$  se va a corresponder a la disipación, como  $-i\rho$  en la sección anterior. En nuestro caso vamos a tratar perturbaciones pequeñas del potencial, es decir,  $|V_1| \ll 1$  y  $|V_2| \ll 1$ . Nótese que la parte imaginaria del potencial  $iV_2(x)$  se *oculta* en la función de disipación y nos va a interesar sobre todo la parte real  $V_1(x)$ .

Nuevamente, calculando las derivadas parciales involucradas en (2.4) para el campo complejo conjugado  $u^* = \psi^*$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\psi_t^*)} &= -\frac{i}{2}\psi, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\psi_x^*)} &= -\psi_x, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} &= \frac{i}{2}\psi_t + \gamma(\psi\psi^*)\psi - V_1\psi, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\psi_t^*)} &= -iV_2\psi, \end{aligned}$$

e introduciéndolas en (2.4) se llega a (2.16).

A partir de aquí, proponemos una solución (ansatz) de la forma:

$$\psi = \psi_a(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \eta(t) \operatorname{sech} [\eta(t)(x - q(t))] e^{i[p(t)(x - q(t)) + \varphi(t)],} \quad (2.19)$$

con 4 coordenadas colectivas:  $\eta(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $q(t)$  y  $p(t)$ .

Esta propuesta se ha hecho en base a la solución solitónica (2.8) donde hemos “identificado” los parámetros de la misma por “coordenadas colectivas” o generalizadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha} &\rightarrow \eta(t), \\ Ut &\rightarrow q(t), \\ U/2 &\rightarrow p(t), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$(U^2/4 + \alpha) t \rightarrow \varphi(t). \quad (2.21)$$

En particular, (2.20) y (2.21) se han “identificado” a partir de (2.8) por el exponente

$$\frac{U}{2}x - \left(\frac{U^2}{4} - \alpha\right)t = \frac{U}{2}(x - Ut) + \left(\frac{U^2}{4} + \alpha\right)t,$$

de manera que para el caso  $V(x) = 0$  se tiene que la amplitud  $\eta(t) = \sqrt{\alpha} = cte$ , el desplazamiento del centro del solitón  $q(t) = Ut$ , para la coordenada colectiva  $p(t) = U/2 = cte$  y para la otra coordenada  $\varphi(t) = (\alpha + U^2/4)t$ .

Calculemos, a partir de (2.19), la expresión de la densidad lagrangiana (2.17) y la densidad de disipación (2.18). Si asumimos que el argumento de la secante hiperbólica es  $z(t) = \eta(t)(x - q(t))$ , tenemos que

$$\psi_t = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \operatorname{sech}(z) \left[ \dot{\eta} - \eta \tanh(z) \left[ \dot{\eta} \frac{z}{\eta} - \eta \dot{q} \right] + i\eta \left( \dot{p} \frac{z}{\eta} - p \dot{q} + \dot{\varphi} \right) \right] e^{i[p \frac{z}{\eta} + \varphi]},$$

$$\psi_x = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \eta \operatorname{sech}(z) [-\eta \tanh(z) + ip] e^{i[p \frac{z}{\eta} + \varphi]},$$

$$\frac{i}{2}(\psi_t \psi^* - \psi_t^* \psi) = -\frac{2}{\gamma} \eta^2 \operatorname{sech}^2(z) \left[ \dot{p} \frac{z}{\eta} - p \dot{q} + \dot{\varphi} \right],$$

$$|\psi_x|^2 = \frac{2}{\gamma} \eta^2 \operatorname{sech}^2(z) [\eta^2 \tanh^2(z) + p^2],$$

$$|\psi|^2 = \frac{2}{\gamma} \eta^2 \operatorname{sech}^2(z), \quad |\psi|^4 = \left(\frac{2}{\gamma}\right)^2 \eta^4 \operatorname{sech}^4(z).$$

De esa manera, obtenemos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{2}{\gamma} \eta^2 V_1 \left( \frac{z}{\eta} + q \right) \operatorname{sech}^2(z),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= -\frac{4}{\gamma}\eta^2 \operatorname{sech}^2(z) \left[ \dot{p}\frac{z}{\eta} - p\dot{q} + \dot{\varphi} \right] V_2 \left( \frac{z}{\eta} + q \right), \\ \mathcal{L}_0 &= -\frac{2}{\gamma}\eta^2 \left[ \dot{p}\frac{z}{\eta} - p\dot{q} + \dot{\varphi} + \eta^2 \tanh^2(z) + p^2 - \eta^2 \operatorname{sech}^2(z) \right] \operatorname{sech}^2(z).\end{aligned}$$

A partir de estas densidades, podemos calcular el lagrangiano ( $L$ ) y la función de disipación ( $F$ ) integrando:

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_0 dx - \frac{2}{\gamma}\eta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} V_1(x) \operatorname{sech}^2(\eta(x-q)) dx, \quad (2.22)$$

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} dx, \quad (2.23)$$

donde la integral de  $\mathcal{L}_0$  se puede calcular fácilmente, obteniéndose (véase las integrales del Apéndice A en la sección A.2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_0 dx = -\frac{2}{\gamma}\eta \left[ 2(p^2 - p\dot{q} + \dot{\varphi}) - \frac{2}{3}\eta^2 \right].$$

De ese modo las ecuaciones (2.22) y (2.23) quedan

$$L = -\frac{2}{\gamma}\eta \left[ 2(p^2 - p\dot{q} + \dot{\varphi}) - \frac{2}{3}\eta^2 \right] - \frac{2}{\gamma}\eta^2 \cdot T(t), \quad (2.24)$$

$$F = -\frac{4}{\gamma}\eta^2 \cdot G(t), \quad (2.25)$$

cuyas variables  $T = T(t)$  y  $G = G(t)$  vienen definidas por las integrales:

$$\begin{aligned}T &= \int_{-\infty}^{+\infty} V_1(x) \operatorname{sech}^2(\eta(x-q)) dx, \\ G &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\dot{p}(x-q) - p\dot{q} + \dot{\varphi}] V_2(x) \operatorname{sech}^2(\eta(x-q)) dx,\end{aligned}$$

que van a depender de los potenciales complejos que elijamos. En nuestro caso vamos a fijar el potencial  $V_2(x) = -\rho$  con  $\rho > 0$  para establecer una disipación como la del modelo de la sección 2.2 (el caso  $\rho = 0$  sería un ejemplo sin disipación). Por otro lado, el potencial  $V_1(x)$  se tomará de manera lineal, parabólico o periódico.

Calculemos  $G$  para el caso disipativo, que será válido en los casos que estudiaremos a continuación.

$$\begin{aligned}G_{|V_2(x)=-\rho} &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\dot{p}(x-q) - p\dot{q} + \dot{\varphi}] (-\rho) \operatorname{sech}^2(\eta(x-q)) dx = \\ &= -\rho\dot{p} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-q) \operatorname{sech}^2(\eta(x-q)) dx + \rho(p\dot{q} - \dot{\varphi}).\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^2(\eta(x - q)) dx = \frac{2}{\eta} \rho(p\dot{q} - \dot{\varphi}). \quad (2.26)$$

De ese modo, la función de disipación integrada ( $F$ ) (2.25) vendrá dada por

$$F = -\frac{8}{\gamma} \eta \rho(p\dot{q} - \dot{\varphi}). \quad (2.27)$$

A continuación, consideraremos varios tipos de potenciales  $V_1(x)$ .

### 2.3.1. Potencial complejo lineal-disipativo

En este apartado vamos a suponer que la parte real del potencial  $V(x)$  es una función lineal, es decir,

$$V_1(x) = \beta x + \delta, \quad \beta, \delta \in \mathbb{R}. \quad (2.28)$$

De esa manera, podemos calcular la variable  $T(t)$  (2.26) como sigue (veáse las integrales del Apéndice A en la sección A.2)

$$\begin{aligned} T &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\beta x + \delta) \text{sech}^2(\eta(x - q)) dx = \{z = \eta(x - q); dz = \eta dx\} = \\ &= \frac{\beta}{\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{z}{\eta} + q\right) \text{sech}^2(z) dz + \frac{\delta}{\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^2(z) dz = \\ &= \frac{\beta}{\eta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} z \text{sech}^2(z) dz + \left(\frac{\beta q + \delta}{\eta}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^2(z) dz = \frac{2}{\eta} (\beta q + \delta), \end{aligned} \quad (2.29)$$

y así, el lagrangiano ( $L$ ) (2.24) queda como

$$\begin{aligned} L &= -\frac{2}{\gamma} \eta \left[ 2(p^2 - p\dot{q} + \dot{\varphi}) - \frac{2}{3} \eta^2 \right] - \frac{2}{\gamma} \eta^2 \cdot \frac{2}{\eta} (\beta q + \delta) = \\ &= -\frac{2}{\gamma} \eta \left[ 2(p^2 - p\dot{q} + \dot{\varphi}) - \frac{2}{3} \eta^2 \right] - \frac{4}{\gamma} \eta (\beta q + \delta). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Con la expresión de la función disipación (2.27), el lagrangiano anterior (2.30) y las ecuaciones (2.3) tomando las 4 coordenadas colectivas  $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (\eta, q, p, \varphi)$ , tenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta} = \frac{\partial F}{\partial \dot{\eta}}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}, \quad (2.31)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) - \frac{\partial L}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial \dot{p}}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}}, \quad (2.32)$$

y a partir de ellas, obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} p^2 - p\dot{q} + \dot{\varphi} - \eta^2 + \beta q + \delta &= 0, \\ \dot{\eta}p + \eta\dot{p} + 2\eta\rho p + \beta\eta &= 0, \\ \eta(2p - \dot{q}) &= 0, \\ \dot{\eta} + 2\rho\eta &= 0, \end{aligned}$$

o, equivalentemente

$$\dot{\varphi} = p^2 + \eta^2 - \beta q - \delta, \quad (2.33)$$

$$\dot{p} = -\beta, \quad (2.34)$$

$$\dot{q} = 2p, \quad (2.35)$$

$$\dot{\eta} = -2\rho\eta, \quad (2.36)$$

donde el caso  $\eta = 0$  implica que (2.19) se anula, por lo que no se ha considerado.

