TRABAJO DE FIN DE GRADO

Una visión actual sobre los puntos singulares de una ecuación diferencial lineal en una variable compleja

Abraham del Valle Rodríguez

Doble Grado en Física y Matemáticas

Dirigido por: D. Luis Narváez Macarro

19 de junio de 2020

Abstract

The main purpose of this work is to introduce the use of algebraic techniques, such as Homological Algebra and Sheaf Theory, developped since the middle of the 20th century, in order to study linear differential equations in one complex variable. With these new tools, we will review the classical results of the theory of linear differential equations in terms of this recent theory. We will depart from the classical Cauchy Theorem about the solutions of a linear differential equation, and going through the study of multivalued functions, we will reach the Fuchs Theory about singular points and the Komatsu-Malgrange Index Theorem, which establishes an algebraic method to measure the non-regularity of a singular point.

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es introducirse en el uso de técnicas algebraicas y topológicas modernas, como el Álgebra Homológica y la Teoría de Haces, para el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales en una variable compleja. Con estas nuevas herramientas, realizaremos una revisión de los resultados clásicos de la teoría de ecuaciones diferenciales lineales, reformulándolos en términos de esta reciente teoría. Así, partiendo del clásico Teorema de Cauchy sobre las soluciones de una ecuación diferencial lineal y pasando por el estudio de las soluciones multiformes, llegaremos hasta la Teoría de Fuchs sobre los puntos singulares y el Teorema del Índice de Komatsu-Malgrange, que nos ofrecerá un método algebraico para medir la no regularidad de un punto singular.

Índice general

Introducción

El origen de las ecuaciones diferenciales ordinarias se remonta al siglo XVII, con el nacimiento del cálculo de Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz. Desde entonces, han constituido una rama fundamental de las matemáticas con infinidad de aplicaciones en el mundo real. A día de hoy, este sigue siendo un campo de investigación muy activo en Matemáticas, dada su gran utilidad en otras disciplinas científicas como la Física, la Química o la Biología.

Por su parte, el Álgebra Homológica, surgida a principios del siglo XX como una rama de la Topología, se ve impulsada a mediados de siglo con el nacimiento de la Teoría de Categorías. Si bien en un principio sus aportaciones principales se encontraban en el campo de la Topología Algebraica y de la propia Álgebra, pronto se encontró la conexión con otras ramas como la Geometría Algebraica, la Teoría de Números o, el caso que nos ocupa, las Ecuaciones Diferenciales. En este campo en particular, el Álgebra Homológica ofrece una visión totalmente novedosa de los resultados clásicos de la teoría de ecuaciones diferenciales, extrayendo lo que subyace a ellos y permitiendo generalizarlos de una forma simple a contextos más amplios.

El presente texto pretende servir de introducción al estudio algebraico de las ecuaciones diferenciales lineales en una variable compleja, si bien muchos de los resultados que se obtendrán serán generalizables tanto a dimensiones superiores como a otros contextos geométricos. Para nuestro propósito, haremos uso de la Teoría de Haces, una importante rama del Álgebra Homológica y la Topología que establece una conexión entre el comportamiento local y el global de objetos que "viven" en un cierto espacio.

En el primer capítulo expondremos las bases del Álgebra Homológica y la Teoría de Haces. En particular, definiremos las categorías y los funtores, nos familiarizaremos con algunas construcciones categóricas de gran utilidad como los límites directo e inverso e introduciremos la noción de haz, que será fundamental para el desarrollo de la teoría.

En el segundo capítulo iniciaremos el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales a través de una reformulación del Teorema de Cauchy clásico sobre la existencia de soluciones en términos de haces. Para ello, estudiaremos previamente con detenimiento los haces de funciones holomorfas y los operadores diferenciales lineales definidos como morfismos de haces. También introduciremos la distinción entre puntos regulares y singulares de una ecuación diferencial lineal y discutiremos su importancia.

El tercer capítulo parte del concepto topológico de espacio recubridor para posteriormente estudiar las funciones multiformes y sus determinaciones, obteniendo un importante resultado acerca de las funciones de determinación finita. Se introduce entonces el concepto de solución multiforme de una ecuación diferencial lineal, se demuestra que todos las soluciones multiformes son de determinación finita y se obtiene una expresión general para ellas. Esto marca el punto de partida para el estudio del comportamiento de las soluciones en el entorno de puntos singulares.

El cuarto y último capítulo está destinado al estudio de los puntos singulares. En él se plantea la distinción entre puntos singulares regulares y no regulares, en los que las soluciones de la ecuación se comportan de manera distinta. Reformulamos la Teoría de Fuchs clásica sobre los puntos singulares en términos de operadores diferenciales lineales y probamos el Teorema del Índice de Komatsu-Malgrange, que nos ofrece una caracterización de los puntos singulares regulares en términos de dimensiones de unos ciertos espacios vectoriales, obteniendo así un método algebraico para medir la no regularidad de un punto singular.

Para el desarrollo de este texto, hemos seguido principalmente la referencia [12], "$\mathcal{D}$-módulos en dimensión 1", del tutor de este trabajo L. Narváez Macarro. Sin embargo, se ha profundizado en algunos aspectos que en el libro son tratados con cierta rapidez, para lo que se han empleado textos complementarios como el libro [15] de J. Rotman, "An Introduction to Homological Algebra" para iniciarnos en el estudio del álgebra homológica, el libro [8] de B. Iversen, "Cohomology of Sheaves" para introducirnos en el lenguaje de los haces o los libros [7] de E. L. Ince, "Ordinary Differential Equations" y [3] de J. A. Dieudonné, "Foundations of Modern Analysis" como referencias principales para los resultados clásicos de ecuaciones diferenciales. Asimismo, para la demostración del Teorema del Índice se ha empleado el artículo [9] de B. Malgrange, "Sur les points singuliers des équations différentielles". En menor medida, se han empleado el resto de textos de la bibliografía para alguna consulta puntual sobre aspectos algebraicos, topológicos, de análisis complejo o funcional.

Para terminar, quiero agradecer a mi tutor Luis Narváez su gran implicación en el presente trabajo, pero sobre todo el interés que me ha despertado por esta rama del Álgebra que, hace tan solo unos meses, desconocía completamente.

Abraham del Valle Rodríguez

Capítulo 1

Álgebra Homológica y Teoría de Haces

En este primer capítulo se expondrán las herramientas que utilizaremos para estudiar desde un punto de vista algebraico y topológico las ecuaciones diferenciales. En particular, se definirán conceptos y se enunciarán resultados bien conocidos de Álgebra Homológica y de Teoría de Haces, la mayoría de ellos sin demostración, que nos serán de utilidad en los sucesivos capítulos.

1.1. Categorías y funtores

Del mismo modo que el Álgebra clásica tiene su base en la Teoría de conjuntos, el Álgebra Homológica se fundamenta en el concepto de categoría, el cual pretende englobar en un término más general y con mayor abstracción las diversas estructuras matemáticas (conjuntos, grupos, espacios topológicos, ...) y las relaciones entre ellas.

Definición 1.1. Una *categoría* $\mathcal{C}$ consta de una clase (no necesariamente un conjunto) $\mathrm{obj}(\mathcal{C})$ de *objetos*, un conjunto de *morfismos* $\mathrm{Hom}(A, B)$ para cada par ordenado (A, B) de objetos (si $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$, escribiremos $f : A \to B$), y una operación binaria de *composición de morfismos* $\circ : \mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}(A, C)$ (denotada por $(f, g) \mapsto g \circ f$) para cada terna $A, B, C \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$ que satisface las siguientes propiedades:

a) Los conjuntos Hom son disjuntos dos a dos, es decir, cada $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ tiene un único *dominio* A y un único *codominio* B.

b) Para cada $A \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$, existe un *morfismo identidad* $\mathrm{id}_A : A \to A$ tal que para todo $f : A \to B$ se tenga que $f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f$.

c) Asociatividad de la composición: sean $A, B, C, D \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$, $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Ejemplos:

Algunos ejemplos de categorías son los siguientes:

- Sets: los objetos son los conjuntos y los morfismos son las aplicaciones entre ellos.
- Groups: los objetos son los grupos y los morfismos son los homomorfismos de grupos. La categoría de los grupos abelianos Ab es una subcategoría de Groups.

- Vect_k: los objetos son los k-espacios vectoriales y los morfismos son los homomorfismos de espacios vectoriales.
- Alg_k: los objetos son las k-álgebras y los morfismos son los homomorfismos de álgebras.
- Top: los objetos son los espacios topológicos y los morfismos son las aplicaciones continuas entre ellos.
- Dado un espacio topológico X, el conjunto de sus abiertos $\mathcal{U}$ puede verse como una categoría cuyos objetos son los abiertos de X y cuyos morfismos son las inclusiones $i : U \to V$ si $U \subset V$ y $Hom(U, V) = \varnothing$ si $U \not\subset V$.

En todos los casos, la composición es la composición usual de aplicaciones.

El siguiente paso natural es establecer relaciones entre las diversas categorías. A estas aplicaciones las denominaremos *funtores*, y pueden ser *covariantes* o *contravariantes*, según inviertan o no el sentido de los morfismos:

Definición 1.2. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos categorías, un *funtor covariante* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ consiste en:

i) una aplicación $T : \mathrm{obj}(\mathcal{C}) \to \mathrm{obj}(\mathcal{C}')$, y

ii) para cada $A, B \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$, una aplicación $T : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(T(A), T(B))$,

que satisface las siguientes propiedades:

a) Si $A, B, C \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$, $f : A \to B$ y $g : B \to C$, entonces $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$.

b) $T(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{T(A)}$ para todo $A \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$.

Definición 1.3. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos categorías, un *funtor contravariante* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ consiste en:

i) una aplicación $T : \mathrm{obj}(\mathcal{C}) \to \mathrm{obj}(\mathcal{C}')$, y

ii) para cada $A, B \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$, una aplicación $T : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(T(B), T(A))$,

que satisface las siguientes propiedades:

a) Si $A, B, C \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$, $f : A \to B$ y $g : B \to C$, entonces $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$.

b) $T(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{T(A)}$ para todo $A \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$.

Ejemplos:

a) Sea $\mathcal{C}$ una categoría, el *funtor identidad* $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es aquel que lleva tanto objetos como morfismos en sí mismos: $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(A) = A$ para todo $A \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$ e $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(f) = f$ para todo morfismo f de $\mathcal{C}$.

b) Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $A \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$, el funtor covariante $T_A : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets}$, normalmente denotado por $\mathrm{Hom}(A, \square)$, viene dado por:

$$T_A(B) = \mathrm{Hom}(A, B) \text{ para todo } B \in \mathrm{obj}(\mathcal{C}),$$

y para cada $f : B \to C$:

$$T_A(f) : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C) \ \text{ con } \ T_A(f)(h) = f \circ h \text{ para todo } h \in \mathrm{Hom}(A, B).$$

c) Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $B \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$, el funtor contravariante $T^B : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets}$, normalmente denotado por $\mathrm{Hom}(\square, B)$, viene dado por:

$$T^B(A) = \mathrm{Hom}(A, B) \text{ para todo } A \in \mathrm{obj}(\mathcal{C}),$$

y para cada $f : A \to A'$:

$$T^B(f) : \mathrm{Hom}(A', B) \to \mathrm{Hom}(A, B) \;\text{ con }\; T_A(f)(h) = h \circ f \text{ para todo } h \in \mathrm{Hom}(A', B).$$

El concepto clásico de isomorfismo también puede extenderse a los morfismos de una categoría arbitraria:

Definición 1.4. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $f : A \to B$ un morfismo de $\mathcal{C}$, se dice que f es un *isomorfismo* si existe $g : B \to A$ morfismo de $\mathcal{C}$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ g = \mathrm{id}_B$. El morfismo g se denominará *inverso* de f.

Por último, introducimos la noción de *transformación natural* de funtores, que relaciona dos funtores definidos entre las mismas categorías:

Definición 1.5. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos categorías, y sean $S, T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ dos funtores covariantes, una *transformación natural* $\tau : S \to T$ es una familia de morfismos de $\mathcal{C}'$:

$$\tau = \{\tau_A : S(A) \to T(A) \mid A \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})\},$$

tal que, para cualquier $f : A \to A'$ de $\mathcal{C}$, el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S(A) & \xrightarrow{S(f)} & S(A') \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_A} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{A'}} \\ T(A) & \xrightarrow{T(f)} & T(A') \end{array}$$

es conmutativo. Se dice que τ es un *isomorfismo natural* si para cada $A \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$, τ_A es un isomorfismo.

Observación. Para funtores contravariantes, la definición es análoga, invirtiendo el sentido de los morfismos.

Las transformaciones naturales también se pueden componer:

Definición 1.6. Sean $R, S, T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ tres funtores del mismo tipo (covariantes o contravariantes), y sean $\tau : R \to S$ y $\sigma : S \to T$ dos transformaciones naturales, definimos la composición $\sigma \circ \tau : R \to T$ como la familia de morfismos de $\mathcal{C}'$ dada por $\sigma \circ \tau = \{\sigma_A \circ \tau_A \mid A \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})\}$.

Observación. Puede comprobarse fácilmente que la composición de transformaciones naturales es una transformación natural y que una transformación natural τ es un isomorfismo natural si y sólo si existe otra transformación natural σ tal que $\sigma \circ \tau$ y $\tau \circ \sigma$ son transformaciones naturales identidad (i.e. una familia de morfismos identidad).

1.2. Límites directo e inverso

Presentamos en esta sección dos construcciones categóricas de gran importancia: *los límites directo e inverso*. Para ello, es necesario en primer lugar introducir los conceptos de *sistema directo y sistema inverso*.

Definición 1.7. Sea I un conjunto parcialmente ordenado y $\mathcal{C}$ una categoría. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos de $\mathcal{C}$ y $\{\phi^i_j : M_i \to M_j\}_{i\leq j}$ una familia de morfismos de $\mathcal{C}$ tal que $\phi^i_i = \mathrm{id}_{M_i}$ para todo $i \in I$, decimos que el par $\Big(\{M_i\}_{i\in I}, \{\phi^i_j\}_{i\leq j}\Big)$ es un *sistema directo* en $\mathcal{C}$ si para cualesquiera $i \leq j \leq k$ el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "\phi^i_k"] \arrow[dr, "\phi^i_j"'] & & M_k \\ & M_j \arrow[ur, "\phi^j_k"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Observación. Un conjunto parcialmente ordenado puede verse como una categoría que tiene por objetos a sus elementos y un único morfismo η^i_j para $i \leq j$. De esta manera, un sistema directo es un funtor covariante $M : I \to \mathcal{C}$ tal que $M(i) = M_i$ para todo $i \in I$ y $M(\eta^i_j) = \phi^i_j$ para todo $i \leq j$.

Definición 1.8. Sea I un conjunto parcialmente ordenado, $\mathcal{C}$ una categoría y $\Big(\{M_i\}_{i\in I}, \{\phi^i_j\}_{i\leq j}\Big)$ un sistema directo en $\mathcal{C}$, se define el *límite directo* (también denominado *límite inductivo*) como un objeto $\varinjlim M_i$ junto con unos morfismos $\{\alpha_i : M_i \to \varinjlim M_i\}_{i\in I}$ tales que:

a) $\alpha_j \circ \phi^i_j = \alpha_i$ para cualesquiera $i \leq j$.

b) Para cada $X \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$ y cualesquiera morfismos $f_i : M_i \to X$ con $f_j \circ \phi^i_j = f_i$ siempre que $i \leq j$, existe un único morfismo $\theta : \varinjlim M_i \to X$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \varinjlim M_i \arrow[rr, "\theta"] & & X \\ & M_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[d, "\phi^i_j"] & \\ & M_j \arrow[uul, bend left, "\alpha_j"] \arrow[uur, bend right, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

Observación. Por la propiedad universal que satisface el límite directo, si este existe, es único salvo isomorfismo único.

Las definiciones de sistema y límite inverso son duales a las de sistema y límite directo, es decir, se obtienen de las anteriores sin más que invertir el sentido de los morfismos:

Definición 1.9. Sea I un conjunto parcialmente ordenado y $\mathcal{C}$ una categoría. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos de $\mathcal{C}$ y $\{\psi_i^j : M_j \to M_i\}_{j\geq i}$ una familia de morfismos de $\mathcal{C}$ tal que $\psi_i^i = \mathrm{id}_{M_i}$ para todo $i \in I$, decimos que el par $\Big(\{M_i\}_{i\in I}, \{\psi_i^j\}_{j\geq i}\Big)$ es un *sistema inverso* en $\mathcal{C}$ si para cualesquiera $k \geq j \geq i$ el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M_k \arrow[rr, "\psi_i^k"] \arrow[dr, "\psi_j^k"'] & & M_i \\
& M_j \arrow[ur, "\psi_i^j"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Observación. Un sistema inverso puede verse como un funtor contravariante $M : I \to \mathcal{C}$ tal que $M(i) = M_i$ para todo $i \in I$ y $M(\eta_j^i) = \psi_i^j$ para cualesquiera $i \leq j$.

Definición 1.10. Sea I un conjunto parcialmente ordenado, $\mathcal{C}$ una categoría y $\Big(\{M_i\}_{i\in I}, \{\psi_i^j\}_{i\leq j}\Big)$ un sistema inverso en $\mathcal{C}$, se define el *límite inverso* (también denominado *límite proyectivo*) como un objeto $\varprojlim M_i$ junto con unos morfismos $\alpha_i : \varprojlim M_i \to M_i$ ($i \in I$) tales que:

a) $\psi_i^j \circ \alpha_j = \alpha_i$ para cualesquiera $i \leq j$.

b) Para cada $X \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$ y cualesquiera morfismos $f_i : X \to M_i$ con $\psi_i^j \circ f_j = f_i$ siempre que $i \leq j$, existe un único morfismo $\theta : X \to \varprojlim M_i$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim M_i \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha_j"'] & & X \arrow[ll, "\theta"'] \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddl, bend left, "f_j"] \\
& M_i & \\
& M_j \arrow[u, "\psi_i^j"'] &
\end{tikzcd}$$

Observación. Al igual que en el caso del límite directo, el límite inverso, si existe, es único bajo isomorfismo único.

Para el caso de módulos sobre un anillo, los límites directo e inverso siempre existen. La prueba es constructiva y puede encontrarse en [15] (Proposiciones 5.17 y 5.23). Aunque no lo demostraremos, por su utilidad, exponemos aquí dichas construcciones:

Sea A un anillo y $\Big(\{M_i\}_{i\in I}, \{\phi_j^i\}_{i\leq j}\Big)$ un sistema directo de A-módulos, consideramos la suma directa $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ y el submódulo S de M generado por todos los elementos de la forma $\lambda_j \phi_j^i m_i - \lambda_i m_i$ para $i \leq j$, siendo λ_i el morfismo que inyecta M_i en M y $m_i \in M_i$ para todo $i \in I$. Entonces, el cociente M/S verifica la propiedad universal del límite directo y por tanto:

$$\varinjlim M_i \cong M/S.$$

Igualmente, si $\left(\{M_i\}_{i\in I}, \{\psi_i^j\}_{i\leq j}\right)$ es un sistema inverso de A-módulos, podemos considerar el producto cartesiano $M = \prod_{i\in I} M_i$ y el submódulo de M:

$$B = \left\{ \prod_{i\in I} m_i \in M \;\middle|\; m_i = \psi_i^j(m_j) \text{ si } i \leq j \right\}.$$

Entonces, B satisface la propiedad universal del límite inverso y:

$$\varprojlim M_i \cong B.$$

Introducimos ahora los *morfismos de sistemas directos* y vemos que en el caso de los A-módulos, inducen un morfismo entre límites directos:

Definición 1.11. Sean $M = \left(\{M_i\}_{i\in I}, \{\phi_j^i\}_{i\leq j}\right)$ y $M' = \left(\{M_i'\}_{i\in I}, \{\psi_j^i\}_{i\leq j}\right)$ dos sistemas directos sobre el mismo conjunto de índices I, un *morfismo de sistemas directos* es una transformación natural $r : M \to M'$, es decir, una familia de morfismos $\{r_i : M_i \to M_i'\}_{i\in I}$ tal que para todo $i \leq j$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{r_i} & M_i' \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_j^i} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_j^i} \\ M_j & \xrightarrow{r_j} & M_j'. \end{array}$$

Un morfismo $r : M \to M'$ de sistemas directos de A-módulos induce un homomorfismo, que denominaremos $\varinjlim r_i : \varinjlim M_i \to \varinjlim M_i'$ tal que, con la construcción realizada previamente:

$$\varinjlim r_i \left(\sum_{i\in I} \lambda_i m_i + S \right) = \sum_{i\in I} \lambda_i' r_i(m_i) + S',$$

siendo S y S' los submódulos por los que se cocienta en la construcción del límite directo y λ_i, λ_i' las inyecciones de M_i y M_i' en las correspondientes sumas directas.

Observación. Análogamente pueden definirse los morfismos de sistemas inversos y, en el caso de A-módulos, estos inducen igualmente un homomorfismo en el límite inverso.

Otra noción muy utilizada en álgebra homológica es la de *sucesión exacta*. La enunciamos para módulos sobre un anillo, pero es igualmente aplicable a grupos abelianos, anillos, espacios vectoriales y en general a cualquiera de las llamadas *categorías abelianas*, que son categorías en las que se pueden definir el núcleo y el conúcleo de un morfismo (y por tanto su imagen como el núcleo del conúcleo) y que se comportan, en un sentido que no precisaremos, como la de los grupos abelianos.

Definición 1.12. Sea A un anillo y consideremos la siguiente sucesión de de A-módulos M_n y homomorfismos de módulos $f_n : M_n \to M_{n-1}$:

$$\ldots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to \ldots$$

Se dice que dicha sucesión es *exacta* si $\operatorname{Im} f_{n+1} = \ker f_n$ para todo n.

En general, para sucesiones exactas de cualquier tipo, es trivial comprobar que:

(1) $0 \to A \xrightarrow{f} B$ es exacta si y sólo si f es inyectiva.

(2) $A \xrightarrow{f} B \to 0$ es exacta si y sólo si f es sobreyectiva.

(3) $0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0$ es exacta si y sólo si f es un isomorfismo.

