

# **Mecánica de fluidos newtonianos. Ecuaciones de conservación**

**Trabajo de Fin de Grado**

Doble grado en Física-Matemáticas. Universidad de Sevilla.  
10 de septiembre de 2020.

**Manuel A. Vázquez Barroso**

Tutelado por: D. Álvaro Domínguez Álvarez



## Resumen

El objetivo principal de este trabajo es presentar las ecuaciones que gobiernan la cinemática y dinámica de los fluidos newtonianos, tanto en ausencia de efectos disipativos como incluyendo términos correspondientes al flujo de calor o a la viscosidad. Se analizarán el campo de velocidades del fluido y la conservación de masa, momento lineal y energía total, además de los balances de energías cinética e interna y de entropía. Las soluciones a la ecuación de Navier-Stokes, correspondiente a la conservación del momento lineal en presencia de efectos viscosos, se estudiarán en algunos casos de interés que posibilitan su resolución, primero en régimen estacionario y posteriormente en régimen transitorio.

## **Abstract**

The main purpose of this paper is to introduce the equations governing kinematics and dynamics of newtonian fluids, both in the absence of dissipative effects and including terms corresponding to heat flux or viscosity. It will be analysed the velocity field of the fluid and the conservation of mass, linear momentum and total energy, in addition to the balances of kinetic and internal energies and entropy. The solutions of the Navier-Stokes equations, corresponding to the conservation of linear momentum with viscosity effects, will be study in some cases of interest which enable it resolution, at first in stationary regime and then in transient regime.

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1. Cinemática de fluidos</b>	<b>5</b>
1.1. Descripciones del fluido. Hipótesis del continuo . . . . .	5
1.2. Deformaciones en un fluido . . . . .	6
1.3. Conservación de la masa. Ecuación de continuidad . . . . .	10
<b>2. Dinámica de fluidos ideales</b>	<b>12</b>
2.1. Ecuación de la cantidad de movimiento o ecuación de Euler . . . . .	12
2.2. Ecuaciones de la energía y de la entropía . . . . .	14
2.2.1. Balance de energía cinética. Ecuación de Bernoulli . . . . .	15
2.2.2. Balance de energía interna . . . . .	16
2.2.3. Balance de entropía . . . . .	17
<b>3. Efectos disipativos: viscosidad y conductividad térmica</b>	<b>18</b>
3.1. Fuerzas viscosas en fluidos newtonianos . . . . .	18
3.2. Ecuación general de la conservación de la cantidad de movimiento . . . . .	21
3.2.1. La ecuación de Navier-Stokes . . . . .	22
3.2.2. Número de Reynolds . . . . .	23
3.2.3. Ecuación de Stokes . . . . .	24
3.3. Transferencia de calor. Ley de Fourier . . . . .	25
3.4. Balances de energía y de entropía . . . . .	27
3.4.1. Energía cinética . . . . .	27
3.4.2. Energía interna . . . . .	28
3.4.3. Entropía . . . . .	29
<b>4. Soluciones particulares de la ecuación de Navier-Stokes para fluidos incompresibles bajo la acción de la gravedad</b>	<b>30</b>
4.1. Flujo rectilíneo unidimensional entre planos paralelos . . . . .	30
4.1.1. Flujo plano de Couette . . . . .	32
4.1.2. Flujo plano de Poiseuille . . . . .	33
4.1.3. Flujo plano de Couette-Poiseuille . . . . .	34
4.2. Flujo axisimétrico unidireccional . . . . .	35
4.2.1. Flujo axisimétrico rectilíneo . . . . .	36
4.2.2. Flujo axisimétrico torsional o flujo de remolino . . . . .	39
4.2.3. Flujo axisimétrico radial . . . . .	40
4.3. Flujo esférico radial simétrico . . . . .	42
4.4. Régimen transitorio entre planos paralelos . . . . .	43
4.4.1. Flujo plano de Couette . . . . .	43
4.4.2. Flujo plano de Poiseuille . . . . .	46
<b>Anexo I: Sistemas de coordenadas</b>	<b>49</b>
Coordenadas cartesianas $(x, y, z)$ . . . . .	49

Coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$ . . . . .	50
Coordenadas esféricas $(r, \theta, \varphi)$ . . . . .	51
<b>Anexo II: Ecuación de Stokes</b>	<b>52</b>
Unicidad . . . . .	52
Mínimo en disipación de energía por efectos viscosos . . . . .	53

## Introducción

Ya en la Antigua Grecia se encuentran los primeros estudios acerca de los fluidos a manos de Tales de Mileto y Anaxímenes, que posteriormente continuarían los romanos durante siglos. Grandes científicos como Da Vinci, Galileo, Torricelli, Pascal, Bernoulli, Euler, Navier, Stokes, Kelvin o Reynolds han realizado numerosos e importantes aportes teóricos a lo que entonces se conocía como *Hidrodinámica*. A pesar de poseer una base matemática sólida, era necesario modelar el fluido y ello conllevaba una serie de simplificaciones que impedían que se aplicara en fluidos reales. Del mismo modo, otros muchos científicos como Poiseuille, sobre todo en el siglo XIX, realizaron numerosos aportes prácticos en el campo de la *Hidráulica experimental*. Sin embargo, esta teoría no presentaba una formulación matemática rigurosa. El origen de la *Mecánica de Fluidos moderna* se establece a principios del siglo XX, con el alemán Prandtl como principal fundador, buscando unificar los estudios teórico-prácticos desarrollados desde el siglo XVI en adelante. Durante el siglo XX han sido muchos los avances realizados en este ámbito, destacando la intervención de mujeres matemáticas como Polubarinova-Kočina y su *Theory of motion of ground water* [Teoría del movimiento del agua subterránea] (1952) o La-dýzhenskaya, que propone la primera demostración rigurosa de la convergencia de un método de diferencias finitas para las ecuaciones de Navier-Stokes.

El presente texto pretende describir los aportes teóricos principales en el campo de la hidrodinámica de fluidos simples relacionados con la conservación o el balance de magnitudes y con efectos disipativos, así como la presentación de algunos casos particulares que pueden servir de ejemplo o aclaración para éstos.

En la primera sección se estudiará la cinemática de los fluidos, comenzando por definir las posibles descripciones que se pueden adoptar (euleriana y lagrangiana) y posteriormente analizando el campo de velocidades de un fluido y su relación con las deformaciones del mismo. Para finalizar, se expone la *ecuación de continuidad* del fluido, que establece la conservación de la masa.

En la segunda sección se analiza la dinámica de los fluidos en ausencia de efectos disipativos, exponiendo la ecuación de conservación para la cantidad de movimiento (*ecuación de Euler*) y para la energía total junto con los balances de energías cinética e interna y de entropía.

La sección tercera introduce los efectos viscosos y la transferencia de calor en las ecuaciones desarrolladas en la sección anterior. El estudio de la viscosidad en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento conduce a la *ecuación de Navier-Stokes*, cuya demostración de existencia y unicidad de solución para unas condiciones de contorno dadas está considerada uno de los Problemas Matemáticos del Milenio. Por otra parte, éstos efectos viscosos se suman a la transferencia de calor a la hora de realizar los nuevos balances energéticos y entrópico.

Finalmente, la cuarta sección se centra en proponer casos particulares de interés para mostrar las soluciones de la ecuación de Navier-Stokes para fluidos incompresibles bajo la acción de la gravedad. Se escogen ejemplos que utilizan los sistemas de referenciamás comunes: cartesiano, cilíndrico y esférico.

Para el desarrollo del marco teórico correspondiente a las tres primeras secciones se han seguido principalmente los manuales *Physical hydrodynamics* de Guyon, Hulin, Petit y Mitescu (2001) [1] y *An introduction to Fluid Dynamics* de Batchelor (2002) [2], pues ambos plantean un marco general en el que se muestran los conceptos mencionados en estas secciones. El primero proporciona aclaraciones y ejemplos a la vez que se detiene tanto en la cinemática del fluido (especialmente las deformaciones) como en la dinámica y las fuerzas viscosas. No obstante, el segundo, aunque posee un mayor nivel de complejidad y menciona brevemente algunos aspectos, se detiene en cuestiones matemáticas interesantes que completan las secciones.

Otras referencias como *Producción de Entropía en Fluidos Viscosos* de Ramírez (1980) [3] o *Mecánica de Fluidos* de Sámano y Sen (2009) [4] se han utilizado en puntos concretos. El primero, como indica el título, profundiza en el apartado del balance de entropía; mientras que el segundo complementa a los dos manuales principales ya mencionados realizando el desarrollo matemático completo de las ecuaciones.

La sección restante, dedicada al estudio de casos particulares, se apoya principalmente en el capítulo 6 del manual *Viscous Fluid Flow* de Papanastasiou, Georgiou y Alexandrou (2000) [6]; respaldado de nuevo por los dos manuales ya citados.

Para terminar, me gustaría agradecer este trabajo a mi tutor Álvaro Domínguez, que a pesar de los contratiempos vividos este año, ha mantenido el contacto y el interés por su desarrollo; a mi pareja, por apoyarme y ofrecer su ayuda en la edición de imágenes y en la elaboración de la bibliografía; y a mi familia, por haber hecho posible llegar hasta aquí y seguir preocupándose por mi futuro.

*Manuel A. Vázquez Barroso*

# 1. Cinemática de fluidos

## 1.1. Descripciones del fluido. Hipótesis del continuo

A escala microscópica, un fluido se compone de moléculas con vacío entre ellas que se mueven e interaccionan entre sí. Un análisis que tenga en cuenta todas estas variables resulta inmanejable, incluso un tratamiento simplificado que recurra a la Mecánica Estadística es demasiado complejo.

No obstante, el interés en hidrodinámica se focaliza en una serie de manifestaciones macroscópicas resultado de la acción conjunta de muchas moléculas. Esto lleva a plantear como una simplificación importante el considerar un medio continuo de materia como causa de estas manifestaciones para poder utilizar funciones continuas definidas en todo el espacio en la descripción matemática de las propiedades de dicho medio.

Por lo tanto, para estudiar las propiedades de un fluido, consideraremos elementos infinitesimales de volumen (**partículas fluidas**) con un tamaño macroscópicamente pequeño (relativo a la escala de longitud característica del flujo) y microscópicamente grande (relativo al recorrido libre medio de una molécula del fluido). La primera consideración nos permitirá usar el cálculo diferencial para el desarrollo de las ecuaciones y la segunda sugiere que las partículas fluidas pueden ser consideradas como sistemas termodinámicos en equilibrio local, lo cual conlleva poder definir magnitudes como temperatura, entropía o potencial químico. Bajo estas hipótesis, es posible modelar el fluido como un medio continuo en el cual se pueden definir campos relacionados con los valores medios de las variables de las partículas que se encuentran en la partícula fluida.

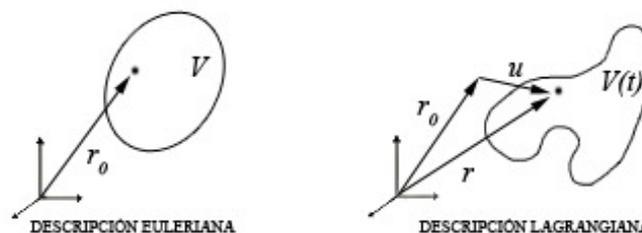


Figura 1: Descripciones del fluido. Elaboración propia.

Se encuentran dos descripciones predominantes según el sistema de referencia escogido, como se muestra en la *Figura 1*. En la primera de ellas, llamada descripción euleriana, se da una representación de las magnitudes fluidas especificadas en cada punto definido por un vector posición  $\mathbf{x}$  en un instante  $t$ , es decir, se estudia un volumen fijo que permite el flujo de fluido a través de sus fronteras (**volumen de control**). El sistema de referencia adecuado para esta descripción es uno en reposo respecto al volumen de control. En la otra, denominada descripción lagrangiana, las magnitudes se refieren a partículas fluidas determinadas por su posición en un instante  $t_0$ , las cuales conforman un volumen deformable (**volumen de sistema**).

El sistema de referencia adecuado para esta descripción es aquél que se mueve con el fluido. Denotamos por  $d/dt$  la derivada temporal en la descripción lagrangiana, también denominada **derivada material** (en la euleriana sería  $\partial/\partial t|_r$ ).

En la descripción lagrangiana, el foco de interés es un conjunto determinado de partículas; las variaciones de la velocidad de cada una a lo largo de sus trayectorias se traduce en una deformación del volumen del sistema. Por otra parte, en la descripción euleriana se considera un volumen de control fijo que permite el paso de partículas a través de su superficie; las variaciones de la velocidad en cada punto se deben al paso de distintas partículas, pero el volumen se mantiene inalterado en todo momento.

El conjunto de velocidades de las partículas fluidas en cada posición e instante de tiempo define un campo vectorial  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , denominado campo de velocidades del fluido. El cambio de una descripción a otra se tiene a través de dicho campo. Dada una función (campo escalar o componente de un campo vectorial)  $f = f(t, \mathbf{r})$ , se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_r + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_r + \frac{\partial f}{\partial x} u_x + \frac{\partial f}{\partial y} u_y + \frac{\partial f}{\partial z} u_z = \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_r + (\mathbf{u} \cdot \nabla) f. \end{aligned} \quad (1)$$

## 1.2. Deformaciones en un fluido

El objetivo de esta sección es analizar la relación existente entre la deformación de una partícula fluida y el campo de velocidades del fluido. Consideramos el cambio de velocidad  $d\mathbf{u}$  entre puntos adyacentes en función del desplazamiento  $d\mathbf{x}$

$$du_i = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j \quad (2)$$

donde hemos introducido la convención de Einstein de suma sobre índices repetidos. Las cantidades  $G_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$  forman un tensor<sup>1</sup>  $\bar{\bar{G}} = \nabla \otimes \mathbf{u} \equiv \nabla \mathbf{u}$  de rango dos (tensor gradiente de velocidades). Se puede descomponer en dos tensores, uno simétrico  $\bar{\bar{e}}$  y otro antisimétrico  $\bar{\bar{\omega}}$ :

$$G_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) := e_{ij} + \omega_{ij}. \quad (3)$$

Para mostrar la interpretación del tensor  $\bar{\bar{e}}$  (**tensor ratio de deformación**), consideramos un rectángulo ABCD en el plano  $(x_1, x_2)$  con el vértice A en el origen y lados sobre los ejes de coordenadas. En un instante  $t$  tiene lados  $dx_1$  y  $dx_2$ , y en un instante posterior  $t' = t + dt$  tenemos un cuadrilátero A'B'C'D', como se muestra en la *Figura 2*.

<sup>1</sup>Se ha introducido el producto diádico de dos vectores como sigue:  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \equiv \mathbf{AB} = (A_i B_j)_{i=1,2,3}^{j=1,2,3}$ .

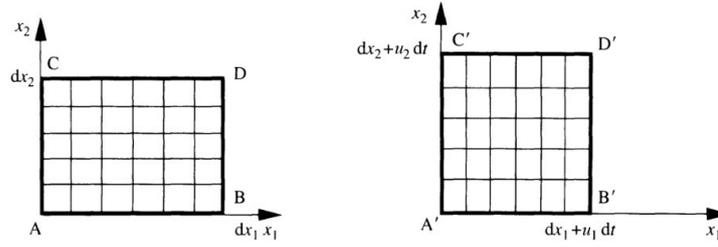


Figura 2: Deformación de un rectángulo en un fluido cuyo campo de gradientes de velocidades consiste en términos diagonales en el instante inicial y tras un intervalo de tiempo  $dt$  respectivamente. Adaptado de Guyon et al. (2001) [1].