El siguiente paso es encontrar la solución a este sistema. Asumimos unas condiciones iniciales para las coordenadas  $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (\eta, q, p, \varphi)$  con el objetivo de simplificar algunos cálculos:

$$\eta(0) = \eta_0, \quad q(0) = 0, \quad p(0) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0.$$

De la ecuación (2.36) se tiene que

$$\eta(t) = C \cdot e^{-2\rho t} \xrightarrow{\eta(0)=\eta_0} C = \eta_0,$$

y así,

$$\eta(t) = \eta_0 \cdot e^{-2\rho t}; \quad (2.37)$$

mientras que de la ecuación (2.34) se deduce

$$\dot{p} = -\beta \xrightarrow{\text{integrando}} p = -\beta t + M \xrightarrow{p(0)=0} M = 0,$$

con lo cual

$$p(t) = -\beta t. \quad (2.38)$$

Así, usando (2.38) en (2.35) se sigue que

$$\dot{q} = 2p = 2(-\beta t) \xrightarrow{\text{integrando}} q = -\beta t^2 + N \xrightarrow{q(0)=0} N = 0,$$

y se llega a

$$q(t) = -\beta t^2. \quad (2.39)$$

Del mismo modo, por (2.33) podemos deducir  $\dot{\varphi}$  con las expresiones (2.37), (2.38) y (2.39)

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \eta^2 + p^2 - \beta q - \delta = e^{-4\rho t} + (-\beta t)^2 - \beta(-\beta t^2) - \delta = \\ &= \eta_0^2 \cdot e^{-4\rho t} + 2\beta^2 t^2 - \delta, \end{aligned}$$

y seguidamente obtenemos  $\varphi$  integrando  $\dot{\varphi}$

$$\varphi = -\frac{\eta_0^2}{4\rho} \cdot e^{-4\rho t} + \frac{2}{3}\beta^2 t^3 - \delta t + D \xrightarrow{\varphi(0)} D = \varphi_0 + \frac{\eta_0^2}{4\rho}.$$

En resumen, tenemos

$$\eta(t) = \eta_0 \cdot e^{-2\rho t}, \quad (2.40)$$

$$p(t) = -\beta t, \quad (2.41)$$

$$q(t) = -\beta t^2, \quad (2.42)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{\eta_0^2}{4\rho} (1 - e^{-4\rho t}) + \frac{2}{3}\beta^2 t^3 - \delta t. \quad (2.43)$$

Podemos observar que la disipación ( $\rho$ ) afecta a la coordenada amplitud  $\eta$  que decrece exponencialmente, es decir, existe una atenuación de la amplitud inicial  $\eta(0)$ , y a la coordenada  $\varphi$  que es una fase específica de la solución (2.19) debido al potencial (2.28). Por otro lado,  $p$  varía linealmente y  $q$  representa un desplazamiento cuadrático del centro de la secante hiperbólica (solitón) (2.19), que no se ve afectado por la disipación. Además, las ecuaciones (2.41) y (2.42) para  $p(t)$  y  $q(t)$  tienen una interpretación clásica y se corresponden a las ecuaciones del momento y posición de una “partícula” que se mueve con aceleración constante igual a  $-2\beta$ , esto es, utilizando la segunda ley de Newton:

$$\ddot{q} = -2\beta = -\frac{d}{dq} [2V_1(q)] = F_{lin},$$

donde esa “partícula” está en un potencial efectivo  $2V_1(q)$  basado en (2.28)  $2V_1(q) = 2\beta q + 2\delta$ , y con una fuerza  $F_{lin}$  que deriva de ese potencial.

Veamos si (2.19) es solución analíticamente exacta de (2.16) bajo las coordenadas generalizadas (2.40), (2.41), (2.42) y (2.43). Sabiendo que  $z(t) = \eta(t)(x - q(t)) = (x + \beta t^2)\eta_0 \cdot e^{-2\rho t}$ , tenemos que las derivadas de (2.19) que aparecen en (2.16), en

función de  $\psi$ , son

$$\begin{aligned} i\psi_t &= i \left[ -2\rho - \tanh(z) (-2\rho z - 2\eta p) + i \left( -\beta \frac{z}{\eta} - p^2 + \eta^2 - \beta q - \delta \right) \right] \psi, \\ \psi_{xx} &= \left[ \eta^2 (\tanh^2(z) - \operatorname{sech}^2(z)) - 2i p \eta \tanh(z) - p^2 \right] \psi, \\ \psi &= \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \eta \operatorname{sech}(z) e^{i[p\frac{z}{\eta} + \varphi]}, \quad |\psi|^2 = \frac{2}{\gamma} \eta^2 \operatorname{sech}^2(z), \end{aligned}$$

donde se han utilizado las ecuaciones de movimiento (2.33), (2.34), (2.35) y (2.36) para que queden totalmente expresadas en función de las coordenadas generalizadas  $(\eta, q, p, \varphi)$ . Luego

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \gamma|\psi|^2\psi = \{\beta x + \delta - 2i\rho [1 - \eta(x - q) \tanh(\eta(x - q))]\} \psi,$$

con lo cual (2.19) sería solución analíticamente exacta cuando  $\rho = 0$ , es decir, en el caso no disipativo, ya que así  $V_2(x) = 0$  y  $V(x) = V_1(x)$

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \gamma|\psi|^2\psi = (\beta x + \delta) \psi = V(x)\psi.$$

En este caso, las ecuaciones de movimiento quedan como

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= p^2 + \eta^2 - \beta q - \delta, \\ \dot{p} &= -\beta, \\ \dot{q} &= 2p, \\ \dot{\eta} &= 0, \end{aligned}$$

y con los mismos razonamientos que en el caso disipativo ( $\rho \neq 0$ ), llegamos a

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \eta_0, \\ p(t) &= -\beta t, \\ q(t) &= -\beta t^2, \\ \varphi(t) &= \varphi_0 + \frac{2}{3}\beta^2 t^3 + (\eta_0^2 - \delta)t. \end{aligned}$$

Hemos podido observar que, tanto en el caso disipativo como en el no disipativo, la interpretación que hacemos como “partícula” nos dice que el centro de la secante hiperbólica ( $q$ ) se mueve con una aceleración constante  $-2\beta$ , mientras que la amplitud  $\eta$  es constante o se atenúa dependiendo de cada caso, al igual que también se ve modificada el valor de la fase  $\varphi$ . Además, la solución (2.19), bajo estas coordenadas colectivas, es analíticamente exacta cuando no hay disipación para ese potencial fijado (2.28). Consulte [4] para más detalle.