Un lema muy útil, en relación con esta definición, es el *lema de la serpiente*, válido en cualquier categoría abeliana:

Lema 1.13 (Lema de la serpiente)**.** *Dado un diagrama conmutativo de filas exactas de la forma:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \to \ker f \to \ker g \to \ker h \to \operatorname{coker} f \to \operatorname{coker} g \to cokerh \to 0.$$

Demostración. La demostración de este resultado puede consultarse en [15] (Corolario 6.12). $\square$

Cuando el conjunto de índices de un sistema directo verifique la siguiente propiedad, la exactitud de una sucesión de sistemas directos se podrá trasladar al límite directo, lo que no es cierto en general para el límite inverso:

Definición 1.14. Se dice que un conjunto I parcialmente ordenado es un *conjunto dirigido* si para cada $i, j \in I$, existe un cierto $k \in I$ con $i, j \leq k$.

Proposición 1.15. *Sea I un conjunto dirigido de índices, y sean $M = \Big(\{M_i\}_{i\in I}, \{\phi^i_j\}_{i\leq j}\Big)$, $M' = \Big(\{M'_i\}_{i\in I}, \{\psi^i_j\}_{i\leq j}\Big)$ y $M'' = \Big(\{M''_i\}_{i\in I}, \{\eta^i_j\}_{i\leq j}\Big)$ sistemas directos de A-módulos sobre I. Sean $r = \{r_i : M_i \to M'_i\}_{i\in I}$ y $s = \{s_i : M'_i \to M''_i\}_{i\in I}$ dos morfismos de sistemas directos tales que*

$$0 \to M_i \xrightarrow{r_i} M'_i \xrightarrow{s_i} M''_i \to 0$$

es una sucesión exacta para cada $i \in I$, entonces la siguiente sucesión también es exacta:

$$0 \to \varinjlim M_i \xrightarrow{\varinjlim r_i} \varinjlim M'_i \xrightarrow{\varinjlim s_i} \varinjlim M''_i \to 0.$$

Demostración. La prueba puede encontrarse en [15] (Proposición 5.33). $\square$

1.3. Teoría de Haces

En esta sección introducimos la Teoría de Haces, una herramienta muy potente usada en diversas disciplinas matemáticas que establece relaciones entre las propiedades locales y globales de un espacio. A grandes rasgos, un haz $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico proporciona, para cada abierto U del espacio, un conjunto $\mathcal{F}(U)$ con una cierta estructura (grupo abeliano, anillo, espacio vectorial, ...) y que verifica una serie de propiedades.

Por simplicidad, definiremos únicamente los haces con valores en la categoría de los grupos abelianos, pero se ha de tener presente que se pueden definir exactamente de la misma forma para otras estructuras, como por ejemplo los espacios vectoriales (que serán los que utilizaremos en los sucesivos capítulos). En general, pueden definirse haces con valores en cualquier categoría.

Una noción previa a la de haz es la de *prehaz*:

Definición 1.16. Sea X un espacio topológico, un *prehaz* $\mathcal{F}$ sobre X de grupos abelianos consiste en, para cada abierto $U \subset X$, un grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$, denominado *grupo de las secciones de* $\mathcal{F}$ *sobre* U y para cada par de abiertos $V \subset U$ un morfismo $r_{VU} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, denominado *restricción de* U *a* V (que denotaremos por $|_V$ por comodidad cuando no haya ambigüedad en el abierto de partida) tales que:

a) Para cada abierto $U \subset X$, $r_{UU} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$.

b) Para cualesquiera abiertos $W \subset V \subset U$, $r_{WV} \circ r_{VU} = r_{WU}$.

Observación. Nótese que, considerando la categoría $\mathcal{U}$ de los abiertos de X, un prehaz puede definirse como un funtor contravariante $\mathcal{F} : \mathcal{U} \to \mathrm{Ab}$ que a cada inclusión $i : V \hookrightarrow U$ le asocia $\mathcal{F}(i) = r_{VU}$.

Definición 1.17. Sea X un espacio topológico, un *haz* $\mathcal{F}$ sobre X (de grupos abelianos) es un prehaz tal que, para cada abierto $U \subset X$ y cada recubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ de U, satisface las dos condiciones siguientes:

a) Unicidad: si $s, s' \in \mathcal{F}(U)$ son tales que $s|_{U_i} = s'|_{U_i}$ para todo $i \in I$, entonces $s = s'$.

b) Pegado: si $\{s_i \in \mathcal{F}(U_i)\}_{i \in I}$ es una familia de secciones que verifica que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para cualesquiera $i, j \in I$, entonces existe una (única) sección global $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in I$.

Definición 1.18. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son prehaces sobre X tales que $\mathcal{F}(U) \subset \mathcal{F}'(U)$ para abierto $U \subset X$ y tienen los mismos morfismos restricción, se dice que $\mathcal{F}$ es un *subprehaz* de $\mathcal{F}'$. Si ambos son haces, se dirá que $\mathcal{F}$ es un *subhaz* de $\mathcal{F}'$. En ambos casos, se denotará por $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.

Como es de esperar, dado un haz $\mathcal{F}$ sobre X, podemos considerar la restricción del mismo a un abierto U de X y seguirá siendo un haz:

Definición 1.19. Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre X, y sea $U \subset X$ abierto, definimos el *haz restricción* de $\mathcal{F}$ a U, que denotaremos por $\mathcal{F}|_U$, como $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$ para cada V abierto de U, con los mismos morfismos restricción.

Proposición 1.20. *Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre X y $U \subset X$ abierto, entonces $\mathcal{F}|_U$ es un haz sobre U.*

Demostración. Es claro que $\mathcal{F}|_U$ es un prehaz por serlo $\mathcal{F}$, ya que $\mathcal{F}|_U(W) = \mathcal{F}(W)$ para cada $W \subset U$. Además, también va a verificar las propiedades de unicidad y pegado, ya que si estas se verifican para cualquier abierto de X, en particular se van a verificar para los abiertos de U (ya que los abiertos de U también son abiertos de X).

□

Una vez definida la estructura, como es natural, pasamos a definir los morfismos:

Definición 1.21. Sea X un espacio topológico y sean $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ dos prehaces (haces) sobre X, un *morfismo de prehaces (haces)* es una familia de morfismos $\varphi = \{\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}'(U) \mid U \text{ abierto de } X\}$ tal que, para cada cualesquiera abiertos $V \subset U$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{r_{VU}} & \mathcal{F}(V) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \varphi_U} & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi_V} \\ \mathcal{F}'(U) & \xrightarrow{r'_{VU}} & \mathcal{F}'(V). \end{array}$$

El conjunto de morfismos de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}'$ se denotará naturalmente por $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$. Si $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$, los morfismos se denominarán *endomorfismos* y el conjunto de ellos se denotará por $\mathrm{End}(\mathcal{F})$.

Observación. Considerando los prehaces y los haces como funtores contravariantes, un morfismo de prehaces o de haces no es más que una transformación natural de funtores.

Tanto los prehaces como los haces sobre un espacio topológico X con valores en una categoría abeliana $\mathcal{A}$ junto con sus morfismos forman una categoría, las cuales se denotan, respectivamente, por $\mathrm{pSh}(X, \mathcal{A})$ y $\mathrm{Sh}(X, \mathcal{A})$. Además, la categoría $\mathrm{pSh}(X, \mathcal{A})$ es abeliana, y si $\mathcal{A}$ satisface ciertas propiedades adicionales (que, en particular, verifica la categoría de los grupos abelianos), entonces $\mathrm{Sh}(X, \mathcal{A})$ también es abeliana. La demostración de estos resultados puede encontrarse, por ejemplo, en [15] (Teorema 5.91 y Corolario 5.94).

Un concepto fundamental que usaremos en repetidas ocasiones es el de *fibra de un haz en un punto*:

Obsérvese que, dado un $x \in X$, los abiertos $U \subset X$ que contienen a x forman un conjunto parcialmente ordenado por la contención ($U \leq V$ si $U \supseteq V$). Además es un conjunto dirigido, pues dados U y V dos entornos abiertos de x, su intersección $U \cap V$ también es entorno abierto de x y verifica $U, V \leq U \cap V$. Podemos entonces considerar el sistema directo $\big(\{\mathcal{F}(U)\}_{U \ni x},\ \{r_{VU} : \mathcal{F}(U) \to F(V)\}_{U \supseteq V \ni x}\big)$.

Definición 1.22. Sea $\mathcal{F}$ un prehaz sobre un espacio topológico X, y sea $x \in X$, se define la *fibra* de $\mathcal{F}$ en x como el límite directo del sistema anterior:

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U).$$

Para cada $s \in \mathcal{F}(U)$, puede considerarse el morfismo que lo envía en $\mathcal{F}_x$, y llamamos *germen de s en x* a la imagen de s por este morfismo, que denotaremos por s_x.

Observación. Por la conmutatividad del diagrama del límite directo, el germen de $s \in \mathcal{F}(U)$ en x coincidirá con el germen de $s|_V$ en x para cualquier abierto $V \subset U$. Es más, s quedará determinada por sus gérmenes en cada $x \in U$, es decir, si $s, s' \in \mathcal{F}(U)$ son tales que $s_x = s'_x$ para todo $x \in U$, entonces $s = s'$.

Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ un morfismo de prehaces (o de haces) sobre X, es inmediato que para cada $x \in X$, φ induce un morfismo de sistemas directos $\{\mathcal{F}(U) \mid U \ni x\} \to \{\mathcal{F}'(U) \mid U \ni x\}$. Recordando que un grupo abeliano es un $\mathbb{Z}$-módulo y el resultado del apartado previo, este morfismo induce a su vez un homomorfismo de grupos entre los límites directos (que son, respectivamente $\mathcal{F}_x$ y $\mathcal{F}'_x$) que denotaremos $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}'_x$ y que denominaremos *fibra de φ en x.*

Proposición 1.23. *Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre X, entonces $\mathcal{F}$ es el haz nulo (i.e. $\mathcal{F}(U) = 0$ para todo abierto U) si y sólo si $\mathcal{F}_x = 0$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Puede encontrarse en [15] (Proposición 5.74).

□

Los conceptos básicos de *núcleo, imagen* y *conúcleo* de una aplicación también pueden ser definidos para morfismos de prehaces y haces. Para ello, empezamos definiendo el prehaz cociente:

Definición 1.24. Sea $\mathcal{F}$ un prehaz sobre X, y sea $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ un subprehaz de $\mathcal{F}$, se define el *prehaz cociente $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$* como:

$$(\mathcal{F}/\mathcal{F}')(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U) \text{ para cada abierto } U \subset X,$$

con la restricción $r_{VU}\,(s + \mathcal{F}(U)) = s|_V + \mathcal{F}(V)$ para cada abierto $V \subset U$.

Observación. Puede comprobarse fácilmente que la restricción anterior está bien definida y hace que $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ sea, en efecto, un prehaz.

Definición 1.25. Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ un morfismo de prehaces o de haces sobre X, se define el *núcleo* de φ (que se denotará $\ker \varphi$) como:

$$(\ker \varphi)(U) = \ker \varphi_U \text{ para todo } U \text{ abierto de } X,$$

con los mismos morfismos restricción de $\mathcal{F}$. Diremos que φ es *inyectivo* si $\ker \varphi$ es el haz nulo.

Proposición 1.26. *Si $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ es un morfismo de prehaces sobre X,* $\ker \varphi$ *es un subprehaz de $\mathcal{F}$. Además, si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son haces, entonces* $\ker \varphi$ *es un subhaz de $\mathcal{F}$.*

Demostración. Sabemos que los núcleos de los homomorfismos de grupos son subgrupos del espacio de partida, luego, en efecto, para todo abierto $U \subset X$, $(\ker \varphi)(U)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(U)$.

Además, dados los abiertos $U' \subset U \subset X$, y si $s \in (\ker \varphi)(U)$, entonces $\varphi_U(s) = 0$. Por ser φ endomorfismo, $\varphi_{U'}(s|_{U'}) = \varphi_U(s)|_{U'} = 0$, luego $s|_{U'} \in \ker \varphi_{U'}$, y por tanto $\ker \varphi$ es subprehaz.

Por otro lado, la propiedad de unicidad la hereda de $\mathcal{F}$. Para probar la propiedad de pegado, consideramos un abierto $U \subset X$ y $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento por abiertos de U. Sea $s_i \in \ker \varphi_{U_i}$ una familia de secciones que coincide en las intersecciones, por ser $\mathcal{F}$ un haz, sabemos que existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para cada $i \in I$. Entonces, $\varphi_U(s)|_{U_i} = \varphi_{U_i}(s|_{U_i}) = \varphi_{U_i}(s_i) = 0$

para todo $i \in I$. Finalmente, por la propiedad de unicidad de $\mathcal{F}'$, deducimos que $\varphi_U(s) = 0$ y por tanto $s \in \ker \varphi_U$, concluyendo que $\ker \varphi$ es un subhaz de $\mathcal{F}$.

$\square$

Llegados a este punto, estaríamos tentados de definir la imagen y el conúcleo de manera análoga, es decir, $(\mathrm{Im}_0\, \varphi)(U) = \mathrm{Im}\, \varphi_U$ y $(\mathrm{coker}_0\, \varphi)(U) = \mathrm{coker}\, \varphi_U$ para todo abierto U de X (ponemos el subíndice 0 para distinguirlos de los haces imagen y conúcleo que definiremos posteriormente). Sin embargo, con estas definiciones sólo podemos asegurar que $\mathrm{Im}_0\, \varphi$ y $\mathrm{coker}_0\, \varphi$ sean prehaces (denominados, respectivamente, *prehaz imagen* y *prehaz conúcleo*):

Proposición 1.27. *Dado un morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ de prehaces o de haces sobre X, $\mathrm{Im}_0\, \varphi$ es un subprehaz de $\mathcal{F}'$ y $\mathrm{coker}_0\, \varphi$ es un prehaz.*

Demostración. La imagen de un homomorfismo de grupos es un subgrupo, por lo que para todo abierto $U \subset X$, $(\mathrm{Im}_0\, \varphi)(U)$ será un subgrupo de $\mathcal{F}'(U)$.

Además, dados los abiertos $U' \subset U \subset X$, si $s \in (\mathrm{Im}_0\, \varphi)(U)$, entonces existe $t \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\varphi_U(t) = s$. Por ser φ un morfismo, $\varphi_{U'}(t|_{U'}) = \varphi_U(t)|_{U'} = s|_{U'}$, luego $s|_{U'} \in \mathrm{Im}\, \varphi_{U'}$, y por tanto $\mathrm{Im}_0\, \varphi$ es subprehaz.

En lo que respecta al conúcleo, $\mathrm{coker}\, \varphi_U$ es un grupo para cada abierto $U \subset X$, y la restricción r_{VU} a cada abierto $V \subset U$ se define como $r_{VU}(s + \mathrm{Im}\, \varphi_U) = s|_V + \mathrm{Im}\, \varphi_V$ (está bien definida ya que si $s - s' \in \mathrm{Im}\, \varphi_U$, por ser $\mathrm{Im}_0\, \varphi$ un prehaz, $(s - s')|_V = s|_V - s'|_V \in \mathrm{Im}\, \varphi_V$), que cumple trivialmente las propiedades que se le exigen. Concluimos que $\mathrm{coker}_0\, \varphi$ es también un prehaz.

$\square$

Como hemos dicho, aun cuando $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ sean haces, $\mathrm{Im}_0\, \varphi$ y $\mathrm{coker}_0\, \varphi$ no van a ser haces en general (veremos un ejemplo de ello en el siguiente capítulo), luego hemos de buscar otra definición. La solución a este problema pasa por considerar un procedimiento que permita, dado un prehaz $\mathcal{F}$, construir un haz $\mathcal{F}^+$ tal que $\mathcal{F}$ se pueda ver como un subprehaz de $\mathcal{F}^+$ y en cierto sentido sea el menor subhaz que contiene a $\mathcal{F}$. Esta construcción se denomina *hacificación de un prehaz*:

Definición 1.28. Sea $\mathcal{F}$ un prehaz sobre X, se define el *haz asociado* a $\mathcal{F}$, que se denotará por $\mathcal{F}^+$, como aquel tal que:

a) Sus secciones en el abierto $U \subset X$ son los $s = \prod_{x \in U} s_x \in \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$ tales que para cada $x \in U$ existe U_x entorno de x en U y existe $t \in \mathcal{F}(U_x)$ tal que $s_w = t_w$ para todo $w \in U_x$.

b) Para cualesquiera abiertos $V \subset U \subset X$, el morfismo restricción de U a V viene dado por $r_{VU}\big(\prod_{x \in U} s_x\big) = \prod_{x \in V} s_x \in \mathcal{F}^+(V)$.

Puede comprobarse fácilmente que el haz asociado a un prehaz es, en efecto, un haz. Además, tenemos un morfismo canónico de prehaces $i_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ tal que, para cada abierto U de X y cada $s \in \mathcal{F}(U)$:

$$i_{\mathcal{F}}(U)(s) = \prod_{x \in U} s_x.$$

y dicho morfismo induce un isomorfismo entre las fibras de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^+$ en cada $x \in X$:

Proposición 1.29. *Sea $\mathcal{F}$ un prehaz sobre X y $\mathcal{F}^+$ su haz asociado, se verifica que:*

(1) $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{F}_x^+$ para todo $x \in X$.

(2) Dado un haz $\mathcal{F}'$ y un morfismo de prehaces $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$, existe un único morfismo $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{F}'$ tal que $\varphi = \varphi^+ \circ i_{\mathcal{F}}$.

Demostración. Este resultado puede encontrarse en [8] (capítulo II, Proposición 2.4). □

Cuando el prehaz $\mathcal{F}$ al que vamos a aplicar el proceso de hacificación se encuentra contenido en un haz mayor $\mathcal{F}'$, el haz asociado a $\mathcal{F}$ será isomorfo a aquel constituido por las secciones de $\mathcal{F}'$ que localmente son secciones de $\mathcal{F}$, de manera que podemos ver $\mathcal{F}^+$ como un subhaz de $\mathcal{F}'$. Esto es lo que nos dice la siguiente proposición, cuya prueba se ha realizado con detalle dada la importancia que tendrá este resultado en el desarrollo de la teoría:

Proposición 1.30. *Sea $\mathcal{F}'$ un haz sobre X y $\mathcal{F}$ un subprehaz de $\mathcal{F}'$, entonces $\mathcal{F}^+ \cong \widetilde{\mathcal{F}}$, donde para cada abierto $U \subset X$:*

$$\widetilde{\mathcal{F}}(U) = \{s \in \mathcal{F}'(U) \mid \textit{ para todo } x \in U \textit{ existe } U_x \textit{ entorno abierto de } x \textit{ tal que } s|_{U_x} \in \mathcal{F}(U_x)\},$$

y además $\widetilde{\mathcal{F}}$ verifica las siguientes propiedades:

(1) $\widetilde{\mathcal{F}}$ es un subhaz de $\mathcal{F}'$.

(2) $\mathcal{F}$ es un subprehaz de $\widetilde{\mathcal{F}}$.

(3) Si $\mathcal{F}_0$ es un subhaz de $\mathcal{F}'$ con $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$, entonces $\widetilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}_0$.

Demostración. Empecemos probando las propiedades de $\widetilde{\mathcal{F}}$:

(1) Es claro que $\widetilde{\mathcal{F}}$ es un subprehaz de $\mathcal{F}'$, pues $\widetilde{\mathcal{F}}(U) \subset \mathcal{F}'(U)$ para todo abierto $U \subset X$, y la restricción de una cierta sección $s \in \widetilde{\mathcal{F}}(U)$ a un abierto $V \subset U$ será un elemento de $\widetilde{\mathcal{F}}(V)$ (ya que basta cortar los entornos de cada punto x con V para obtener entornos abiertos V_x de x en V y aplicar que tanto $\mathcal{F}'$ como $\mathcal{F}$ son prehaces). Veamos entonces que $\widetilde{\mathcal{F}}$ es un haz:

Sea $U \subset X$ abierto, $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento por abiertos de U y $s_i \in \widetilde{\mathcal{F}}(U_i)$ una familia de secciones que coincide en las intersecciones, por ser $\mathcal{F}'$ un haz, existe una única sección $s \in \mathcal{F}'(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$. Entonces, dado $x \in U$, existirá un cierto U_i del recubrimiento tal que $x \in U_i$ y un entorno abierto $V_{ij} \subset U_i$ con $s|_{V_{ij}} \in \mathcal{F}(V_{ij})$, luego $s \in \widetilde{\mathcal{F}}(U)$ y tenemos la propiedad de pegado. La unicidad se hereda de $\mathcal{F}'$.

(2) Basta observar que para cada abierto $U \subset X$ y $s \in \mathcal{F}(U) \subset \mathcal{F}'(U)$, podemos tomar el propio U como entorno abierto de cualquier $x \in U$ y verificará que $s|_U = s \in \mathcal{F}(U)$, luego $s \in \widetilde{\mathcal{F}}(U)$.

(3) Si $\mathcal{F}_0$ es otro subhaz con $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$, entonces, dado un abierto $U \subset X$ y $s \in \widetilde{\mathcal{F}}(U)$, podemos considerar para cada $x \in U$ un entorno abierto U_x tal que $s|_{U_x} \in \mathcal{F}(U_x)$ y la unión de dichos entornos será un recubrimiento por abiertos de U. Como $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$, $s|_{U_x} \in \mathcal{F}_0(U_x)$ para todo $x \in U$, y por la propiedad de pegado de $\mathcal{F}_0$, esto implica que $s \in \mathcal{F}_0(U)$. Hemos probado así la contención $\widetilde{\mathcal{F}}(U) \subset \mathcal{F}_0(U)$ y por tanto que $\widetilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}_0$.