Los términos diagonales  $(\partial u_i / \partial x_i)$  representan la razón de elongación respecto de la dirección  $i$ . Sea  $\mathbf{e}_i$  el vector unitario en la dirección  $i$ , entonces

$$\begin{aligned} A'B' &= dx_1 + (u_1(dx_1\mathbf{e}_1) - u_1(\mathbf{0}))dt \approx dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 dt \Rightarrow \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dt; \\ A'C' &= dx_2 + (u_2(dx_2\mathbf{e}_2) - u_2(\mathbf{0}))dt \approx dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 dt \Rightarrow \frac{A'C' - AC}{AC} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Por lo tanto, la razón de expansión de volumen de un paralelepípedo es la traza del tensor  $\bar{\bar{G}}$ , que no es más que la divergencia de la velocidad

$$\frac{dV}{V} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) dt = (\nabla \cdot \mathbf{u}) dt. \quad (5)$$

Cuando esta razón de expansión es nula, la divergencia de la velocidad también lo es y se habla de un **fluido incompresible**. Por otra parte, los términos fuera de la diagonal  $(\partial u_i / \partial x_j)$  con  $i \neq j$ ) representan la razón de deformación del volumen asociada a las velocidades angulares. Para comprobarlo, calcularemos la variación del ángulo interno CAB ( $\gamma$ ). Sean  $d\alpha$  y  $d\beta$  los ángulos que forman respectivamente los lados AB con el eje  $x_1$  y AC con el eje  $x_2$  transcurrido un tiempo  $dt$  (Figura 3), se tiene que

$$\begin{aligned} d\alpha &\approx \tan(d\alpha) = (u_2(dx_1\mathbf{e}_1) - u_2(\mathbf{0})) \frac{dt}{dx_1} \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dt \Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1}; \\ d\beta &\approx \tan(d\beta) = -(u_1(dx_2\mathbf{e}_2) - u_1(\mathbf{0})) \frac{dt}{dx_2} \approx -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dt \Rightarrow \frac{d\beta}{dt} \approx -\frac{\partial u_1}{\partial x_2}; \\ \frac{d\gamma}{dt} &= -\frac{d\alpha - d\beta}{dt} = -\left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = -2e_{12}. \end{aligned} \quad (6)$$

Hecha esta distinción, proponemos una descomposición del tensor  $\bar{\bar{e}}$  en un término diagonal  $\bar{\bar{t}}$  asociado a la dilatación volumétrica y otro de traza cero  $\bar{\bar{d}}$  asociado a deformaciones isocóricas (sin cambios en el volumen):

$$e_{ij} = \frac{1}{3} \Delta \delta_{ij} + \left( e_{ij} - \frac{1}{3} \Delta \delta_{ij} \right) := t_{ij} + d_{ij} \quad (7)$$

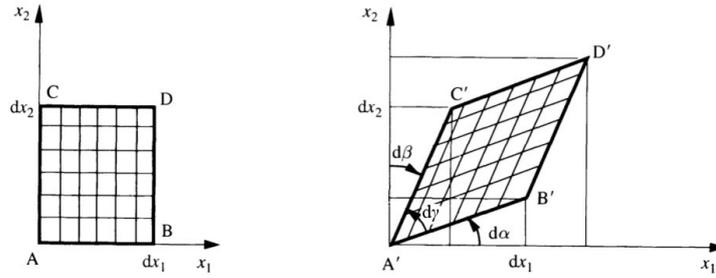


Figura 3: Deformación de un rectángulo en un fluido cuyo campo de gradientes de velocidades consiste en términos no diagonales en el instante inicial y tras un intervalo de tiempo  $dt$  respectivamente. Adaptado de Guyon et al. (2001) [1].

donde  $\Delta = e_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ . Se comprueba fácilmente que la traza de  $\bar{\bar{d}}$  es cero y que  $\bar{\bar{t}}$  es cero cuando el fluido es incompresible (todos sus términos no nulos son de la forma  $(\nabla \cdot \mathbf{u})/3$ ).

Veamos ahora la parte antisimétrica  $\bar{\bar{\omega}}$  (**tensor vorticidad**) del tensor  $\bar{\bar{G}}$ . Observamos que, como sus elementos diagonales son nulos, no introduce dilataciones en el volumen, como puede apreciarse en la *Figura 4*.

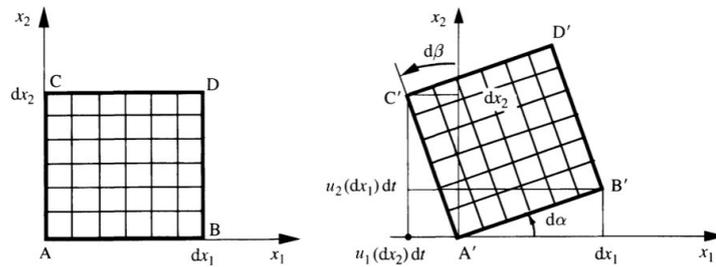


Figura 4: Deformación de un rectángulo en un fluido cuyo campo de gradientes de velocidades consiste en términos no diagonales antisimétricos en el instante inicial y tras un intervalo de tiempo  $dt$  respectivamente. Adaptado de Guyon et al. (2001) [1].

Consideramos los ángulos  $d\alpha$  y  $d\beta$  introducidos anteriormente. En este caso, se tiene que  $d\alpha \approx d\beta$ , con lo que se llega a la siguiente relación:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad (8)$$

de la cual es posible concluir que el elemento  $\omega_{ij}$  representa la velocidad angular de la rotación local sin deformación del volumen:

$$d\alpha = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dt = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) dt = \omega_{21} dt \Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \omega_{21}. \quad (9)$$

En resumen, podemos admitir que el tensor gradiente de velocidades admite una descomposición en tres términos de la forma

$$G_{ij} = d_{ij} + t_{ij} + \omega_{ij} \quad (10)$$

donde:

- $t_{ij}$  es un tensor diagonal que representa los cambios de volumen de los elementos del fluido. En un **fluido incompresible**, es decir, que mantiene la densidad volumétrica de masa de cada elemento constante en el movimiento, se anula:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{u} = 0}. \quad (11)$$

- $d_{ij}$  es un tensor simétrico de traza nula relacionado con las deformaciones isocóricas del fluido, en ocasiones denominado **desviador**. Sus términos cruzados representan las velocidades de deformación angular locales.
- $\omega_{ij}$  es un tensor antisimétrico que representa la rotación rígida de los elementos del fluido. Además, se conoce el vector  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_{23}, \omega_{13}, \omega_{21}) = \nabla \times \mathbf{u}$  como **vorticidad**, el cual cuantifica la rotación de un fluido. Cuando fluido cumple la condición  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ , se conoce como **fluido potencial**, pues su campo de velocidades puede expresarse como el gradiente de un campo escalar.

Para finalizar este apartado, introduciremos el **Teorema de la divergencia de Gauss** (teorema de Gauss-Green-Ostrogradsky), útil a la hora de trabajar con campos vectoriales:

Sean  $V$  un sólido simple de  $\mathbb{R}^3$  y  $\Omega = \partial V$  su frontera orientada con el vector normal unitario exterior  $\mathbf{n}$ . Sea  $\mathbf{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^1$ . Entonces

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\Omega. \quad (12)$$

### 1.3. Conservación de la masa. Ecuación de continuidad

Sean el campo de velocidades del fluido  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ , un volumen  $V$  fijo en el espacio arbitrario (descripción euleriana),  $\partial V = \Omega$  la superficie frontera del volumen y  $\phi$  la densidad volumétrica de alguna propiedad física (masa, momento, energía...), entonces puede existir un flujo macroscópico de dicha magnitud debido al movimiento del fluido (**flujo convectivo**). Si tomamos un elemento de superficie  $d\Omega = d\Omega \mathbf{n}$  ( $\mathbf{n}$  es el vector normal a la superficie en cada punto de ésta apuntando hacia fuera), el volumen de fluido que atraviesa dicho elemento por unidad de tiempo es  $\mathbf{u} \cdot d\Omega$  (ver *Figura 5*). Definiendo la corriente de  $\phi$  como  $\mathbf{j}_\phi = \mathbf{j}_\phi(\mathbf{r}, t) = \phi \mathbf{u}$ , la cantidad de la propiedad que atraviesa el elemento de superficie por unidad de tiempo es, localmente,  $\mathbf{j}_\phi \cdot d\Omega$ . Si además la superficie  $\Omega$  es cerrada y  $\mathbf{j}_\phi$  es continua, al integrar sobre toda la superficie para calcular el flujo convectivo total, se puede aplicar el teorema de la divergencia de Gauss (12) y se deduce que  $\nabla \cdot (\phi \mathbf{u})$  representa la variación local neta de  $\phi$  debido al flujo convectivo.

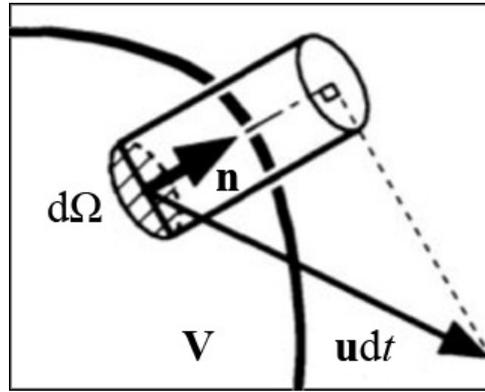


Figura 5: Flujo convectivo a través de la superficie. Adaptado de Guyon et al. (2001) [1].

Sea la densidad volumétrica de masa del fluido  $\rho = \rho(t, \mathbf{r})$ , entonces la masa total en ese volumen del fluido en un instante dado será la integral en todo el volumen de la densidad:  $M = \iiint_V \rho dV$ . Localmente, la cantidad de masa que atraviesa un elemento de superficie por unidad de tiempo será  $d\Omega \cdot \mathbf{j}_\rho$ . Podemos establecer así una ley para la conservación de la masa:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial M}{\partial t} \right|_V &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_V \iiint_V \rho dV = \iiint_V \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_r dV \stackrel{!}{=} - \oiint_{\Omega} d\Omega \cdot \mathbf{j}_\rho = \\ &= - \oiint_{\Omega} d\Omega \cdot \rho \mathbf{u} = - \iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV \end{aligned} \quad (13)$$

donde hemos aplicado el teorema de la divergencia de Gauss (12) en la última igualdad. El signo menos hace referencia a la pérdida de masa a través de la superficie. Podemos deducir que

$$\iiint_V \left[ \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_r + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0 \quad \forall V \quad (14)$$

pues el volumen escogido es arbitrario. Por lo tanto, concluimos que el integrando se anula y, en consecuencia, localmente se puede establecer que

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{r}} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})}. \quad (15)$$

Esta ecuación describe la evolución de la densidad volumétrica de masa en la descripción euleriana. Integrando sobre el volumen, se llega a que los cambios en la masa se deben al transporte convectivo, como se muestra en (13). Aplicando ahora la relación (1) para  $f = \rho$ , obtenemos finalmente la ecuación de conservación de la masa en la descripción lagrangiana, también conocida como **ecuación de continuidad**:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{r}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) \implies \boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0}. \quad (16)$$

El término  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  nos muestra que, en esta descripción, los cambios en la densidad se deben a cambios en el volumen considerado, lo cual es un efecto puramente cinemático asociado a que el volumen no es fijo. Es interesante comentar que en el caso de un **fluido incompresible**, es decir, que mantiene la densidad de cada elemento constante en el movimiento, la ecuación de conservación se reduce a (11), como cabía esperar por lo descrito en la sección anterior acerca de las deformaciones del fluido a través del tensor  $\bar{\bar{\ell}}$ .

## 2. Dinámica de fluidos ideales

### 2.1. Ecuación de la cantidad de movimiento o ecuación de Euler

Por la ley de acción-reacción, en un volumen  $V$  del fluido las interacciones que tienen lugar entre elementos infinitesimales en el interior se compensan, permaneciendo las interacciones con los elementos fuera del volumen. Si suponemos las interacciones de corto alcance, podemos restringirnos a los primeros vecinos en la superficie. Este carácter local sugiere expresar dichas fuerzas como un gradiente. Además, pueden existir fuerzas actuando sobre el volumen total (fuerzas volúmicas) como son la gravitatoria o la electromagnética.

Supongamos que las fuerzas en la superficie son debidas exclusivamente a la presión hidrostática (isotrópica). Por la segunda ley de Newton, la variación temporal de la cantidad de movimiento en el volumen  $V$ ,  $\mathbf{P} = \iiint_V \rho \mathbf{u} dV$ , es igual a la suma de las fuerzas de interacción (volúmicas y a través de la superficie  $\Omega$  por la ley de acción-reacción),  $\sum \mathbf{F} = \iiint_V \rho \mathbf{f} dV - \oint_{\Omega} p d\Omega$ , donde  $\mathbf{f}$  es la fuerza volúmica por unidad de masa en el interior del volumen.

Puede existir una corriente de cantidad de movimiento  $\mathbf{j}_p = \mathbf{j}_p(t, \mathbf{r}) = \rho \mathbf{u} \mathbf{u}$  que caracteriza el flujo de cantidad de movimiento debido al transporte macroscópico del fluido (observamos que esta corriente es un tensor simétrico donde cada fila o columna describe el flujo de cada componente de la cantidad de movimiento a través de la superficie del volumen de fluido considerado). Así, la cantidad de movimiento que atraviesa un elemento de superficie  $d\Omega = \mathbf{n} d\Omega$  por unidad de tiempo viene dada por  $d\Omega \cdot \mathbf{j}_p$ . Establecemos pues la ecuación de conservación:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right|_V &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_V \iiint_V \rho \mathbf{u} dV = \iiint_V \left. \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} \right|_r dV = \iiint_V \rho \mathbf{f} dV \\ &- \oint_{\Omega} d\Omega \cdot (\mathbf{j}_p + p \bar{\mathbf{1}}) = \iiint_V \rho \mathbf{f} dV - \oint_{\Omega} d\Omega \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \bar{\mathbf{1}}) = \\ &= \iiint_V [\rho \mathbf{f} - \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \bar{\mathbf{1}})] dV \end{aligned} \quad (17)$$

donde hemos aplicado el teorema de la divergencia de Gauss (12) en la última igualdad y hemos introducido el tensor identidad como  $\bar{\mathbf{1}}$ . El signo menos hace referencia a la pérdida de cantidad de movimiento a través de la superficie. Tenemos por lo tanto la relación:

$$\iiint_V \left[ \left. \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} \right|_r - \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) + \nabla \cdot (p \bar{\mathbf{1}}) \right] dV = 0 \quad \forall V \quad (18)$$

pues el volumen escogido es arbitrario. Deducimos que el integrando se anula y, utilizando la identidad matemática  $\nabla \cdot (p \bar{\mathbf{1}}) := \nabla p$ , obtenemos que

$$\boxed{\left. \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} \right|_r = \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \nabla p} \quad (19)$$

Esta ecuación describe la evolución de la densidad de cantidad de movimiento bajo la descripción euleriana. Integrando sobre el volumen, se obtiene que los cambios en la cantidad de movimiento se deben al transporte convectivo (segundo término) y a la acción de fuerzas volúmicas (primer término) y de la presión (último término). Aplicando ahora la relación (1) para  $f = \rho \mathbf{u}$ , obtenemos la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en el fluido en la descripción lagrangiana:

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho \mathbf{u})}{dt} &= \left. \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{u}) = \rho \mathbf{f} - \rho \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla p \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{d(\rho \mathbf{u})}{dt} + \rho \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla p - \rho \mathbf{f} = 0}. \end{aligned} \quad (20)$$

Al igual que ocurre con la densidad de masa, la densidad de cantidad de movimiento en la descripción lagrangiana varía en el tiempo por razones cinemáticas debido a cambios en el volumen, como indica el término  $\nabla \cdot \mathbf{u}$ , junto con la presencia de fuerzas externas que se manifiestan a través de una presión sobre la superficie y de fuerzas volúmicas.