### 2.3.2. Potencial complejo parabólico-disipativo

Sea ahora

$$V_1(x) = \xi x^2 + \beta x + \delta, \quad \beta, \delta \in \mathbb{R}, \quad \xi > 0. \quad (2.44)$$

Como ya hemos estudiado el caso lineal, podemos expresar el potencial de la forma

$$V_1(x) = \xi x^2 + (\beta x + \delta) = \xi x^2 + V_{lin}(x).$$

De esa manera, calculamos la variable  $T(t)$  (2.26) como sigue

$$\begin{aligned} T &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi x^2 + V_{lin}(x)) \operatorname{sech}^2(\eta(x - q)) dx = \xi \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \operatorname{sech}^2(\eta(x - q)) dx + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} V_{lin}(x) \operatorname{sech}^2(\eta(x - q)) dx = \xi \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \operatorname{sech}^2(\eta(x - q)) dx + T_{lin}. \end{aligned}$$

Nos interesa, por tanto, calcular solo la primera integral, ya que  $T_{lin} = \frac{2}{\eta}(\beta q + \delta)$  como hemos visto anteriormente en (2.29). Con el cambio de variable  $\{z = \eta(x - q), dz = \eta dx\}$ , tendremos (véase las integrales del Apéndice A en la sección A.2)

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{z}{\eta} + q \right)^2 \operatorname{sech}^2(z) dz &= \frac{\xi}{\eta^3} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \operatorname{sech}^2(z) dz + 2q \frac{\xi}{\eta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} z \operatorname{sech}^2(z) dz + \\ &+ q^2 \frac{\xi}{\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(z) dz = \frac{\xi}{\eta^3} \cdot \frac{\pi^2}{6} + 2q^2 \frac{\xi}{\eta} = \left( 2q^2 + \frac{\pi^2}{6\eta^2} \right) \frac{\xi}{\eta}. \end{aligned}$$

Luego

$$T = \left( 2q^2 + \frac{\pi^2}{6\eta^2} \right) \frac{\xi}{\eta} + \frac{2}{\eta}(\beta q + \delta),$$

y así, (2.24) queda como

$$L = -\frac{2}{\gamma} \eta \left[ 2(p^2 - p\dot{q} + \dot{\varphi}) - \frac{2}{3}\eta^2 \right] - \left( 2q^2 + \frac{\pi^2}{6\eta^2} \right) \frac{2\eta\xi}{\gamma} - \frac{4\eta}{\gamma}(\beta q + \delta). \quad (2.45)$$

De ese modo, usando las expresiones (2.31) y (2.32) bajo el lagrangiano (2.45) y la función disipación (2.27), encontramos las ecuaciones de movimiento para el conjunto de coordenadas  $(\eta, q, p, \varphi)$

$$\begin{aligned} p^2 - p\dot{q} + \dot{\varphi} - \eta^2 - \frac{\pi^2\xi}{12\eta^2} + \xi q^2 + \beta q + \delta &= 0, \\ \dot{\eta}p + \eta\dot{p} + 2\eta\rho p + \beta\eta + 2\xi\eta q &= 0, \\ \eta(2p - \dot{q}) &= 0, \end{aligned}$$

$$\dot{\eta} + 2\rho\eta = 0,$$

o, equivalentemente

$$\dot{\varphi} = p^2 + \eta^2 + \frac{\pi^2\xi}{12\eta^2} - \xi q^2 - \beta q - \delta, \quad (2.46)$$

$$\dot{p} = -\beta - 2\xi q, \quad (2.47)$$

$$\dot{q} = 2p, \quad (2.48)$$

$$\dot{\eta} = -2\rho\eta. \quad (2.49)$$

En este caso, asumimos las condiciones iniciales

$$\eta(0) = \eta_0, \quad q(0) = q_0, \quad p(0) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0. \quad (2.50)$$

Así, de (2.49) se obtiene la ley exponencial ya calculada (2.37) que dejaremos con una amplitud inicial

$$\eta(t) = \eta(0) \cdot e^{-2\rho t}.$$

De (2.47) y (2.48) se sigue

$$\ddot{q} = 2\dot{p} = -2\beta - 4\xi q,$$

y notando  $\tilde{q} = q + \frac{\beta}{2\xi}$  se tiene

$$\ddot{\tilde{q}} = -4\xi\tilde{q} \quad \longrightarrow \quad \ddot{\tilde{q}} + 4\xi\tilde{q} = 0, \quad (2.51)$$

llegando a la ecuación de un movimiento armónico simple (MAS) con frecuencia característica  $\omega_0 = 2\sqrt{\xi}$ . De esta forma, tenemos por solución de (2.51)

$$\tilde{q}(t) = \tilde{q}(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{\tilde{q}}(0)}{2\sqrt{\xi}} \operatorname{sen}(\omega_0 t),$$

donde  $\dot{\tilde{q}}(0) = \left(\frac{d\tilde{q}(t)}{dt}\right)_{t=0}$ ; y deshaciendo el cambio se tiene

$$q(t) = \left(q(0) + \frac{\beta}{2\xi}\right) \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{q}(0)}{2\sqrt{\xi}} \operatorname{sen}(\omega_0 t) - \frac{\beta}{2\xi}.$$

Asimismo, una vez tenemos  $q(t)$ , de (2.47) podemos obtener  $\dot{p}(t)$

$$\dot{p}(t) = -2\xi \left(q(0) + \frac{\beta}{2\xi}\right) \cos(\omega_0 t) - \dot{q}(0) \sqrt{\xi} \operatorname{sen}(\omega_0 t),$$

que al integrarla se obtiene

$$p(t) = -\sqrt{\xi} \left( q(0) + \frac{\beta}{2\xi} \right) \text{sen}(\omega_0 t) + \frac{\dot{q}(0)}{2} (\cos(\omega_0 t) - 1) + p(0).$$

Para facilitar los cálculos y observar el comportamiento de la fase  $\varphi$  impondremos que el centro de la secante hiperbólica parte del reposo,  $\dot{q}(0) = 2p(0) = 0$ , compatible con la condición inicial  $p(0) = 0$  anteriormente mencionada en (2.50) que se utilizará a posteriori. De manera que por (2.46) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \xi \left( q(0) + \frac{\beta}{2\xi} \right)^2 + p(0)^2 - \frac{\beta^2}{4\xi} + \delta - 2p(0)\sqrt{\xi} \left( q(0) + \frac{\beta}{2\xi} \right) \text{sen}(\omega_0 t) + \\ &+ \eta(0)^2 e^{-4\rho t} + \frac{\pi^2 \xi}{12\eta(0)^2} e^{4\rho t}. \end{aligned}$$

Integrando llegamos a

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \left[ \xi \left( q(0) + \frac{\beta}{2\xi} \right)^2 + p(0)^2 - \frac{\beta^2}{4\xi} + \delta \right] t + p(0) \left( q(0) + \frac{\beta}{2\xi} \right) (\cos(\omega_0 t) - 1) - \\ &- \frac{\eta(0)^2}{4\rho} (e^{-4\rho t} - 1) + \frac{\pi^2 \xi}{48\rho\eta(0)^2} (e^{4\rho t} - 1) + \varphi(0). \end{aligned}$$

En resumen, bajo las condiciones iniciales (2.50), las coordenadas quedan como

$$\eta(t) = \eta_0 \cdot e^{-2\rho t}, \quad (2.52)$$

$$q(t) = \left( q_0 + \frac{\beta}{2\xi} \right) \cos(\omega_0 t) - \frac{\beta}{2\xi}, \quad (2.53)$$

$$p(t) = -\sqrt{\xi} \left( q_0 + \frac{\beta}{2\xi} \right) \text{sen}(\omega_0 t), \quad (2.54)$$

$$\varphi(t) = [\xi q_0^2 + \beta q_0 + \delta] t - \frac{\eta_0^2}{4\rho} (e^{-4\rho t} - 1) + \frac{\pi^2 \xi}{48\rho\eta_0^2} (e^{4\rho t} - 1) + \varphi_0. \quad (2.55)$$

Nuevamente, las coordenadas que se ven afectadas por la disipación son  $\eta$  y  $\varphi$ , donde la primera se atenúa a partir de una amplitud inicial  $\eta(0)$  y la segunda es una fase específica de la solución (2.19) que presenta comportamientos exponenciales derivados del propio potencial (2.44) elegido. Por otro lado,  $p$  y  $q$  varían periódicamente en el tiempo, como cabría esperar al tener la ecuación de movimiento de un MAS. De la misma forma, mediante una interpretación clásica, estas coordenadas representan el momento y posición de una “partícula” sometida a una fuerza ( $F_{cuad}$ ) que deriva de un potencial efectivo, respectivamente. A partir de (2.47) y (2.48), y utilizando la segunda ley de Newton, tenemos

$$\ddot{q} = -2\beta - 4\xi q = -\frac{d}{dq} [2V_1(q)] = F_{cuad}.$$

Este potencial armónico efectivo es  $2V_1(q) = 2\xi q^2 + 2\beta q + 2\delta$ , y está basado en (2.44). Veamos, finalmente en esta sección, si la solución (2.19) es analíticamente exacta para (2.16) bajo las coordenadas (2.52), (2.53), (2.54) y (2.55).

Sabiendo que  $z(t) = \eta(t)(x - q(t))$ , los términos involucrados en (2.16) en función de  $\psi$  resultan:

$$\begin{aligned} i\psi_t &= i \left[ -2\rho - \tanh(z)(-2\rho z - 2\eta p) + i \left( (-\beta - 2\xi q) \frac{z}{\eta} - p^2 + \eta^2 + \frac{\pi^2 \xi}{12\eta^2} \right) \right] \psi + \\ &\quad + (\xi q^2 + \beta q + \delta) \psi, \\ \psi_{xx} &= [\eta^2(\tanh^2(z) - \operatorname{sech}^2(z)) - 2ip\eta \tanh(z) - p^2] \psi, \\ \psi &= \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \eta \operatorname{sech}(z) e^{i[p\frac{z}{\eta} + \varphi]}, \quad |\psi|^2 = \frac{2}{\gamma} \eta^2 \operatorname{sech}^2(z), \end{aligned}$$

donde se han utilizado las ecuaciones de movimiento (2.46)–(2.49) para expresar las derivadas en función de las coordenadas generalizadas del sistema. Así, obtenemos

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \gamma|\psi|^2\psi = \left[ \beta x + \delta - \frac{\pi^2 \xi}{12\eta^2} + \xi q(2x - q) - 2i\rho[1 - \eta(x - q) \tanh(\eta(x - q))] \right] \psi,$$

con lo cual, aunque imponamos  $\rho = 0$  (caso no disipativo), no conseguimos tener que (2.19) sea solución exacta analítica de (2.16). Es un claro ejemplo de que aumentando el grado polinómico del potencial real  $V_1(x)$ , hace que no sea posible, de esta manera, hallar soluciones exactas de la ecuación (2.16).