Por último, para ver que es un haz isomorfo a $\mathcal{F}^+$, consideramos la familia de aplicaciones $\varphi : \widetilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{F}^+$ dado por $\varphi_U(s) = \prod_{x \in U} s_x$, siendo s_x el germen de s en x. Observamos que φ está bien definida, pues para cada $x \in U$ existe un U_x tal que $s|_{U_x} \in \mathcal{F}(U_x)$. Basta tomar entonces $t = s|_{U_x}$ y tendremos que $t_w = (s|_{U_x})_w = s_w$ para todo $w \in U_x$, de manera que $\varphi_U(s) \in \mathcal{F}^+(U)$. Además es claro que φ es un morfismo de haces, pues dados los abiertos $V \subset U \subset X$ y $s \in \widetilde{\mathcal{F}}(U)$, tenemos que:

$$\varphi_U(s)\big|_V = \prod_{x \in V} s_x = \prod_{x \in V} (s|_V)_x = \varphi_V(s|_V),$$

donde estamos denotando por $|_V$ tanto las restricciones de $\widetilde{\mathcal{F}}$ como las de $\mathcal{F}^+$ por simplicidad.

Falta ver, pues, que existe el morfismo inverso. Dado $s = \prod_{x \in U} s_x \in \mathcal{F}^+(U)$, por definición, para cada $x \in U$ existe un entorno abierto U_x y un $t^x \in \mathcal{F}(U_x)$ tal que $s_w = (t^x)_w$ para cada $w \in U_x$. Los abiertos U_x forman un recubrimiento de U y las secciones $\{t^x\}_{x \in U}$ coinciden en las intersecciones, pues $(t^x)_w = s_w = (t^y)_w$ para todo $w \in U_x \cap U_y$ y por tanto $t^x|_{U_x \cap U_y} = t^y|_{U_x \cap U_y}$. Como $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}'$ es un haz, por la propiedad de pegado de $\mathcal{F}'$, existe un único $t \in \mathcal{F}'(U)$ tal que $t|_{U_x} = t^x$ para cada $x \in U$, y por tanto $t \in \widetilde{\mathcal{F}}(U)$. Definimos entonces $\psi : \mathcal{F}^+ \to \widetilde{\mathcal{F}}$ dado por $\psi_U(s) = t$, que:

- Está bien definida, ya que si tomamos otros entornos U'_x de x y otras secciones $t'^x \in \mathcal{F}(U'_x)$ que darán lugar a una sección $t' \in \mathcal{F}'(U)$, en particular tendremos que $t_x = (t|_{U_x})_x = (t^x)_x = s_x = (t'^x)_x = (t'|_{U'_x})_x = t'_x$ para todo $x \in U$, de donde $t = t'$.
- Es un morfismo de haces: para cada $V \subset U$ abierto, $\psi_V(s|_V) = \psi_V(\prod_{x \in V} s_x) = t|_V = \psi_U(s)|_V$, por la propiedad de unicidad (ya que, tomando los abiertos $V_x = U_x \cap V$ y las secciones $t^x|_{V_x} \in \mathcal{F}(V_x)$, tendremos que $(t|_V)\big|_{V_x} = (t|_{U_x})\big|_{V_x} = t^x|_{V_x}$ para cada $x \in V$).
- Es el inverso de φ, pues para cada abierto $U \subset X$:
  - $(\psi_U \circ \varphi_U)(s) = \psi_U \left(\prod_{x \in U} s_x \right) = s$, por unicidad (ya que en este caso los t^x son justamente los $s|_{U_x}$).
  - $(\varphi_U \circ \psi_U) \left(\prod_{x \in U} s_x \right) = \varphi_U(t) = \prod_{x \in U} t_x = \prod_{x \in U} (t^x)_x = \prod_{x \in U} s_x$.

Concluimos que φ es un isomorfismo y $\mathcal{F}^+ \cong \widetilde{\mathcal{F}}$.

□

Nota. Una vez probado que son isomorfos, cuando proceda, nos referiremos indistintamente por $\mathcal{F}^+$ tanto al haz asociado a $\mathcal{F}$ como a $\widetilde{\mathcal{F}}$, siendo este segundo el que utilizaremos en los siguientes capítulos por resultar más accesible en su definición.

Entonces, podemos definir la imagen de un morfismo de haces como el haz asociado al prehaz imagen, de manera que puede verse como un subhaz de $\mathcal{F}'$, y análogamente para el conúcleo:

Definición 1.31. Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ un morfismo de haces, se define:

a) el *haz imagen* de φ: $\operatorname{Im} \varphi = (\operatorname{Im}_0 \varphi)^+$,

b) el *haz conúcleo* de φ: $\operatorname{coker} \varphi = (\mathcal{F}' / \operatorname{Im}_0 \varphi)^+$,

donde $\operatorname{Im}_0 \varphi$ designa el prehaz imagen. Diremos que φ es *sobreyectivo* si $\operatorname{coker} \varphi = 0$.

La siguiente proposición permite caracterizar la inyectividad y la sobreyectividad de un morfismo de haces:

Proposición 1.32. *Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ un morfismo de haces sobre X, se verifica que:*

(1) $(\ker \varphi)_x \cong \ker \varphi_x$ *para todo $x \in X$.*

(2) $(\operatorname{Im} \varphi)_x \cong \operatorname{Im} \varphi_x$ *para todo $x \in X$.*

(3) $(\operatorname{coker} \varphi)_x \cong \operatorname{coker} \varphi_x$ *para todo $x \in X$.*

Demostración. La demostración de este hecho puede encontrarse en [15] (Proposición 5.80 y siguientes) y se basa en la exactitud del límite directo (Proposición 1.15).

□

Un corolario inmediato haciendo uso de la Proposición 1.23 es el siguiente (Proposición 5.84 de [15]):

Corolario 1.33. *Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ un morfismo de haces, se tiene que:*

(1) φ es inyectivo si y sólo si φ_x es inyectivo para todo $x \in X$.

(2) φ es sobreyectivo si y sólo si φ_x es sobreyectivo para todo $x \in X$.

Como tenemos definidos el núcleo y la imagen de un haz, también podemos definir una *sucesión exacta de haces*, análoga a la enunciada en la sección previa para módulos sobre un anillo:

Definición 1.34. Sea una sucesión de haces $\mathcal{F}_n$ sobre un espacio topológico X y morfismos de haces $\varphi_n : \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_{n-1}$:

$$\ldots \to \mathcal{F}_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \mathcal{F}_n \xrightarrow{\varphi_n} \mathcal{F}_{n-1} \to \ldots$$

Se dice que la sucesión es *exacta* si $\operatorname{Im} \varphi_{n+1} = \ker \varphi_n$.

Por último, la siguiente proposición establece que todo morfismo de haces da lugar a una sucesión exacta de haces a partir de su núcleo y su conúcleo:

Proposición 1.35. *Si $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ es un morfismo de haces, entonces la siguiente sucesión es exacta:*

$$0 \to \ker \varphi \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}' \to \operatorname{coker} \varphi \to 0.$$

Demostración. Su prueba se basa en la exactitud de las fibras en cada $x \in X$ (que son límites directos) y en la Proposición 1.32. Puede encontrarse en [15] (Corolario 5.86).

□

Capítulo 2

Revisión algebraica de la teoría clásica de ecuaciones diferenciales lineales

Comenzaremos el estudio de las ecuaciones diferenciales a través de una reformulación del Teorema de Cauchy desde una perspectiva algebraica. Para tal cometido, emplearemos las técnicas expuestas en el capítulo anterior.

2.1. El Teorema de Cauchy

Empecemos por enunciar el Teorema de Cauchy en su versión analítica clásica. Para ello, es necesario recordar en primer lugar qué se entiende por función holomorfa:

Definición 2.1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, y sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto, se dice que f *es holomorfa en* U si es diferenciable (en sentido complejo) en cada $z_0 \in U$, es decir, para cada $z_0 \in U$ existe el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

El conjunto de funciones holomorfas en U se denotará por $\mathcal{O}(U)$.

Observación. Dado que la suma y el producto de funciones holomorfas son holomorfas y el producto de una función holomorfa por una constante también lo es, $\mathcal{O}(U)$ es una $\mathbb{C}$-álgebra (y, en particular, un $\mathbb{C}$-espacio vectorial).

Teorema 2.2. *(Teorema de Cauchy) Sea $U \subset \mathbb{C}$ un disco abierto centrado en el origen. y sean A y B una matriz cuadrada de orden n y un vector columna n-dimensional, respectivamente, de funciones holomorfas en U. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de soluciones del sistema diferencial $\frac{dy}{dz} = Ay + B$, donde $y = (y_1(z), \ldots, y_n(z))^t$ y cada $y_i \in \mathcal{O}(U)$, la aplicación $\phi : \mathcal{S} \to \mathbb{C}^n$ dada por $\phi(y) = y(0)$ es biyectiva. Además, si B es el vector nulo, ϕ es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales.*

Observación. La prueba clásica de este teorema, que puede encontrarse en [3] (Teorema 10.6.3), consta de dos pasos:

- Primero, se demuestra que el teorema se verifica en un cierto disco $V \subset U$ de menor radio centrado en el origen.

- Posteriormente, se supone que el radio del máximo disco donde está definida la solución es estrictamente menor que el de U y se llega a que la solución puede extenderse. Esto demuestra que la solución está definida en todo U.

Este segundo paso, que requiere de ciertas herramientas analíticas, puede demostrarse de manera simple y conceptual a través de la teoría de haces.

El Teorema de Cauchy es también aplicable, con un poco de astucia, al caso de una ecuación diferencial de orden n:

$$a_n \frac{d^n y}{dz^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dz} + a_0 y = g, \tag{2.1}$$

en la que $a_0, \ldots, a_n, g \in \mathcal{O}(U)$, y $a_n(z) \neq 0$ para todo $z \in U$, de manera que las funciones $b_i = a_i / a_n$ y $h = g/a_n$ sean holomorfas en U, y por tanto la ecuación anterior tenga las mismas soluciones que:

$$\frac{d^n y}{dz^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \ldots + b_1 \frac{dy}{dz} + b_0 y = h. \tag{2.2}$$

Si ahora llamamos $y_i = y^{i-1)}$ para todo $i = 1, \ldots, n$, donde $y^{i)}$ denota la derivada i-ésima $\big(y^{0)} = y\big)$, podemos expresar la ecuación anterior como el sistema diferencial:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -b_0 y_1 - \ldots - b_{n-1} y_n + h. \end{cases} \tag{2.3}$$

O bien, en notación matricial:

$$\frac{dY}{dz} = AY + B, \tag{2.4}$$

donde $Y = (y_1, \ldots, y_n)^t$ y las matrices A y B son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \ldots & -b_{n-1} \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h \end{bmatrix}.$$

Antes de seguir, hemos de comprobar que el sistema construido es totalmente equivalente al anterior:

Proposición 2.3. *En las condiciones anteriores, si denotamos por $\mathcal{S}$ al conjunto de soluciones de la ecuación (2.1) y por $\mathcal{S}'$ al conjunto de soluciones del sistema (2.4), la aplicación $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ dada por $\Phi(y) = (y, y', \ldots, y^{n-1)})^t$ es una biyección. Es más, en caso de que la ecuación sea homogénea (es decir, $g = 0$), Φ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración. Por la construcción realizada anteriormente, es claro que si $y \in \mathcal{S}$, entonces $\Phi(y) \in \mathcal{S}'$, luego Φ está bien definida. Además, es biyectiva:

- Inyectividad: si $\Phi(y_A) = \Phi(y_B)$, entonces $(y_A, y'_A, \dots, y_A^{n-1)}) = (y_B, y'_B, \dots, y_B^{n-1)})$, y en particular, $y_A = y_B$.
- Sobreyectividad: sea $(y_1, \dots, y_n)^t \in \mathcal{S}'$, entonces $(y_1, \dots, y_n) = (y_1, y'_1, \dots, y_1^{n-1)})$. Pero como $y_1^{n)} = y'_n = -b_0 y_1 - \dots - b_{n-1} y_n + h = -b_0 y_1 - \dots - b_{n-1} y_1^{n-1)} + h$, entonces $y_1 \in \mathcal{S}$, y por tanto $(y_1, \dots, y_n)^t = (y_1, y'_1, \dots, y_1^{n-1)})^t = \Phi(y_1)$.

Luego Φ es una biyección entre $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$.

Finalmente, en el caso de una ecuación homogénea, tanto la suma de soluciones como el producto de soluciones por una constante siguen siendo solución, luego $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ son $\mathbb{C}$-espacios vectoriales. Por la linealidad de las derivadas, Φ es una aplicación lineal, y por tanto, un isomorfismo de espacios vectoriales.

$\square$

Podemos entonces escribir la ecuación (2.1) en las condiciones del Teorema 2.2, aplicar dicho teorema y posteriormente deshacer el cambio, obteniendo el siguiente corolario:

Corolario 2.4. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un disco abierto centrado en el origen, y sean $a_0, \dots, a_n \in \mathcal{O}(U)$ tales que $a_n(z) \neq 0$ para todo $z \in U$. Entonces, para cualesquiera $g \in \mathcal{O}(U)$ y $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{C}$ existe una única función $y \in \mathcal{O}(U)$ tal que:*

(1) $\quad a_n \frac{d^n y}{dz^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dz} + a_0 y = g.$

(2) $\quad y(0) = z_0,\ y'(0) = z_1,\ \dots\ ,\ y^{n-1)}(0) = z_{n-1}.$

2.2. Haces de funciones holomorfas

En esta sección estudiaremos los haces de funciones holomorfas con el objetivo de reenunciar el Teorema de Cauchy en términos propios de esta teoría.

Definición 2.5. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, y sea $\mathcal{U}$ la categoría de su topología (i.e. el conjunto de los abiertos de U), definimos el *haz de funciones holomorfas en U* como el haz de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales $\mathcal{O}_U : \mathcal{U} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$, que asigna a cada abierto V de U el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathcal{O}_U(V) = \mathcal{O}(V)$ de las funciones holomorfas en dicho abierto con la restricción usual de funciones r_{WV} para cada par de abiertos $W \subset V \subset U$.

Veamos que, en efecto, se trata de un haz en el sentido de la Definición 1.17:

Lema 2.6. $\mathcal{O}_U : \mathcal{U} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ *es un haz de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales.*

Demostración. En primer lugar, dado que la propiedad de holomorfía es de carácter local, es claro que si tenemos una función f holomorfa en un abierto $V \subset U$ y la restringimos a un abierto $V' \subset V$, $f|_{V'}$ va a seguir siendo holomorfa en V'. Por tanto $\mathcal{O}_U$ es un prehaz. Veamos además que se tienen las propiedades de unicidad y pegado. Para ello, sea V un abierto de U y $\{V_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento por abiertos de V:

- Unicidad: sean $f, g \in \mathcal{O}_U(V)$ tales que $f|_{V_i} = g|_{V_i}$ para todo $i \in I$. Como los V_i forman un recubrimiento de V, para cada $z \in V$ existirá V_i con $z \in V_i$ de manera que $f(z) = f|_{V_i}(z) = g|_{V_i}(z) = g(z)$. Por tanto $f(z) = g(z)$ para todo $z \in V$, de donde $f = g$.
- Pegado: sea una familia de funciones $f_i \in \mathcal{O}_U(V_i)$ tales que $f_i|_{V_i \cap V_j} = f_j|_{V_i \cap V_j}$ para cualesquiera $i, j \in I$. Podemos considerar la función f tal que $f(z) = f_i(z)$ si $z \in V_i$, que está bien definida ya que si $z \in V_i \cap V_j$, entonces $f_i(z) = f_j(z)$ por hipótesis. Además, f es holomorfa en V por serlo cada f_i en V_i (una vez más esto se debe al carácter local de las funciones holomorfas) y claramente verifica $f|_{V_i} = f_i$.

$\square$

Nota. En lo que sigue, U siempre denotará un abierto de $\mathbb{C}$ y $\mathcal{U}$ la categoría de su topología.

Según la Definición 1.18, $\mathcal{F} : \mathcal{U} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ será un subprehaz de $\mathcal{O}_U$ si $\mathcal{F}(V)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{O}_U(V)$ para cada abierto $V \subset U$ y para cualesquiera abiertos $V' \subset V \subset U$ y cada $f \in \mathcal{F}(V)$, se tiene que $f|_{V'} \in \mathcal{F}(V')$.

Caractericemos ahora los subhaces de $\mathcal{O}_U$, de manera que la comprobación de la propiedad de pegado resulte más simple:

Proposición 2.7. *Sea $\mathcal{F} : \mathcal{U} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ un subprehaz de $\mathcal{O}_U$, tendremos que $\mathcal{F}$ es un subhaz de $\mathcal{O}_U$ si y sólo si verifica la siguiente propiedad: para cada abierto $V \subset U$, cada $\{V_i\}_{i \in I}$ recubrimiento por abiertos de V y cada $f \in \mathcal{O}_U(V)$, se tiene que $f \in \mathcal{F}(V)$ si y sólo si $f|_{V_i} \in \mathcal{F}(V_i)$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Dado V abierto de U y $\{V_i\}_{i \in I}$ recubrimiento por abiertos de V, es claro que si $f \in \mathcal{F}(V)$, $f|_{V_i} \in \mathcal{F}(V_i)$ para todo $i \in I$ por ser $\mathcal{F}$ subprehaz. Recíprocamente, si $f \in \mathcal{O}_U(V)$ es tal que $f|_{V_i} \in \mathcal{F}(V_i)$ para todo $i \in I$, como los $f|_{V_i}$ coinciden en las intersecciones, por la propiedad de pegado de $\mathcal{F}$ sabemos que existe un único $s \in \mathcal{F}(V)$ tal que $s|_{V_i} = f|_{V_i}$. Entonces, por la propiedad de unicidad, tendremos que $s = f$, de donde $f \in \mathcal{F}(V)$.

($\Leftarrow$) La propiedad de unicidad se tiene inmediatamente por el mismo argumento utilizado en la prueba del Lema 2.6. Para la propiedad de pegado, consideremos un abierto $V \subset U$, un recubrimiento por abiertos $\{V_i\}_{i \in I}$ de V y una familia de funciones $f_i \in \mathcal{F}(V_i)$ tal que $f_i|_{V_i \cap V_j} = f_j|_{V_i \cap V_j}$ para cualesquiera $i, j \in I$. Construimos entonces, al igual que en la prueba del Lema 2.6, la función f tal que $f|_{V_i} = f_i \in \mathcal{F}(V_i)$ para cada $i \in I$, que será holomorfa en V por serlo cada f_i en V_i (recordemos que $\mathcal{F}(V_i) \subset \mathcal{O}_U(V_i)$ para cada $i \in I$). Podemos aplicar ahora la hipótesis y deducir que $f \in \mathcal{F}(V)$, verificando así la propiedad de pegado y concluyendo que $\mathcal{F}$ es un subhaz de $\mathcal{O}_U$.

$\square$

Presentamos a continuación un ejemplo en el que utilizamos esta propiedad para decidir si un prehaz es o no un haz:

Ejemplo:

- $\mathcal{F}(V) = \{f : V \to \mathbb{C} \mid f \text{ es constante}\}$ para cada abierto $V \subset U$.

  Es claro que $\mathcal{F}$ es un subprehaz de $\mathcal{O}_U$, pues las funciones constantes son un subespacio vectorial de las funciones holomorfas y la restricción de una constante a un subconjunto sigue siendo constante. Sin embargo, no es un subhaz, pues en caso de que V no sea conexo, si consideramos un recubrimiento por abiertos en el que cada V_i no corte a dos componentes conexas distintas, las funciones f que tomen valores constantes distintos en cada una de estas componentes verificarán $f|_{V_i} \in \mathcal{F}(V_i)$ pero $f \notin \mathcal{F}(V)$ al no ser constantes en todo V.

- $\mathbb{C}_U(V) = \{f : V \to \mathbb{C} \mid f \text{ es localmente constante}\}$ para cada abierto $V \subset U$.

  Las funciones localmente constantes son, en particular, holomorfas (un subespacio vectorial), y esta propiedad se mantiene al restringir la función a un subconjunto, por lo que $\mathbb{C}_U(V)$ es un subprehaz de $\mathcal{O}_U$. Ahora, si consideramos un recubrimiento por abiertos de V y una función f holomorfa en V tal que f restringida a cada abierto del recubrimiento es localmente constante, por ser esta una propiedad local, es claro que f va a ser localmente constante, y por tanto $\mathcal{F}$ va a ser un subhaz de $\mathcal{O}_U$.

Pasamos ahora a estudiar los endomorfismos de $\mathcal{O}_U$, que en este caso particular serán, recordando la definición del capítulo previo, familias de aplicaciones $\mathbb{C}$-lineales:

$$L_V : \mathcal{O}_U(V) \to \mathcal{O}_U(V) \text{ para cada abierto } V \subset U,$$

que conmutarán con las restricciones $r_{V'V}$ a cualquier abierto $V' \subset V$. El conjunto de endomorfismos de $\mathcal{O}_U$ será $\mathrm{End}(\mathcal{O}_U)$.

En $\mathrm{End}(\mathcal{O}_U)$ podemos definir una suma, una composición y un producto por escalar de la forma habitual. Dados $L, L' \in \mathrm{End}(\mathcal{O}_U)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$:

- $L + L' : (L + L')_V(f) = L_V(f) + L'_V(f) \in \mathcal{O}_U(V)$,
- $L \circ L' : (L \circ L')_V = L_V\left(L'_V(f)\right) \in \mathcal{O}_U(V)$,
- $\lambda L : (\lambda L)_V(f) = \lambda L_V(f) \in \mathcal{O}_U(V)$,

que claramente son endomorfismos por serlo L y L'. Por tanto, $\mathrm{End}(\mathcal{O}_U)$ forma una $\mathbb{C}$-álgebra (no conmutativa).

Además, podemos definir la *restricción de un endomorfismo* $L : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$ a un abierto $U' \subset U$ como:

$$L|_{U'} : \mathcal{O}_{U'} \to \mathcal{O}_{U'}; \quad (L|_{U'})_V(f) = L_V(f).$$

Es claro que $L|_{U'}$ es un endomorfismo de $\mathcal{O}_{U'}$ por serlo L de U. Entonces, podemos asociar a cada abierto $V \subset U$ la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathrm{End}(\mathcal{O}_V)$, y con la restricción definida, esta aplicación resulta ser también un haz (de $\mathbb{C}$- álgebras o $\mathbb{C}$-espacios vectoriales), que denotaremos por $\mathit{End}(\mathcal{O}_U)$:

Proposición 2.8. *La aplicación* $\mathit{End}(\mathcal{O}_U) : \mathcal{U} \to \mathrm{Alg}_k$ *dada por* $\mathit{End}(\mathcal{O}_U)(V) = \mathrm{End}(\mathcal{O}_V)$ *es un haz con la restricción anterior.*

Demostración. Claramente es un prehaz, pues dados $V' \subset V \subset U$ abiertos y $L \in \mathit{End}(\mathcal{O}_U)(V) = \mathrm{End}(\mathcal{O}_V)$, $L|_{V'} \in \mathrm{End}(\mathcal{O}_{V'}) = \mathit{End}(\mathcal{O}_U)(V')$.