Observamos que, por la ecuación de conservación de la masa (16), podemos reescribir el segundo término como  $\rho \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\mathbf{u} \frac{d\rho}{dt}$ . Desarrollando la derivada del primer término en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (20) y aplicando esta igualdad, llegamos a la ecuación para el campo de velocidades en la descripción lagrangiana

$$\boxed{\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p - \rho \mathbf{f} = 0}. \quad (21)$$

Esta ecuación puede reescribirse para un elemento infinitesimal de volumen  $\delta V$  del fluido de masa  $\delta m$ , de manera que expresa claramente la segunda ley de Newton:

$$\delta m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \delta V (\rho \mathbf{f} - \nabla p) = \delta \mathbf{F}. \quad (22)$$

## 2.2. Ecuaciones de la energía y de la entropía

La energía  $E_V$  contenida en un volumen  $V$  de fluido es la integral en dicho volumen de la densidad volumétrica de energía. Ésta se define como la suma de una contribución debida al movimiento asociado al flujo macroscópico y otra a la energía interna de cada partícula fluida:

$$E_V = E_{int} + E_c = \iiint_V (\epsilon + e_c) dV \quad (23)$$

donde  $\epsilon$  es la densidad volumétrica de energía interna del fluido y  $e_c = \frac{1}{2}\rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2}\rho u^2$  es la densidad volumétrica de energía cinética debida al flujo.

Los cambios en la energía del sistema bajo la descripción euleriana en ausencia de efectos disipativos se deben al transporte macroscópico del flujo de energía determinado por una corriente  $\mathbf{j}_e = \mathbf{j}_e(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_{int}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_c(\mathbf{r}, t) = \epsilon\mathbf{u} + e_c\mathbf{u}$ , junto con el intercambio de trabajo por unidad de tiempo  $\dot{W}$  efectuado por las fuerzas volúmicas y superficiales (asociadas a la presión hidrostática) según el primer principio de la Termodinámica.

$$\left. \frac{\partial E_V}{\partial t} \right|_V = \iiint_V \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_r (\epsilon + e_c) dV = - \oint_{\Omega} d\Omega \cdot \mathbf{j}_e + \dot{W}. \quad (24)$$

La variación del trabajo de las fuerzas en el tiempo está relacionada con el campo de velocidades del fluido como sigue:

$$\dot{W} = \iiint_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV - \oint_{\Omega} d\Omega \cdot p\mathbf{u}. \quad (25)$$

Sustituyendo la relación (25) en la ecuación (24) y aplicando el teorema de la divergencia de Gauss (12), se llega a que

$$\begin{aligned} \iiint_V \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_r (\epsilon + e_c) dV &= \iiint_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \oint_{\Omega} d\Omega \cdot (\mathbf{j}_e + p\mathbf{u}) = \\ &= \iiint_V [\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot (\mathbf{j}_e + p\mathbf{u})] dV. \end{aligned} \quad (26)$$

Esta relación se cumple para un volumen arbitrario, por lo que los integrandos deben ser iguales:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_r (\epsilon + e_c) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot (\mathbf{j}_e + p\mathbf{u}). \quad (27)$$

### 2.2.1. Balance de energía cinética. Ecuación de Bernoulli

La ecuación de evolución para la densidad de energía cinética puede obtenerse a partir de las ecuaciones de conservación ya deducidas anteriormente.

$$\frac{de_c}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\rho u^2\right)}{dt} = \frac{1}{2}u^2 \frac{d\rho}{dt} + \mathbf{u} \cdot \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt}. \quad (28)$$

Aplicando ahora las relaciones (16) y (21), se llega a la ecuación de balance para la densidad volumétrica de energía cinética en la descripción lagrangiana:

$$\boxed{\frac{de_c}{dt} = -\frac{1}{2}\rho u^2(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot (\rho \mathbf{f} - \nabla p)}. \quad (29)$$

Esta ecuación establece que la variación en el tiempo de la densidad volumétrica energía cinética se debe a los cambios en el volumen, como indica el término  $\nabla \cdot \mathbf{u}$ , y al trabajo mecánico realizado por las fuerzas volúmicas y la presión. El paso a la descripción euleriana se tiene por la relación (1) con  $f = e_c = \frac{1}{2}\rho u^2$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial e_c}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} &= \frac{de_c}{dt} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) e_c = -\nabla \cdot \left( \frac{1}{2}\rho u^2 \mathbf{u} \right) + \mathbf{u} \cdot (\rho \mathbf{f} - \nabla p) = \\ &= \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2}\rho u^2 + p \right) \mathbf{u} \right] + p(\nabla \cdot \mathbf{u}), \end{aligned} \quad (30)$$

es decir, se obtiene que

$$\boxed{\left. \frac{\partial e_c}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2}\rho u^2 + p \right) \mathbf{u} \right] + p(\nabla \cdot \mathbf{u})}. \quad (31)$$

Se puede apreciar en esta descripción claramente que el segundo término corresponde al transporte convectivo de energía cinética junto con el trabajo total realizado por unidad de tiempo por las fuerzas de presión, al que hay que descontarle el trabajo de compresión (no mecánico) por unidad de tiempo representado por el último término, pues dicho trabajo contribuye a la variación en el tiempo de la energía interna del fluido, como veremos en la siguiente sección. El término asociado a las fuerzas volúmicas permanece inalterado, pues es puramente mecánico.

A partir de esta última relación se puede deducir la **ecuación de Bernoulli**, que expresa la conservación de energía en un fluido ideal incompresible cuyas fuerzas de volumen provienen de un potencial:  $\mathbf{f} = -\nabla\varphi$ . Teniendo en cuenta que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  y que  $\rho = cte$  para el caso incompresible, la ecuación (31) se convierte en

$$\rho \mathbf{u} \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2}\rho u^2 + p + \rho\varphi \right). \quad (32)$$

Para el caso particular de un flujo estacionario, la ecuación de Bernoulli (32) nos afirma que las superficies donde la cantidad  $\frac{1}{2}\rho u^2 + p + \rho\varphi$  es constante son paralelas a las líneas de corriente (líneas paralelas a la velocidad en todos sus puntos), pues su gradiente es perpendicular a  $\mathbf{u}$ . El término  $\frac{1}{2}\rho u^2$ , con dimensiones de presión, se denomina **presión dinámica**, mientras que su suma con la presión hidrostática  $p$  se denomina **presión total**.

### 2.2.2. Balance de energía interna

Sustituyendo lo obtenido en la sección de la energía cinética en la ecuación (27), podemos deducir una ecuación para la densidad de energía interna del fluido. En particular, aplicando la relación (31) se obtiene que

$$\left. \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} + \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} \left( \frac{1}{2} \rho u^2 \right) = \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \rho u^2 + p \right) \mathbf{u} \right] + p(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot (\mathbf{j}_e + p\mathbf{u}). \quad (33)$$

Teniendo en cuenta la expresión de  $\mathbf{j}_e$ , se deduce que la ecuación de balance para la densidad volumétrica de energía interna del fluido bajo la descripción euleriana es

$$\boxed{\left. \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} = -\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}) - p(\nabla \cdot \mathbf{u})}. \quad (34)$$

Esta ecuación muestra que la variación en el tiempo de la densidad de energía interna del elemento del fluido se debe a un flujo convectivo que transporta energía interna macroscópicamente y al trabajo de compresión por unidad de tiempo de las fuerzas de presión sobre la superficie que, como se puede apreciar en la ecuación para la energía cinética (31), transforma ésta en energía interna. Además, la suma de estas dos ecuaciones de balance proporciona la ecuación de conservación de energía total (27). Aplicando ahora la relación (1) para  $f = \epsilon$ , se obtiene la ecuación de balance para la densidad volumétrica de energía interna del fluido bajo la descripción lagrangiana:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \epsilon \Rightarrow \boxed{\frac{d\epsilon}{dt} = -(\epsilon + p)(\nabla \cdot \mathbf{u})}. \quad (35)$$

En esta descripción, el término  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  indica que la variación en el tiempo de la densidad volumétrica de energía interna del fluido depende de los cambios del volumen, además del trabajo de compresión por unidad de tiempo de las fuerzas de presión sobre la superficie. Es interesante notar que, para un fluido incompresible ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ), la ecuación (35) nos lleva a concluir que la energía interna no varía en este caso ( $d\epsilon/dt = 0$ ), lo cual es de esperar por el primer principio de la Termodinámica para un sistema en equilibrio en ausencia de intercambios de calor y trabajo.

### 2.2.3. Balance de entropía

De acuerdo con la hipótesis de equilibrio termodinámico local para las partículas fluidas, el segundo principio de la Termodinámica se expresa como

$$dE_{int} = TdS + \mu dN - pdV \quad (36)$$

donde  $S$  es la entropía,  $N$  el número de partículas en un elemento de volumen y  $\mu$  el potencial químico. En la descripción lagrangiana,  $N$  permanece constante, por lo que se tiene que

$$\frac{dE_{int}}{dt} = T \frac{dS}{dt} - p \frac{dV}{dt} \quad (37)$$

En esta expresión, las derivadas representan derivadas materiales o lagrangianas. Para las densidades volúmicas ( $\epsilon = E_{int}/V$  para la energía interna y  $s = S/V$  para la entropía), esta última ecuación se convierte en

$$\frac{d\epsilon}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \frac{1}{V}(Ts - p - \epsilon) \frac{dV}{dt} \quad (38)$$

Aplicando ahora la relación (5) para la derivada temporal del volumen y teniendo en cuenta el balance de la densidad volumétrica de energía interna (35), se tiene que el balance de la densidad volumétrica de entropía bajo la descripción lagrangiana es

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = -s(\nabla \cdot \mathbf{u})}. \quad (39)$$

Esta ecuación establece que los cambios en la densidad de entropía del elemento de volumen se deben únicamente a cambios en el volumen, como muestra el término cinético  $\nabla \cdot \mathbf{u}$ . Pasando a la descripción euleriana mediante la relación (1) con  $f = s$ , se obtiene que

$$\left. \frac{\partial s}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} = \frac{ds}{dt} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)s = -\nabla \cdot (s\mathbf{u}) \Rightarrow \boxed{\left. \frac{\partial s}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} = -\nabla \cdot (s\mathbf{u})}. \quad (40)$$

Las variaciones en el tiempo de la densidad volumétrica de entropía del fluido vienen descritas por un flujo convectivo debido al transporte macroscópico de esta magnitud. Si integramos en todo el espacio para calcular la entropía total del fluido y aplicamos el teorema de la divergencia de Gauss (12) al término de la derecha, se obtiene una integral de superficie que se anula por ser un sistema aislado, es decir, la velocidad en la superficie frontera es tangencial para evitar que escape masa. En consecuencia, la entropía total es constante, acorde con un proceso reversible según el segundo principio de la Termodinámica, lo cual es de esperar al no considerar efectos disipativos en el desarrollo.

### 3. Efectos disipativos: viscosidad y conductividad térmica

#### 3.1. Fuerzas viscosas en fluidos newtonianos

En la sección 2.1 mencionamos el carácter local de las interacciones que tienen lugar en un volumen  $V$  del fluido. Su corto alcance, junto con la ley de acción-reacción, llevaban a considerarlas sólo a través de la superficie. Ahora bien, en general las fuerzas sobre la superficie no se deben exclusivamente a la presión hidrostática, pues aparecen esfuerzos tangenciales a la superficie (p.ej. fricción) que dependen de la orientación definida por el vector normal  $\mathbf{n}$ . Como la fuerza (vector) es distinta a priori en cada dirección, la elección de un tensor para modelizar los esfuerzos resulta adecuada. Tenemos por lo tanto que

$$\frac{d\mathbf{g}}{dS} = \sigma_{\mathbf{n}} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{n} \quad (41)$$

donde  $\sigma_{\mathbf{n}} = \sigma_{ij}n_j$ . Podemos interpretar  $\sigma_{ij}$  como la  $i$ -ésima componente de la fuerza en una unidad de área con vector normal en la dirección  $j$ , como se muestra en la *Figura 6*. Cuando  $i = j$  decimos que es un **esfuerzo normal**, y cuando  $i \neq j$ , **esfuerzo tangencial o de cizalladura**.

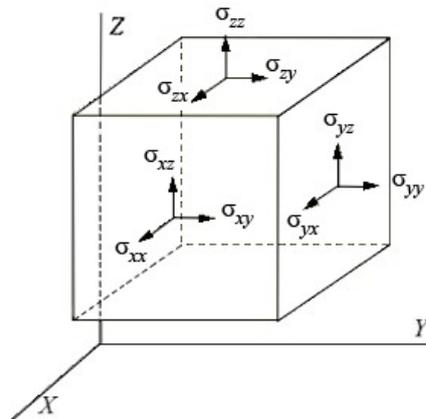


Figura 6: Componentes del tensor de esfuerzos  $\bar{\bar{\sigma}}$ . Adaptado de Mulders (como se cita en Mirzaahmadian, 2011).

Podemos separar del tensor de esfuerzos la parte correspondiente a la presión hidrostática, de manera que la parte restante  $\bar{\bar{\sigma}}'$  definirá el **tensor de esfuerzos viscosos**

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij}. \quad (42)$$

Las fuerzas de viscosidad no vienen descritas por la termodinámica, pues están asociadas a efectos dinámicos. Por esta razón, deben anularse cuando el sistema se encuentra estático ( $\bar{\bar{\sigma}}' \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$ ). Además, el carácter local de las interacciones en el espacio-tiempo se traduce en una dependencia del tensor de esfuerzos de viscosidad con la posición y el tiempo (a través de

$\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ ) lo suficientemente regular como para admitir un desarrollo de Taylor como función de  $\mathbf{u}$ :

$$\bar{\sigma}'(t, \mathbf{r}) = f(\mathbf{u}(t, \mathbf{r})) \Rightarrow \bar{\sigma}'(\mathbf{u}) = \bar{\sigma}'(\mathbf{u} \leq 0) + \left. \frac{\partial \bar{\sigma}'}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=0} \cdot \mathbf{u} + \dots \quad (43)$$

Para pequeñas desviaciones del equilibrio, es aceptable considerar hasta el primer orden del desarrollo. No obstante,  $\bar{\sigma}'$  no puede depender linealmente de  $\mathbf{u}$  pues no respetaría la invarianza Galileana (dos observadores con una determinada velocidad relativa entre ellos determinarían distintos valores para el tensor). Esto nos conduce a considerar las derivadas de  $\mathbf{u}$  como candidatas a ser las variables de las que depende el tensor:  $\bar{\sigma}' = A : \nabla \mathbf{u}$ , donde  $A$  es un tensor de cuarto rango que define la proporcionalidad entre las componentes del tensor de esfuerzos de viscosidad y las derivadas de la velocidad.

Comprobemos que el tensor  $\bar{\sigma}'$  es simétrico. Para ello, consideramos el balance de momentos de fuerza  $\Gamma$  en un elemento infinitesimal cúbico de volumen  $dx dy dz = dV$  solidario a los ejes de coordenadas (Figura 7). Por una parte, esta fuerza se puede definir a partir del tensor de esfuerzos viscosos y por otra, como el producto del momento de inercia  $\mathbf{I}$  y la aceleración angular  $d^2 \Lambda / dt^2$ . Igualando ambas expresiones y considerando que los elementos del tensor de esfuerzos viscosos no dependen del volumen, obtenemos (en la componente  $x$  por ejemplo) que

$$\Gamma_x = (\sigma'_{zy} - \sigma'_{yz}) dV = dI_x \frac{d^2 \Lambda_x}{dt^2}. \quad (44)$$

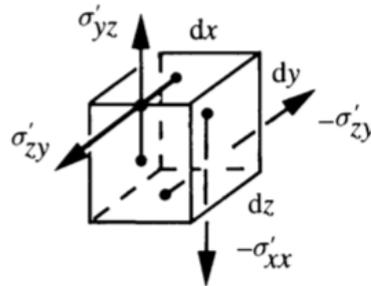


Figura 7: Momentos de fuerza asociados a la viscosidad. Adaptado de Guyon et al. (2001) [1].

Tomando límite para  $dV$  tendiendo a cero, encontramos que el momento de inercia tiende a cero como  $dV^{5/3}$  ( $I \sim ML^2 = \rho L^5 = \rho V^{5/3}$ , donde  $L$  y  $M$  denotan factores de escala característicos de las magnitudes longitud y masa respectivamente), por lo que si la aceleración angular es finita, la igualdad sólo puede ser cierta si se anula la parte que tiende como  $dV$ , es decir,  $\sigma'_{zy} = \sigma'_{yz}$ .