Podemos concluir entonces que este *ansatz* (2.19) propuesto, unido al potencial parabólico escogido (2.44), no nos lleva a una solución exacta de (2.16), pero sí aproxima el comportamiento de dicha solución exacta asumiendo los parámetros adimensionales involucrados en el potencial (2.44) pequeños. Puede consultar [1] para más información.

### 2.3.3. Potencial complejo periódico-disipativo

Tomemos en esta sección

$$V_1(x) = a \cos(kx + \varepsilon), \quad a, k, \varepsilon \in \mathbb{R}. \quad (2.56)$$

Comencemos calculando la variable  $T(t)$  (2.26), ya mencionada en los otros apartados, para este caso particular de potencial (veáse las integrales del Apéndice A en la sección A.2)

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} a \cos(kx + \varepsilon) \operatorname{sech}^2(\eta(x - q)) dx = \{z = \eta(x - q); dz = \eta dx\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \left[ k \frac{z}{\eta} + kq + \varepsilon \right] \operatorname{sech}^2(z) dz = \frac{a}{\eta} \cos(kq + \varepsilon) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \left( \frac{k}{\eta} z \right) \operatorname{sech}^2(z) dz - \\
&- \frac{a}{\eta} \operatorname{sen}(kq + \varepsilon) \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} \left( \frac{k}{\eta} z \right) \operatorname{sech}^2(z) dz = \frac{a}{\eta} \cos(kq + \varepsilon) \left[ \frac{k}{\eta} \pi \operatorname{csch} \left( \frac{k\pi}{2\eta} \right) \right], \quad (2.57)
\end{aligned}$$

donde  $\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}$ .

A partir de (2.57) se obtiene el lagrangiano mediante (2.24)

$$L = -\frac{2}{\gamma} \eta \left[ 2(p^2 - p\dot{q} + \dot{\varphi}) - \frac{2}{3} \eta^2 \right] - \frac{2}{\gamma} ak\pi \cos(kq + \varepsilon) \operatorname{csch} \left( \frac{k\pi}{2\eta} \right). \quad (2.58)$$

De esa manera, usando las expresiones (2.31) y (2.32) con el lagrangiano (2.58) y la función disipación (2.27) tenemos, en este apartado, nuevas ecuaciones de movimiento para el conjunto de coordenadas  $(\eta, q, p, \varphi)$

$$\begin{aligned}
p^2 - p\dot{q} + \dot{\varphi} - \eta^2 + \frac{ak^2\pi^2}{4\eta^2} \cos(kq + \varepsilon) \operatorname{csch} \left( \frac{k\pi}{2\eta} \right) \coth \left( \frac{k\pi}{2\eta} \right) &= 0, \\
\dot{\eta}p + \eta\dot{p} + 2\eta\rho p - \frac{1}{2} ak^2\pi \operatorname{sen}(kq + \varepsilon) \operatorname{csch} \left( \frac{k\pi}{2\eta} \right) &= 0, \\
\eta(2p - \dot{q}) &= 0, \\
\dot{\eta} + 2\rho\eta &= 0,
\end{aligned}$$

o, equivalentemente

$$\dot{\varphi} = p^2 + \eta^2 - \frac{ak^2\pi^2}{4\eta^2} \cos(kq + \varepsilon) \operatorname{csch} \left( \frac{k\pi}{2\eta} \right) \coth \left( \frac{k\pi}{2\eta} \right), \quad (2.59)$$

$$\dot{p} = \frac{ak^2\pi}{2\eta} \operatorname{sen}(kq + \varepsilon) \operatorname{csch} \left( \frac{k\pi}{2\eta} \right), \quad (2.60)$$

$$\dot{q} = 2p, \quad (2.61)$$

$$\dot{\eta} = -2\rho\eta. \quad (2.62)$$

Este sistema de ecuaciones no es analíticamente resoluble por lo que se recurre a métodos numéricos. Asumimos las siguientes condiciones iniciales genéricas

$$\eta(0) = \eta_0, \quad q(0) = q_0, \quad p(0) = p_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0,$$

de manera que se distinguen dos casos importantes en el que se estudiará numéricamente la evolución de las coordenadas colectivas.

SIN DISIPACIÓN ( $\rho = 0$ ): Sabiendo que  $p_0$  y  $q_0$  representan el momento y posición inicial de una partícula, que en nuestro caso se corresponden con momento y posición inicial del centro de la secante hiperbólica (solitón), respectivamente, podemos

distinguir

- Solución estacionaria ( $p_0 = 0, q_0 = 0$ ).
- Solución no estacionaria ( $p_0 \neq 0$ ) con movimiento en una dirección ( $q_0 = 0$ ).
- Solución no estacionaria ( $p_0 \neq 0$ ) con oscilaciones ( $q_0 \neq 0$ ).

En primer lugar, para la solución estacionaria fijamos los parámetros

$$\eta_0 = 1, \quad q_0 = 0, \quad p_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad k = 1, \quad a = 0,2.$$

La evolución de las coordenadas  $(\eta, q, p, \varphi)$  se representan en la figura 2.1. Observa-

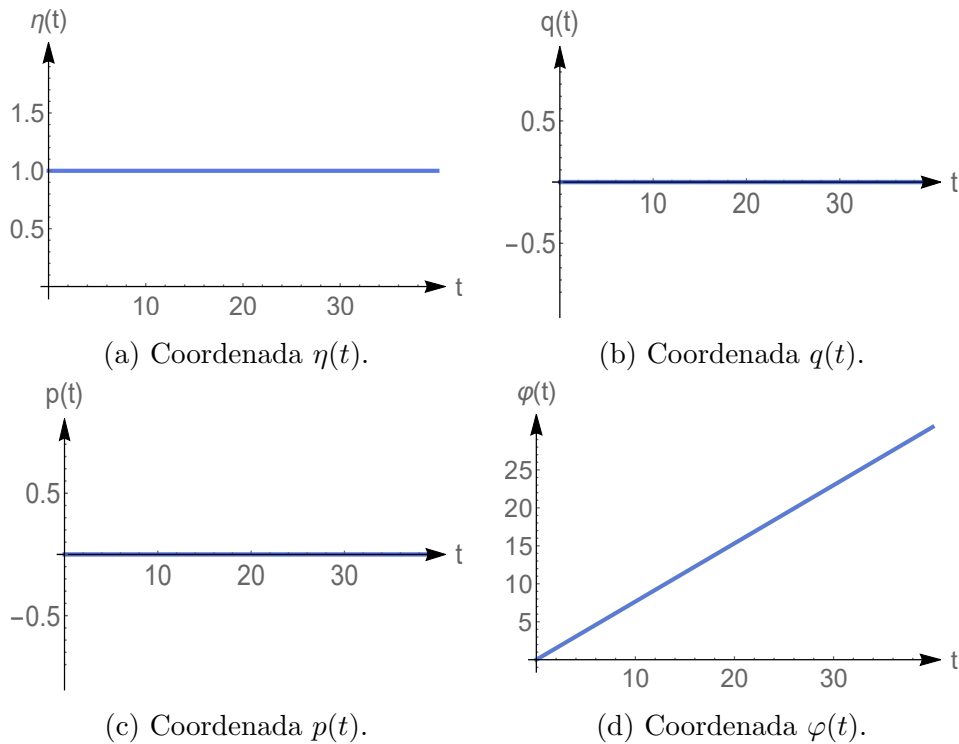


Figura 2.1: Evolución temporal de las coordenadas cd la NLS sin disipación de forma estacionaria,  $t \in [0, 40]$ .

mos en la Figura 2.1a que al no haber disipación, según la ecuación (2.62),  $\dot{\eta} = 0$  y así, la amplitud  $\eta(t) = cte = \eta_0 = 1$ .

Por otro lado, en la Figura 2.1c,  $p(t)$  posee un comportamiento oscilatorio nulo debido a que  $p_0 = 0$  inicialmente, y como  $q(t)$  está relacionado con la anterior coordenada, según (2.61) se tiene  $\dot{q} = 2p = 0$  y así,  $q(t) = cte = q_0 = 0$  que se ve reflejado en la Figura 2.1b.