Sea ahora un abierto $V \subset U$, $\{V_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de V y $L_i \in \mathit{End}(\mathcal{O}_U)(V_i)$ para cada $i \in I$ tales que $L_i|_{V_i\cap V_j} = L_j|_{V_i\cap V_j}$. Veamos que existe un único $L : \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_V$ tal que se verifique $L|_{V_i} = L_i$:

Definamos $L : \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_V$ tal que, para cada abierto $W \subset V$:

$$L_W(f)(z) = (L_i)_{V_i \cap W}(f|_{V_i \cap W})(z) \quad \text{si } z \in V_i.$$

Nótese que está bien definida porque $L_i = L_j$ en $V_i \cap V_j$. Entonces, dado $W \subset V_i$, tenemos que $L_W(f)(z) = (L_i)_W(f)(z)$, de manera que $L|_{V_i} = L_i$. Además, es único por construcción. Falta ver que $L \in \operatorname{End}(\mathcal{O}_V)$:

Sean $W' \subset W \subset V$ abiertos y $f \in \mathcal{O}_V(W)$, si $z \in V_i \cap W'$, entonces tendremos que:

$$L_W(f)\big|_{W'}(z) = (L_i)_{V_i \cap W}(f|_{V_i \cap W})\big|_{V_i \cap W'}(z) = (L_i)_{V_i \cap W'}(f|_{V_i \cap W'})(z) = L_{W'}(f|_{W'})(z).$$

Luego $L \in \operatorname{End}(\mathcal{O}_V)$, y en consecuencia $End(\mathcal{O}_U)$ es un haz.

□

Ya mencionamos en el capítulo anterior que, mientras que el núcleo de un morfismo de haces siempre es un subhaz, no ocurría lo mismo para la imagen si la definíamos de la forma natural, teniendo que acudir a la hacificación para solucionar este inconveniente. Ilustramos ahora este hecho para el caso particular de los endomorfismos de $\mathcal{O}_U$, presentando un contraejemplo:

Contraejemplo:

Tomemos $L = \frac{d}{dz}$ y consideremos $V = \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\{V_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento de V por abiertos simplemente conexos (es decir, homeomorfos a una bola abierta) en $\mathbb{C}^*$ y $f(z) = 1/z \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(V)$. Tenemos que $f|_{V_i} \in (\operatorname{Im}_0 L)(V_i)$, pues toda función holomorfa en un abierto simplemente conexo tiene primitiva (Teorema 5.2 de [17]). Sin embargo, f no puede tener una primitiva en $\mathbb{C}^*$, pues de lo contrario, su integral en la circunferencia unidad (S^1) sería nula ([17], capítulo 1, Corolario 3.3), pero un sencillo cálculo muestra que $\int_{S^1} f(z)dz = 2\pi i$. Por tanto, $f \notin (\operatorname{Im}_0 L)(V)$ y en consecuencia, por la Proposición 2.7, $\operatorname{Im}_0 L$ no es subhaz.

Por tanto, recordando la construcción del haz asociado a un prehaz de la Proposición 1.30, la imagen de un endomorfismo $L : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$ resultará:

$$(\operatorname{Im} L)(V) = \{f \in \mathcal{O}_U(V) \mid \forall p \in V, \exists V_p \subset V \text{ entorno abierto de } p \text{ y } \exists g \in \mathcal{O}_U(V_p) \text{ con } L_{V_p}(g) = f|_{V_p}\}$$

para cada abierto $V \subset U$.

Estamos ya en disposición de definir los operadores diferenciales lineales, que serán simplemente un tipo concreto de endomorfismos de $\mathcal{O}_U$:

Definición 2.9. Dado un entero $n \geq 0$, *un operador diferencial lineal de orden menor o igual que* n en U es un endomorfismo $L : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$ para el cual existen $a_0, \ldots, a_n \in \mathcal{O}_U(U)$ tales que para todo $V \subset U$ y para todo $f \in \mathcal{O}_U(V)$ se tiene que:

$$L_V(f) = a_n\big|_V \frac{d^n f}{dz^n} + \ldots + a_1\big|_V \frac{df}{dz} + a_0\big|_V f.$$

Diremos que L es un *operador diferencial lineal de orden n* en U si $a_n(z)$ no se anula en todo U.

Para que la definición de operador diferencial de orden n tenga sentido, hemos de comprobar la unicidad de los coeficientes $a_0, \ldots, a_n$:

Lema 2.10. *En la definición anterior, los coeficientes* $a_0, \ldots, a_n$ *son únicos.*

Demostración. Supongamos que existen $b_0, \ldots, b_n \in \mathcal{O}_U(U)$ tales que, para cada abierto $V \subset U$ y cada $f \in \mathcal{O}_U(V)$ tenemos:

$$L_V(f) = b_n\big|_V \frac{d^n f}{dz^n} + \ldots + b_1\big|_V \frac{df}{dz} + b_0\big|_V f.$$

En particular, tomando $V = U$, tendremos para toda función $f \in \mathcal{O}_U(U)$ que:

$$b_m \frac{d^n f}{dz^n} + \ldots + b_1 \frac{df}{dz} + b_0 f = a_n \frac{d^n f}{dz^n} + \ldots + a_1 \frac{df}{dz} + a_0 f.$$

Considerando $f(z) = 1$ tenemos que todas las derivadas se anulan y obtenemos la igualdad $a_0 = b_0$. Tomando ahora $f(z) = z$, todas las derivadas de orden mayor que 1 se anulan y obtenemos $b_1 + b_0 z = a_1 + a_0 z$. Como ya sabemos que $a_0 = b_0$, deducimos que $a_1 = b_1$. Así, recursivamente, considerando en el paso $(k+1)$-ésimo la función $f(z) = z^k$ (que anula todas las derivadas de orden mayor que k), deduciremos que $a_k = b_k$. En particular, $m = n$ y concluimos que los coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ son únicos.

$\square$

Definición 2.11. Un *operador diferencial lineal* en U es un endomorfismo $L : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$ para el cual existe un recubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ y una familia de enteros no negativos $\{n_i\}_{i \in I}$ tales que la restricción $L|_{U_i}$ es un operador diferencial lineal de orden menor o igual que n_i para cada $i \in I$. El conjunto de operadores diferenciales lineales en U se denotará por $\mathcal{D}(U)$.

Proposición 2.12. $\mathcal{D}(U)$ *es una sub-*$\mathbb{C}$*-álgebra de* $\operatorname{End}(\mathcal{O}_U)$.

Demostración. Sean $L, L' : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$ operadores diferenciales lineales, y sean $\{U_i\}_{i \in I}$ y $\{U'_j\}_{j \in J}$ recubrimientos por abiertos de U tales que $L|_{U_i}$ y $L'|_{U'_j}$ son operadores diferenciales lineales de orden menor o igual que n_i y n'_j, respectivamente, para todo i, j. Consideremos los abiertos $U_{ij} = U_i \cap U'_j$ con $i \in I$ y $j \in J$, que también constituyen un recubrimiento por abiertos de U. Entonces es claro que:

- $(L + L')\big|_{U_{ij}}$ es un operador diferencial de orden menor o igual que $\max\{n_i, n'_j\}$.
- $(L \circ L')\big|_{U_{ij}}$ es un operador diferencial lineal de orden menor o igual que $n_i + n'_j$ (por la linealidad de la derivada).
- dado $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda L\big|_{U_i}$ es un operador diferencial de orden menor o igual que n_i.

luego las tres operaciones definen operadores diferenciales lineales en U, y por tanto $\mathcal{D}(U)$ es sub-$\mathbb{C}$-álgebra de $\operatorname{End}(\mathcal{O}_U)$.

$\square$

De hecho, asociando a cada abierto $V \subset U$ la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathcal{D}(V)$ tendremos un subhaz de $End(\mathcal{O}_U)$:

Proposición 2.13. *La aplicación $\mathcal{D}_U : \mathcal{U} \to \mathrm{Alg}_{\mathbb{C}}$ dada por $\mathcal{D}_U(V) = \mathcal{D}(V)$ es un subhaz de $End(\mathcal{O}_U)$.*

Demostración. Claramente es un subprehaz, pues dados $V' \subset V \subset U$ abiertos y $L \in \mathcal{D}_U(V)$, existe $\{V_i\}_{i\in I}$ recubrimiento por abiertos de V con $L|_{V_i}$ operador diferencial de orden menor o igual que n_i, y basta tomar el recubrimiento de V' por los abiertos $V_i' = V_i \cap V'$ para tener que $L|_{V_i'}$ es un operador diferencial de orden menor o igual que n_i, de donde $L|_{V'} \in \mathcal{D}_U(V')$.

Sea ahora un abierto $V \subset U$, $\{V_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de V y $L_i \in \mathcal{D}_U(V_i)$ tales que $L_i|_{V_i\cap V_j} = L_j|_{V_i\cap V_j}$ para cualesquiera $i, j \in I$. Como $End(\mathcal{O}_U)$ es un haz, sabemos que existe $L \in \mathrm{End}(\mathcal{O}_V)$ tal que $L|_{V_i} = L_i$. Veamos que $L \in \mathcal{D}_U(V)$:

Para cada $i \in I$, existe $\{V_i^j\}_{j\in J_i}$ recubrimiento por abiertos de V_i tal que $L|_{V_i^j} = L_i|_{V_i^j}$ es un operador diferencial lineal de orden menor o igual que un cierto n_i^j. Basta tomar entonces el recubrimiento de V formado por todos estos abiertos $\{V_i^j \mid i \in I, j \in J_i\}$ y la familia de enteros $\{n_i^j \mid i \in I, j \in J_i\}$ para concluir que $L \in \mathcal{D}_U(V)$.

□

Recordemos del capítulo previo que la fibra de un haz $\mathcal{F}$ sobre un abierto U en un punto $p \in U$ es el límite inductivo de los espacios $\mathcal{F}(V)$ con V abierto de U y $p \in V$. A su vez, el límite inductivo se define como un objeto de la categoría (en este contexto, un $\mathbb{C}$-espacio vectorial) que satisface la propiedad universal de la Definición 1.8, que es único salvo isomorfismo único. En este caso, una de sus realizaciones, que nos permitirá trabajar con este concepto de forma más concreta, es la siguiente:

Consideremos el conjunto cociente $\mathcal{M}/\sim$, donde:

$$\mathcal{M} = \{(V, f) \mid V \text{ es un entorno abierto de } p \text{ en } U \text{ y } p \in \mathcal{F}(V)\}$$

y $\sim$ es la relación de equivalencia dada por:

$$(V, f) \sim (V', f') \iff \exists W \subset V \cap V' \text{ entorno abierto de } p \text{ con } f|_W = f'|_W.$$

Proposición 2.14. *Sea $\mathcal{F}$ un subhaz de $\mathcal{O}_U$, y sea $p \in U$, entonces $\mathcal{F}_p = \mathcal{M}/\sim$.*

Demostración. Primero hemos de ver que $\mathcal{M}/\sim$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Para ello, definimos la suma y el producto por escalar como sigue:

- $\overline{(V, f)} + \overline{(V', f')} = \overline{(V \cap V', f|_{V\cap V'} + f'|_{V\cap V'})}$.
- $\lambda \cdot \overline{(V, f)} = \overline{(V, \lambda f)}$.

y puede comprobarse fácilmente que estas operaciones están bien definidas.

Consideramos entonces los morfismos $\alpha_V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{M}/\sim$ dados por $\alpha_V(f) = \overline{(V, f)}$ para cada $V \subset U$ entorno abierto de p, que claramente verifican $\alpha_V = \alpha_W \circ r_{WV}$ para cada $W \subset V$ (pues f y $f|_W$ coinciden en W y por tanto dan lugar a la misma clase de equivalencia). Sea ahora X un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, y sean $g_V : \mathcal{F}(V) \to X$ aplicaciones lineales tales que $g_V = g_W \circ r_{WV}$ siempre que $W \subset V$, definamos $\theta : \mathcal{M}/\sim \to X$ dada por $\theta\left(\overline{(V, f)}\right) = g_V(f)$. Observemos que θ está bien definida, pues si $\overline{(V, f)} = \overline{(V', f')}$, existirá $W \subset V \cap V'$ tal que

$r_{WV}(f) = r_{WV'}(f')$, de manera que $g_V(f) = g_W(r_{WV}(f)) = g_W(r_{WV'}(f')) = g_{V'}(f')$. Entonces $(\theta \circ \alpha_V)(f) = \theta\left(\overline{(V,f)}\right) = g_V(f)$, de manera que $\theta \circ \alpha_V = g_V$ para todo $V \subset U$ entorno abierto de p y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}/\sim \arrow[rr, "\theta"] & & X \\
& \mathcal{F}(V) \arrow[ul, "\alpha_V"'] \arrow[ur, "g_V"] \arrow[d, "r_{WV}"] & \\
& \mathcal{F}(W) \arrow[uul, bend left, "\alpha_W"] \arrow[uur, bend right, "g_W"'] &
\end{tikzcd}
$$

Queda comprobar que θ es una aplicación lineal:

- $\theta\left(\overline{(V,f)} + \overline{(V',f')}\right) = \theta\left(\overline{(V \cap V', f|_{V\cap V'} + f'|_{V\cap V'})}\right) = g_{V\cap V'}(f|_{V\cap V'} + f'|_{V\cap V'}) = g_{V\cap V'}(f|_{V\cap V'}) + g_{V\cap V'}(f'|_{V\cap V'}) = g_V(f) + g_{V'}(f') = \theta\left(\overline{(V,f)}\right) + \theta\left(\overline{(V',f')}\right)$.
- $\theta\left(\lambda\overline{(V,f)}\right) = \theta\left(\overline{(V,\lambda f)}\right) = g_V(\lambda f) = \lambda \cdot g_V(f) = \lambda \cdot \theta\left(\overline{(V,f)}\right)$.

Por tanto, $\mathcal{M}/\sim$ satisface la propiedad universal del limite directo y en consecuencia, por unicidad (salvo isomorfismo único), $\mathcal{F}_p = \mathcal{M}/\sim$.

$\square$

Observación. Si $f \in \mathcal{F}(V)$, el germen de f en p será la clase de equivalencia del par (V,f) en $\mathcal{F}_p$ (y se denotará por f_p).

Proposición 2.15. *Dados $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $p \in U$, la fibra $\mathcal{O}_{U,p}$ es una $\mathbb{C}$-álgebra isomorfa al álgebra $\mathbb{C}\{z\}$ de las series de potencias en $\mathbb{C}$ convergentes.*

Demostración. Es claro que $\mathcal{O}_{U,p}$ es una $\mathbb{C}$-álgebra, pues basta definir el producto de gérmenes como:

$$\overline{(V,f)} \cdot \overline{(V',f')} = \overline{(V \cap V', f|_{V\cap V'} \cdot f'|_{V\cap V'})},$$

que está bien definido, ya que el producto de funciones holomorfas es holomorfa y, al igual que la suma y el producto por escalar, no depende del representante elegido.

Un resultado clásico del análisis complejo es que toda función holomorfa en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ es analítica (i.e. tiene un desarrollo en serie de potencias) en el mismo y viceversa. Este hecho nos permite construir la aplicación $T_p : \mathcal{O}_{U,p} \to \mathbb{C}\{z\}$ que a cada $f_p = \overline{(V,f)}$ le asocia la siguiente serie formal, que coincide con el desarrollo de Taylor de f en p evaluado en el punto $z + p$ y es por tanto convergente en un entorno de $z = 0$:

$$T_p(f_p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dz^n}(p) z^n.$$

Obsérvese que T_p está bien definido, ya que, por definición, dos representaciones cualesquiera de f_p van a coincidir en un entorno de p, y por tanto sus derivadas en p tomarán el mismo valor. Además será biyectiva, pues la inversa será la aplicación que asigne a cada serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ convergente en un entorno de $z = 0$ la fibra $f_p = \overline{(D, f)}$, siendo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n$ la función (analítica, y por tanto holomorfa) definida en el disco de convergencia D de la serie.

Por último, dado que el desarrollo de Taylor es lineal y el producto de funciones tiene por desarrollo de Taylor al producto de los desarrollos de cada una de ellas, tenemos que T_p es un homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras, y en consecuencia, isomorfismo.

$\square$

Proposición 2.16. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $p \in U$, entonces $\mathcal{O}_{U,p}$ es un anillo local con ideal maximal* $\mathfrak{m}_{U,p} = \{f_p = \overline{(V, f)} \in \mathcal{O}_{U,p} \mid f(p) = 0\}$.

Demostración. En la proposición anterior vimos que $\mathcal{O}_{U,p}$ es una $\mathbb{C}$-álgebra, luego en particular es un anillo. Observemos que $\mathfrak{m}_{U,p}$ está bien definido, ya que cualesquiera dos representantes de f_p han de coincidir en un entorno de f_p y por tanto toman el mismo valor en p. Además, tanto la suma de funciones que se anulan en p como el producto de cualquier función por una que se anula en p se anulan en p, y por tanto $\mathfrak{m}_{U,p}$ es un ideal.

Para ver que $\mathcal{O}_{U,p}$ es un anillo local, es suficiente probar que todo elemento de $\mathcal{O}_{U,p}$ que no se encuentre en $\mathfrak{m}_{U,p}$ es una unidad, lo que asegurará que $\mathfrak{m}_{U,p}$ es el único ideal maximal:

Sea entonces $f_p = \overline{(V, f)} \notin \mathfrak{m}_{U,p}$, tenemos que $f(p) \neq 0$, y por continuidad existe un entorno abierto W de p en el cual f no se anula. Definimos ahora $g : W \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = 1/f(z)$. Como f no se anula en W, g será holomorfa en dicho entorno, y podemos considerar su fibra $g_p = \overline{(W, g)}$. Tenemos así que $f_p \cdot g_p = \overline{(V, f)} \cdot \overline{(W, g)} = \overline{(V \cap W, 1)} = 1$, de manera que f_p es una unidad y en consecuencia $\mathfrak{m}_{U,p}$ es un ideal maximal.

$\square$

El concepto de fibra nos permite demostrar de manera alternativa el conocido principio de prolongación analítica, el cual sostiene que si dos funciones holomorfas en un cierto abierto conexo U coinciden en un abierto no vacío $V \subset U$, entonces son iguales en todo U.

Proposición 2.17. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo no vacío, y sea $p \in U$, la aplicación lineal $\pi_p : \mathcal{O}_U(U) \to \mathcal{O}_{U,p}$ dada por $\pi_p(f) = f_p$ es inyectiva.*

Demostración. Como π_p es lineal, basta ver que si $f_p = 0$, entonces $f = 0$. Por ello, supongamos que $f_p = 0$ y consideremos el conjunto $A = \{q \in U \mid f_q = 0 \text{ en } \mathcal{O}_{U,q}\} \subset U$.

Por un lado, A es abierto, pues si $q \in A$, $f_q = 0$ y por tanto existe $W \subset U$ entorno abierto de q tal que $f = 0$ en W. Pero entonces $f_w = 0$ para todo $w \in W$, de donde $q \in W \subset A$, con lo que A es abierto.

Veamos que también es cerrado, probando que $U \setminus A$ es abierto. Sea $q \in U \setminus A$, entonces $f_q \neq 0$ y distinguimos dos casos:

- Si $f(q) \neq 0$, entonces, por continuidad, existe $D \subset U$ disco abierto centrado en q tal que $f(r) \neq 0$ para todo $r \in D$.
- Si $f(q) = 0$, dado que los ceros de las funciones holomorfas no nulas son puntos aislados, existe $D \subset U$ disco abierto centrado en q con $f(r) \neq 0$ para todo $r \in D \setminus \{q\}$.

En cualquier caso, en cualquier entorno de todo punto de D se tiene que $f \neq 0$, luego $f_r \neq 0$ para todo $r \in D$ y por tanto, $q \in D \subset U \setminus A$, de donde $U \setminus A$ es abierto y, por tanto, A es cerrado.

Finalmente, A es no vacío puesto que $p \in A$, y dado que al ser U conexo los únicos conjuntos abiertos y cerrados de U son el vacío y el total, deducimos que $A = U$, que es tanto como decir que $f = 0$ en U. Concluimos que π_p es inyectiva para todo $p \in U$.

□

Corolario 2.18 (Principio de prolongación analítica)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, y sea $V \subset U$ un abierto no vacío, la restricción $r_{VU} : \mathcal{O}_U(U) \to \mathcal{O}_U(V)$ es inyectiva.*

Demostración. Supongamos que existen $f, g \in \mathcal{O}_U(U)$ tales que $f|_V = g|_V$. Podemos suponer que V es conexo, pues de lo contrario tomaríamos cualquiera de sus componentes conexas. Entonces, para todo $p \in V, f_p = g_p$ $(i.e.\ \pi_p(f) = \pi_p(g))$. Pero por la proposición anterior, π_p es inyectiva, de donde $f = g$.

□

La siguiente proposición caracteriza los operadores diferenciales lineales cuando el abierto U en el que están definidos es conexo:

Proposición 2.19. *Si U es un abierto conexo y $L \in \mathcal{D}(U)$, existe un entero $n \geq 0$ tal que L es un operador diferencial lineal de orden menor o igual que n.*

Demostración. Por definición, sabemos que existe un recubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ de U y unos enteros no negativos n_i tales que cada $L|_{U_i}$ es un operador diferencial lineal de orden menor o igual que n_i. Si el recubrimiento de U es el propio U no hay nada que probar. En caso contrario, por ser U conexo, cada par (U_i, U_j) estará conectado por una sucesión de abiertos $U_i = U_{i_1}, \ldots, U_{i_r} = U_j$ tales que $U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}} \neq \emptyset$ para todo $k = 1, \ldots, r-1$.