Se dice que un fluido es **newtoniano** si las componentes del tensor de esfuerzos viscosos  $\sigma'_{ij}$  dependen linealmente de los valores instantáneos de las deformaciones, descritas a través de las componentes del campo gradiente de velocidades. Utilizando la relación (3) se llega a que

$$\sigma'_{ij} = A_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = A_{ijkl} e_{kl} - \frac{1}{2} A_{ijkl} \epsilon_{klm} \omega_m \quad (45)$$

donde  $A$  es un tensor de cuarto rango que puede depender de las variables de estado local del fluido diferentes del campo de velocidades (densidad y energía interna). Consideraremos el fluido isotrópico, es decir, los esfuerzos generados sobre un elemento del sistema por un campo gradiente de velocidades dado son independientes de la orientación del elemento. En este caso, el tensor  $A$  debe ser también isotrópico. Se tiene que para los tensores cartesianos isotrópicos existe una base de tensores *delta de Kronecker*  $\delta_{\alpha\beta}$  (Batchelor, 2002 [2]), por lo que podemos expresar el tensor  $A$  como

$$A_{ijkl} = \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu' \delta_{il} \delta_{jk} + \mu'' \delta_{ij} \delta_{kl}. \quad (46)$$

La simetría de  $\bar{\sigma}'$  conlleva que  $A$  debe ser simétrico respecto al intercambio de  $i$  y  $j$ , con lo cual se deduce que  $\mu = \mu'$ . Esto implica además la simetría respecto al intercambio de  $k$  y  $l$ , por lo que el término de vorticidad no contribuye. Sustituyendo en la relación (45), se obtiene que

$$\sigma'_{ij} = \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} e_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk} e_{kl}) + \mu'' \delta_{ij} \delta_{kl} e_{kl} = \mu(e_{ij} + e_{ji}) + \mu'' \Delta \delta_{ij} = 2\mu e_{ij} + \mu'' \Delta \delta_{ij}. \quad (47)$$

Reescribiendo las componentes de  $e_{ij}$  en la ecuación (47) según la relación (7), se tiene finalmente la condición sobre el tensor de esfuerzos viscosos para los fluidos newtonianos

$$\sigma'_{ij} = 2\mu d_{ij} + (2\mu + 3\mu'') t_{ij} \Rightarrow \boxed{\sigma'_{ij} = 2\eta d_{ij} + \zeta t_{ij}} \quad (48)$$

donde hemos introducidos dos coeficientes (positivos):

- $\eta$  es el **coeficiente de viscosidad dinámica**, que corresponde a deformaciones isocóricas (sin cambios en el volumen).
- $\zeta$  es la **segunda viscosidad** o **viscosidad volumétrica**, que corresponde a dilataciones isotrópicas (contribución nula en fluidos incompresibles pues  $t_{ij} = \bar{0}$ ).

### 3.2. Ecuación general de la conservación de la cantidad de movimiento

Teniendo en cuenta las fuerzas viscosas presentes en el fluido, podemos generalizar la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento aplicando la segunda ley de Newton (la ecuación de conservación de la masa no se ve alterada respecto al caso sin viscosidad pues se trata de una relación puramente cinemática). A diferencia del procedimiento seguido en la sección 2.1, ahora partiremos de la descripción lagrangiana del fluido, es decir, el volumen se deforma con las partículas. De este modo, podemos omitir el término de corriente convectiva  $\mathbf{j}_p$ , pues no hay volumen de fluido que atraviese la superficie, quedando que la variación temporal de la cantidad de movimiento en el volumen se debe a las fuerzas, representadas por el tensor de esfuerzos  $\bar{\sigma}$ , y volúmicas, dadas por  $\rho\mathbf{f}$ . Se tiene por lo tanto que

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{u} dV = \iiint_V \rho \mathbf{f} dV + \oint_{\Omega} \frac{d\mathbf{g}}{d\Omega} d\Omega = \iiint_V \rho \mathbf{f} dV + \oint_{\Omega} \sigma_{\mathbf{n}} d\Omega. \quad (49)$$

Utilizando que, en esta representación, el producto  $\rho dV$  (masa de un elemento diferencial de volumen) se mantiene constante, pues contiene el mismo número de partículas en todo momento, podemos concluir que

$$\iiint_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV = \iiint_V \rho \mathbf{f} dV + \oint_{\Omega} \sigma_{\mathbf{n}} d\Omega. \quad (50)$$

El segundo término de la derecha representa el flujo de las componentes de  $\sigma_{\mathbf{n}}$  a través de la superficie  $\Omega$ , por lo que la podemos transformar a través del teorema de la divergencia de Gauss (12) y queda

$$\left[ \oint_{\Omega} \sigma_{\mathbf{n}} d\Omega \right]_i = \oint_{\Omega} \sigma_{ij} n_j d\Omega = \iiint_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV \implies \oint_{\Omega} \sigma_{\mathbf{n}} d\Omega = \iiint_V \nabla \cdot \bar{\sigma} dV. \quad (51)$$

Sustituyendo en la ecuación (50) y pasando todos los términos a la misma integral, se llega a

$$\iiint_V \left( \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \bar{\sigma} \right) dV = 0 \quad \forall V \implies \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \bar{\sigma}. \quad (52)$$

Introduciendo el tensor de esfuerzos viscosos a partir de la descomposición dada en la relación (42), se llega finalmente a la ecuación de conservación general para la densidad volumétrica cantidad de movimiento en la descripción lagrangiana:

$$\boxed{\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \bar{\sigma}'}. \quad (53)$$

Aplicando la relación (1) para  $f = \mathbf{u}$ , se obtiene esta misma ecuación de conservación en la descripción euleriana:

$$\boxed{\rho \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \bar{\sigma}'}. \quad (54)$$

En ambas descripciones, el término de la izquierda corresponde a un elemento de masa multiplicado por su aceleración. En la descripción lagrangiana, esta aceleración se debe únicamente a la dependencia con el tiempo de la velocidad; mientras que en la descripción euleriana encontramos un primer término debido a la dependencia explícita con el tiempo de la velocidad y un segundo término que corresponde con una aceleración convectiva debida al transporte de cantidad de movimiento por el flujo (simplemente cambia el sistema de referencia). Al otro lado de la ecuación, hemos dividido las fuerzas superficiales  $\nabla \cdot \bar{\sigma}$  en las correspondientes a los esfuerzos normales a la superficie presentes en reposo (presión hidrostática)  $-\nabla p$  y las fuerzas viscosas (normales y tangenciales)  $\nabla \cdot \bar{\sigma}'$ , además de las fuerzas volumétricas  $\rho \mathbf{f}$ .

### 3.2.1. La ecuación de Navier-Stokes

Consideramos el tensor de esfuerzos viscosos dado por la expresión (48) y, por simplicidad, que los coeficientes de viscosidad en el fluido son independientes de la temperatura y la densidad de éste (fluido homogéneo). Se puede desarrollar que

$$[\nabla \cdot \bar{\sigma}']_i = \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = 2\eta \left[ \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \frac{\partial \Delta}{\partial x_j} \delta_{ij} \right] + \zeta \frac{\partial \Delta}{\partial x_j} \delta_{ij} = \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial \Delta}{\partial x_i}. \quad (55)$$

En forma vectorial, la ecuación (55) se expresa como

$$\nabla \cdot \bar{\sigma}' = \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (56)$$

Sustituyendo la expresión (56) en la ecuación general para la conservación de la densidad volmétrica de la cantidad de movimiento en la descripción euleriana (54), se obtiene la denominada **ecuación de Navier-Stokes**:

$$\rho \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (57)$$

Recordemos que hemos considerado la independencia explícita de los coeficientes de viscosidad con la posición; esta hipótesis podría relajarse y habría que tener en cuenta esta dependencia al derivar. Dadas unas condiciones de contorno, la demostración de la existencia y continuidad de soluciones de esta ecuación está considerado uno de los siete Problemas Matemáticos del Milenio<sup>2</sup>. Es interesante observar el caso de un fluido incompresible ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ), en el que la ecuación de Navier-Stokes se simplifica a

$$\rho \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (58)$$

<sup>2</sup>Se tratan de siete problemas matemáticos relevantes para el avance del conocimiento científico cuya demostración está premiada (hasta ahora sólo uno ha sido resuelto, la *Conjetura de Poincaré*). En lo que refiere a la ecuación de Navier-Stokes, la importancia del conocimiento de sus soluciones para el estudio de los fluidos la ha llevado ser reconocida como uno de ellos. Para más información, se puede consultar la recopilación de *Clay Mathematics Institute*: <http://www.claymath.org/millennium-problems>.

Del mismo modo, si hubiéramos considerado la descripción lagrangiana utilizando la ecuación (53), se habría obtenido la ecuación de Navier-Stokes en la forma

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}); \quad (59)$$

y, en el caso de un fluido incompresible,

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (60)$$

### 3.2.2. Número de Reynolds

Por simplicidad, consideraremos el caso sin fuerzas volúmicas ( $\mathbf{f}=0$ ). Denotemos por  $L$  y  $U$  factores de escala característicos de las magnitudes longitud y velocidad del flujo, respectivamente. Introducimos los siguientes parámetros adimensionales:

$$\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{L}; \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{U}; \quad t' = \frac{t}{L/U}; \quad p' = \frac{p}{\rho U^2}. \quad (61)$$

Incluyendo estos parámetros en la ecuación de Navier-Stokes para un fluido incompresible en su forma euleriana (58) y dividiendo cada término por  $\rho U^2/L$ , llegamos a la relación

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} \right|_{\mathbf{r}'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' = -\nabla' p' + \frac{\eta}{\rho U L} \nabla'^2 \mathbf{u}' := -\nabla' p' + \frac{1}{Re} \nabla'^2 \mathbf{u}' \quad (62)$$

donde hemos definido el **número de Reynolds** como  $Re = \rho U L / \eta = \rho U^2 / (\eta U / L)$ . Es posible añadir un segundo número correspondiente a la viscosidad asociada a cambios en el volumen partiendo de la ecuación (57) si se relaja la condición de incompresibilidad. Éste es análogo en forma al número de Reynolds salvo que, donde aparece el coeficiente de viscosidad  $\eta$ , debe aparecer  $(\zeta + \frac{\eta}{3})$ .

El número de Reynolds representa un cociente entre los flujos de momento en el fluido: uno convectivo, del orden de la corriente  $\mathbf{j}_p$ ; y otro difusivo (que depende únicamente de propiedades microscópicas del fluido), consecuencia de introducir el coeficiente de viscosidad  $\eta$  (aumenta la difusión con el recorrido de las partículas). Del mismo modo, puede asociarse a un ratio de tiempos característicos entre los procesos difusivos y convectivos. Así, se puede deducir que:

- **Bajo número de Reynolds** implica que dominan las fuerzas viscosas asociadas a procesos difusivos (**régimen laminar**).
- **Alto número de Reynolds** implica que el transporte de momento convectivo resulta dominante, aunque se debe tener también en cuenta la geometría particular del sistema (**régimen turbulento**).

### 3.2.3. Ecuación de Stokes

La ecuación de Navier-Stokes para un fluido incompresible (58) no tiene, en general, una solución analítica debido al término no lineal  $\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ . No obstante, a bajas velocidades o, equivalentemente, a bajo número de Reynolds, dicho término es despreciable frente a los efectos viscosos  $\eta\nabla^2\mathbf{u}$  y la ecuación se vuelve lineal. Si además consideramos un flujo cuasi-estacionario ( $\partial\mathbf{u}/\partial t \approx 0$ ), se llega a la expresión

$$-\nabla p + \rho\mathbf{f} + \eta\nabla^2\mathbf{u} = 0. \quad (63)$$

Por simplicidad, consideraremos de nuevo el caso en ausencia de fuerzas volúmicas ( $\mathbf{f}=0$ ). Bajo esta hipótesis, la ecuación anterior junto con la condición de incompresibilidad (11) forman las conocidas como **ecuaciones de Stokes**:

$$\nabla p = \eta\nabla^2\mathbf{u} \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (64)$$

Observamos que esta primera ecuación, por ser lineal, presenta la propiedad de que la superposición de sus soluciones también es solución. Además, puede expresarse a través del tensor de esfuerzos viscosos dado por la relación (42). Teniendo en cuenta la relación de derivación para el tensor de esfuerzos viscosos (56) y la condición de incompresibilidad (11), se tiene que  $\partial\sigma'_{ij}/\partial x_j = \eta\nabla^2\mathbf{u}$ . Por lo tanto, la ecuación de Stokes (64) se puede expresar como

$$\nabla \cdot \bar{\sigma} = 0. \quad (65)$$

Esta forma representa una condición de equilibrio mecánico instantáneo de fuerzas. También resulta interesante expresar la ecuación de Stokes en función del vector vorticidad  $\omega$ . Teniendo en cuenta la condición de incompresibilidad (11) y la identidad vectorial  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2\mathbf{v}$ , la ecuación de Stokes (64) equivale a

$$\nabla p = -\eta\nabla \times \omega \quad (66)$$

que, además, implica que  $\nabla^2 p = 0$ . Tomando rotacional en la ecuación anterior y usando la misma identidad vectorial, como el primer término se anula, se obtiene finalmente una ecuación de Laplace

$$\nabla^2\omega = 0. \quad (67)$$

Dadas unas condiciones de contorno, es posible demostrar (*Anexo II*) que la ecuación de Stokes (64) presenta unicidad de solución y que los flujos que obedecen dicha ecuación corresponden a un mínimo en la tasa de disipación de energía debido a efectos viscosos respecto a otros flujos que cumplen la condición de incompresibilidad (11) con las mismas condiciones de contorno pero no cumplen la ecuación de Stokes (teorema de disipación mínima de Helmholtz). No obstante, la existencia de solución depende de las condiciones de contorno aplicadas y su

demostración resulta tediosa, pero aceptaremos su validez en los casos que se estudiarán en la sección 5.

### 3.3. Transferencia de calor. Ley de Fourier

Consideramos un cuerpo homogéneo a lo largo del eje X sujeto a un gradiente de temperatura  $\nabla T \equiv \partial T / \partial x$ , como se muestra en la *Figura 8*.

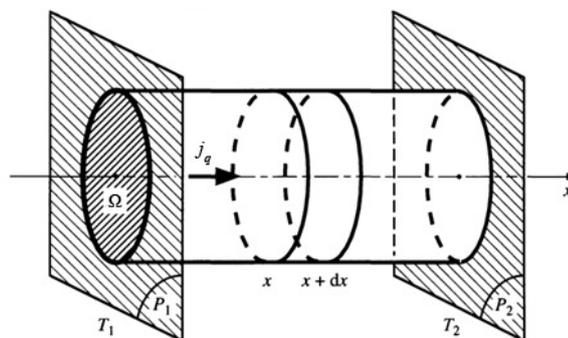


Figura 8: Flujo de calor entre dos planos a distinta temperatura. Adaptado de Guyon et al. (2001) [1].