Finalmente, en la Figura 2.1d, la fase  $\varphi$  es una recta que pasa por el origen, y se puede comprobar en (2.59) puesto que todos los términos son constantes y  $\varphi_0 = 0$ ,

de manera que  $\dot{\varphi} = cte$  y  $\varphi(t) = cte \cdot t$ .

En segundo lugar, tenemos el caso no estacionario con movimiento en una dirección para el cual fijamos los siguientes parámetros:

$$\eta_0 = 1, \quad q_0 = 0, \quad p_0 = 0,1, \quad \varphi_0 = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad k = 1, \quad a = 0,2.$$

La evolución de las coordenadas generalizadas está representada en la figura 2.2. Comparando con la Figura 2.1, se ven modificadas todas las coordenadas excepto la

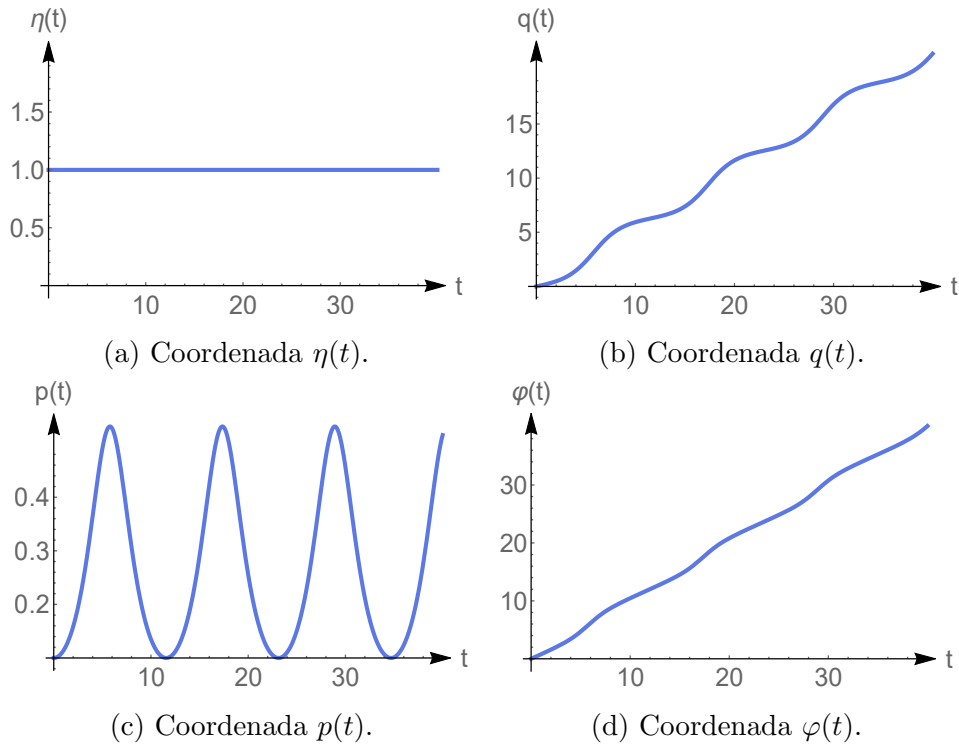


Figura 2.2: Evolución temporal de las coordenadas de la NLS sin disipación de forma no estacionaria con movimiento de  $q$  en una dirección,  $t \in [0, 40]$ .

amplitud como puede verse en la Figura 2.2a, ya que los parámetros de (2.62) no se ven alterados.

En este caso,  $p(t)$  presenta comportamientos oscilatorios, ya que  $p_0 \neq 0$ , como puede observarse en la Figura 2.2c. Además, estas oscilaciones son positivas en el tiempo ( $p(t) > 0$ ), influyendo en el comportamiento de  $q(t)$  puesto que, según (2.61),  $\dot{q} = 2p > 0$ , es decir, la velocidad del centro del solitón es positiva y por tanto, el solitón se mueve hacia la derecha con una dirección determinada como se puede ver en la Figura 2.2b.

Finalmente, la fase  $\varphi$  tiene un comportamiento análogo a  $q(t)$  ya que, según (2.59),  $\dot{\varphi}$  está en función de las otras 3 coordenadas colectivas:  $p$  y  $q$  oscilan y  $\eta$  es constante, por lo que al integrar  $\varphi$  crece en una dirección (lineal) presentando oscilaciones,

véase Figura 2.2d.

En tercer y último lugar, tenemos el caso no estacionario con oscilaciones que viene descrito, en nuestro caso, por los siguientes parámetros:

$$\eta_0 = 1, \quad q_0 = \frac{\pi}{4k}, \quad p_0 = 0,1, \quad \varphi_0 = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad k = 1, \quad a = 0,2.$$

Aquí, la evolución de las coordenadas colectivas está representada en la figura 2.3.

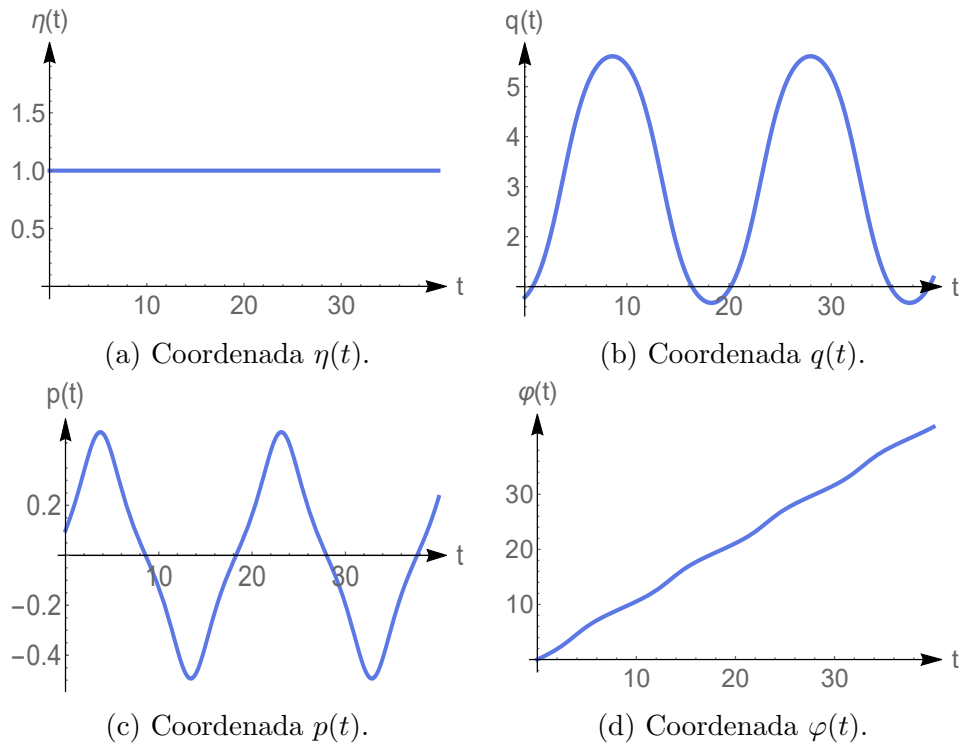


Figura 2.3: Evolución temporal de las coordenadas de la NLS sin disipación de forma no estacionaria con  $q$  oscilante,  $t \in [0, 40]$ .

Si comparamos con la Figura 2.2, nuevamente se ven modificadas todas las coordenadas excepto la amplitud como puede verse en la Figura 2.3a.

Dado que  $p_0$  sigue siendo no nulo,  $p(t)$  presenta comportamientos oscilatorios, véase la Figura 2.3c, pero esta vez, las oscilaciones no son positivas en el tiempo, sino que cambian de signo. Esto influye en el comportamiento de  $q(t)$  puesto que, según (2.61),  $\dot{q} = 2p$ , lo que nos indica que la velocidad del centro del solitón cambiará de signo y por tanto, la coordenada  $q$  crece o decrece en tiempo presentando oscilaciones sin dirección definida como en el caso anterior: el centro del solitón oscila en torno a un punto, que puede verse en la Figura 2.3b.

No obstante, existe un caso derivado de lo anterior: si hubiéramos impuesto  $p_0 = 0$  en vez de  $p_0 = 0,1$  el comportamiento de  $q(t)$  sería análogo al comentado, es decir, seguiría teniendo comportamiento oscilatorio en torno a un punto, y  $p(t)$  pasaría a



ser nulo como en la Figura 2.1c.

Por último, la fase  $\varphi$  tiene un comportamiento análogo a la fase del caso anterior ya que, según (2.59), de nuevo  $\dot{\varphi}$  está en función de las otras 3 coordenadas colectivas:  $p$  y  $q$  oscilan y  $\eta$  es constante, por lo que al integrar  $\varphi$  crece en una dirección (lineal) presentando oscilaciones, véase Figura 2.3d.