Consideremos entonces dos abiertos cualesquiera del recubrimiento de intersección no vacía, digamos U_1 y U_2, tales que $L|_{U_i}$ sea un operador diferencial lineal de orden menor o igual que n_i y coeficientes a_{ik} con $k = 0, \ldots, n_i$ $(i = 1, 2)$. Por unicidad, tendremos que los coeficientes a_{1k} y a_{2k} coinciden en la intersección. En particular, por el principio de prolongación analítica, tendremos que $n_1 = n_2$, ya que si un coeficiente a_{ik} es nulo en la intersección, será nulo en todo U_i.

Por tanto, $n_i = n_j = n$ para cualesquiera $i, j \in I$ y además los coeficientes de $L|_{U_i}$ y $L|_{U_j}$ coinciden en las intersecciones de los abiertos. Como los coeficientes son holomorfos, por la propiedad de pegado de $\mathcal{O}_U$, existen unos únicos $a_k \in \mathcal{O}(U)$ $(k = 0, \ldots, n)$ tales que restringidos a cada U_i coinciden con el coeficiente a_{ik} de $L|_{U_i}$. Por la propiedad de unicidad de $\mathcal{D}_U$ estos han de ser los coeficientes de L, de manera que resulta un operador diferencial lineal de orden menor o igual que n en U, concluyendo la demostración.

□

Proposición 2.20. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, y sea $V \subset U$ un abierto no vacío. Entonces, la restricción $\mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(V)$ es inyectiva.*

Demostración. Por la Proposición 2.19, tenemos que cualquier operador diferencial en U es de la forma $L = a_n \frac{d^n}{dz^n} + \ldots + a_1 \frac{d}{dz} + a_0$ con $a_i \in \mathcal{O}(U)$ para todo $i = 0, \ldots, n$. Sean, pues, $L = a_n \frac{d^n}{dz^n} + \ldots + a_1 \frac{d}{dz} + a_0$ y $L' = b_m \frac{d^m}{dz^m} + \ldots + b_1 \frac{d}{dz} + b_0$ operadores diferenciales en U tales que $L|_V = L'|_V$. En tal caso, para todo $W \subset V$ tendremos que:

$$a_n|_W \frac{d^n}{dz^n} + \ldots + a_1|_W \frac{d}{dz} + a_0|_W = b_m|_W \frac{d^m}{dz^m} + \ldots + b_1|_W \frac{d}{dz} + b_0|_W.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $m \geq n$, de manera que:

$$b_m\big|_W \frac{d^m}{dz^m} + \ldots + (b_n - a_n)\big|_W \frac{d^n}{dz^n} + \ldots (b_1 - a_1)\big|_W \frac{d}{dz} + (b_0 - a_0)\big|_W = 0.$$

Ahora bien, por el Lema 2.10 los coeficientes del operador nulo han de ser todos nulos, de donde deducimos que:

$$b_m\big|_W = \ldots = (b_n - a_n)\big|_W = \ldots = (b_1 - a_1)\big|_W = (b_0 - a_0)\big|_W = 0.$$

Finalmente, aplicando el Corolario 2.18 a las funciones anteriores, tenemos que $b_m = \ldots = b_n - a_n = \ldots = b_1 - a_1 = b_0 - a_0 = 0$, y por tanto $L = L'$.

□

2.3. Versión en teoría de haces del Teorema de Cauchy

Para seguir nuestro estudio necesitamos introducir los conceptos de *haz constante* y *localmente constante*, cuyas definiciones quedarán justificadas más adelante. Estos pueden ser definidos con total generalidad en cualquier haz, pero para nuestros propósitos será suficiente considerar subhaces de $\mathcal{O}_U$:

Definición 2.21. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, y sea $\mathcal{F}$ un subhaz de $\mathcal{O}_U$:

a) Cuando U sea conexo, diremos que $\mathcal{F}$ es *constante* si para todo $p \in U$ la aplicación $\pi_p : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_p$ dada por $\pi_p(f) = f_p$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales.

b) Diremos que $\mathcal{F}$ es *localmente constante* o un *sistema local* si existe $\{U_i\}_{i \in I}$ recubrimiento de U por abiertos conexos tal que $\mathcal{F}|_{U_i}$ es constante para todo $i \in I$.

Proposición 2.22. *Sea $\mathcal{F}$ un subhaz de $\mathcal{O}_U$ localmente constante, la función $d : U \to \mathbb{N}$ dada por $d(p) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}_p)$ es localmente constante.*

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es localmente constante, existe $\{U_i\}_{i \in I}$ recubrimiento por abiertos de U tal que $\mathcal{F}|_{U_i}$ es constante para todo $i \in I$. Entonces, dado $p \in U$ e $i \in I$ tal que $p \in U_i$, tenemos que $\mathcal{F}|_{U_i}(U_i) \cong \mathcal{F}_p$. Si ahora tomamos $q \in U_i$, tenemos igualmente que $\mathcal{F}|_{U_i}(U_i) \cong \mathcal{F}_q$, de manera que $\mathcal{F}_q \cong \mathcal{F}_p$ para todo $q \in U_i$ y por tanto tienen la misma dimensión. De esta manera, $d(q) = d(p)$ para todo $q \in U_i$, de donde d es localmente constante.

□

Corolario 2.23. *Si U es conexo y $\mathcal{F}$ es un subhaz de $\mathcal{O}_U$ localmente constante, entonces $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}_p)$ es constante para todo $p \in U$.*

Demostración. Al ser U conexo, dados dos puntos $p, q \in U$, ha de existir una sucesión $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ de abiertos del recubrimiento tales que $p \in U_{i_1}, q \in U_{i_n}$ y $U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}} \neq \emptyset$ para todo $k = 1, \ldots, n-1$. Por la proposición anterior, la función d es constante en cada uno de estos abiertos, y dado que estos tienen intersección no vacía, ha de tomar el mismo valor en todos ellos, de donde $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}_p) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}_q)$.

□

Definición 2.24. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto conexo, y sea $\mathcal{F}$ un subhaz de $\mathcal{O}_U$ localmente constante para el que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}_p) = r$ para todo $p \in U$, diremos que $\mathcal{F}$ es un *subhaz localmente constante de rango* r.

Todo haz constante es, en particular, localmente constante. La siguiente proposición establece una condición suficiente para que se verifique el recíproco. Su prueba se basa en un argumento de topología general y puede encontrarse en [8] (capítulo IV, Proposición 4.20):

Proposición 2.25. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo, entonces todo subhaz de $\mathcal{O}_U$ localmente constante es constante.*

Caracterizamos ahora los haces constantes:

Proposición 2.26. *Sea U abierto conexo y $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_U$ un subhaz, son equivalentes:*

(1) $\mathcal{F}$ es constante.

(2) Para todo $U' \subset U$ abierto conexo no vacío, la restricción $r_{U'U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U')$ es un isomorfismo.

(3) Para cada $p \in U$ y para cada $V \subset U$ disco abierto de centro p, la restricción r_{VU} : $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ es un isomorfismo.

Demostración. La implicación $2 \Rightarrow 3$ es trivial. Veamos las otras dos:

$(1 \Rightarrow 2)$ Dado $U' \subset U$ abierto conexo no vacío, por la Proposición 2.18, tenemos que $r_{U'U}$ es inyectiva. Basta ver, pues, que también es sobreyectiva: dada $f \in \mathcal{F}(U')$, y dado $p \in U'$, consideramos la fibra de f en p. Como $\mathcal{F}$ es constante, existe $g \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\pi_p(g) = g_p = f_p$. Entonces, existe $W \subset U'$ entorno abierto de p con $f|_W = g|_W$, de manera que f y $g|_{U'}$ coinciden en todo W. Como U' es conexo, nuevamente por la Proposición 2.18, tenemos que $f = g|_{U'} = r_{U'U}(g)$, concluyendo que $r_{U'U}$ es sobreyectiva, y por tanto isomorfismo.

$(3 \Rightarrow 1)$ Sea $p \in U$, por la Proposición 2.17 sabemos que $\pi_p : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_p$ es inyectiva. Para ver que es sobreyectiva, consideremos $g_p = \overline{(U', g)} \in \mathcal{F}_p$ con U' entorno abierto de p. Como los discos abiertos de centro p son una base de entornos de p, existe $V \subset U'$ disco abierto de centro p. Entonces, $g|_V \in \mathcal{F}(V)$, y como por hipótesis, la restricción r_{VU} es sobreyectiva, existe $h \in \mathcal{F}(U)$ tal que $h|_V = g|_V$. Puesto que g y h coinciden en V, dan lugar a la misma fibra, luego $\pi_p(h) = h_p = g_p$. Concluimos que π_p es isomorfismo para todo $p \in U$, y en consecuencia $\mathcal{F}$ es constante.

□

Proposición 2.27. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto conexo no vacío, se tiene que:*

(1) Cualquier subhaz constante $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_U$ queda completamente determinado por el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathcal{F}(U)$.

(2) Para cada subespacio vectorial $E \subset \mathcal{O}_U(U)$ existe un único subhaz constante $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_U$ tal que $\mathcal{F}(U) = E$.

Demostración.

(1) Basta demostrar que para cada $V \subset U$, $\mathcal{F}(V)$ es justamente el espacio vectorial de las funciones que localmente son restricciones de las de $\mathcal{F}(U)$. Para ello, tomamos un recubrimiento de V por abiertos conexos $\{V_i\}_{i \in I}$. Por la Proposición 2.26, la restricción $r_{V_i U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V_i)$ es un isomorfismo, luego para cada $f \in \mathcal{F}(V)$ y para cada $i \in I$, como $f|_{V_i} \in \mathcal{F}(V_i)$, existe $g_i \in \mathcal{F}(U)$ tal que $f|_{V_i} = g_i\big|_{V_i}$.

(2) Para cada abierto $V \subset U$ definimos $\mathcal{F}_0(V) = \{g|_V \mid g \in E\}$. Es claro que $\mathcal{F}_0$ es un prehaz. Sea $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0)^+$ su haz asociado, veamos que $\mathcal{F}$ es constante: sea $p \in U$ y $V \subset U$ disco abierto de centro p, dada $f \in \mathcal{F}(V)$, por definición de haz asociado existe $V' \subset V$ entorno abierto de p y existe $g \in E$ tal que $f|_{V'} = g|_{V'}$. Como V es conexo, por el principio de prolongación analítica (Corolario 2.18), $f = g|_V = r_{VU}(g)$, luego r_{VU} es sobreyectiva (y también es inyectiva por el mismo principio). Por tanto, r_{VU} es un isomorfismo, y por la Proposición 2.26, $\mathcal{F}$ es constante. Además, $\mathcal{F}(U) = E$:

Por un lado, es claro que $E = \mathcal{F}_0(U) \subset \mathcal{F}(U)$. Recíprocamente, si $f \in \mathcal{F}(U)$, para cada $p \in U$ existe un entorno abierto V_p de p y existe $g \in E \subset \mathcal{O}_U(U)$ tal que $f|_{V_p} = g|_{V_p}$. Por el principio de prolongación analítica, $f = g \in E$, luego $\mathcal{F}(U) = E$. Finalmente, la unicidad de $\mathcal{F}$ se tiene por el punto (1).

□

Recordemos el concepto de fibra de un morfismo de haces en un punto expuesto en el capítulo anterior. Para un endomorfismo $L : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$ y un cierto $p \in U$, a partir de la construcción de la fibra de la Proposición 2.14, la *fibra de L en p* es la aplicación lineal $L_p : \mathcal{O}_{U,p} \to \mathcal{O}_{U,p}$ dada por:

$$L_p(f_p) = L_p\left(\overline{(V,f)}\right) = (L_V(f))_p \text{ si } f \in \mathcal{O}_U(V).$$

Observación. La aplicación L_p está bien definida, pues si $\overline{(V,f)} = \overline{(V',g)}$, existe un abierto $W \subset V \cap V'$ con $p \in W$ y $f|_W = g|_W$, de manera que $L_V(f)|_W = L_W(f|_W) = L_W(g|_W) = L'_V(g)|_W$, y por tanto tienen la misma fibra en p. La linealidad se deduce de la definición de las operaciones en la fibra y de la linealidad de las aplicaciones L_V.

Para el estudio de las soluciones de una ecuación diferencial será fundamental la distinción entre *puntos regulares* y *singulares* del operador diferencial asociado:

Definición 2.28. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, y $L = a_n \frac{d^n f}{dz^n} + \ldots + a_1 \frac{df}{dz} + a_0 : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$ un operador diferencial lineal de orden n, decimos que $p \in U$ es un *punto regular* de L si $a_n(p) \neq 0$. En otro caso, se dirá que p es un *punto singular* de L. El conjunto de puntos singulares lo denotaremos por $\Sigma(L)$.

Observación. El conjunto $\Sigma(L)$ está constituido por puntos aislados, ya que corresponde a los ceros de una función holomorfa no nula. En particular, es cerrado.

Tenemos ya todo lo necesario para reformular el Teorema de Cauchy:

Teorema 2.29. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $L : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$ un operador diferencial de orden n. Si definimos el abierto $U_0 = U \setminus \Sigma(L)$, se cumple que:*

(1) El haz restricción $\mathcal{L} = \ker L\big|_{U_0}$ es un sistema local de rango n.

(2) El endomorfismo restricción $L|_{U_0} : \mathcal{O}_{U_0} \to \mathcal{O}_{U_0}$ es sobreyectivo.

(3) Si p es un punto singular de L, $\ker L_p$ es un espacio vectorial complejo de dimensión menor o igual que n.

Demostración.

(1) Sea $V \subset U_0$ un disco abierto no vacío y $p \in V$. Dado que $\ker L$ es justamente el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial $L(f) = 0$ y V no tiene puntos singulares, tras convertir dicha ecuación en un sistema lineal como la ecuación 2.4, podemos aplicar el Teorema 2.2 en cualquier disco abierto $W \subset V$ de centro p con $B = 0$ (y por tanto $\mathcal{S} = \ker L_W$), de manera que $\mathcal{L}(W) = \ker L_W \cong \mathbb{C}^n$. Por composición de isomorfismos, tenemos entonces que la restricción $\mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(W)$ es un isomorfismo. Como esto se tiene para cualquier $p \in V$, por la Proposición 2.26, $\mathcal{L}|_V$ es un haz constante.

Tomando entonces un recubrimiento de U_0 por discos abiertos no vacíos $\{V_i\}_{i \in I}$, tendremos que $\mathcal{L}|_{V_i}$ será constante para todo $i \in I$, y por tanto $\mathcal{L}$ será un haz localmente constante. Como U_0 es conexo por serlo U, para todo $p \in U_0$, tomando un disco abierto V de centro p, tendremos que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}_p) = \dim_{\mathbb{C}}((\mathcal{L}|_V)_p) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}(V)) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n$, de donde el rango de $\mathcal{L}$ es n.

(2) Como U_0 no tiene puntos singulares, podemos aplicar el Corolario 2.4 para deducir que, dado un disco abierto $V \subset U_0$ y $f \in \mathcal{O}_{U_0}(V)$, la ecuación $L_V(y) = f$ siempre tiene solución. Pero entonces, dado $p \in U_0$ y $f_p = \overline{(V, f)} \in \mathcal{O}_{U_0,p}$, existe $g \in \mathcal{O}_{U_0}(V)$ con $L_V(g) = f$, de manera que $L_p(g_p) = (L_V(g))_p = f_p$, luego $L_p : \mathcal{O}_{U_0,p} \to \mathcal{O}_{U_0,p}$ es sobreyectiva para todo $p \in U_0$. Esto implica por la Proposición 1.33 que $L|_{U_0}$ es sobreyectivo.

(3) Sea V un disco centrado en p lo suficientemente pequeño para que no contenga más puntos singulares, observamos en primer lugar que la aplicación de paso a la fibra $\pi_p : \ker L_V \to \ker L_p$ es un isomorfismo:

- Inyectividad: se tiene por la Proposición 2.17.
- Sobreyectividad: sea $g_p \in \ker L_p$, existe $V' \subset V$ entorno abierto de p y $g \in \ker L_{V'}$ tal que $g_p = \overline{(V', g)}$. Pero como V no contiene más puntos singulares, g puede extenderse a todo V aplicando sucesivamente el Teorema de Cauchy sobre la ecuación $L(f) = 0$: en un primer paso, se aplica sobre discos centrados en puntos de la frontera de V' (por unicidad, la solución encontrada en estos discos ha de coincidir con g en la intersección con V') y se reitera el proceso con los nuevos puntos frontera hasta cubrir completamente todo V, momento en que tendremos definida una función h de $\ker L_V$ que coincidirá con g en V'. De esta manera, $\pi_p(h) = h_p = g_p$ y obtenemos la sobreyectividad de π_p.

Sea ahora $W \subset V \setminus \{p\}$ un disco abierto, como no contiene puntos singulares, por el punto (1) tenemos que $\ker L_W$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión n. Pero por el principio de prolongación analítica, la restricción $\ker L_V \to \ker L_W$ es inyectiva, luego $\dim_{\mathbb{C}}(\ker L_p) = \dim_{\mathbb{C}}(\ker L_V) \leq \dim_{\mathbb{C}}(\ker L_W) = n$, concluyendo el resultado.

□

Corolario 2.30. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo y $L : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$ un operador diferencial lineal de orden n sin puntos singulares. Entonces $L_U : \mathcal{O}_U(U) \to \mathcal{O}_U(U)$ es sobreyectiva, es decir, la ecuación diferencial $L(y) = g$ siempre tiene una solución holomorfa para todo $g \in \mathcal{O}_U(U)$.*

Nota. La prueba se basa en un argumento de cohomología de haces. Sin embargo, dado que esta es la única prueba en la que vamos a hacer uso de ella y para su correcto entendimiento es necesario explicar multitud de conceptos como resoluciones inyectivas y proyectivas, homología y cohomología, funtores derivados, etc., prescindiremos de los detalles. Una buena referencia para ahondar en este tema es [15].

Demostración. Consideremos la siguiente sucesión exacta de haces, de acuerdo con la Proposición 1.35 (L es sobreyectivo por el teorema anterior ya que U no tiene puntos singulares, luego $\operatorname{coker} L = 0$):

$$0 \to \ker L \to \mathcal{O}_U \xrightarrow{L} \mathcal{O}_U \to 0.$$

Esta sucesión da lugar a una sucesión exacta de cohomología (Teorema 6.43 y Proposición 6.70 de [15]):

$$0 \to \ker L_U \to \mathcal{O}_U(U) \xrightarrow{L_U} \mathcal{O}_U(U) \to H^1(U, \ker L) \to \dots$$

Un resultado de cohomología de haces establece que si $\mathcal{F}$ es un haz constante en un abierto simplemente conexo, entonces $H^i(U, \mathcal{F}) = 0$ para todo $i \geq 1$ (ver, por ejemplo, en [8], Teorema II.3.5). Por el Teorema 2.29 y la Proposición 2.25, $\ker L$ es un haz constante, y al ser U simplemente conexo, tenemos que $H^1(U, \ker L) = 0$. Entonces, por exactitud, L_U es sobreyectiva, y por tanto toda ecuación de la forma $L(y) = g$ con $g \in \mathcal{O}_U(U)$ tendrá solución en $\mathcal{O}_U(U)$.

□

Capítulo 3

Funciones multiformes

En el capítulo anterior hemos caracterizado las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales cuando el operador diferencial asociado no tiene puntos singulares en su dominio. Nos dirigimos ahora hacia el estudio del comportamiento de los operadores diferenciales en el entorno de puntos singulares. Para ello, será necesario en primer lugar introducir las funciones multiformes y sus propiedades. En este capítulo nos encargaremos de ello.

3.1. Espacios recubridores

Empecemos recordando algunos conceptos básicos de topología algebraica que serán fundamentales para la construcción de las funciones multiformes:

Definición 3.1. Sean X y $\tilde{X}$ espacios topológicos y $q : \tilde{X} \to X$ una aplicación continua, se dice que el par $(\tilde{X}, q)$ es un *recubrimiento* o *espacio recubridor* de X si para todo $x \in X$ existe $V_x \subset X$ entorno abierto de x tal que $q^{-1}(V_x)$ es una unión disjunta de conjuntos abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ de $\tilde{X}$, siendo $q|_{U_i} : U_i \to V_x$ un homeomorfismo para cada $i \in I$. La aplicación q se denomina *aplicación recubridora*.

Cuando el espacio recubridor es simplemente conexo y localmente conexo por caminos, verifica la siguiente propiedad de universalidad. Su demostración puede encontrarse en [14]:

Proposición 3.2. *Sea X un espacio topológico conexo y localmente conexo por caminos, y sea (Y, q) un recubrimiento de X tal que Y es simplemente conexo y localmente conexo por caminos. Se verifica que:*

(1) Dado otro recubrimiento (Y', q') de X, existe una aplicación recubridora $h : Y \to Y'$ tal que $q' \circ h = q$ (es decir, Y es recubrimiento de cualquier otro recubrimiento de X).

(2) Si además X es simplemente conexo, h es un homeomorfismo.

(3) Si (Y', q') es otro recubrimiento de X con Y' simplemente conexo y localmente conexo por caminos, entonces $Y \cong Y'$.

Este resultado justifica la siguiente definición:

Definición 3.3. Si (Y, q) es un espacio recubridor de X e Y es simplemente conexo y localmente conexo por caminos, se dice que Y es un *recubrimiento* o *espacio recubridor universal*.

Definición 3.4. Sea X un espacio topológico, y sean (Y_1, q_1) y (Y_2, q_2) dos espacios recubridores de X, diremos que una aplicación continua $\varphi : Y_1 \to Y_2$ es un *homomorfismo* de (Y_1, q_1) en (Y_2, q_2) si se cumple que $q_2 \circ \varphi = q_1$. Diremos que φ es un *isomorfismo* si además es un homeomorfismo (o equivalentemente, existe ψ homomorfismo de (Y_2, q_2) en (Y_1, q_1) tal que $\varphi \circ \psi$ y $\psi \circ \varphi$ son las identidades correspondientes). Un isomorfismo de un espacio recubridor en sí mismo se denominará *automorfismo*.