Experimentalmente se comprueba que, para gradientes no muy elevados de temperatura, el flujo macroscópico de calor por unidad de tiempo y área es linealmente proporcional a este gradiente. La constante de proporcionalidad  $k$  se denomina **conductividad térmica**.

$$j_q(x) = -k \frac{dT}{dx}, \quad k > 0 \tag{68}$$

donde el signo menos indica que la transferencia de calor ocurre en la dirección opuesta al gradiente de temperatura. Generalizando al caso en el que la temperatura varía en las tres coordenadas espaciales, obtenemos la denominada **ley de Fourier**:

$$\mathbf{j}_q(\mathbf{r}) = -k \nabla T(\mathbf{r}). \tag{69}$$

El intercambio de calor a través de una superficie  $\Omega$  viene determinado por una corriente  $\mathbf{j}_q$  según la ecuación (69):

$$\dot{Q} = \iint_{\Omega} d\Omega \cdot \mathbf{j}_q = - \iint_{\Omega} d\Omega \cdot k \nabla T. \tag{70}$$

Para el caso no estacionario, estudiaremos el balance de energía térmica en un elemento infinitesimal del cuerpo. Considerando de nuevo el caso monodimensional, el flujo de calor a través de la superficie  $\Omega$  durante un intervalo de tiempo  $dt$  es, por la ecuación (68),

$$j_q(x)\Omega dt = -k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Omega dt. \quad (71)$$

La energía interna, por ser una variable termodinámica de estado, es función de la temperatura y el volumen. A volumen constante, la dependencia es únicamente con la temperatura según la relación

$$dE_{int} = \left( \frac{\partial E_{int}}{\partial T} \right)_V dT = C_V dT \quad (72)$$

donde  $C_V$  es la capacidad calorífica a volumen constante. La diferencia entre el flujo de calor entre los extremos se traduce en un calor acumulado en el volumen entre ambas superficies.

$$\Omega dt (j_q(x) - j_q(x + dx)) = k \Omega dt \left[ -\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial T(x + dx, t)}{\partial x} \right] = k \Omega dt \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial^2 x} \quad (73)$$

donde hemos usado el desarrollo de Taylor en primer orden de la expresión anterior. El cambio de energía interna en un volumen de sección  $\Omega$  y de espesor  $dx$  durante un intervalo de tiempo  $dt$  se debe al calor acumulado en dicho elemento de volumen. Utilizando la relación (72) y definiendo el calor específico a volumen constante  $c_V$  como la capacidad calorífica a volumen constante por unidad de masa, se tiene que

$$\Omega dx dt \frac{\partial E_{int}}{\partial t} = \rho c_V \Omega dx dt \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = k \Omega dx dt \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial^2 x} \Rightarrow \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial^2 x} \quad (74)$$

donde hemos introducido la **difusividad térmica**  $\kappa = k/\rho c_V$ , con unidades de área entre tiempo. Generalizando de nuevo la ecuación (74) al caso en el que la temperatura depende de las tres coordenadas espaciales, se obtiene la ecuación tridimensional para la difusión del calor (**ecuación de Fourier**)

$$\boxed{\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T(\mathbf{r}, t)}. \quad (75)$$

Se puede incluir un término adicional  $Q(\mathbf{r}, t)$  que tenga en cuenta las fuentes de energía existentes en el cuerpo. Las soluciones particulares dependerán tanto de dicho término como de las condiciones iniciales y de contorno, pero se caracterizan por una suavidad gradual en la distribución debido al flujo de calor desde las áreas más cálidas hacia las más frías.

### 3.4. Balances de energía y de entropía

#### 3.4.1. Energía cinética

En el desarrollo de la ecuación de balance para la densidad volumétrica de energía cinética del fluido en la sección 2.2.1, se utilizó la ecuación de conservación para la densidad volumétrica de cantidad de movimiento sin viscosidad (21). Si introducimos el término de viscosidad como se muestra en la ecuación (53), la nueva ecuación de balance para la densidad volumétrica de energía cinética del fluido en la descripción lagrangiana es

$$\boxed{\frac{de_c}{dt} = -\frac{1}{2}\rho u^2(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot [\rho \mathbf{f} + \nabla(\bar{\sigma}' - p)]} \quad (76)$$

El primer término refleja el efecto de los cambios en el volumen, mientras que el segundo modela el trabajo mecánico realizado por las fuerzas de volúmicas y superficiales. El paso a la descripción euleriana se tiene por la relación (1) con  $f = e_c = \frac{1}{2}\rho u^2$ :

$$\boxed{\frac{\partial e_c}{\partial t} \Big|_r = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2}\rho u^2 + p - \bar{\sigma}' \right) \mathbf{u} \right] + p(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \bar{\sigma}' \cdot \nabla \mathbf{u}} \quad (77)$$

Ahora encontramos un término asociado al transporte convectivo de energía cinética junto con el trabajo realizado por unidad de tiempo por las fuerzas superficiales. El término de las fuerzas volúmicas permanece inalterado, pero ahora existe otro mecanismo además del trabajo de compresión de las fuerzas de presión para transformar energía cinética en interna: la transformación irreversible debida al trabajo de las fuerzas viscosas  $-\sigma'_{ij}\partial u_i/\partial x_j = -\bar{\sigma}' \cdot \nabla \mathbf{u}$ . Para comprobar el carácter disipativo del término  $-\sigma'_{ij}\partial u_i/\partial x_j$ , basta considerar la descomposición del tensor de esfuerzos viscosos (48) y su simetría, obteniéndose que

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \sigma'_{ij}e_{ij} = (2\eta d_{ij} + \zeta t_{ij})(d_{ij} + t_{ij}) = \\ &= 2\eta d_{ij}^2 + \zeta t_{ij}^2 + (2\eta + \zeta)d_{ij}t_{ij} = 2\eta d_{ij}^2 + \zeta t_{ij}^2 + \frac{\Delta}{3}(2\eta + \zeta)\bar{d}_{ij}\bar{\delta}_{ij}. \end{aligned} \quad (78)$$

El último término se anula debido a que el tensor  $\bar{d}$  tiene traza nula y los otros dos términos son definidos positivos. El signo negativo en la relación (77) confirma la irreversibilidad del proceso. Integrando sobre todo el volumen y aplicando el teorema de la divergencia de Gauss (12), solamente permanecen los términos de volumen (el primero y el último de la ecuación), de lo cual deducimos que la energía cinética total varía por la acción de fuerzas externas y por el trabajo de compresión, mientras que se disipa por efectos viscosos.

$$\frac{\partial E_c}{\partial t} = \iiint_V (\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \bar{\sigma}' \cdot \nabla \mathbf{u} + p(\nabla \cdot \mathbf{u})) dV \quad (79)$$

### 3.4.2. Energía interna

Con un procedimiento análogo al seguido en la sección 2.2.2, buscamos expresar el balance de la densidad volumétrica de energía del flujo teniendo en cuenta los efectos disipativos (viscosidad y flujo de calor). La relación equivalente a (27) pero incluyendo el trabajo realizado por las fuerzas viscosas y el flujo de calor dado por la ley de Fourier es

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} (\epsilon + e_c) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot (\mathbf{j}_e + p\mathbf{u} - \bar{\sigma}' \cdot \mathbf{u} + \mathbf{j}_q). \quad (80)$$

Sustituyendo la ecuación de conservación para la densidad volumétrica de energía cinética bajo la descripción euleriana (77), se obtiene que para la densidad volumétrica de energía interna

$$\boxed{\left. \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} = -\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}) - p(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \bar{\sigma}' \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot (k \nabla T)}. \quad (81)$$

Observamos que, en ausencia de flujo ( $\mathbf{u}=0$ ), la ecuación anterior se reduce a la ecuación de Fourier (75), como cabe esperar si no tienen lugar cambios en el volumen considerado ( $d\epsilon = \rho c_v dT$ ). Aplicando ahora la relación (1) para  $f = \epsilon$ , se obtiene la ecuación de balance para la densidad volumétrica de energía interna del fluido bajo la descripción lagrangiana

$$\boxed{\frac{d\epsilon}{dt} = -(\epsilon + p)(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \bar{\sigma}' \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot (k \nabla T)}. \quad (82)$$

Comparando estas ecuaciones con las mostradas en el caso sin efectos disipativos (34) y (35), aparecen un término asociado a la viscosidad, que transforma la energía cinética en interna (pues es definido positivo como se muestra en (78)), y otro asociado al flujo de calor, que puede aumentar o disminuir la energía interna. Integrando la ecuación (81) sobre todo el volumen y aplicando el teorema de la divergencia de Gauss (12), se obtiene la variación total de energía interna del fluido

$$\frac{dE_{int}}{dt} = \iiint_V (\bar{\sigma}' \cdot \nabla \mathbf{u} - p(\nabla \cdot \mathbf{u})) dV + \iint_{\Omega} k \nabla T \cdot d\Omega. \quad (83)$$

Observamos que, si el gradiente de temperatura apunta hacia fuera del fluido, es decir, se encuentra a menor temperatura que el medio que lo rodea, el término de calor supondrá una ganancia de energía interna, mientras que si se encuentra a mayor temperatura, ocurre lo contrario. Además, esta ecuación junto con (79) permiten deducir que la variación total de energía del fluido se debe a la acción de las fuerzas volúmicas y al intercambio de calor a través de la superficie, y que el trabajo de las fuerzas viscosas y de compresión describen un intercambio irreversible entre energía cinética e interna.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_{int}}{dt} = \iiint_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \iint_{\Omega} k \nabla T \cdot d\Omega. \quad (84)$$

### 3.4.3. Entropía

Con el mismo procedimiento usado en la sección 2.2.3, ahora utilizando la ecuación de balance para la densidad volumétrica de energía interna del fluido (82) y el flujo de calor dado por la ley de Fourier, se deduce una ecuación de balance para la densidad de entropía bajo la descripción lagrangiana

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = -s(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{T} \bar{\bar{\sigma}}' \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{T} \nabla \cdot (k \nabla T)}. \quad (85)$$

Aplicando ahora la relación (1) para  $f = s$ , se obtiene la ecuación de balance para la densidad volumétrica de entropía del fluido bajo la descripción euleriana

$$\boxed{\left. \frac{\partial s}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} = -\nabla \cdot (s \mathbf{u}) + \frac{1}{T} \bar{\bar{\sigma}}' \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{T} \nabla \cdot (k \nabla T)}. \quad (86)$$

Observamos que el carácter definido positivo del término que involucra viscosidad, como se muestra en (78), provoca un aumento de la entropía total del fluido, lo cual es compatible con un proceso irreversible según el segundo principio de la Termodinámica. Esto mismo ocurre con el término de calor a través de la superficie. Integrando sobre un volumen tendiendo a infinito (engloba el fluido), se obtiene que es un término definido positivo:

$$\begin{aligned} \iiint_V dV \frac{1}{T} \nabla \cdot (k \nabla T) &= \iiint_V dV \nabla \cdot \left( \frac{1}{T} k \nabla T \right) - \iiint_V dV k (\nabla T) \nabla \cdot \left( \frac{1}{T} \right) = \\ &= - \iiint_V dV k (\nabla T) \cdot \left( -\frac{1}{T^2} \nabla T \right) = \iiint_V dV k \left( \frac{\nabla T}{T} \right)^2 \end{aligned} \quad (87)$$

donde el término que se anula es debido a que se trata de una corriente a través de una superficie en el infinito, como se muestra al aplicarle el teorema de la divergencia de Gauss (12).

## 4. Soluciones particulares de la ecuación de Navier-Stokes para fluidos incompresibles bajo la acción de la gravedad

En primer lugar, vamos a establecer algunas condiciones de contorno para el flujo del fluido que nos permitan evaluar las soluciones de la ecuación de Navier-Stokes (58) en casos particulares.

Consideramos un fluido rodeado de un recipiente sólido. Asumiendo que el fluido no puede penetrar en las paredes del recipiente, se llega a que las componentes de la velocidad normales a la superficie deben coincidir para el fluido y el sólido:

$$\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n}. \quad (88)$$

En un fluido ideal sin viscosidad, la componente tangencial de la velocidad no presenta ninguna restricción. No obstante, en un fluido real, las fuerzas viscosas impiden el libre deslizamiento del fluido respecto al sólido. De hecho, las componentes tangenciales de la velocidad deben coincidir, pues una discontinuidad llevaría a una disipación infinita de energía en la superficie debido a la viscosidad. De este modo, teniendo en cuenta la relación (88), se concluye la denominada **condición de contorno de no deslizamiento**

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_f. \quad (89)$$

A continuación, se van a exponer una serie de casos particulares en los que es posible resolver de manera sencilla la ecuación de Navier-Stokes en régimen estacionario y, en algunos casos, en régimen transitorio.

### 4.1. Flujo rectilíneo unidimensional entre planos paralelos

Consideremos un flujo unidimensional de un fluido incompresible en la dirección  $X$  en un sistema cartesiano. Las componentes de la velocidad en las otras direcciones son idénticamente cero:  $u_y(x, y, z) = u_z(x, y, z) = 0$ . La relación de incompresibilidad (11) implica además que  $\partial u_x / \partial x = 0$ . Por lo tanto, se tiene que la componente no nula de la velocidad depende de las otras dos coordenadas  $y$  y  $z$ , en consecuencia, el término no lineal de la ecuación de Navier-Stokes se anula:  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = 0$ . La geometría particular del flujo unidimensional anula los términos convectivos (al igual que ocurre a bajo número de Reynolds) independientemente del valor de la velocidad. La ecuación de Navier-Stokes (58) para la componente  $X$  de la velocidad se reduce a

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = - \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right) + \eta \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \quad (90)$$

Cuando además el flujo es estacionario ( $\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$ ), el movimiento de las partículas fluidas surge del balance entre los gradientes de presión y las fuerzas viscosas. Formalmente, la ecuación en este flujo es la misma que la ecuación de Stokes (64) en el caso de que las fuerzas de volumen se deban a la gravedad, y la ecuación (90) se reduce a una ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right) = -\frac{G}{\eta} \quad (91)$$

donde  $G(t) = -(\partial p / \partial x - \rho g_x)$  representa el gradiente de presión (constante en régimen estacionario) provocado por fuerzas de volumen en la dirección positiva del movimiento. Normalmente, por razones de simetría o de elección de la orientación del sistema de referencia, en el caso unidimensional se asume que  $\partial^2 u_x / \partial y^2 \gg \partial^2 u_x / \partial z^2$ . Observamos que las únicas componentes distintas de cero del tensor de esfuerzos viscosos son  $\sigma'_{xy} = \sigma'_{yx} = \eta(\partial u_x / \partial y)$ , por lo que la ecuación (91) se puede expresar como

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{d\sigma'_{xy}}{dy} + \rho g_x = 0. \quad (92)$$

Esta ecuación puede ser integrada directamente si  $\partial p / \partial x - \rho g_x = cte$ , siendo la solución general

$$u_x(y) = \frac{1}{2\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right) y^2 + c_1 y + c_2 \quad (93)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son dos constantes de integración determinadas por las condiciones de contorno. Además, se tiene que la componente no nula del tensor de esfuerzos viscosos es lineal:

$$\sigma'_{xy} = \eta \frac{du_x}{dy} = \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right) y + \eta c_1. \quad (94)$$

Por otra parte, la ecuación de Navier-Stokes (58) para las otras componentes, que es simplemente  $\partial p / \partial x_i - \rho g_i = 0$ ,  $x_i = y, z$ ; permite dar una expresión para la presión

$$p = \frac{\partial p}{\partial x} x + \rho g_y y + \rho g_z z + c \quad (95)$$

donde  $c$  es una constante de integración que puede evaluarse con la presión de un punto concreto en el flujo particular.

Consideramos dos planos paralelos infinitos normales a la dirección  $Y$  en un sistema cartesiano separados una distancia  $a$ . Aceptaremos que la entrada de fluido está suficientemente alejada como para establecer un flujo independiente de la posición en el plano (unidimensional).

4.1.1. Flujo plano de Couette

Estudiemos en primer lugar el denominado flujo plano de Couette. Supongamos que el plano inferior se encuentra fijo en la posición  $y = 0$  y el superior, en la posición  $y = a$ , se mueve a velocidad constante  $u_0$  en la dirección  $X$ , como se muestra en la *Figura 9*. En condiciones de flujo estacionario incompresible y en ausencia de gravedad, la velocidad del fluido varía linealmente en la región entre los planos en ausencia de gradientes de presión externos; ésto se deduce aplicando las condiciones de contorno de no deslizamiento (89)  $u_x(y = 0) = 0$  y  $u_x(y = a) = u_0$  en la expresión para la velocidad en flujo unidimensional (93):

$$c_1 = \frac{u_0}{a} ; c_2 = 0 \Rightarrow u_x(y) = u_0 \frac{y}{a}. \tag{96}$$

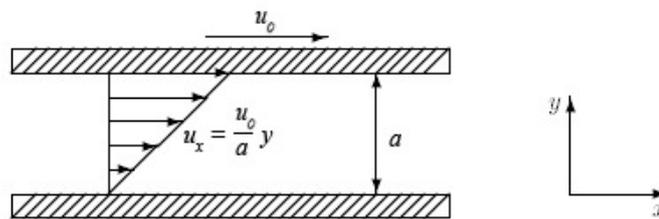


Figura 9: Perfil de velocidades en flujo plano de Couette. Adaptado de Papanastasiou et al. (2000) [6].