Se han podido diferenciar dos comportamientos importantes para  $q(t)$ : o bien oscila entorno a un punto, o bien, el solitón se mueve en una dirección. Esto se puede explicar a partir de una interpretación clásica donde  $p$  y  $q$  representan el momento y posición de una “partícula” sometida a una fuerza ( $F_{period}$ ) que deriva de un potencial efectivo, respectivamente. A partir de (2.60) y (2.61), y utilizando la segunda ley de Newton, tenemos

$$\ddot{q} = \frac{ak^2\pi}{\eta_0} \text{sen}(kq + \varepsilon) \text{csch}\left(\frac{k\pi}{2\eta_0}\right) = -\frac{d}{dq} \left[ \frac{ak\pi}{\eta_0} \text{csch}\left(\frac{k\pi}{2\eta_0}\right) \cos(kq + \varepsilon) \right],$$

o, equivalentemente

$$2\eta_0\ddot{q} = -\frac{d}{dq} \left[ 2ak\pi \text{csch}\left(\frac{k\pi}{2\eta_0}\right) \cos(kq + \varepsilon) \right] = -\frac{d}{dq} [U_{eff}] = F_{period}, \quad (2.63)$$

donde  $\eta(t) = \eta_0$  por la ecuación (2.62) para el caso sin disipación ( $\rho = 0$ ), y  $2\eta_0$  se corresponde con la “masa” de la “partícula”. De (2.63) se tiene el siguiente potencial efectivo

$$U_{eff}(q) = 2ak\pi \text{csch}\left(\frac{k\pi}{2\eta_0}\right) \cos(kq + \varepsilon),$$

que es una función periódica responsable de los distintos comportamientos de  $q(t)$ .

Si multiplicamos (2.63) por  $\dot{q}$  tenemos

$$2\eta_0\dot{q}\ddot{q} + \dot{q}\frac{d}{dq} [U_{eff}] = 0,$$

que podemos expresarlo como

$$\frac{d}{dt} \left( (2\eta_0)\frac{\dot{q}^2}{2} + U_{eff} \right) = 0,$$

de lo que se sigue

$$E = (2\eta_0)\frac{\dot{q}^2}{2} + U_{eff} = T + U_{eff},$$

donde  $T = (2\eta_0)\dot{q}^2/2$  es la energía cinética y  $E$  es una constante que juega el papel de la energía total de la “partícula” que depende de las condiciones iniciales. De este modo,  $q(t)$  tiene un comportamiento u otro en función de la constante  $E$ :

- El solitón se mueve en una dirección determinada si

$$E < U_{eff}(q) \quad \text{ó} \quad E > U_{eff}(q), \quad \forall q.$$

- Si  $E$  se encuentra entre los valores mínimo y máximo de  $U_{eff}$ , ambos incluidos,

$$U_{eff}^{min} \leq E \leq U_{eff}^{max},$$

existen puntos de corte entre  $E$  y  $U_{eff}$ , por lo que  $q(t)$  oscila. Además, esos puntos de corte se corresponden con los puntos de retorno del movimiento de la “partícula”, es decir, los valores máximo y mínimo de las oscilaciones de  $q$ .

CON DISIPACIÓN ( $\rho > 0$ ): De los casos estudiados sin disipación vamos a analizar el último: solución no estacionaria con  $q(t)$  oscilante para un valor de  $\rho$  adecuado. Notemos que si se elige un valor de  $\rho$  muy grande, esa disipación no permitiría el movimiento del solitón, ya que la amplitud  $\eta(t)$  decaería rápidamente de manera exponencial según

$$\eta(t) = \eta_0 \cdot e^{-2\rho t}, \quad (2.64)$$

ecuación deducida a partir de (2.62).

De la misma manera, si se elige  $\rho$  muy pequeño no apreciaremos cambios en las coordenadas  $q$ ,  $p$  y  $\varphi$  volviendo al tercer caso sin disipación de la Figura 2.3, a excepción de la coordenada  $\eta$ , a la que podemos hacer un desarrollo de Taylor hasta orden 1 de la exponencial anterior

$$\eta(t) = \eta_0 \cdot e^{-2\rho t} \simeq \eta_0(1 - 2\rho t),$$

que corresponde a una recta con pendiente negativa y ordenada en el origen  $\eta_0$ . Podemos observarlo en la figura 2.4.

Una vez hemos visto los dos casos límites, fijemos los siguientes parámetros:

$$\eta_0 = 1, \quad q_0 = \frac{\pi}{4k}, \quad p_0 = 0,1, \quad \rho = 0,02, \quad \varphi_0 = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad k = 1, \quad a = 0,2.$$

La evolución temporal de las coordenadas para ese valor de  $\rho$  está representada en la figura 2.5. Con respecto a la Figura 2.3 tenemos un cambio en las 4 coordenadas colectivas puesto que existe disipación.

- En la Figura 2.5a, observamos el decrecimiento exponencial según la ecuación (2.64), contrario a los otros casos en el que era constante debido al término  $\rho = 0$ .
- En la Figura 2.5c,  $p(t)$  va perdiendo el comportamiento oscilatorio, la amplitud

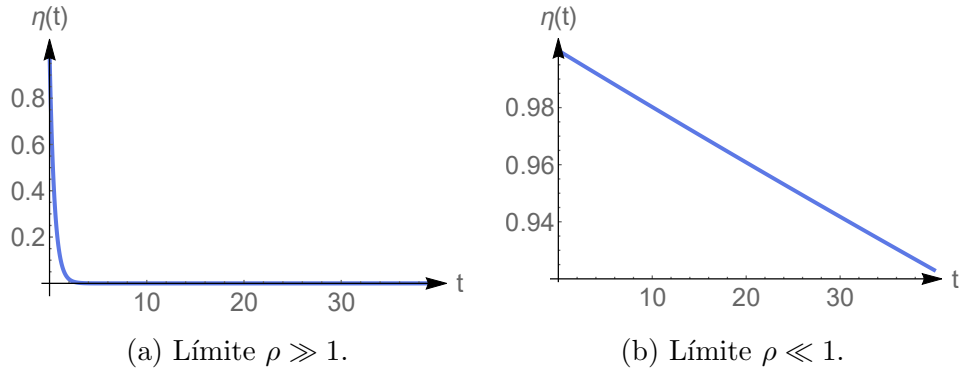


Figura 2.4: Evolución temporal de la coordenada  $\eta(t)$  de la NLS con disipación para  $\rho \gg 1$  y  $\rho \ll 1$ .

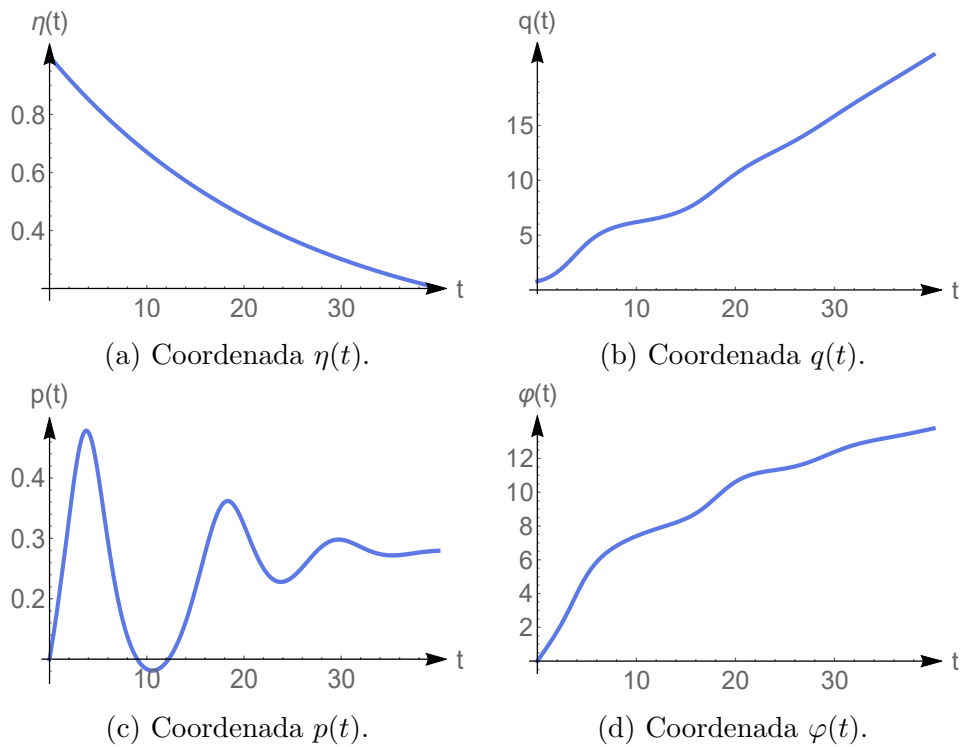


Figura 2.5: Evolución temporal de las coordenadas de la NLS con disipación de forma no estacionaria con  $q$  oscilante,  $\rho = 0,02$  y  $t \in [0, 40]$ .

de las oscilaciones decrece nuevamente por la disipación. Esto hace que al comienzo oscile como en la Figura 2.3c, pero al cabo de un tiempo tiende a una constante.