De acuerdo con la Proposición 3.2, dos recubrimientos universales cualesquiera de X serán isomorfos. Es más, si consideramos espacios punteados, es decir, pares (X, x_0) formados por un espacio topológico X y un punto $x_0 \in X$ (denominado *punto base*) y exigimos que los homomorfismos entre ellos lleven punto base en punto base, entonces el isomorfismo existente entre dos recubrimientos universales de (X, x_0) es único. Es por ello que se suele hablar de "*el recubrimiento universal de* (X, x_0)".

Por otro lado, es claro que el conjunto de automorfismos de un espacio recubridor (Y, q) es un grupo con la composición de aplicaciones. Este grupo se denotará por $\mathrm{Aut}(q)$, y vendrá dado por:

$$\mathrm{Aut}(q) = \{\varphi : Y \to Y \mid \varphi \text{ es homeomorfismo y } q \circ \varphi = q\}.$$

Para construir el recubrimiento universal de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ con punto base 1, recurrimos a la exponencial compleja, cuya definición es:

$$exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

y verifica las siguientes propiedades:

- Es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y su imagen es $\mathbb{C}^*$.
- $e^z = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ con $z = 2k\pi i$.
- $e^{z+w} = e^z \cdot e^w \ \ \forall w, z \in \mathbb{C}$.
- $e^{-z} = 1/e^z \ \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Proposición 3.5. *El par* $(\mathbb{C}, q)$ *con* $q : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^*, 1)$ *dada por* $q(w) = e^{2\pi i w}$ *es el recubrimiento universal de* $(\mathbb{C}^*, 1)$ *y el grupo de automorfismos es un grupo cíclico infinito dado por* $\mathrm{Aut}(q) = \langle M \rangle$*, siendo* $M : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *tal que* $M(w) = w + 1$.

Demostración. Veamos primero que es un recubrimiento (y será universal puesto que $\mathbb{C}$ es simplemente conexo y localmente conexo por caminos):

Sea $z \in \mathbb{C}^*$, tomemos el entorno abierto $V_z = \mathbb{C} \setminus \{\rho e^{2\pi i a} \mid \rho > 0\}$ con $a \in [0, 1)$ tal que el argumento de z en $[0, 2\pi)$, $Arg(z)$, no sea $2\pi a$ (por ejemplo, para cualquier z que no esté en el eje real positivo se podría tomar $a = 0$). Es claro que $q^{-1}(V_z) = \sqcup_{k \in \mathbb{Z}} W_k$ con $W_k = \{k + z \mid z \in \mathbb{C}, Re(z) \in (a, a + 1)\}$ y que $q|_{W_k} : W_k \to V_z$ es biyectiva para todo k. Pero al ser holomorfa y biyectiva, cada $q|_{W_k}$ es biholomorfa (su inversa es holomorfa), y en particular un homeomorfismo. Por tanto, $(\mathbb{C}, q)$ es un recubrimiento universal de $\mathbb{C}^*$. Hallemos su grupo de automorfismos:

Sea $\alpha \in \mathrm{Aut}(q)$, entonces $q(\alpha(w)) = q(w)$, es decir, $e^{2\pi i\alpha(w)} = e^{2\pi i w}$. De aquí, $e^{2\pi i(\alpha(w)-w)} = 1$, y por tanto, para cada $w \in \mathbb{C}$, existe $k(w) \in \mathbb{Z}$ tal que $2\pi i \cdot (\alpha(w) - w) = 2\pi i \cdot k(w)$, de manera que $k(w) = \alpha(w) - w$. Dado que α es continua, $k : \mathbb{C} \to \mathbb{Z}$ también lo es, y puesto que $\mathbb{C}$ es conexo, $k(\mathbb{C}) \subset \mathbb{Z}$ también ha de serlo. Pero los únicos conjuntos conexos no vacíos de $\mathbb{Z}$ son los formados por un único punto, luego existe $K \in \mathbb{Z}$ tal que $k(w) = K$ para todo $w \in \mathbb{C}$, de manera que $\alpha(w) = w + K$, es decir $\alpha = M^K \in \langle M \rangle$. Además es claro que todo elemento de la forma $M^K \in \langle M \rangle$ con $K \in \mathbb{Z}$ es un automorfismo de q, pues claramente es homeomorfismo y $(q \circ M^K)(w) = e^{2\pi i(w+K)} = e^{2\pi i w} \cdot e^{2\pi i K} = e^{2\pi i w} = q(w)$ para todo $w \in \mathbb{C}$. Concluimos que $\mathrm{Aut}(q) = \langle M \rangle$.

$\square$

3.2. Funciones multiformes y determinaciones

Si denotamos por D_R el disco abierto de centro 0 y radio $R \in (0, \infty)$, $D_R^* = D_R \setminus \{0\}$ y $\widetilde{D_R^*} = q^{-1}(D_R^*) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid Im\ z > -\frac{\log R}{2\pi}\right\}$, es claro que $\left(\widetilde{D_R^*}, q|_{\widetilde{D_R^*}}\right)$ es un recubrimiento universal de D_R^*. Esto nos permite definir las funciones multiformes en este abierto:

Definición 3.6. Diremos que $f : \widetilde{D_R^*} \to \mathbb{C}$ es una *función holomorfa multiforme en* D_R^* si es una función holomorfa en $\widetilde{D_R^*}$. El conjunto de funciones holomorfas multiformes en D_R^* se denotará por $\mathcal{A}_R^0$.

Observación. Dado que $\widetilde{D_R^*}$ es abierto y $\mathcal{A}_R^0 = \mathcal{O}\left(\widetilde{D_R^*}\right)$, es claro que $\mathcal{A}_R^0$ es una $\mathbb{C}$-álgebra conmutativa.

Ejemplos:

Veamos algunos ejemplos de funciones multiformes en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, que serán elementos de $\mathcal{A}_\infty^0$:

- La función identidad $w \in \mathbb{C} \mapsto w \in \mathbb{C}$ es un elemento de $\mathcal{A}_\infty^0$, que, vista como función multiforme, denotaremos por $\mathrm{Log}\, z$.
- Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, la función $w \in \mathbb{C} \mapsto e^{2\pi i\alpha w} \in \mathbb{C}$ es un elemento de $\mathcal{A}_\infty^0$, que, como función multiforme, denotaremos por z^α.

Posteriormente quedará justificada la elección de esta notación.

Lema 3.7. *La aplicación* $\phi : \mathcal{O}(D_R^*) \to \mathcal{A}_R^0$ *dada por* $\phi(f) = f \circ q$ *es inyectiva.*

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{O}(D_R^*)$ tales que $f \circ q = g \circ q$. Dado $z \in D_R^*$, sabemos que existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $z = e^{2\pi i w} = q(w)$, luego $f(z) = (f \circ q)(w) = (g \circ q)(w) = g(z)$ y por tanto f y g coinciden en todo D_R^*, de donde ϕ es inyectiva.

$\square$

Observación. El lema anterior nos indica que podemos tratar $\mathcal{O}(D_R^*)$ como una sub-$\mathbb{C}$-álgebra de $\mathcal{A}_R^0$, de manera que las funciones de $\mathcal{O}(D_R^*)$ las podremos ver como funciones multiformes con la identificación $f \equiv \phi(f) \in \mathcal{A}_R^0$. Por ello, a partir de ahora, para distinguir las funciones de $\mathcal{O}(D_R^*)$ de las funciones multiformes, a las primeras las llamaremos *uniformes* o *univaluadas*.

Definimos ahora el operador de monodromía en $\mathcal{A}_R^0$, que resultará fundamental en lo que sigue:

Definición 3.8. Llamamos *operador de monodromía* al automorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $T : \mathcal{A}_R^0 \to \mathcal{A}_R^0$ dado por $T(g) = g \circ M$.

La siguiente proposición muestra que las funciones de $\mathcal{O}(D_R^*)$ son justamente los puntos fijos de T:

Proposición 3.9. *Dado $R \in (0, \infty)$, se verifica que $\mathcal{O}(D_R^*) = \{g \in \mathcal{A}_R^0 \mid T(g) = g\}$.*

Demostración. Es claro que si $g \in \mathcal{O}(D_R^*)$, entonces $T(\phi(g)) = T(g \circ q) = g \circ q \circ M = g \circ q = \phi(g)$, luego vista en $\mathcal{A}_R^0$, $T(g) = g$. Recíprocamente, sea $g \in \mathcal{A}_R^0$ tal que $T(g) = g$ (i.e. $g(w) = g(w + 1)$ para todo $w \in \widetilde{D_R^*}$), hemos de ver que existe $f \in \mathcal{O}(D_R^*)$ tal que $g = \phi(f) = f \circ q$:

Definimos $f(z) = g(w)$ donde w es tal que $q(w) = z$. Nótese que está bien definida, pues tal w existe al ser $z \neq 0$, y si w' también verifica $q(w') = z$ entonces $w - w' = k$ para un cierto $k \in \mathbb{Z}$, de manera que $g(w) = g(w' + k) = g(w')$. Además f verifica que $f \circ q = g$. Para probar que f es holomorfa, consideramos $z_0 \in D_R^*$ y $w_0 \in \widetilde{D_R^*}$ tal que $q(w_0) = z_0$. Por ser q un recubrimiento, existe un entorno abierto $V_0 \subset D_R^*$ de z_0 y un entorno abierto $\widetilde{V_0} \subset \widetilde{D_R^*}$ de w_0 tal que $q|_{\widetilde{V_0}} : \widetilde{V_0} \to V_0$ es biyectiva (y por tanto biholomorfa). Entonces, q tiene una inversa local en $\widetilde{V_0}$ que también es holomorfa, resultando $f|_{V_0} = g \circ (q|_{\widetilde{V_0}})^{-1}$ holomorfa por composición. Como esta propiedad es de carácter local y el z_0 elegido es arbitrario, concluimos que f es holomorfa en D_R^*, y con ello que $g \in \mathcal{O}(D_R^*)$ (vista como función univaluada).

□

Definamos ahora las determinaciones de una función holomorfa multiforme. El ejemplo clásico son las ramas del logaritmo complejo como inversas locales de la función exponencial:

Definición 3.10. Sea g una función holomorfa multiforme en un cierto D_R^* y $U \subset D_R^*$ un abierto simplemente conexo, se dice que una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(U)$ es una *determinación* de g en U si existe $\sigma : U \to \widetilde{D_R^*}$ sección de q (i.e. una inversa por la derecha) holomorfa tal que $f = g \circ \sigma$.

Observación. En la definición anterior se exige que U sea simplemente conexo para garantizar la existencia de una sección holomorfa de q.

Veamos una caracterización de las determinaciones de una función holomorfa multiforme conocida una de ellas:

Proposición 3.11. *Sea $g \in \mathcal{A}_R^0$, $U \subset D_R^*$ un abierto simplemente conexo y σ una sección holomorfa de q en U. Entonces, cualquier otra sección holomorfa de q en U es de la forma $M^k \circ \sigma$ para un cierto $k \in \mathbb{Z}$ y $q^{-1}(U) = \sqcup_{k \in \mathbb{Z}} (M^k \circ \sigma)(U)$. Además, cualquier determinación de g en U es de la forma $T^k(g) \circ \sigma$ con $k \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Como σ es una sección holomorfa de q, se tiene que $e^{2\pi i \sigma(z)} = z$. Tomando logaritmos y con un razonamiento análogo al realizado en la prueba de la Proposición 3.5 se llega a que existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\sigma(z) = \frac{1}{2\pi i} [\log |z| + i \operatorname{Arg}(z)] + k_0$, de manera que dos secciones holomorfas cualesquiera de q difieren en una constante entera, y por tanto cualquier otra sección holomorfa es de la forma $M^k \circ \sigma$ para un cierto $k \in \mathbb{Z}$.

Para ver que $q^{-1}(U) = \sqcup_{k\in\mathbb{Z}}(M^k \circ \sigma)(U)$, bastará, pues, comprobar que si $w \in \sigma(U)$, entonces $w+k \notin \sigma(U)$ para ningún $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$: si existen $z, z' \in U$ tales que $w = \sigma(z)$ y $w+k = \sigma(z')$, entonces $z = q(w)$ y $z' = q(w+k)$. Pero dado que $q(w) = q(w+k)$, tenemos que $z = z'$ y $w = w+k$, de donde $k = 0$.

Finalmente, si f es una determinación de g en U, por lo que acabamos de probar, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f = g \circ M^k \circ \sigma$. Pero $g \circ M^k = T^k(g)$, luego $f = T^k(g) \circ \sigma$.

□

En base a este resultado, definimos y caracterizamos las funciones de *determinación finita*:

Definición 3.12. Sea g una función holomorfa multiforme en D_R^*, decimos que g es de *determinación finita* si el $\mathbb{C}$-espacio vectorial generado por $\{T^k(g) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ es de dimensión finita. El conjunto de las funciones multiformes en D_R^* de determinación finita se denotará por $\mathcal{A}_R$.

Observación. Dadas $f, g \in \mathcal{A}_R$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, es claro que los espacios vectoriales generados por $T^k(f+g) = T^k(f) + T^k(g),\ T^k(fg) = T^k(f)T^k(g)$ y $T^k(\lambda f) = \lambda T^k(f)$ con k variando en $\mathbb{Z}$ son de dimensión finita por serlo los de f y g. Por tanto, $\mathcal{A}_R$ es una sub-$\mathbb{C}$-álgebra de $\mathcal{A}_R^0$.

Proposición 3.13. *Sea g una función holomorfa multiforme en D_R^*, son equivalentes:*

(1) g es de determinación finita.

(2) El $\mathbb{C}$-espacio vectorial generado por las determinaciones de g en cualquier abierto simplemente conexo $U \subset D_R^*$ es de dimensión finita.

(3) Existe algún abierto simplemente conexo $U \subset D_R^*$ tal que el $\mathbb{C}$-espacio vectorial generado por las determinaciones de g en dicho abierto es de dimensión finita.

Demostración. La implicación $2 \Rightarrow 3$ es trivial. Para las otras dos implicaciones, dado $U \subset D_R^*$ abierto simplemente conexo, definimos los conjuntos $A = \{T^k(g) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{f \in \mathcal{O}(U) \mid f \text{ es determinación de } g \text{ en } U\}$. Sea σ una sección holomorfa de q en U, consideramos la aplicación $\varphi : \mathcal{A}_R^0 \to \mathcal{O}(D_R^*)$ dada por $\varphi(h) = h \circ \sigma$. Por la Proposición 3.11, φ lleva A en B de forma biyectiva. Por tanto, el espacio vectorial generado por A será de dimensión finita si y sólo si lo es el generado por B, lo que demuestra $1 \Rightarrow 2$ y $3 \Rightarrow 1$.

□

Ejemplo:

- $\operatorname{Log} z$ es una función multiforme de determinación finita, pues:

  $$T(\operatorname{Log} z) = T(w) = w + 1 = \operatorname{Log} z + 1,$$

  y por tanto $\langle T^k(\operatorname{Log} z)\rangle = \langle 1,\ \operatorname{Log} z\rangle$, que es de dimensión finita.

- Dado $\alpha \in \mathbb{C},\ z^\alpha$ es una función multiforme de determinación finita, ya que:

  $$T(z^\alpha) = T(e^{2\pi i\alpha w}) = e^{2\pi i\alpha(w+1)} = e^{2\pi i\alpha}e^{2\pi i\alpha w} = e^{2\pi i\alpha}z^\alpha,$$

  luego $\langle T^k(z^\alpha)\rangle = \langle z^\alpha\rangle$.

- Como ejemplo de función de determinación no finita, consideremos $R = 1$ y la función $g(w) = 1/w \in \mathcal{O}(\widetilde{\mathcal{D}_R^*})$ (como $1 \notin D_R^*$, $0 \notin \widetilde{D_R^*}$ y por tanto g es holomorfa). En este caso, tenemos que:

$$\left\langle T^k(g) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\operatorname{Log} z + k} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\rangle.$$

  Veamos que no es un espacio vectorial de determinación finita: supongamos por reducción al absurdo que $\langle T^k(g) \rangle$ está generado por $\frac{1}{\operatorname{Log} z + k_i}$, $i = 1, \ldots, n$, y consideremos entonces un $k \in \mathbb{Z}$ distinto de todos los k_i. Por hipótesis, han de existir $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ tales que $\frac{1}{\operatorname{Log} z + k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\operatorname{Log} z + k_i}$. Pero en tal caso, $\prod_{i=1}^{n} (\operatorname{Log} z + k_i) = P(\operatorname{Log} z) \cdot (\operatorname{Log} z + k)$, donde $P(\operatorname{Log} z)$ es un polinomio en la variable $\operatorname{Log} z$ de grado $n - 1$. Como $\operatorname{Log} z + k$ es primo en $\mathbb{C}[\operatorname{Log} z]$ para todo k, deducimos que $\operatorname{Log} z + k$ ha de dividir a algún $\operatorname{Log} z + k_i$, lo que sólo es posible si $k = k_i$. Llegamos entonces a contradicción y concluimos que g no es de determinación finita.

Nos planteamos ahora si es posible extender una función holomorfa a una función multiforme. Para ello, necesitamos un primer lema:

Lema 3.14. *Sea $V \subset D_R^*$ un entorno abierto y convexo del intervalo real $(0, R) = \mathbb{R}_+^* \cap D_R^*$, existe una única componente $\tilde{V}$ de $q^{-1}(V)$ que intersecta al eje imaginario y $q|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to V$ es biholomorfa.*

Demostración. Basta observar que por ser V un abierto convexo conteniendo al intervalo real $(0, R)$, este ha de estar contenido necesariamente en un semicírculo de D_R^*. Pero la imagen inversa de un semicírculo por q es una unión disjunta de bandas de anchura $1/2$ (a partir de una cierta altura que viene determinada por el radio R) con una separación de $1/2$ entre cada una de ellas. Por tanto, cada componente de $q^{-1}(V)$ va a estar contenida en una de estas bandas, y sólo una de ellas podrá intersecar al eje imaginario. Además, una de ellas lo hará necesariamente, pues este eje forma parte de la antiimagen del intervalo $(0, R)$, al cual V ha de contener. Denominaremos a dicha componente $\tilde{V}$. Finalmente, por ser q un recubrimiento, es claro que $q|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to V$ es biholomorfa.

□

Definición 3.15. Sea $V \subset D_R^*$ un entorno abierto y convexo de $\mathbb{R}_+^* \cap D_R^*$, y sea $\tilde{V} \subset \widetilde{D_R^*}$ la única componente conexa de $q^{-1}(V)$ que intersecta al eje imaginario. Se dice que una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(V)$ *se extiende a una función holomorfa multiforme* en D_R^* si existe una única función holomorfa multiforme $g \in \mathcal{A}_R^0$ tal que $g|_{\tilde{V}} = f \circ q|_{\tilde{V}}$ (i.e. f es una determinación de g en V). En tal caso, diremos que g es la *extensión multiforme* de f.

Definición 3.16. Con la notación de la definición anterior podemos definir $\nabla : \mathcal{A}_R^0 \to \mathcal{O}(V)$ como la aplicación lineal que asocia a cada $g \in \mathcal{A}_R^0$ su determinación principal en V, es decir, $\nabla(g) = g \circ (q|_{\tilde{V}})^{-1}$.

Ejemplo: En el Lema 3.14 vimos que la restricción $q|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to V$ es biholomorfa, y por tanto podemos considerar la función $f = (q|_{\tilde{V}})^{-1} : V \to \tilde{V} \in \mathcal{O}(V)$. Es claro que f se extiende a la función identidad en $\widetilde{D_R^*}$, de manera que:

$$z = (f \circ q|_{\tilde{V}})(z) = e^{2\pi i f(z)},$$

y por tanto, f se corresponde, salvo por el factor $2\pi i$, con el logaritmo complejo. Este es el motivo por el cual denotamos por $\operatorname{Log} z$ a la función identidad como función multiforme.

La siguiente proposición caracteriza las funciones holomorfas extensibles a funciones multiformes:

Proposición 3.17. *Sea $V \subset D_R^*$ un entorno abierto y convexo de $\mathbb{R}_+^* \cap D_R^*$, y sea $\tilde{V} \subset \widetilde{D_R^*}$ la única componente conexa de $q^{-1}(V)$ que intersecta el eje imaginario, dada una función $f \in \mathcal{O}(V)$, son equivalentes:*

(1) f se extiende a una función holomorfa multiforme g en D_R^* de determinación finita.

(2) Existe un subhaz $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_{D_R^*}$ localmente constante y de rango finito tal que $f \in \mathcal{F}(V)$.

Demostración. Para $f = 0$ es trivial que se tiene la equivalencia, pues basta considerar el haz nulo. Podemos suponer entonces que $f \neq 0$:

($1 \Rightarrow 2$) Como $\widetilde{D_R^*}$ es conexo, por la Proposición 2.27, el subespacio vectorial $E = \langle T^k(g) \mid k \in \mathbb{Z}\rangle \subset \mathcal{O}_{\widetilde{D_R^*}}\left(\widetilde{D_R^*}\right)$ determina unívocamente un subhaz constante $\widetilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{O}_{\widetilde{D_R^*}}$. A partir de este haz, definiremos otro en $\mathcal{O}_{D_R^*}$ de la siguiente forma:

Para cada abierto $W \subset D_R^*$, definimos $\mathcal{F}(W) = \{h \in \mathcal{O}(W) \mid \exists \{W_i\}_{i\in I}$ recubrimiento por abiertos de W tal que $h|_{W_i} \circ q|_{q^{-1}(W_i)} \in \widetilde{\mathcal{F}}\left(q^{-1}(W_i)\right)$ para todo $i \in I\} \subset \mathcal{O}_{D_R^*}(W)$. Es claro que $\mathcal{F}(W)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{O}_{D_R^*}(W)$, pues si h y $h' \in \mathcal{F}(W)$, $h + h'$ verificará la propiedad que define a $\mathcal{F}(W)$ en el recubrimiento intersección de los de h y h' (por ser $\widetilde{\mathcal{F}}$ un haz), y dado $\lambda \in \mathbb{C}$, λh la verificará en el mismo recubrimiento de h. Veamos que, en efecto, $\mathcal{F}$ es un haz:

- Dados $W' \subset W \subset D_R^*$ abiertos y $h \in \mathcal{F}(W)$, $h|_{W'}$ verificará la propiedad en el recubrimiento de W' dado por la intersección de este con el recubrimiento de W, y por tanto $h|_{W'} \in \mathcal{F}(W')$.
- Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ recubrimiento por abiertos de $W \subset D_R^*$ y h tal que $h|_{W_i} \in \mathcal{F}(W_i)$, basta tomar el recubrimiento por abiertos de W dado por todos los abiertos de los recubrimientos de cada W_i para deducir que $h \in \mathcal{F}(W)$.