Por otra parte, la componente no nula del tensor de esfuerzos viscosos es, según la expresión (94),

$$\sigma'_{xy} = \frac{\eta u_0}{a}. \tag{97}$$

Observamos que las fuerzas viscosas  $\eta(\partial^2 u_x / \partial y^2)$  sobre un elemento del fluido son cero. Las fuerzas ejercidas localmente sobre distintos elementos de superficie se cancelan globalmente, pues  $\sigma'_{xy}$  es independiente de la distancia a los planos debido a la ausencia de gradientes de presión externos. Es interesante observar que, si ambos planos se mueven con velocidad constante  $u_0$  (*Figura 10*), aplicando ahora las condiciones de contorno  $u_x(y = \pm a/2) = u_0$ , la expresión anterior se reduce a  $u_x(y) = u_0$  (**flujo de tapón**).

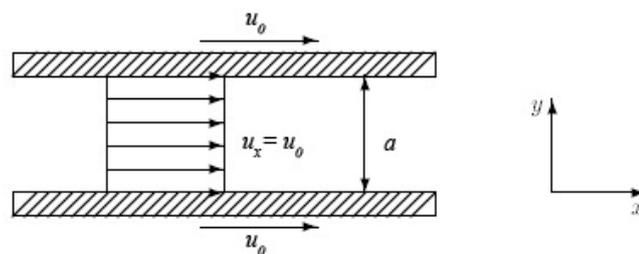


Figura 10: Perfil de velocidades en flujo de tapón. Adaptado de Papanastasiou et al. (2000) [6].

#### 4.1.2. Flujo plano de Poiseuille

A continuación, vamos a analizar el denominado flujo plano de Poiseuille. Consideramos un fluido incompresible entre dos planos infinitos estacionarios situados en  $y = \pm a/2$  que se mueve en la dirección positiva del eje  $X$  provocado por un gradiente de presión  $\partial p/\partial x$  en esta dirección, como se muestra en la *Figura 11*. Aplicando las condiciones de contorno de no deslizamiento (89)  $u_x(y = \pm a/2) = 0$  en la expresión general de la velocidad en el flujo unidimensional (93), se obtiene que

$$\begin{aligned} c_1 &= 0; \quad c_2 = -\frac{a^2}{8\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow u_x(y) &= -\frac{1}{2\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right) \left( -y^2 + \frac{a^2}{4} \right) = u_0 \left( 1 - \frac{4y^2}{a^2} \right). \end{aligned} \quad (98)$$

El resultado es un perfil de velocidades parabólico, con un máximo  $u_0$  en el eje de simetría entre los planos con un valor

$$u_0 = -\frac{a^2}{8\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right). \quad (99)$$

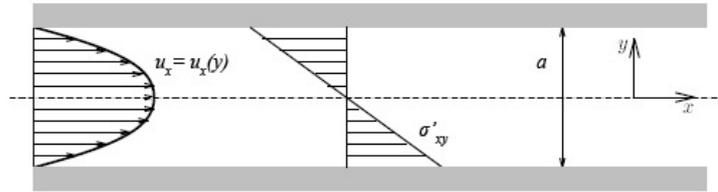


Figura 11: Perfiles de velocidades y de esfuerzos viscosos en flujo de Poiseuille con gradiente de presión constante. Adaptado de Papanastasiou et al. (2000) [6].

La componente no nula del tensor de esfuerzos viscosos varía linealmente con la posición, como se aprecia aplicando la relación (94):

$$\sigma'_{xy} = \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right) y. \quad (100)$$

El caudal por unidad de longitud del canal en la dirección  $Z$  se obtiene integrando la velocidad entre los planos, por lo que tiene la expresión

$$Q_u = \int_{-a/2}^{a/2} u_x(y) dy = -\left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right) \frac{a^3}{12\eta}. \quad (101)$$

A partir del caudal, se puede definir una velocidad media del flujo  $U$  como sigue:

$$U = Q_u/a = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x\right) \frac{a^2}{12\eta} = \frac{2u_0}{3}. \quad (102)$$

#### 4.1.3. Flujo plano de Couette-Poiseuille

Estos dos casos descritos anteriormente pueden generalizarse con el denominado flujo plano de Couette-Poiseuille, en el cual el plano inferior se encuentra fijo en la posición  $y = 0$  y el otro, en la posición  $y = a$ , se mueve a velocidad constante  $u_0$  en la dirección positiva del eje  $X$ . El flujo se mueve en el mismo sentido debido a un gradiente de presión  $\partial p/\partial x$  en esa dirección (Figura 12). Aplicando las condiciones de contorno de no deslizamiento (89)  $u_x(y = 0) = 0$  y  $u_x(y = a) = u_0$  en la expresión general de la velocidad del flujo unidimensional (93), se obtiene que

$$c_1 = \frac{u_0}{a} - \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x\right) a; \quad c_2 = 0 \Rightarrow u_x(y) = \frac{u_0}{a}y - \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x\right) y(a - y). \quad (103)$$

Es inmediato comprobar que, en ausencia de gradientes de presión, se tiene la expresión de la velocidad del flujo plano de Couette (96) y, para  $u_0 = 0$ , se tiene la expresión del flujo de Poiseuille (98) realizando un cambio de sistema de referencia al que sitúa  $y = 0$  en el eje de simetría entre los planos. La solución es, por tanto, una superposición de las soluciones de los casos por separado.

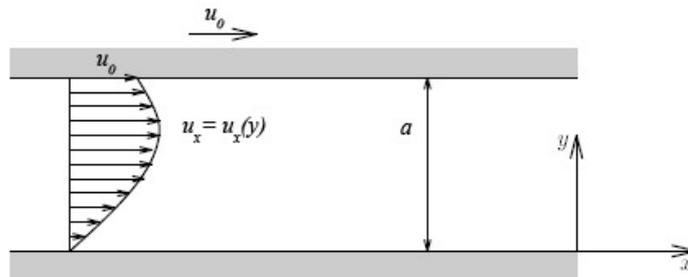


Figura 12: Perfil de velocidades en flujo plano de Couette-Poiseuille. Adaptado de Papanastasiou et al. (2000) [6].

Del mismo modo, la componente no nula del tensor de esfuerzos viscosos tiene, según (94), la expresión dada por la suma de los casos aislados

$$\sigma'_{xy} = \eta \frac{u_0}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x\right) (a - 2y). \quad (104)$$

El plano donde la velocidad es máxima ahora no se encuentra en el eje de simetría entre los planos, sino que está desplazado hacia el plano móvil. Igualando la derivada de la velocidad dada por (103) en el eje  $X$  a cero, se tiene que la coordenada  $Y$  de dicho plano es:

$$0 = \frac{u_0}{a} - \frac{1}{2\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right) (a - 2\tilde{y}) \Rightarrow \tilde{y} = \frac{a}{2} + \frac{\eta u_0}{a \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right)}. \quad (105)$$

## 4.2. Flujo axisimétrico unidireccional

Para el estudio de los flujos con un eje de simetría es conveniente el uso de coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , haciendo coincidir el eje  $Z$  con el de simetría (consultar *Anexo I*). Así, la condición de axisimetría se reduce a la independencia de la velocidad con el ángulo  $\theta$ , de modo que

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} = 0. \quad (106)$$

La condición de incompresibilidad  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  en coordenadas cilíndricas, teniendo en cuenta (106), se traduce en

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (107)$$

Encontramos tres grandes tipos de flujos axisimétricos unidireccionales (solamente una de las componentes de la velocidad  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$  es no nula): **flujo axisimétrico rectilíneo**, donde la componente axial de la velocidad  $u_z$  es no nula (flujo en tubos); **flujo axisimétrico torsional**, donde la componente azimutal de la velocidad  $u_\theta$  es no nula (rotaciones de cuerpo rígido, tornados); y **flujo axisimétrico radial**, donde la componente radial  $u_r$  de la velocidad es no nula (medios porosos, succión).

#### 4.2.1. Flujo axisimétrico rectilíneo

Estos flujos presentan  $u_r = u_\theta = 0$ . La condición de incompresibilidad (107) se satisface si  $\partial u_z / \partial z = 0$  y, por la condición de axisimetría (106), se tiene que  $u_z = u_z(r, t)$ . Así, el término no lineal  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  de la ecuación de Navier-Stokes para fluidos incompresibles (58) se anula y queda

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \rho g_z. \quad (108)$$

En el caso estacionario ( $\partial u_z / \partial t = 0$ ) se tiene formalmente la ecuación de Stokes (64), y queda para la componente  $u_z$  de la velocidad una ecuación diferencial ordinaria

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \rho g_z = 0. \quad (109)$$

Las únicas componentes distintas de cero del tensor de esfuerzos viscosos son

$$\sigma'_{rz} = \sigma'_{zr} = \eta \frac{\partial u_z}{\partial r}. \quad (110)$$

Cuando el gradiente de presión  $\partial p / \partial z$  es constante, la ecuación (109) tiene como solución general

$$u_z(r) = \frac{1}{4\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) r^2 + c_1 \ln r + c_2 \quad (111)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes de integración que se determinan con las condiciones de contorno del flujo. Aplicando esta relación en (110), se tiene que

$$\sigma'_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) r + \eta \frac{c_1}{r}. \quad (112)$$

La ecuación de Navier-Stokes para el fluido incompresible (58) en las componentes  $r$  y  $\theta$  nos permite dar una expresión para la presión de la forma

$$p = \frac{\partial p}{\partial z} z + \rho g_r r + \rho g_z z + c \quad (113)$$

donde  $c$  es una constante de integración que puede evaluarse con la presión de un punto concreto en el flujo particular.

Para analizar un caso concreto, consideraremos el **flujo de Hagen-Poiseuille** de un fluido en un tubo cilíndrico infinito de sección circular de radio  $R$  debido a gradientes de presión en la dirección del eje de simetría del recipiente (*Figura 13*). Además de las condiciones de contorno de no deslizamiento (89)  $u_z(r = R) = 0$ , hemos de imponer una condición adicional en el eje de simetría para asegurar que no diverja, es decir,  $u_z(r = 0)$  debe ser finita. Aplicándolas en

la solución general de la velocidad para el flujo axisimétrico rectilíneo (111), se tiene que la velocidad presenta un perfil parabólico:

$$c_1 = 0 ; c_2 = -\frac{1}{4\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_z(r) = -\frac{1}{4\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) (R^2 - r^2) = u_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (114)$$

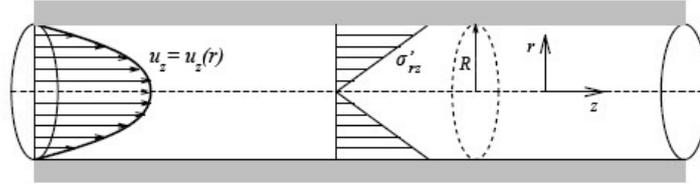


Figura 13: Perfiles de velocidades y de esfuerzos viscosos en flujo de Hagen-Poiseuille. Adaptado de Papanastasiou et al. (2000) [6].

El valor máximo de la velocidad se tiene en el eje de simetría ( $r = 0$ ), con un valor

$$u_0 = -\frac{1}{4\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) R^2. \quad (115)$$

La componente no nula del tensor de esfuerzos viscosos es, según (112),

$$\sigma'_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) r. \quad (116)$$

Es interesante calcular el caudal por unidad de longitud del canal en el eje Z:

$$Q_u = \int_0^R u_z 2\pi r dr = -\frac{\pi}{8\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) R^4. \quad (117)$$

A partir del caudal, se puede calcular una velocidad media en el canal normalizando en la sección del tubo:

$$U = \frac{Q_u}{\pi R^2} = -\frac{1}{8\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) R^2 = \frac{u_0}{2}. \quad (118)$$

Otro caso interesante es el **flujo en un anillo** cilíndrico infinito de radios  $R$  y  $kR$  ( $k < 1$ ) debido a gradientes de presión en la dirección del eje de simetría, como se muestra en la *Figura 14*. Aplicando las condiciones de contorno de no deslizamiento (89)  $u_z(r = R) = u_z(r = kR) = 0$  sobre la ecuación general de la velocidad en un flujo axisimétrico (111), se tiene que

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{R^2}{4\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) \frac{1-k^2}{\ln(1/k)}; \quad c_2 = -\frac{R^2}{4\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) - c_1 \ln R \Rightarrow \\
\Rightarrow u_z(r) &= -\frac{R^2}{4\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \frac{1-k^2}{\ln(1/k)} \ln \frac{r}{R} \right].
\end{aligned} \tag{119}$$

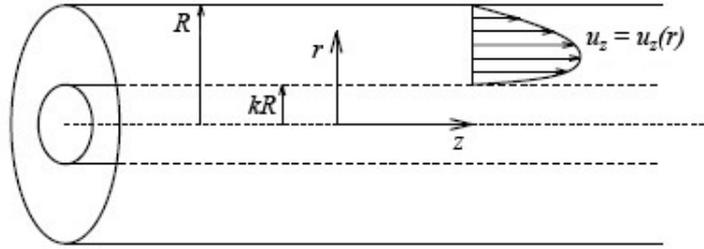


Figura 14: Perfil de velocidades en flujo en un anillo cilíndrico. Adaptado de Papanastasiou et al. (2000) [6].

La componente no nula del tensor de esfuerzos viscosos es, según (112),

$$\sigma'_{rz} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) \left[ 2r - \frac{1-k^2}{\ln(1/k)} \frac{R^2}{r} \right]. \tag{120}$$

El punto donde el valor de la velocidad es máximo se tiene igualando a cero la expresión anterior, pues  $\sigma'_{rz} = \eta(du_z/dr)$ , y tiene el valor

$$\tilde{r} = R \left[ \frac{1-k^2}{2\ln(1/k)} \right]^{1/2}. \tag{121}$$

Sustituyendo en la solución para la velocidad del anillo (119), el valor máximo de la velocidad es

$$u_0 = -\frac{1}{4\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) R^2 \left[ 1 - \frac{1-k^2}{2\ln(1/k)} \left( 1 - \ln \frac{1-k^2}{2\ln(1/k)} \right) \right]. \tag{122}$$

El caudal por unidad del longitud del canal en la dirección Z es

$$Q_u = \int_{kR}^R u_z 2\pi r dr = -\frac{\pi R^4}{8\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) \left[ 1 - k^4 - \frac{(1-k^2)^2}{\ln(1/k)} \right]. \tag{123}$$

A partir de esta expresión, es posible dar un valor medio de la velocidad en el anillo:

$$U = \frac{Q}{\pi R^2(1-k^2)} = -\frac{R^2}{8\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) \left[ 1 + k^2 - \frac{1-k^2}{\ln(1/k)} \right]. \tag{124}$$

#### 4.2.2. Flujo axisimétrico torsional o flujo de remolino

Estos flujos presentan  $u_r = u_z = 0$  y, junto con la condición de axisimetría (106), se satisface automáticamente la de incompresibilidad (107). Supongamos que la gravedad es paralela al eje de simetría, es decir,  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ . Entonces, la ecuación de Navier-Stokes (58) para las componentes  $r$  y  $z$  se simplifican a

$$\rho \frac{u_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0. \quad (125)$$

Asumiendo que  $\partial p / \partial \theta = 0$  e integrando la ecuación para la componente  $z$ , se llega a que la presión es de la forma  $p = -\rho g z + c(r, t)$ . Por lo tanto,  $\partial p / \partial r$  es independiente de la coordenada  $z$ , por lo que la ecuación para la coordenada  $r$  se deduce que  $u_\theta = u_\theta(r, t)$ . Bajo estas suposiciones, la ecuación de Navier-Stokes (58) para la componente  $\theta$  se reduce a

$$\rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \eta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right). \quad (126)$$

Para el caso estacionario ( $\partial u_\theta / \partial t = 0$ ) se obtiene una ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r u_\theta) \right) = 0. \quad (127)$$

Esta ecuación proporciona una solución general para la velocidad en este tipo de flujos de la forma

$$u_\theta(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r} \quad (128)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son dos constantes de integración que se determinan mediante las condiciones de contorno. Teniendo en cuenta esta expresión, las únicas componentes no nulas del tensor de esfuerzos viscosos son

$$\sigma'_{r\theta} = \sigma'_{\theta r} = \eta r \frac{d}{dr} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) = -2\eta \frac{c_2}{r^2}. \quad (129)$$

La distribución de presión se obtiene integrando las ecuaciones de las coordenadas  $r$  y  $z$  (125) teniendo en cuenta la solución general para  $u_\theta$  (128), obteniéndose que

$$p = \rho \left( \frac{c_1^2 r^2}{2} + 2c_1 c_2 \ln r - \frac{c_2^2}{2r^2} \right) - \rho g z + c \quad (130)$$

donde  $c$  es una constante de integración que se determina evaluando en un punto de referencia para cada problema específico.