- En la Figura 2.5b, observamos que el comportamiento de  $q(t)$  se asemeja al segundo caso sin disipación (véase Figura 2.2b). La diferencia es que al perderse las oscilaciones en  $p$  al cabo de un tiempo, según (2.61) tendremos  $\dot{q} = 2p = 2 \cdot cte$  y eso nos lleva a una línea recta para  $q(t)$ , que se ve reflejado a partir de  $t = 30$ .

- En la Figura 2.5d, el comportamiento de la fase  $\varphi$  es análogo al de las Figuras 2.2d y 2.3d solo que, debido al efecto de la disipación, se curva disminuyendo el rango de valores de  $\varphi$  apreciado en la gráfica.

Hemos podido observar el comportamiento de las coordenadas generalizadas en función del tiempo a partir de una resolución numérica empezando por el caso simple en el que no existe disipación y analizando finalmente lo que ocurre cuando se introduce esa disipación.

Veamos finalmente, como en los demás secciones, si la solución (2.19) es analíticamente exacta para (2.16). Nuevamente, sabiendo que  $z(t) = \eta(t)(x - q(t))$ , los términos involucrados en (2.16) en función de  $\psi$  son

$$\begin{aligned} i\psi_t &= i \left[ -2\rho - \tanh(z)(-2\rho z - 2\eta p) + i \left( \frac{ak^2\pi}{2\eta} \operatorname{sen}(kq + \varepsilon) \operatorname{csch} \left( \frac{k\pi}{2\eta} \right) \frac{z}{\eta} \right) \right] \psi + \\ &+ \left[ p^2 - \eta^2 + \frac{ak^2\pi^2}{4\eta^2} \cos(kq + \varepsilon) \operatorname{csch} \left( \frac{k\pi}{2\eta} \right) \coth \left( \frac{k\pi}{2\eta} \right) \right] \psi, \\ \psi_{xx} &= [\eta^2(\tanh^2(z) - \operatorname{sech}^2(z)) - 2ip\eta \tanh(z) - p^2] \psi, \\ \psi &= \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \eta \operatorname{sech}(z) e^{i[p\frac{z}{\eta} + \varphi]}, \quad |\psi|^2 = \frac{2}{\gamma} \eta^2 \operatorname{sech}^2(z), \end{aligned}$$

donde se han utilizado las ecuaciones de movimiento (2.59), (2.60), (2.61) y (2.62) para expresar estas derivadas en función de las coordenadas colectivas  $(\eta, q, p, \varphi)$ . De esa forma, llegamos a

$$\begin{aligned} i\psi_t + \psi_{xx} + \gamma|\psi|^2\psi &= \left[ \frac{ak^2\pi^2}{4\eta^2} \cos(kq + \varepsilon) \operatorname{csch} \left( \frac{k\pi}{2\eta} \right) \coth \left( \frac{k\pi}{2\eta} \right) \right] \psi - \\ &- \left[ \frac{ak^2\pi}{2\eta} \operatorname{sen}(kq + \varepsilon) \operatorname{csch} \left( \frac{k\pi}{2\eta} \right) (x - q) + 2i\rho [1 - \eta(x - q) \tanh(\eta(x - q))] \right] \psi. \end{aligned}$$

Como podemos observar no se obtiene la ecuación (2.16) debido a los distintos sumandos extra que aparecen. Por este motivo, esta propuesta de solución (2.19), junto con la parte real del potencial tomada en este apartado (2.56), no es una solución analíticamente exacta de (2.16), pero si es una solución aproximada que predice el comportamiento de la exacta cuando los parámetros involucrados son suficientemente pequeños, es decir, una perturbación pequeña de los mismos. Para una información más detallada del potencial periódico véase [11].

En esta sección hemos podido analizar distintos casos de perturbaciones de la NLS homogénea (1.13) empezando por un perturbación peculiar de fuerza paramétrica con disipación seguido de un análisis profundo de tres tipos de potenciales caracterizados por presentar diferente parte real. Además, se ha usado el concepto de coordenada colectiva y las ecuaciones de movimiento que las rigen en cada caso.

# Conclusiones

En este trabajo se tratan principalmente dos problemas importantes. Por un lado, la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS), sus propiedades y su solución tipo solitón (capítulo 1), y por otro lado, perturbaciones de la ecuación no lineal a través de potenciales energéticos (capítulo 2).

El capítulo 1 recoge la mayor parte de información para la futura comprensión del capítulo 2. En él se desarrolla un procedimiento de obtención de la solución general de la NLS. Esta solución conduce a la de tipo solitón mediante la imposición de ciertas consideraciones que tienen su significado físico. De la misma manera, se ponen de manifiesto propiedades de la NLS tales como las leyes físicas de conservación más importantes en el ámbito físico teórico cuántico: carga, momento lineal y energía; y la invariancia de la ecuación NLS bajo las transformaciones de Galileo.

En el segundo capítulo el principal estudio se centra en introducir las perturbaciones a la ecuación no lineal homogénea (NLS) para lo que se hace uso de la mecánica clásica y la teoría cuántica de campos de sistemas continuos. El principal enfoque está destinado a la comprobación de que las soluciones propuestas, llamadas *ansatz*, sean soluciones analíticamente exactas o aproximadas de la NLS perturbada por los potenciales.

En este trabajo se comprueba que la mayoría de las veces no se encuentran soluciones exactas, es una tarea ardua por el simple hecho de incluir el fenómeno de la disipación en esos potenciales energéticos. Sin embargo, este problema se puede controlar cuando se recurren a modelos de fuerzas paramétricas que equilibren esos efectos disipativos no controlados, para lo cual podemos tener una idea en la segunda sección del capítulo 2.

Modelar y estudiar ecuaciones en derivadas parciales no lineales tiene su dificultad con respecto a las lineales, por el hecho de incluir el término no lineal, pero no por ello lo hace siempre irresoluble. Las interpretaciones cuánticas que podemos asociar a los comportamientos de las soluciones de estas ecuaciones tienen, la mayoría de veces, su análogo clásico, y es por ello que sirven de comprensión y estudio en los distintos ámbitos de la física moderna.



# Bibliografía

- [1] R. Balakrishnan, Soliton propagation in nonuniform media. *Phys. Rev. A* **32**, 1144 (1985).
- [2] I. V. Barashenkov, M. M. Bogdan, and V. I. Korobov, Stability Diagram of the Phase-Locked Solitons in the Parametrically Driven, Damped Nonlinear Schrödinger Equation. *Europhys. Lett.* **15**, 113 (1991).
- [3] J. M. Cervero, Unveiling the solitons mystery: The Jacobi elliptic functions. *Am. J. Phys* **54**, 35 (1986).
- [4] H. H. Chen and C. S. Liu, Solitons in Nonuniform Media. *Phys. Rev. Lett.* **37**, 693 (1976).
- [5] L. Debnath, *Nonlinear Partial Differential Equations*. Birkhäuser, Boston, 2005.
- [6] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*. Addison Wesley, Upper Saddle River, N.J., 2002.
- [7] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. Seventh Edition. Elsevier, Amsterdam/Boston, 2007.
- [8] B. G. Levich, *Mecánica Cúantica*. Vol. 3, Reverté S.A., Barcelona, 1976.
- [9] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and series*. Vol. 1, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 2002.
- [10] M. V. Sadovskii, *Quantum Field Theory*. Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston, 2019.
- [11] R. Scharf and A. R. Bishop, Length-scale competition for the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation with spatially periodic potentials. *Phys. Rev. E*, **47**, 1375 (1993).





# Apéndice A

## Resultados auxiliares

### A.1. Propiedades de las funciones elípticas de Jacobi

**Teorema A.1.1.** Sean  $\kappa \in \mathbb{R}$  con  $0 \leq \kappa^2 \leq 1$  y  $\operatorname{sn}(w, \kappa^2)$ ,  $\operatorname{cn}(w, \kappa^2)$ ,  $\operatorname{dn}(w, \kappa^2)$  las tres funciones elípticas de Jacobi, entonces las derivadas de estas funciones son las siguientes:

$$\frac{d}{dw} [\operatorname{sn}(w, \kappa^2)] = \operatorname{cn}(w, \kappa^2) \operatorname{dn}(w, \kappa^2), \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{d}{dw} [\operatorname{cn}(w, \kappa^2)] = -\operatorname{sn}(w, \kappa^2) \operatorname{dn}(w, \kappa^2), \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d}{dw} [\operatorname{dn}(w, \kappa^2)] = -\kappa^2 \operatorname{sn}(w, \kappa^2) \operatorname{cn}(w, \kappa^2) \quad (\text{A.3})$$

*Demostración.* Empecemos por la primera derivada. Para ello partimos de la integral elíptica incompleta de primera especie

$$w = E(x, \kappa^2) = \int_0^x \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\kappa^2v^2)}}, \quad (\text{A.4})$$

y la derivamos

$$\frac{dw}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\kappa^2v^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}. \quad (\text{A.5})$$

Dado que la inversa de  $E$  se define como  $E^{-1}(w, \kappa^2) = x = \operatorname{sn}(w, \kappa^2)$ , a partir de (A.5) se obtiene

$$\frac{d}{dw} [\operatorname{sn}(w, \kappa^2)] = \frac{dx}{dw} = \sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}, \quad (\text{A.6})$$

y por las relaciones (1.24) y (1.25) de  $\operatorname{cn}(w, \kappa^2)$  y  $\operatorname{dn}(w, \kappa^2)$  con  $\operatorname{sn}(w, \kappa^2)$ , la ecuación

(A.6) se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} [\operatorname{sn}(w, \kappa^2)] &= \sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)} = \sqrt{(1-\operatorname{sn}^2(w, \kappa^2))(1-\kappa^2 \operatorname{sn}^2(w, \kappa^2))} = \\ &= \operatorname{cn}(w, \kappa^2) \operatorname{dn}(w, \kappa^2), \end{aligned}$$

llegando al resultado (A.3).