Por otro lado, sea $U \subset D_R^*$ un abierto simplemente conexo y sea $U_0 \subset \widetilde{D_R^*}$ un abierto (también simplemente conexo) tal que $q(U_0) = U$, por la Proposición 3.11, $q^{-1}(U) = \sqcup_{k\in\mathbb{Z}} M^k(U_0)$ (pues $U_0 = \sigma(U)$ para una cierta sección holomorfa de q) y q será una función biholomorfa entre $M^k(U_0)$ y U para todo $k \in \mathbb{Z}$. Del mismo modo, si para cada abierto $W \subset U$ definimos $W_0 = U_0 \cap q^{-1}(W)$ (es decir, elegimos la componente de $q^{-1}(W)$ contenida en U_0), tendremos que $q^{-1}(W) = \sqcup_{k\in\mathbb{Z}} M^k(W_0)$ y q será una función biholomorfa entre $M^k(W_0)$ y W para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Esto nos permite probar que si $h \in \mathcal{O}(W)$, entonces $h \circ q|_{q^{-1}(W)} \in \widetilde{\mathcal{F}}(q^{-1}(W))$ si y sólo si $h \circ q|_{W_0} \in \widetilde{\mathcal{F}}(W_0)$: la implicación hacia la derecha se tiene simplemente al restringir $h \circ q|_{q^{-1}(W)}$ a W_0 por ser $\widetilde{\mathcal{F}}$ un haz. Para el recíproco, nótese que basta probar que si $h \circ q|_{W_0} \in \widetilde{\mathcal{F}}(W_0)$, entonces $h \circ q|_{M^k(W_0)} \in \widetilde{\mathcal{F}}(M^k(W_0))$ para todo k, pues los $M^k(W_0)$ forman un recubrimiento por abiertos de $q^{-1}(W)$ y nuevamente por ser $\widetilde{\mathcal{F}}$ un haz se tendrá el resultado. Supongamos entonces que $h \circ q|_{W_0} \in \widetilde{\mathcal{F}}(W_0)$, y dado que $q \circ M^k = q$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, tendremos que:

$$h \circ q|_{M^k(W_0)} = h \circ q|_{W_0} \circ M^{-k}\big|_{M^k(W_0)} = T^{-k}(h \circ q|_{W_0})\big|_{M^k(W_0)}.$$

Pero por definición $h \circ q|_{W_0}$ es localmente una restricción de elementos de $\langle T^j(g) \mid j \in \mathbb{Z}\rangle$, luego por la igualdad anterior es claro que $h \circ q|_{M^k(W_0)}$ también lo será, de manera que $h \circ q|_{M^k(W_0)} \in \widetilde{\mathcal{F}}(M^k(W_0))$. Esto nos permite concluir que $h \in \mathcal{F}(W)$ si y sólo si $h \circ q|_{W_0} \in \widetilde{\mathcal{F}}(W_0)$ por la propiedad de pegado de $\widetilde{\mathcal{F}}$ (ya que si $\{W_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento por abiertos de W, entonces $\{W_{i_0} = U_0 \cap q^{-1}(W_i)\}_{i \in I}$ es un recubrimiento por abiertos de W_0).

Dado que q es biholomorfa entre U_0 y U, tendremos un isomorfismo entre $\mathcal{F}(U)$ y $\widetilde{\mathcal{F}}(U_0)$, que, dado $p_0 \in U_0$, inducirá un isomorfismo natural ϕ_{p_0} entre las fibras $\widetilde{\mathcal{F}}_{p_0}$ y $\mathcal{F}_{q(p_0)}$. Tendremos entonces el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\circ q|_{U_0}", "\cong"'] \arrow[d, "\pi_{q(p_0)}"] & \widetilde{\mathcal{F}}(U_0) \arrow[d, "\pi_{p_0}", "\cong"'] \\
\mathcal{F}_{q(p_0)} \arrow[r, "\phi_{p_0}^{-1}", "\cong"'] & \widetilde{\mathcal{F}}_{p_0}.
\end{tikzcd}$$

Además, como $\widetilde{\mathcal{F}}$ es un haz constante, la aplicación π_{p_0} también es un isomorfismo. Por tanto, dado $p \in U$, si tomamos p_0 tal que $p = q(p_0)$, tendremos que la aplicación $\pi_p : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_p$ es isomorfismo por ser composición de isomorfismos, concluyendo que el haz $\mathcal{F}|_U$ es constante. Además, dado que $\widetilde{\mathcal{F}}(U_0)$ es un espacio vectorial de dimensión finita y los isomorfismos conservan la dimensión, tendremos que $\mathcal{F}|_U$ es de rango finito. Por último, es claro que $f \in \mathcal{F}(V)$, pues $g|_{\tilde{V}} = f \circ q|_{\tilde{V}} \in \widetilde{\mathcal{F}}(\tilde{V})$ por hipótesis.

($2 \Rightarrow 1$) Para cada abierto $\widetilde{G} \in \widetilde{D_R^*}$, definimos $\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{G}) = \{\tilde{h} \in \mathcal{O}(\widetilde{G}) \mid \exists \{\widetilde{G}_i\}_{i \in I}$ recubrimiento de $\widetilde{G}$ por abiertos con $q : \widetilde{G}_i \to q(\widetilde{G}_i)$ biholomorfa y $\exists h_i \in \mathcal{F}(q(\widetilde{G}_i))$ tales que $\tilde{h}|_{\widetilde{G}_i} = h_i \circ q|_{\widetilde{G}_i}\ \forall i \in I\}$. Por razonamientos totalmente análogos a los realizados en la otra implicación, se tiene que $\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{G})$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y $\widetilde{\mathcal{F}}$ es un subhaz de $\mathcal{O}_{\widetilde{D_R^*}}$. Además, tomando como recubrimiento de $\tilde{V}$ el propio $\tilde{V}$, tenemos que $\tilde{f} = f \circ q|_{\tilde{V}} \in \widetilde{\mathcal{F}}(\tilde{V})$.

De hecho, tenemos que la restricción de $\widetilde{\mathcal{F}}$ a cualquier abierto $\widetilde{G} \subset \widetilde{D_R^*}$ tal que la restricción de q a dicho abierto sea una función biholomorfa es un haz localmente constante de rango finito (el de $\mathcal{F}$):

Como $\mathcal{F}$ es localmente constante, podemos tomar $q(\widetilde{G}) = \cup_{i \in I} G_i$, siendo cada G_i tal que $\mathcal{F}|_{G_i}$ es un haz constante. Entonces $\widetilde{G} = \cup_{i \in I} \widetilde{G_i}$ con $\widetilde{G_i} = (q|_{\widetilde{G}})^{-1}(G_i)$. Veamos, pues, que $\widetilde{\mathcal{F}}|_{\widetilde{G_i}}$ es constante para todo $i \in I$. Para ello, observamos que $h \in \mathcal{F}(G_i)$ si y sólo si $h \circ q|_{\widetilde{G_i}} \in \widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{G_i})$ (una implicación es trivial y la otra se deduce de la propiedad de pegado de $\mathcal{F}$), de manera que tenemos un isomorfismo entre estos dos espacios vectoriales. Sean entonces $\tilde{p} \in \widetilde{G_i}$ y $p = q(\tilde{p})$, se inducirá un isomorfismo $\phi_p : \mathcal{F}_p \to \widetilde{\mathcal{F}}_{\tilde{p}}$, y podremos considerar el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(G_i) \arrow[r, "\circ q|_{\widetilde{G_i}}", "\cong"'] \arrow[d, "\pi_p", "\cong"'] & \widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{G_i}) \arrow[d, "\pi_{\tilde{p}}"] \\
\mathcal{F}_p \arrow[r, "\phi_p", "\cong"'] & \widetilde{\mathcal{F}}_{\tilde{p}}
\end{tikzcd}$$

Al ser $\mathcal{F}|_{G_i}$ un haz constante, π_p es un isomorfismo, y por composición de isomorfismos tendremos que $\pi_{\tilde{p}}$ también lo será, concluyendo que $\widetilde{\mathcal{F}}|_{\widetilde{G_i}}$ es un haz constante para todo $i \in I$ y por tanto

$\widetilde{\mathcal{F}}|_{\widetilde{G}}$ es un haz localmente constante (del mismo rango que $\mathcal{F}$ por isomorfía).

A partir de aquí, construyendo un recubrimiento de $\widetilde{D_R^*}$ por abiertos de esta forma, tendremos que $\widetilde{\mathcal{F}}$ es localmente constante. Ahora, dado que $\widetilde{D_R^*}$ es simplemente conexo, por la Proposición 2.25 deducimos que $\widetilde{\mathcal{F}}$ es constante (de rango finito). Entonces, la restricción $\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{D_R^*}) \to \widetilde{\mathcal{F}}(\tilde{V})$ es un isomorfismo y por tanto existe $g \in \widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{D_R^*})$ tal que $g|_{\tilde{V}} = \tilde{f} = f \circ q|_{\tilde{V}}$. Además, si tomamos el recubrimiento de $\widetilde{D_R^*}$ por bandas abiertas de anchura $1/2$ centradas en los enteros y semienteros (obtenidas aplicando potencias de M a las bandas centradas en 0 y $1/2$, que llamaremos $\widetilde{G_1}$ y $\widetilde{G_2}$ respectivamente), tendremos, por ser $\widetilde{\mathcal{F}}$ un haz, que existen $f_{ij} \in \mathcal{F}\left(q\left(M^j(\widetilde{G_i})\right)\right)$ tales que $g|_{M^j(\widetilde{G_i})} = f_{ij} \circ q|_{M^j(\widetilde{G_i})}$ para todo $i = 1, 2$ y $j \in \mathbb{Z}$. De esta forma:

$$T^k(g)|_{M^j(\widetilde{G_i})} = g|_{M^{k+j}(\widetilde{G_i})} \circ M^k|_{M^j(\widetilde{G_i})} = f_{i(k+j)} \circ q|_{M^{k+j}(\widetilde{G_i})} \circ M^k|_{M^j(\widetilde{G_i})} = f_{i(k+j)} \circ q|_{M^j(\widetilde{G_i})},$$

y por tanto $T^k(g) \in \widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{D_R^*})$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Así, $E = \langle T^k(g) \mid k \in \mathbb{Z}\rangle$ es un subespacio vectorial de $\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{D_R^*})$, que es de dimensión finita por ser $\widetilde{\mathcal{F}}$ un haz constante de rango finito, luego g es de determinación finita y f se extiende a g.

□

3.3. Soluciones multiformes de una ecuación diferencial

Consideremos ahora un operador diferencial lineal L, y definamos su acción sobre una función multiforme $g \in \mathcal{A}_R^0$:

Definición 3.18. Sea L un operador diferencial lineal en D_R, y sean $g, h \in \mathcal{A}_R^0$ funciones multiformes en D_R^*, diremos que $L(g) = h$ si $L(g \circ \sigma) = h \circ \sigma$, siendo $\sigma : D_R^* \to \widetilde{D_R^*}$ cualquier sección holomorfa de q.

Observación. En términos prácticos, esta definición viene a decir que, para aplicar L a una función multiforme g, basta considerar el "cambio de variable" $z = e^{2\pi i w}$ y calcular las derivadas conforme a la regla de la cadena.

Lema 3.19. *La acción de un operador diferencial sobre una función multiforme está bien definida.*

Demostración. Hemos de comprobar que si σ_1 y σ_2 son dos secciones holomorfas de q en D_R^* y $L(g \circ \sigma_1) = h \circ \sigma_1$, entonces $L(g \circ \sigma_2) = h \circ \sigma_2$:

Sabemos, por la Proposición 3.11, que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\sigma_2 = M^k \circ \sigma_1$, luego basta probar que si σ es una sección holomorfa de q tal que $L(g \circ \sigma) = h \circ \sigma$, entonces $L(g \circ M \circ \sigma) = h \circ M \circ \sigma$. Pero esto es tanto como decir que si $L(g(w)) = h(w)$ para todo $w \in \widetilde{D_R^*}$, entonces $L(g(w+1)) = h(w+1)$ para todo $w \in \mathbb{Z}$, y esto último es cierto, pues $w + 1 \in \widetilde{D_R^*}$ para todo $w \in \widetilde{D_R^*}$.

□

Proposición 3.20. *Se tiene que:*

(1) $\mathcal{A}_R^0$ es un $\mathcal{D}(D_R^*)$ módulo a la izquierda.

(2) El operador $T : \mathcal{A}_R^0 \to \mathcal{A}_R^0$ es $\mathcal{D}(D_R^*)$-lineal.

(3) $\mathcal{A}_R$ es un sub-$\mathcal{D}(D_R^*)$-módulo a la izquierda de $\mathcal{A}_R^0$.

Demostración.

(1) Dados $L = a_n \frac{d^n}{dz^n} + \ldots + a_1 \frac{d}{dz} + a_0 \in \mathcal{D}(D_R^*)$ y $g \in \mathcal{A}_R^0$, veamos que $L(g) \in \mathcal{A}_R^0$, lo que nos permitirá definir el producto como $L \cdot g = L(g)$:

Observamos en primer lugar que, si denominamos $w = (q|_{\tilde{V}})^{-1}(z)$ (es decir, $w \in \tilde{V}$ es tal que $e^{2\pi i w} = z$), tendremos que:

$$\frac{d}{dz}(\nabla(g)) = \frac{d}{dz}(g(w)) = \frac{dw}{dz}\frac{dg}{dw}(w) = \frac{e^{-2\pi i w}}{2\pi i}\frac{dg}{dw}(w) = \nabla(\delta(g)), \quad \text{con } \delta = \frac{e^{-2\pi i w}}{2\pi i}\frac{d}{dw}.$$

Por inducción se comprueba fácilmente que $\frac{d^n}{dz^n}(\delta(\nabla(g))) = \nabla(\delta^{n+1}(g))$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de manera que por la linealidad de la composición se tendrá que $L(\nabla(g)) = \nabla(\tilde{L}(g))$, siendo $\tilde{L} : \mathcal{O}(\widetilde{D_R^*}) \to \mathcal{O}(\widetilde{D_R^*})$ la aplicación dada por:

$$\tilde{L} = a_n(e^{2\pi i w})\delta^n + \ldots + a_1(e^{2\pi i w})\delta + a_0(e^{2\pi i w}).$$

Obsérvese que al desarrollar los δ^n, todos los sumandos serán de la forma $b_i(w)\frac{d^i}{dw^i}$ con $b_i \in \mathcal{O}(\widetilde{D_R^*})$, luego $\tilde{L} \in \mathcal{D}(\widetilde{D_R^*})$ y $L \cdot g = L(g) = \tilde{L}(g) \in \mathcal{O}(\widetilde{D_R^*}) = \mathcal{A}_R^0$.

Además, por la linealidad de la derivada y de la composición, para cualesquiera $L, L' \in \mathcal{D}(D_R^*)$ y $g, g' \in \mathcal{A}_R^0$ se verifica:

- $L \cdot (g + g') = \tilde{L}(g + g') = \tilde{L}(g) + \tilde{L}(g') = L \cdot g + L \cdot g'$.
- $(L + L') \cdot g = (\widetilde{L + L'})(g) = \tilde{L}(g) + \tilde{L}'(g) = L \cdot g + L \cdot g'$.
- $(L \circ L') \cdot g = (\widetilde{L \circ L'})(g) = \tilde{L}(\tilde{L}'(g)) = L \cdot (L' \cdot g)$.
- $1 \cdot g = \tilde{1}(g) = g$.

luego $\mathcal{A}_R^0$ es un $\mathcal{D}(D_R^*)$-módulo a la izquierda.

(2) Sea $L = a_n \frac{d^n}{dz^n} + \ldots + a_1 \frac{d}{dz} + a_0 \in \mathcal{D}(D_R^*)$ y $g \in \mathcal{A}_R^0$, veamos que $T(L \cdot g) = L \cdot T(g)$, es decir, que $T(\tilde{L}(g)) = \tilde{L}(T(g))$. Para ello, observamos que:

$$\begin{aligned} \delta(T(g))(w) = \delta(g \circ M)(w) &= \tfrac{e^{-2\pi i w}}{2\pi i}\tfrac{dg}{dw}(M(w))\tfrac{dM}{dw}(w) = \tfrac{e^{-2\pi i w}}{2\pi i}\tfrac{dg}{dw}(M(w)) \\ &= \delta(g)(M(w)) = (\delta(g) \circ M)(w) = T(\delta(g))(w), \end{aligned}$$

y por inducción, $\delta^n(T(g)) = T(\delta^n(g))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, sabemos que $T(a_i(e^{2\pi i w})) = a_i(e^{2\pi i w})$ para todo $i = 0, \ldots, n$ por la Proposición 3.9. Concluimos que:

$$\begin{aligned} T(\tilde{L}(g)) = {} & T\left(a_n(e^{2\pi i w}))T(\delta^n(g)) + \ldots + T(a_1(e^{2\pi i w}))T(\delta(g)) + T(a_0(e^{2\pi i w})\right) \\ = {} & a_n(e^{2\pi i w})\delta^n(T(g)) + \ldots + a_1(e^{2\pi i w})\delta(T(g)) + a_0(e^{2\pi i w}) = \tilde{L}(T(g)), \end{aligned}$$

y con ello que T es $\mathcal{D}(D_R^*)$-lineal.

(3) Ya sabemos que $\mathcal{A}_R$ es un subgrupo de $\mathcal{A}_R^0$, por lo que basta probar que si $L = a_n \frac{d^n}{dz^n} + \ldots + a_1 \frac{d}{dz} + a_0 \in \mathcal{D}(D_R^*)$ y $g \in \mathcal{A}_R$, entonces $L \cdot g = \tilde{L}(g) \in \mathcal{A}_R$. Por hipótesis, $\langle T^k(g) \mid k \in \mathbb{Z}\rangle$ es de dimensión finita, y aplicando inducción en (2) tenemos que $T^k(\tilde{L}(g)) = \tilde{L}(T^k(g))$, luego $\langle T^k(\tilde{L}(g)) \mid k \in \mathbb{Z}\rangle = \langle \tilde{L}(T^k(g)) \mid k \in \mathbb{Z}\rangle = \tilde{L}\left(\langle T^k(g) \mid k \in \mathbb{Z}\rangle\right)$, y también será finito-dimensional. Tenemos así que $\tilde{L}(g) \in \mathcal{A}_R$ y por tanto $\mathcal{A}_R$ es un submódulo de $\mathcal{A}_R^0$.

□

Definición 3.21. Sea L un operador diferencial lineal en D_R, definimos el *núcleo de L en $\mathcal{A}_R^0$* como $\ker L_{\mathcal{A}_R^0} = \{g \in \mathcal{A}_R^0 \mid L(g) = 0\}$.

Observación. Es claro que $\ker L_{\mathcal{A}_R^0}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{A}_R^0$.

Con esta definición, probamos ahora un resultado análogo al Teorema 2.29 y al Corolario 2.30 para funciones multiformes:

Proposición 3.22. *Sea $L = a_n \frac{d^n}{dz^n} + \ldots + a_1 \frac{d}{dz} + a_0$ un operador diferencial lineal de orden n en D_R tal que $a_n(z) \neq 0$ para todo $z \neq 0$. Sea $V \subset D_R^*$ un entorno abierto y convexo de $\mathbb{R}_+^* \cap D_R^*$, y sea $\tilde{V} \subset \widetilde{D_R^*}$ la única componente conexa de $q^{-1}(V)$ que intersecta el eje imaginario. Se verifica que:*

(1) Cualquier función multiforme $g \in \mathcal{A}_R^0$ tal que $L(g) = 0$ es de determinación finita y $\ker L_{\mathcal{A}_R^0}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial isomorfo a $(\ker L)(V)$. En particular, se tendrá que $\dim_{\mathbb{C}}(\ker L_{\mathcal{A}_R^0}) = n$.

(2) Las aplicaciones $L : \mathcal{A}_R^0 \to \mathcal{A}_R^0$ y $L : \mathcal{A}_R \to \mathcal{A}_R$ son sobreyectivas.

Demostración.

(1) Por definición, si $L(g) = 0$, entonces $L(\nabla(g)) = 0$ y $\nabla(g) \in (\ker L)(V)$, de donde $\nabla(\ker L_{\mathcal{A}_R^0}) \subset (\ker L)(V)$. Pero como L no tiene puntos singulares en D_R^*, por el Teorema 2.29, $(\ker L)|_{D_R^*}$ es un haz localmente constante de rango n. Entonces, por la Proposición 3.17, $\nabla(g)$ se extiende a una función multiforme de determinación finita, que es obviamente g. Así, todas las funciones multiformes anuladas por L son de determinación finita. Nuevamente por la Proposición 3.17, cada $f \in (\ker L)(V)$ se extiende a una función $g \in \mathcal{A}_R$, de manera que $f = g \circ (q|_{\tilde{V}})^{-1} = \nabla(g)$ y $L(f) = L(\nabla(g)) = 0$. De todo esto concluimos que $\nabla(\ker L_{\mathcal{A}_R^0}) = \nabla(\{g \in \mathcal{A}_R \mid L(g) = 0\}) = (\ker L)(V)$ y ∇ es un isomorfismo entre $\ker L_{\mathcal{A}_R^0}$ y $(\ker L)(V)$, que es de dimensión n.

(2) Recordemos de la Proposición 3.20 que $L(\nabla(g)) = \nabla(\tilde{L}(g))$ con $\tilde{L} = a_n(e^{2\pi i w})\delta^n + \ldots + a_1(e^{2\pi i w})\delta + a_0(e^{2\pi i w})$. Al hacer el desarrollo de las derivadas, deducimos que su término de mayor orden será $b_n(w)\frac{d^n}{dw^n}$ con $b_n(w) = a_n(e^{2\pi i w})\left(\frac{e^{-2\pi i w}}{2\pi i}\right)^n$, que claramente es no nulo en todos los puntos de $\widetilde{D_R^*}$, luego $\tilde{L}$ no tiene puntos singulares. Dado que $\widetilde{D_R^*}$ es simplemente conexo, podemos aplicar el Corolario 2.30 para deducir que $\tilde{L}$ es sobreyectivo. Entonces, dada $h \in \mathcal{A}_R^0$, existe $\tilde{h} \in \mathcal{A}_R^0$ tal que $\tilde{L}(\tilde{h}) = h$, de manera que $L(\nabla(\tilde{h})) = \nabla(\tilde{L}(\tilde{h})) = \nabla(h)$. Por tanto, $L(\tilde{h}) = h$ y $L : \mathcal{A}_R^0 \to \mathcal{A}_R^0$ es sobreyectiva.