Estudiaremos el caso concreto del flujo de un fluido entre dos cilindros infinitos coaxiales de radios  $R_1$  y  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) que rotan en torno a su eje de simetría a velocidades angulares  $\Theta_1$  y

$\Theta_2$  en ausencia de gravedad, también conocido como **flujo circular de Couette** (Figura 15). Aplicando las condiciones de contorno de no deslizamiento (89)  $u_\theta(r = R_i) = \Theta_i R_i$ ;  $i = 1, 2$  en la ecuación general de la velocidad en flujo axisimétrico torsional (128), se obtiene que

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{R_2^2 \Theta_2 - R_1^2 \Theta_1}{R_2^2 - R_1^2} ; c_2 = -\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} (\Theta_2 - \Theta_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow u_\theta(r) &= \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \left[ r(R_2^2 \Theta_2 - R_1^2 \Theta_1) - \frac{1}{r} R_1^2 R_2^2 (\Theta_2 - \Theta_1) \right]. \end{aligned} \quad (131)$$

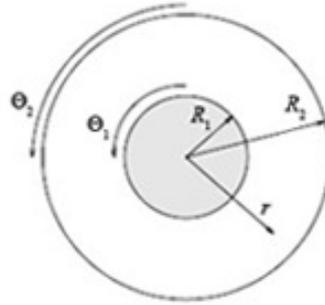


Figura 15: Flujo circular de Couette. Adaptado de Papanastasiou et al. (2000) [6].

Así mismo, la componente no nula del tensor de esfuerzos viscosos toma un valor, según (129),

$$\sigma'_{r\theta} = \frac{2\eta}{r^2} \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} (\Theta_2 - \Theta_1). \quad (132)$$

Observamos que, tanto para el caso en el que los cilindros giran a la misma velocidad angular ( $\Theta_1 = \Theta_2$ ) como en el que no hay cilindro interior ( $R_1 = 0$ ), se tiene la solución propia de una rotación de cuerpo rígido:  $u_\theta(r) = \Theta_2 r$ ;  $\sigma'_{r\theta} = 0$ ;  $p = \frac{1}{2} \rho \Theta_2^2 r^2 + c$ .

### 4.2.3. Flujo axisimétrico radial

Estos flujos presentan  $u_z = u_\theta = 0$ . Por simplicidad, asumiremos que la velocidad es independiente de la coordenada  $Z$  ( $u_r = u_r(r)$ ), como se muestra en la Figura 16) y que la gravedad es paralela a la dirección del eje de simetría  $Z$  ( $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ ). Con estas consideraciones, se tiene que la condición de incompresibilidad (107) determina la velocidad independientemente de la viscosidad del fluido, pues no es necesario recurrir a la ecuación de Navier-Stokes (58) directamente:

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) = 0 \Rightarrow u_r(r) = \frac{c_1}{r} \quad (133)$$

donde  $c_1$  es una constante de integración que se determina mediante las condiciones de contorno del flujo. Debido a que es solución de la ecuación de continuidad (condición de incompresibilidad),  $u_r$  también puede obtenerse a través de un balance macroscópico de masa:  $u_r = Q/2\pi Lr$ , donde  $Q$  es el caudal volumétrico por unidad de longitud del canal.

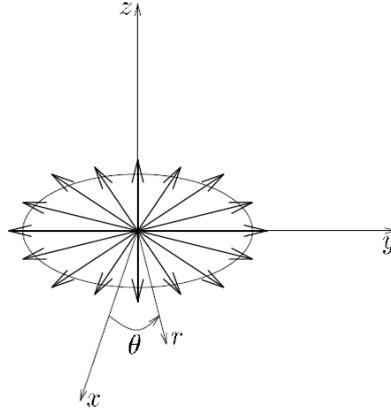


Figura 16: Velocidad y líneas de corriente en flujo axisimétrico radial. Recuperado de Papanastasiou et al. (2000) [6].

Aplicando la ecuación de Navier-Stokes (58) para las distintas componentes de la velocidad en régimen estacionario teniendo en cuenta (133), se obtiene que

$$-\rho u_r \frac{du_r}{dr} = \rho \frac{c_1^2}{r^3} = \frac{\partial p}{\partial r} ; \quad \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0 ; \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0. \quad (134)$$

La última relación nos permite afirmar que  $p = p(r, z)$ , e integrando en las otras dos igualdades se tiene que

$$p(r, z) = -\rho \frac{c_1^2}{2r^2} - \rho g z + c \quad (135)$$

donde  $c$  es una constante de integración que se determina evaluando en un punto de referencia para cada problema específico. Ahora encontramos dos componentes no nulas en el tensor de esfuerzos viscosos

$$\sigma'_{rr} = -2\eta \frac{c_1}{r^2} = -\sigma'_{\theta\theta}. \quad (136)$$

### 4.3. Flujo esférico radial simétrico

En estos flujos, es natural usar las coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$  (consultar *Anexo I*). Las partículas fluidas se mueven hacia fuera desde el centro de la esfera, es decir,  $u_\theta = u_\varphi = 0$ . Además, en régimen estacionario se tiene que la velocidad depende de la distancia radial:  $u_r = u_r(r)$ . Al igual que en el caso axisimétrico radial, la solución general para la velocidad se obtiene a partir de la ecuación de continuidad

$$\frac{d}{dr}(r^2 u_r) = 0 \Rightarrow u_r(r) = \frac{c_1}{r^2} \quad (137)$$

donde  $c_1$  es una constante de integración que se determina mediante las condiciones de contorno del flujo. Debido a que es solución de la ecuación de continuidad (condición de incompresibilidad),  $u_r$  también puede obtenerse a través de un balance macroscópico de masa:  $u_r = Q/4\pi r^2$ , donde  $Q$  es el caudal volumétrico.

Aplicando la ecuación de Navier-Stokes (58) para las distintas componentes de la velocidad en régimen estacionario teniendo en cuenta (137) e integrando, se obtiene para la presión, obviando el término gravitatorio,

$$p(r) = -\rho \frac{c_1^2}{2r^4} + c \quad (138)$$

donde  $c$  es una constante de integración que se determina evaluando en un punto de referencia para cada problema específico. Ahora encontramos tres componentes no nulas en el tensor de esfuerzos viscosos:

$$\sigma'_{rr} = 2\eta \frac{du_r}{dr} = -4\eta \frac{c_1}{r^3} \quad ; \quad \sigma'_{\theta\theta} = \sigma'_{\varphi\varphi} = 2\eta \frac{u_r}{r} = 2\eta \frac{c_1}{r^3} = -\frac{\sigma'_{rr}}{2}. \quad (139)$$

Un caso particular es el de una **burbuja creciente** en un fluido newtoniano incompresible. Sea  $R(t) = R_0 + kt$  el radio de la burbuja (el ratio de expansión es  $k = dR/dt$ ). Alpicando las condiciones de contono de no deslizamiento (89)  $u_r(r = R) = k$  en la solución general para la velocidad en este flujo (137), se obtiene que

$$c_1 = kR^2 \Rightarrow u_r(r) = k \frac{R^2}{r^2} \quad ; \quad p(r) = -\rho k^2 \frac{R^4}{2r^4} + c. \quad (140)$$

Observamos que, en puntos cercanos a la superficie, la presión puede tomar valores pequeños e incluso negativos, favoreciendo la expansión de la burbuja.

#### 4.4. Régimen transitorio entre planos paralelos

Las ecuaciones resultantes al considerar la dependencia temporal del campo de velocidades son ecuaciones en derivadas parciales parabólicas, a las que acompañan sus respectivas condiciones de contorno e inicial. En los problemas homogéneos que admiten separación de variables, la variable dependiente se puede expresar como  $u(x_i, t) = X(x_i)T(t)$ , y al sustituirla en la ecuación original se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias para  $X$  y  $T$ .

Consideramos el caso descrito en la sección 4.1 previamente a imponer el régimen estacionario. La ecuación que gobierna el movimiento es (90), deducida a partir de la ecuación de Navier-Stokes (58) para fluidos incompresibles sin términos no lineales. Sean dos planos paralelos infinitos normales a la dirección  $Y$  en un sistema de ejes cartesianos separados una distancia  $a$ . Inicialmente el fluido se encuentra en reposo, sin movimiento de los planos ni gradientes de presión aplicados en la dirección de movimiento del flujo.

##### 4.4.1. Flujo plano de Couette

Estudiemos en primer lugar el flujo plano de Couette, en el cual el plano inferior ( $y = 0$ ) se pone en movimiento a velocidad constante  $u_0$  en el instante  $t = 0^+$ , como se muestra en la *Figura 17*. La ecuación (90) se reduce a

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (141)$$

donde  $\nu = \eta/\rho$  es el **coeficiente de viscosidad dinámico**. Las condiciones de contorno e inicial son

$$\left. \begin{array}{l} u_x = u_0 \quad \text{si } y = 0, \quad t > 0 \\ u_x = 0 \quad \text{si } y = a, \quad t > 0 \\ u_x = 0 \quad \text{si } 0 \leq y \leq a, \quad t = 0 \end{array} \right\} \quad (142)$$

Observamos que, aunque la ecuación (141) es homogénea, las condiciones de contorno (142) son inhomogéneas, por lo que no es posible aplicar el método de separación de variables directamente. Este problema se puede solventar descomponiendo la velocidad  $u_x(y, t)$  en un término estacionario dado por (96) (teniendo en cuenta que ahora el plano móvil es el inferior) y un término transitorio  $u'_x(y, t)$ :

$$u_x(y, t) = u_0 \left(1 - \frac{y}{a}\right) - u'_x(y, t). \quad (143)$$

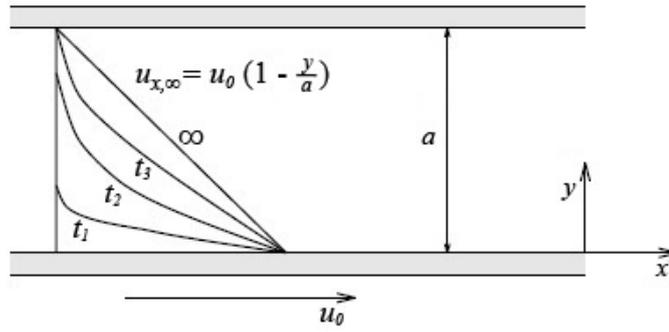


Figura 17: Perfil de velocidades en función del tiempo en flujo plano de Couette transitorio. Adaptado de Papanastasiou et al. (2000) [6].

Sustituyendo en la ecuación (141) y en las condiciones de contorno e iniciales (142), se obtiene que

$$\frac{\partial u'_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u'_x}{\partial y^2}; \quad (144)$$

$$\left. \begin{array}{l} u'_x = 0 \quad \text{si } y = 0, \quad t > 0 \\ u'_x = 0 \quad \text{si } y = a, \quad t > 0 \\ u'_x = u_0 \left(1 - \frac{y}{a}\right) \quad \text{si } 0 \leq y \leq a, \quad t = 0 \end{array} \right\} \quad (145)$$

Ahora las condiciones de contorno (145) son homogéneas, al igual que la ecuación (144), que permanece invariante. Considerando una solución factorizada del tipo  $u'_x(y, t) = Y(y)T(t)$  y sustituyendo en la ecuación (144) para aplicar el método de separación de variables, se llega a

$$\frac{1}{\nu T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\frac{\alpha^2}{a^2} \quad (146)$$

donde  $\alpha$  es una constante adimensional escogida por conveniencia. Se obtienen así dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{\nu \alpha^2}{a^2} T = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{\alpha^2}{a^2} Y = 0. \quad (147)$$

La solución para  $T(t)$  es

$$T(t) = c_0 \exp\left(-\frac{\nu \alpha^2}{a^2} t\right) \quad (148)$$

donde  $c_0$  es una constante de integración que se determinará con la condición inicial de (145). Por otra parte, la solución general para  $Y(y)$  es de la forma

$$Y(y) = c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha y}{a}\right) + c_2 \operatorname{cos}\left(\frac{\alpha y}{a}\right) \quad (149)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes determinadas por las condiciones de contorno de (145). Teniendo en cuenta que  $T(t) \neq 0$  (caso estacionario), estas condiciones de contorno se reducen a  $Y(y = 0) = Y(y = a) = 0$ , lo cual implica que

$$c_2 = 0 \Rightarrow Y(y) = c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha y}{a}\right) \quad ; \quad \operatorname{sen}(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha_k = k\pi, k \in \mathbb{N}. \quad (150)$$

Cada una de las raíces  $\alpha_k$  corresponde a un par de soluciones  $Y_k$  y  $T_k$ . La solución general será una combinación lineal de las soluciones para cada  $k$ , es decir,

$$u'_x(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_k y}{a}\right) \exp\left(-\frac{\nu \alpha_k^2}{a^2} t\right) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{a}\right) \exp\left(-\frac{k^2 \pi^2}{a^2} \nu t\right) \quad (151)$$

donde  $B_k = c_{0k} c_{1k}$  se determina con la condición inicial ( $t = 0$ ) de (145) como sigue:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{a}\right) = u_0 \left(1 - \frac{y}{a}\right). \quad (152)$$

Observamos que, debido a que el conjunto de soluciones  $\{Y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  forma una base completa del espacio al que pertenecen, se tiene la relación de ortogonalidad

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(k\pi x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx = \frac{1}{2} \delta_{kn}. \quad (153)$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación (152) por  $\operatorname{sen}(n\pi y/a)$  e integrando entre  $y = 0$  e  $y = a$ , se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy = u_0 \int_0^a \left(1 - \frac{y}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy. \quad (154)$$

Aplicando el cambio de variable  $\xi = y/a$  y la condición de ortogonalidad (153), la relación anterior se convierte en

$$\frac{B_k}{2} = u_0 \int_0^1 (1 - \xi) \operatorname{sen}(k\pi \xi) d\xi = \frac{u_0}{k\pi} \Rightarrow B_k = \frac{2u_0}{k\pi}. \quad (155)$$

Sustituyendo en la solución general (151), se obtiene finalmente que

$$u'_x(y, t) = \frac{2u_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{a}\right) \exp\left(-\frac{k^2 \pi^2}{a^2} \nu t\right). \quad (156)$$

Por último, el campo de velocidades original solución del problema es, según (143),

$$u_x(y, t) = u_0 \left\{ 1 - \frac{y}{a} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{a}\right) \exp\left(-\frac{k^2 \pi^2}{a^2} \nu t\right) \right\}. \quad (157)$$

#### 4.4.2. Flujo plano de Poiseuille

Por otra parte, analizaremos el flujo plano de Poiseuille, en el cual se aplica un gradiente de presión constante  $\partial p/\partial x$  en el instante  $t = 0^+$  induciendo movimiento en el fluido (*Figura 18*). Por la simetría del problema, situamos el eje  $X$  solidario al eje de simetría entre los planos (situados en  $y = \pm a/2$ ) y estudiaremos el perfil de velocidades para  $y > 0$ . La ecuación (90) se traduce en

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = - \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right) + \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}. \quad (158)$$

Las condiciones de contorno e inicial son

$$\left. \begin{array}{l} u_x = 0 \quad \text{si } y = a/2, \quad t > 0 \\ \partial u_x / \partial y = 0 \quad \text{si } y = 0, \quad t > 0 \\ u_x = 0 \quad \text{si } 0 \leq y \leq a/2, \quad t = 0 \end{array} \right\} \quad (159)$$

Al igual que en el ejemplo anterior, proponemos una descomposición en un término estacionario dado por (98) y otro transitorio  $u'_x(y, t)$ , es decir,

$$u_x(y, t) = u_0 \left( 1 - \frac{4y^2}{a^2} \right) - u'_x(y, t) \quad ; \quad u_0 = - \frac{a^2}{8\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right). \quad (160)$$

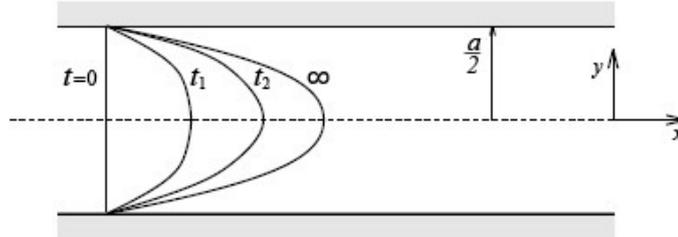


Figura 18: Perfil de velocidades en función del tiempo en flujo de Poiseuille en régimen transitorio. Adaptado de Papanastasiou et al. (2000) [6].