Para la segunda expresión partimos de la definición (1.24) equivalente a la identidad  $\operatorname{cn}^2(w, \kappa^2) + \operatorname{sn}^2(w, \kappa^2) = 1$  y la derivamos:

$$2 \operatorname{cn}(w, \kappa^2) \frac{d}{dw} [\operatorname{cn}(w, \kappa^2)] + 2 \operatorname{sn}(w, \kappa^2) \frac{d}{dw} [\operatorname{sn}(w, \kappa^2)] = 0.$$

Usando (A.1) ya probado, llegamos a la expresión:

$$2 \operatorname{cn}(w, \kappa^2) \left[ \frac{d}{dw} [\operatorname{cn}(w, \kappa^2)] + \operatorname{sn}(w, \kappa^2) \operatorname{dn}(w, \kappa^2) \right] = 0,$$

y dado que  $2 \operatorname{cn}(w, \kappa^2) \neq 0$  se tiene la derivada (A.2) de manera inmediata.

Finalmente calculemos la última, partimos en este caso de (1.25) que equivale a la igualdad  $\operatorname{dn}^2(w, \kappa^2) + \kappa^2 \operatorname{sn}^2(w, \kappa^2) = 1$  y la derivamos

$$2 \operatorname{dn}(w, \kappa^2) \frac{d}{dw} [\operatorname{dn}(w, \kappa^2)] + 2\kappa^2 \operatorname{sn}(w, \kappa^2) \frac{d}{dw} [\operatorname{sn}(w, \kappa^2)] = 0.$$

Utilizando de manera análoga (A.1), tenemos

$$2 \operatorname{dn}(w, \kappa^2) \left[ \frac{d}{dw} [\operatorname{dn}(w, \kappa^2)] + \kappa^2 \operatorname{sn}(w, \kappa^2) \operatorname{cn}(w, \kappa^2) \right] = 0,$$

y como  $2 \operatorname{dn}(w, \kappa^2) \neq 0$  se llega a (A.3) despejando.  $\square$

**Proposición A.1.1.** Sean  $\kappa \in \mathbb{R}$  con  $\kappa^2 > 1$  y  $\operatorname{sn}(w, \kappa^2)$ ,  $\operatorname{cn}(w, \kappa^2)$ ,  $\operatorname{dn}(w, \kappa^2)$  las funciones elípticas de Jacobi, se verifica la siguiente igualdad:

$$\operatorname{dn}(BX, \kappa^2) = \operatorname{cn}(B\kappa X, 1/\kappa^2). \quad (\text{A.7})$$

*Demostración.* Partamos de la definición (A.4) de la cual se definía  $\operatorname{sn}(w, \kappa^2) = x = E^{-1}(x, \kappa^2)$  y apliquemosla para  $w = BX$ :

$$BX = E(x, \kappa^2) = \int_0^x \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\kappa^2 v^2)}}, \quad (\text{A.8})$$

y si multiplicamos (A.8) por  $\kappa$  tenemos

$$B\kappa X = \int_0^x \frac{\kappa dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\kappa^2 v^2)}}.$$

Realizamos ahora un cambio de variables del tipo  $\kappa v = u$ , la integral se modifica en la forma:

$$B\kappa X = \int_0^{\kappa x} \frac{du}{\sqrt{(1 - \frac{1}{\kappa^2}u^2)(1 - u^2)}}.$$

Pero por la definición anterior (A.4) resulta

$$\operatorname{sn}(B\kappa X, 1/\kappa^2) = \kappa x = E(\kappa x, 1/\kappa^2),$$

y sabiendo que  $x = \operatorname{sn}(BX, \kappa^2)$ , se sigue lo siguiente:

$$\operatorname{sn}(B\kappa X, 1/\kappa^2) = \kappa x = \kappa \operatorname{sn}(BX, \kappa^2).$$

Así,

$$\operatorname{dn}^2(BX, \kappa^2) = 1 - \kappa^2 \operatorname{sn}^2(BX, \kappa^2) = 1 - \operatorname{sn}^2(B\kappa X, 1/\kappa^2) = \operatorname{cn}^2(B\kappa X, 1/\kappa^2),$$

y tomando raíz cuadrada se llega al resultado (A.7). □

## A.2. Algunas integrales útiles

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh^2(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} [\tanh(x)] dx = [\tanh(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 2.$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} \tanh^2(x) \operatorname{sech}^2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tanh^2(x)}{\cosh^2(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tanh^2(x) \frac{d}{dx} [\tanh(x)] dx =$$

$$= \left[ \frac{\tanh^3(x)}{3} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{3}.$$

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^4(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh^4(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x)}{\cosh^4(x)} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \tanh^2(x) \operatorname{sech}^2(x) dx = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$4) \int_{-\infty}^{+\infty} x \operatorname{sech}^2(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \operatorname{sech}^2(x) dx + \int_0^{+\infty} x \operatorname{sech}^2(x) dx =$$

$$= - \int_0^{\infty} x \operatorname{sech}^2(x) dx + \int_0^{\infty} x \operatorname{sech}^2(x) dx = 0.$$

Para la siguiente integral se usan las funciones: gamma y zeta de Riemann.

**Definición A.2.1.** Se define la función gamma, para todo número complejo  $z$  tal que  $\Re(z) > 0$ , a la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

que converge absolutamente y cumple la siguiente propiedad:

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z).$$

En particular, si  $z = n \in \mathbb{N}$  entonces  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ .

En esta trabajo nos centraremos en un valor determinado  $z = 3$ ,

$$\Gamma(3) = (3 - 1)! = 2! = 2. \quad (\text{A.9})$$

**Definición A.2.2.** La función zeta de Riemann,  $\zeta(s)$ , está definida por la siguiente serie Dirichlet:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s},$$

válida para todo número complejo  $s$  tal que la parte real de  $s$  sea mayor que uno,  $\Re(s) > 1$ . Para la región donde  $\Re(s) < 1$ , los valores de la función son calculados mediante su ecuación funcional

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi s}{2} \right) \Gamma(1 - s) \zeta(1 - s),$$

obtenida a partir de la continuación analítica de la propia función zeta de Riemann, y donde  $\Gamma(z)$  es la conocida función gamma.

En nuestro caso, nos centramos en  $s = 2$ ,

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (\text{A.10})$$

Utilizaremos (A.9) y (A.10) para poder calcular la siguiente integral:

$$\begin{aligned} 5) \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \operatorname{sech}^2(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 \operatorname{sech}^2(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\cosh^2(x)} dx = \\ & = 2 \frac{4}{(2)^3} (1 - 2^{2-3}) \Gamma(3) \zeta(2) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Véase la página 379, apartado 3.527, fórmula 3 para el caso particular  $\mu = 3$  y  $a = 1$

de [7].

Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  se tienen las siguientes integrales:

$$\begin{aligned}
 6) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{\beta} x \right) \operatorname{sech}^2(x) dx &= \int_{-\infty}^0 \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{\beta} x \right) \operatorname{sech}^2(x) dx + \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{\beta} x \right) \operatorname{sech}^2(x) dx = \\
 &= - \int_0^{\infty} \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{\beta} x \right) \operatorname{sech}^2(x) dx + \int_0^{\infty} \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{\beta} x \right) \operatorname{sech}^2(x) dx = 0.
 \end{aligned}$$

$$7) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \left( \frac{\alpha}{\beta} x \right) \operatorname{sech}^2(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos [(\alpha/\beta)x]}{\cosh^2(x)} dx = \frac{\alpha\pi}{\beta} \operatorname{csch} \left( \frac{\alpha\pi}{2\beta} \right) = \frac{\alpha\pi}{\beta \operatorname{senh} \left( \frac{\alpha\pi}{2\beta} \right)}.$$

Consulte la página 468, fórmula 7 para el caso particular  $n = 2$ ,  $b = \alpha/\beta$  y  $c = 1$  de [9].