Sustituyendo en la ecuación (158) y en las condiciones de contorno e iniciales (159), se obtiene por una parte la ecuación (144) y por otra una nueva condición inicial:

$$\frac{\partial u'_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u'_x}{\partial y^2}; \quad (161)$$

$$\left. \begin{array}{l} u'_x = 0 \quad \text{si } y = a/2, \quad t > 0 \\ \partial u'_x / \partial y = 0 \quad \text{si } y = 0, \quad t > 0 \\ u'_x = u_0 \left( 1 - \frac{4y^2}{a^2} \right) \quad \text{si } 0 \leq y \leq a/2, \quad t = 0 \end{array} \right\} \quad (162)$$

Observamos que la ecuación para el término transitorio es idéntica a la obtenida para el flujo plano de Couette salvo las condiciones de contorno e inicial, por lo que considerando de nuevo una solución factorizada  $u'_x(y, t) = Y(y)T(t)$  y aplicando el método de separación de variables, se obtienen las mismas soluciones salvo el valor de las constantes de integración (148 y 149). Por comodidad, redefiniremos la constante  $\alpha$  de manera que

$$T(t) = c_0 \exp\left(-\frac{4\nu\alpha^2}{a^2}t\right) \quad ; \quad Y(y) = c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha y}{a}\right) + c_2 \operatorname{cos}\left(\frac{2\alpha y}{a}\right). \quad (163)$$

Teniendo en cuenta que  $T(t) \neq 0$  (caso estacionario), las condiciones de contorno de (162) se reducen a  $Y'(y=0) = Y'(y=a/2) = 0$ , lo cual implica que

$$c_1 = 0 \Rightarrow Y(y) = c_2 \operatorname{cos}\left(\frac{2\alpha y}{a}\right) \quad ; \quad \operatorname{cos}(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (164)$$

Cada una de las raíces  $\alpha_k$  corresponde a un par de soluciones  $Y_k$  y  $T_k$ . La solución general será una combinación lineal de las soluciones para cada  $k$ , es decir,

$$\begin{aligned} u'_x(y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{cos}\left(\frac{2\alpha_k y}{a}\right) \exp\left(-\frac{4\nu\alpha_k^2}{a^2}t\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{cos}\left(\frac{(2k-1)\pi y}{a}\right) \exp\left(-\frac{(2k-1)^2\pi^2}{a^2}\nu t\right) \end{aligned} \quad (165)$$

donde  $B_k = c_{0k}c_{2k}$  se determina con la condición inicial ( $t=0$ ) de (162) como sigue:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{cos}\left(\frac{(2k-1)\pi y}{a}\right) = u_0 \left(1 - \frac{4y^2}{a^2}\right). \quad (166)$$

Observamos que, debido a que el conjunto de soluciones  $\{Y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  forma una base completa del espacio al que pertenecen, se tiene la relación de ortogonalidad

$$\int_0^1 \operatorname{cos}(k\pi x) \operatorname{cos}(n\pi x) dx = \frac{1}{2} \delta_{kn}. \quad (167)$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación (166) por  $\operatorname{cos}((2n-1)\pi y/a)$  e integrando entre  $y=0$  e  $y=a/2$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_0^{a/2} \operatorname{cos}\left(\frac{(2k-1)\pi y}{a}\right) \operatorname{cos}\left(\frac{(2n-1)\pi y}{a}\right) dy = \\ = u_0 \int_0^{a/2} \left(1 - \frac{4y^2}{a^2}\right) \operatorname{cos}\left(\frac{(2n-1)\pi y}{a}\right) dy. \end{aligned} \quad (168)$$

Aplicando el cambio de variable  $\xi = 2y/a$  y la condición de ortogonalidad (167), la relación anterior se convierte en

$$\frac{B_k}{2} = u_0 \int_0^1 (1 - \xi^2) \operatorname{cos}\left(\frac{(2k-1)\pi \xi}{2}\right) d\xi = \frac{16(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3\pi^3} u_0 \Rightarrow B_k = \frac{32(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3\pi^3} u_0. \quad (169)$$

Sustituyendo en la solución general (165), se obtiene finalmente que

$$u'_x(y, t) = \frac{32u_0}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi y}{a}\right) \exp\left(-\frac{(2k-1)^2\pi^2}{a^2}vt\right). \quad (170)$$

Por último, el campo de velocidades original solución del problema es, según (160),

$$u_x(y, t) = u_0 \left\{ 1 - \frac{4y^2}{a^2} - \frac{32}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi y}{a}\right) \exp\left(-\frac{(2k-1)^2\pi^2}{a^2}vt\right) \right\}. \quad (171)$$

## Anexo I: representación del tensor de esfuerzos, la ecuación de continuidad y la ecuación de Navier-Stokes para fluidos newtonianos incompresibles en distintos sistemas de coordenadas

Coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$

Tensor de esfuerzos

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -p + 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x} & \sigma_{yy} &= -p + 2\eta \frac{\partial u_y}{\partial y} & \sigma_{zz} &= -p + 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \sigma_{xy} &= \eta \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \sigma_{yz} &= \eta \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \sigma_{zx} &= \eta \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Ecuaciones de Navier-Stokes

$$\rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right)$$

**Coodenadas cilíndricas** ( $r, \theta, z$ )**Tensor de esfuerzos**

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r} & \sigma_{\theta z} &= \eta \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) & \sigma_{zr} &= \eta \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z} & \sigma_{r\theta} &= \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)\end{aligned}$$

**Ecuación de continuidad**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

**Ecuaciones de Navier-Stokes**

$$\begin{aligned}\rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) &= \\ &= \rho f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) &= \\ &= \rho f_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right)\end{aligned}$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

**Coodenadas esféricas** ( $r, \theta, \varphi$ )**Tensor de esfuerzos**

$$\sigma_{rr} = -p + 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad \sigma_{\theta\varphi} = \eta \left( \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi \cot\theta}{r} \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \qquad \sigma_{\varphi r} = \eta \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -p + 2\eta \left( \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta \cot\theta}{r} \right) \qquad \sigma_{r\theta} = \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

**Ecuación de continuidad**

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial(\operatorname{sen}\theta u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta \cot\theta}{r} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

**Ecuaciones de Navier-Stokes**

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\theta^2 + u_\varphi^2}{r} \right) = \\ = \rho f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left( \nabla^2 u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2u_\theta \cot\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\varphi^2 \cot\theta}{r} \right) = \\ = \rho f_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left( \nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} - \frac{2 \cos\theta}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{u_\theta u_\varphi \cot\theta}{r} \right) = \\ = \rho f_\varphi - \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \eta \left( \nabla^2 u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} + \frac{2}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos\theta}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right) \end{aligned}$$

donde

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

## Anexo II: unicidad y mínimo de disipación de energía por efectos viscosos para la ecuación de Stokes con unas condiciones de contorno dadas

Dadas unas condiciones de contorno, la ecuación de Stokes (64) presenta unicidad de solución y los flujos que obedecen dicha ecuación corresponden a un mínimo de la tasa de disipación de energía debido a efectos viscosos respecto a otros flujos que no cumplen la ecuación con las mismas condiciones de contorno.

### Unicidad

Supongamos que existen dos campos de velocidades  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  y  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r})$  solución de la ecuación de Stokes (64) con las mismas condiciones de contorno. Con el fin de demostrar que  $u_i = \tilde{u}_i$ , basta probar que sus derivadas coinciden en todos los puntos ( $\partial u_i / \partial x_j = \partial \tilde{u}_i / \partial x_j \forall i, j$ ) e integrar respecto a  $x_j$ . Para ello, veamos que

$$\iiint_V \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right)^2 dV = 0$$

donde la integral se toma sobre todo el volumen del fluido. Desarrollando, se obtiene que

$$\begin{aligned} \iiint_V \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right)^2 dV &= \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (u_i - \tilde{u}_i) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) \right] dV \\ &\quad - \iiint_V (u_i - \tilde{u}_i) (\nabla^2 u_i - \nabla^2 \tilde{u}_i) dV. \end{aligned}$$

El primer término de la derecha puede transformarse mediante el teorema de la divergencia de Gauss (12) en una integral de superficie que se anula debido a las condiciones de contorno de no deslizamiento ( $u_i = \tilde{u}_i$  en las paredes). Como ambos campos de velocidades son solución de la ecuación de Stokes (64), el segundo término se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} \iiint_V (u_i - \tilde{u}_i) \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} \right) dV &= \frac{1}{\eta} \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_i} [(u_i - \tilde{u}_i)(p - \tilde{p})] dV \\ &\quad - \frac{1}{\eta} \iiint_V (p - \tilde{p}) \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i - \tilde{u}_i) dV. \end{aligned}$$

De nuevo, el primer término de la derecha puede transformarse mediante el teorema de la divergencia de Gauss (12) en una integral de superficie que se anula debido a las condiciones de contorno de no deslizamiento. Por otra parte, el segundo término también se anula pues en un fluido incompresible  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0$ . Queda así demostrada la igualdad buscada.

## Mínimo en disipación de energía por efectos viscosos

Para unas condiciones de contorno dadas en las paredes y en el infinito, un flujo cuyo campo de velocidades  $\mathbf{u}$  cumple la ecuación de Stokes (64) corresponde a un mínimo de la tasa de disipación de energía  $\lambda$  debido a efectos viscosos. Utilizando la expresión (78) para un fluido incompresible ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ), se tiene que

$$\lambda = \iiint_V \sigma'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV = 2\eta \iiint_V e_{ij}^2 dV$$

donde la integral se toma sobre todo el volumen del fluido. Supongamos que existe otro tensor  $\tilde{e}_{ij}$  correspondiente a un flujo que obedece las mismas condiciones de contorno y la condición de incompresibilidad  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0$  pero no es solución de la ecuación de Stokes (64). Su tasa de disipación de energía  $\tilde{\lambda}$  puede expresarse como

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= 2\eta \iiint_V \tilde{e}_{ij}^2 dV = 2\eta \iiint_V e_{ij}^2 dV + 2\eta \iiint_V (\tilde{e}_{ij} - e_{ij})^2 dV + 4\eta \iiint_V (\tilde{e}_{ij} - e_{ij})e_{ij} dV \\ &= \lambda + 2\eta \iiint_V (\tilde{e}_{ij} - e_{ij})^2 dV + 4\eta \iiint_V (\tilde{e}_{ij} - e_{ij})e_{ij} dV. \end{aligned}$$

Dado que el segundo término de la derecha es definido positivo, basta demostrar que el último término se anula para probar que  $\lambda < \tilde{\lambda}$ . Para ello, reescribimos éste último como

$$2 \iiint_V (\tilde{e}_{ij} - e_{ij})e_{ij} dV = \iiint_V \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV + \iiint_V \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV = I_1 + I_2.$$

Para la primera integral  $I_1$  tenemos que

$$I_1 = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\tilde{u}_i - u_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] dV - \iiint_V (\tilde{u}_i - u_i) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} dV.$$

El primer término de la derecha puede transformarse mediante el teorema de la divergencia de Gauss (12) en una integral de superficie que se anula debido a las condiciones de contorno de no deslizamiento ( $u_i = \tilde{u}_i$  en las paredes). Aplicando la ecuación de Stokes (64) al segundo término, se llega a

$$\begin{aligned} \iiint_V (\tilde{u}_i - u_i) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} dV &= \frac{1}{\eta} \iiint_V (\tilde{u}_i - u_i) \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = \\ &= \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_i} (p(\tilde{u}_i - u_i)) dV - \iiint_V p \frac{\partial (\tilde{u}_i - u_i)}{\partial x_i} dV. \end{aligned}$$

De nuevo, el primer término de la derecha puede transformarse mediante el teorema de la divergencia de Gauss (12) en una integral de superficie que se anula debido a las condiciones de contorno de no deslizamiento. Por otra parte, el segundo término también se anula pues en

un fluido incompresible  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0$ . Queda así demostrado que  $I_1 = 0$ . Evaluemos ahora la integral  $I_2$ :

$$I_2 = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\tilde{u}_i - u_i) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] dV - \iiint_V (\tilde{u}_i - u_i) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} dV.$$

Una vez más, el primer término de la derecha puede transformarse mediante el teorema de la divergencia de Gauss (12) en una integral de superficie que se anula debido a las condiciones de contorno de no deslizamiento. Por otra parte, el segundo término también se anula pues en un fluido incompresible  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0$ . Queda así demostrado que  $I_2 = 0$  y, por lo tanto, la integral  $\iiint_V (\tilde{e}_{ij} - e_{ij}) e_{ij} dV$  es cero.

Recordemos que esta propiedad aplica sólo a bajo número de Reynolds. A alto número de Reynolds, las soluciones turbulentas disipan una cantidad mucho mayor de energía con la mismas condiciones de contorno.

## Referencias

- [1] Guyon, E., Hulin, J.P., Petit, L. y Mitescu C.D. (2001). *Physical hydrodynamics*. Nueva York (EEUU): Oxford University Press.
- [2] G.K. Batchelor, F.R.S.(2002). *An introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge (RU): Cambridge University Press.
- [3] Ramírez, E.A. (1980). *Producción de Entropía en Fluidos Viscosos* (Tesis de maestría). México: Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ciencias Químicas. Recuperado de: <http://eprints.uanl.mx/22/1/1080074530.PDF>
- [4] Sámano, E.A. y Sen, M. (2009). *Mecánica de Fluidos*. Recuperado de: <https://www3.nd.edu/~msen/MecFl.pdf>
- [5] Mirzaahmadian, Y. (2011). *Application of Petrophysical Logs and Failure Model for Prediction of Sand Production* (Tesis de maestría). [Figura]. Stavanger (Noruega): Universidad de Stavanger, Facultad de Ciencias y Tecnologías. Recuperado de: <https://core.ac.uk/download/pdf/52078297.pdf>
- [6] Papanastasiou, T.C., Georgiou, G.C. y Alexandrou, A.N. (2000). *Viscous Fluid Flow*. Florida (EEUU): CRC Press. Recuperado de: <http://euclid.mas.ucy.ac.cy/~georgios/courses/PMT17/Chapter6.pdf>