Finalmente, dada $g \in \mathcal{A}_R$, al ser de determinación finita, existe un polinomio $P \in \mathbb{C}[x]$ no nulo tal que $P(T)(g) = 0$. Dado que $\mathcal{A}_R \subset \mathcal{A}_R^0$, existe $h \in \mathcal{A}_R^0$ tal que $L(h) = g$. Pero por la Proposición 3.20, $L(P(T)(h)) = P(T)(L(h)) = P(T)(g) = 0$, y por (1), $P(T)(h) \in \mathcal{A}_R$. Esto quiere decir que existe $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ tal que $Q(T)(P(T)(h)) = 0$. Entonces $(Q \circ P)(T)(h) = 0$ y en consecuencia $h \in \mathcal{A}_R$, concluyendo que $L : \mathcal{A}_R \to \mathcal{A}_R$ también es sobreyectiva.

□

Nota. En virtud de la proposición anterior, a partir de ahora denotaremos $\ker L_{\mathcal{A}_R^0}$ simplemente por $\ker L_{\mathcal{A}_R}$.

Ejemplo: Calculemos $\ker L_{\mathcal{A}_R}$ en un par de casos particulares. De acuerdo con la proposición anterior, bastará resolver $L(f) = 0$ en V y componer con q para obtener sus soluciones multiformes:

- $L = z\frac{d}{dz} - \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C}$

  Es claro que $f = 0$ es solución. Si $f \neq 0$:

$$z\frac{df}{dz} - \alpha f = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{f} = \alpha\frac{dz}{z} \quad \Rightarrow \quad \log f = \alpha \log z + z_0 \quad \Rightarrow \quad f(z) = Cz^\alpha, \quad C \in \mathbb{C}^*.$$

  Por tanto, $(\ker L)(V) = \{Cz^\alpha \mid C \in \mathbb{C}\}$. Las soluciones multiformes serán, pues, de la forma: $g(w) = (Cz^\alpha \circ q)(w) = Ce^{2\pi i \alpha w}$. Pero $e^{2\pi i \alpha w}$ era lo que habíamos denotado z^α como función multiforme (y esta es, de hecho, la justificación), luego $\ker L_{\mathcal{A}_R} = \langle z^\alpha \rangle$.

- $L = z\frac{d^2}{dz^2} + \frac{d}{dz}$

$$z\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{df}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \quad z\frac{dh}{dz} + h = 0 \quad \text{con } h = \frac{df}{dz}.$$

  Esta ecuación es como la del ejemplo anterior con $\alpha = -1$, luego existe $C \in \mathbb{C}$ tal que $h(z) = Cz^{-1}$. A partir de aquí:

$$\frac{df}{dz} = Cz^{-1} \quad \Rightarrow \quad df = C\frac{dz}{z} \quad \Rightarrow \quad f(z) = C\log(z) + D, \quad C, D \in \mathbb{C}.$$

  Las soluciones multiformes serán entonces: $g(w) = ((C\log(z) + D) \circ q)(w) = C\log(e^{2\pi i w}) + D = 2\pi i C \cdot w + D$. Recordando que la función identidad en $\widetilde{D_R^*}$ la habíamos denotado por $\operatorname{Log} z$, tendremos que $g(w) = C' \operatorname{Log} z + D$ y por tanto $\ker L_{\mathcal{A}_R} = \langle \operatorname{Log} z, 1 \rangle$.

Obsérvese que las funciones multiformes se han denotado de manera que la analogía con las soluciones uniformes sea total.

A continuación nos proponemos obtener una expresión general para las funciones de determinación finita. Para ello, será necesario primero probar el siguiente lema técnico:

Lema 3.23. *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, y sea $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se verifica que:*

(1) $(T - \lambda)^k \left(z^\alpha (\operatorname{Log} z)^k\right) = k! \lambda^k z^\alpha$.

(2) $(T - \lambda)^{k+1} \left(z^\alpha (\operatorname{Log} z)^k\right) = 0$.

Demostración. En primer lugar, observemos que si $k \geq 1$:

$$(T - \lambda)\left(z^\alpha (\operatorname{Log} z)^k\right) = \lambda z^\alpha \left[(1 + \operatorname{Log} z)^k - (\operatorname{Log} z)^k\right] = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda \binom{k}{i} z^\alpha (\operatorname{Log} z)^i$$

Procedamos entonces por inducción en k:

- Para $k=0$ es claro que $(T-\lambda)^0\left(z^\alpha(\operatorname{Log} z)^0\right) = z^\alpha = 0!\lambda^0 z^\alpha$ y $(T-\lambda)\left(z^\alpha(\operatorname{Log} z)^0\right) = T(z^\alpha) - \lambda z^\alpha = e^{2\pi i\alpha} z^\alpha - \lambda z^\alpha = \lambda z^\alpha - \lambda z^\alpha = 0$

- Suponiendo ambas expresiones ciertas para k, veamos que también son ciertas para $k+1$:

  $(T-\lambda)^{k+1}\left(z^\alpha(\operatorname{Log} z)^{k+1}\right) = (T-\lambda)^k(T-\lambda)\left(z^\alpha(\operatorname{Log} z)^{k+1}\right) = (T-\lambda)^k\left[\sum_{i=0}^k \lambda\binom{k+1}{i} z^\alpha(\operatorname{Log} z)^i\right] = \sum_{i=0}^k \lambda\binom{k+1}{i}(T-\lambda)^k\left(z^\alpha(\operatorname{Log} z)^i\right)$

  Por hipótesis de inducción, tenemos que $(T-\lambda)^k\left(z^\alpha(\operatorname{Log} z)^i\right) = 0$ para todo $i = 1\ldots k-1$ y $(T-\lambda)^k\left(z^\alpha(\operatorname{Log} z)^k\right) = k!\lambda^k z^\alpha$, luego:

  - $(T-\lambda)^{k+1}\left(z^\alpha(\operatorname{Log} z)^{k+1}\right) = \lambda\binom{k+1}{k}k!\lambda^k z^\alpha = \lambda^{k+1}(k+1)k!z^\alpha = (k+1)!\lambda^{k+1}z^\alpha$

  - $(T-\lambda)^{k+2}\left(z^\alpha(\operatorname{Log} z)^{k+1}\right) = (T-\lambda)(T-\lambda)^{k+1}\left(z^\alpha(\operatorname{Log} z)^{k+1}\right) = (T-\lambda)((k+1)!\lambda^{k+1}\, z^\alpha) = (k+1)!\lambda^{k+1}(T-\lambda)(z^\alpha) = 0$

Concluimos que las expresiones anteriores se verifican para todo $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

□

Lema 3.24. *Sea la proyección $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$, y sea $\tau : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ cualquier sección de P. Entonces, para dos elementos distintos cualesquiera de $\operatorname{Im}\tau$, la diferencia no es un número entero.*

Demostración. Sean $\alpha = \tau(z),\ \alpha' = \tau(z') \in \operatorname{Im}\tau$ tales que $\alpha-\alpha' \in \mathbb{Z}$, entonces $P(\alpha) = P(\alpha')$, lo que implica $z = z'$ y $\alpha = \alpha'$.

□

Este hecho nos permitirá enunciar cómodamente la unicidad en el siguiente resultado:

Teorema 3.25. *Cualquier función holomorfa multiforme de determinación finita $g \in \mathcal{A}_R$ puede escribirse como una suma finita:*

$$g = \sum_{\alpha\in\mathbb{C}}\sum_{k\geq 0}\phi_{\alpha,k} z^\alpha(\operatorname{Log} z)^k,$$

donde las $\phi_{\alpha,k} \in \mathcal{O}(D_R^*)$ son funciones uniformes en D_R^*. Es más, si imponemos que los coeficientes α se encuentren en $\operatorname{Im}\tau$, siendo τ cualquier sección de la proyección $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$, entonces las $\phi_{\alpha,k}$ son únicas.

Demostración. Dado que g es de determinación finita, si la dimensión de $E = \langle T^k(g) \mid k \in \mathbb{Z}\rangle$ es d, existirá un polinomio mónico $P \in \mathbb{C}[x]$ de grado d tal que $P(T)(g) = 0$ (este polinomio se denomina *polinomio mínimo de la acción de T en g*). Por ser $\mathbb{C}$ un cuerpo algebraicamente cerrado, P puede escribirse de la forma $P(x) = \prod_j (x-\lambda_j)^{r_j}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$ y $d = \sum_j r_j$. Obsérvese que los λ_j son, justamente, los autovalores de T en E.

Notemos que, como T es un automorfismo, los λ_j son no nulos. Por tanto, existen $\alpha_j \in \mathbb{C}$ tales que $e^{2\pi i\alpha_j} = \lambda_j$ para todo j. Además, como los λ_j son distintos, de esta forma garantizamos que los α_j no difieran en un entero y puedan elegirse en $\operatorname{Im}\tau$. Probaremos entonces que existen unas únicas $\phi_{j,k} \in \mathcal{O}(D_R^*)$ tales que:

$$g = \sum_j \sum_{k=0}^{r_j-1} \phi_{j,k} z^{\alpha_j} (\operatorname{Log} z)^k.$$

Empecemos por la existencia, que probaremos por inducción en el grado del polinomio mínimo:

- Para $d = 1$, si $g = 0$ no hay nada que probar, y en caso contrario ha de existir $\lambda_1 \neq 0$ tal que $(T - \lambda_1)(g) = 0$ (si fuera $\lambda_1 = 0$, entonces $T(g) = 0$ y $g = 0$), de manera que si tomamos $\phi_{1,0} = z^{-\alpha_1} g$, tendremos que (vista como función multiforme):

  $$T(\phi_{1,0}) = T(z^{-\alpha_1})T(g) = e^{-2\pi i \alpha_1} z^{-\alpha_1} \lambda_1 g = z^{-\alpha_1} g = \phi_{1,0},$$

  y por la Proposición 3.9, $\phi_{1,0} \in \mathcal{O}(D_R^*)$ (entendida como función univaluada). Podemos escribir, pues, $g = \phi_{1,0} z^{\alpha_1}$.

- Suponiendo cierto el resultado para grado $d' \leq d$, veamos que también se verifica para $d' = d + 1$:

  Sea $g \in \mathcal{A}_R$ tal que el polinomio mínimo de la acción de T en g sea $P(x) = \prod_j (x - \lambda_j)^{r_j}$ con $\sum_j r_j = d + 1$, definamos los polinomios $Q(x) = \prod_{j \neq 1} (x - \lambda_j)^{r_j}$ y $P_1(x) = P(x)/(x - \lambda_1) = (x - \lambda_1)^{r_1 - 1} Q(x)$. Sea ahora $\overline{g} = P_1(T)(g)$, dado que:

  $$0 = P(T)(g) = (T - \lambda_1) P_1(T)(g) = (T - \lambda_1)(\overline{g}),$$

  tenemos que $T - \lambda_1$ es el polinomio mínimo de la acción de T en $\overline{g}$, luego estamos en el caso $d = 1$ y existe $\varphi \in \mathcal{O}(D_R^*)$ tal que $\overline{g} = P_1(T)(g) = \varphi z^{\alpha_1}$.

  Por otro lado, por el Lema 3.23, se tiene que:

  $$P_1(T)(z^{\alpha_1} (\operatorname{Log} z)^{r_1 - 1}) = Q(T)(T - \lambda_1)^{r_1 - 1}(z^{\alpha_1} (\operatorname{Log} z)^{r_1 - 1}) = Q(T)(r_1 - 1)! \lambda_1^{r_1 - 1} z^{\alpha_1},$$

  y como $T(z^{\alpha_j}) = \lambda_j z^{\alpha_j}$, se llega a que:

  $$Q(T)(r_1 - 1)! \lambda_1^{r_1 - 1} z^{\alpha_1} = Q(\lambda_1)(r_1 - 1)! \lambda_1^{r_1 - 1} z^{\alpha_1}.$$

  Dado que todos los λ_j son distintos, tendremos que $Q(\lambda_1) \neq 0$, y por tanto podemos definir la función $\phi_{1,r_1-1} = \frac{\varphi}{Q(\lambda_1)(r_1-1)!\lambda^{r_1-1}} \in \mathcal{O}(D_R^*)$. Esta función verificará, pues, que $P_1(T)(\phi_{1,r_1-1}) = \phi_{1,r_1-1}$, y con ello:

  $$P_1(T)(\phi_{1,r_1-1} z^{\alpha_1} (\operatorname{Log} z)^{r_1 - 1}) = \phi_{1,r_1-1} Q(\lambda_1)(r_1 - 1)! \lambda_1^{r_1 - 1} z^{\alpha_1} = \varphi z^{\alpha_1}.$$

  De esta manera, $P_1(T)(g - \phi_{1,r_1-1} z^{\alpha_1} (\operatorname{Log} z)^{r_1 - 1}) = 0$, y dado que P_1 tiene grado d, el polinomio mínimo de la acción de T en esta función tendrá grado menor o igual que d, luego podemos aplicar la hipótesis de inducción a la función $g - \phi_{1,r_1-1} z^{\alpha_1} (\operatorname{Log} z)^{r_1 - 1}$. Así, esta función puede escribirse de la forma en que afirma el teorema y basta despejar g para hallar la expresión deseada.

Veamos ahora la unicidad, esta vez por inducción en $r = \sum_j (r_j - 1)$. Supondremos $g = 0$ y veremos que todos los términos de la suma han de ser nulos, de donde se tendrá que la expresión es única:

- Para $r = 0$ tendremos que $r_j = 1$ para todo j, de donde $0 = g = \sum_j \phi_{j,0} z^{\alpha_j}$. Sea $P_l(x) = \prod_{s\neq l}(x - \lambda_j)$, tendremos que:

  $0 = P_l(T)(0) = \sum_j P_l(T)(\phi_{j,0} z^{\alpha_j}) = \sum_j \prod_{s\neq l}(T - \lambda_s)(\phi_{j,0} z^{\alpha_j}) = \sum_j \prod_{s\neq l} [T(\phi_{j,0})$
  $T(z^{\alpha_j}) - \lambda_s(\phi_{j,0} z^{\alpha_j})] = \sum_j \prod_{s\neq l}(\lambda_j - \lambda_s)(\phi_{j,0} z^{\alpha_j})$,

  donde se ha usado que $T(\phi_{j,0}) = \phi_{j,0}$ (por ser un elemento de $\mathcal{O}(D_R^*)$) y también que $T(z^{\alpha_j}) = \lambda_j z^{\alpha_j}$. Ahora bien, para todos los $j \neq l$ hay un término en el productorio que es nulo, por lo que únicamente queda el sumando con $j = l$: $\prod_{s\neq l}(\lambda_l - \lambda_s)\phi_{l,0} z^{\alpha_l} = 0$. Por ser todos los λ_j distintos, deducimos que $\phi_{l,0} = 0$ para todo l.

- Supongamos la unicidad cierta para $\sum_j (r_j - 1) = r$ y veamos que también se tiene para $\sum_j (r_j - 1) = r + 1$:

  Consideremos el polinomio $P_1(x) = (x - \lambda_1)^{r_1 - 1} \prod_{s\neq 1}(x - \lambda_s)^{r_s}$, de manera que si $g = \sum_j \sum_{k=0}^{r_j - 1} \phi_{j,k}\, z^{\alpha_j} (\operatorname{Log} z)^k = 0$, entonces:

  $$0 = P_1(T)(g) = \sum_j \sum_{k=0}^{r_j - 1} \phi_{j,k} (T - \lambda_1)^{r_1 - 1} \prod_{s\neq 1} (T - \lambda_s)^{r_s} (z^{\alpha_j} (\operatorname{Log} z)^k).$$

  Pero por el Lema 3.23, para $j \neq 1$ el término del productorio $(T - \lambda_j)^{r_j} (z^{\alpha_j} (\operatorname{Log} z)^k)$ será nulo, ya que $k \leq r_j - 1$. Por tanto, el único sumando no nulo es el correspondiente a $j = 1$, con lo que:

  $$0 = \sum_{k=0}^{r_1 - 1} \phi_{1,k} \prod_{s\neq 1} (T - \lambda_s)^{r_s} (T - \lambda_1)^{r_1 - 1} (z^{\alpha_1} (\operatorname{Log} z)^k).$$

  Por el mismo motivo, el único sumando no nulo de esta última suma es el correspondiente a $k = r_1 - 1$, de manera que:

  $$0 = \phi_{1,r_1 - 1} \prod_{s\neq 1} (T - \lambda_s)^{r_s} (T - \lambda_1)^{r_1 - 1} (z^{\alpha_1} (\operatorname{Log} z)^{r_1 - 1}).$$

  Usando nuevamente el lema anterior, obtenemos:

  $$0 = \phi_{1,r_1 - 1} \prod_{s\neq 1} (T - \lambda_s)^{r_s} [(r_1 - 1)! \lambda^{r_1 - 1} z^{\alpha_1}] = \phi_{1,r_1 - 1} (r_1 - 1)! \lambda^{r_1 - 1} \prod_{s\neq 1} (\lambda_1 - \lambda_s)^{r_s} z^{\alpha_1},$$

  y dado que el productorio es no nulo, deducimos que $\phi_{1,r_1 - 1} = 0$. Esto quiere decir que en la expresión de g intervienen a lo más r términos, de manera que por hipótesis de inducción, todas las $\phi_{j,k}$ son nulas. Queda probada así la unicidad.

$\square$

Observación. Del teorema anterior se deduce que $\{z^\alpha (\operatorname{Log} z)^k \mid \alpha \in \operatorname{Im} \tau, k \geq 0\}$ es una base de $\mathcal{A}_R$ como $\mathcal{O}(D_R^*)$-módulo.

Capítulo 4

Ecuaciones diferenciales lineales en el entorno de puntos singulares

Una vez introducidas las funciones multiformes y analizadas sus propiedades, estamos en disposición de estudiar el comportamiento de un operador diferencial lineal en el entorno de un punto singular.

4.1. Teoría de Fuchs

En esta sección introduciremos el concepto de *punto singular regular* y enunciaremos el Teorema de Fuchs, un teorema clásico en la teoría de ecuaciones diferenciales lineales que establece una condición necesaria y suficiente para que un punto singular sea regular. En el capítulo XV de [7] podemos encontrar un detallado desarrollo de esta teoría, si bien expondremos aquí sus puntos principales.

Comencemos recordando los tipos de singularidades aisladas que puede tener una función compleja:

Definición 4.1. Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $p \in U$ y $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{p\})$, decimos que:

a) p es una *singularidad evitable de* f si existe $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$ tal que $\tilde{f}(z) = f(z)$ para todo $z \in U \setminus \{p\}$.

b) p es un *polo de* f si existe $h \in \mathcal{O}(U)$ con $h(p) \neq 0$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(z) = \frac{h(z)}{(z-p)^n}$ para todo $z \in U \setminus \{p\}$. En tal caso, n es único y se denomina *orden del polo*.

c) p es una *singularidad esencial de* f si no es ni una singularidad evitable ni un polo.

Ejemplos:

- $f(z) = z$ definida en $\mathbb{C}^*$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$.
- $f(z) = \frac{1}{z}$ definida en $\mathbb{C}^*$ tiene un polo de orden 1 en $z = 0$.
- $f(z) = e^{1/z}$ definida en $\mathbb{C}^*$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$.

Definición 4.2. Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f \in \mathcal{O}(U)$, decimos que f es *meromorfa en U* si existe un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ de puntos aislados (posiblemente vacío) tal que f es holomorfa en $U \setminus A$ y tiene polos en cada punto de A. Diremos que es meromorfa en $z_0 \in \mathbb{C}$ si lo es en un entorno de z_0. El conjunto de funciones meromorfas en U lo denotaremos por $\mathcal{M}(U)$.

Observación. Un resultado clásico del análisis complejo dice que toda función meromorfa en un abierto conexo U puede escribirse como el cociente de dos funciones holomorfas en U. Así, las funciones meromorfas en U constituyen el cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}(U)$: $\mathcal{M}(U) = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}(U))$.

En el Teorema 3.25 vimos que toda función multiforme de determinación finita $g \in \mathcal{A}_R$ podía expresarse de la forma:

$$g = \sum_j \sum_{k=0}^{r_j-1} \phi_{j,k} z^{\alpha_j} (\operatorname{Log} z)^k,$$

en la que las funciones $\phi_{\alpha,k}$ eran simplemente holomorfas en D_R^*, sin que se les exigiera ninguna propiedad en $z = 0$. Una condición más restrictiva sobre estas funciones nos conduce a la siguiente definición:

Definición 4.3. Sea $g \in \mathcal{A}_R$ una función multiforme de determinación finita, decimos que g es *regular* o *de la clase de Nilsson en $z = 0$* si en la expresión:

$$g = \sum_j \sum_{k=0}^{r_j-1} \phi_{j,k} z^{\alpha_j} (\operatorname{Log} z)^k$$

todas las funciones $\phi_{\alpha,k}$ son meromorfas en $z = 0$. El conjunto de funciones $g \in \mathcal{A}_R$ regulares en 0 se denotará por $\mathcal{N}_R$.

Observación. Es claro que tanto la suma como el producto de funciones regulares en $z = 0$ es regular en $z = 0$, así como también lo es el producto de cualquiera de ellas por una constante. Tenemos, pues, que $\mathcal{N}_R$ es una sub-$\mathbb{C}$-álgebra de $\mathcal{A}_R$.

Proposición 4.4. *$\mathcal{N}_R$ es un sub-$\mathcal{D}(D_R)$-módulo a la izquierda de $\mathcal{A}_R$.*

Demostración. Ya vimos en la Proposición 3.20 que $\mathcal{A}_R$ es un $\mathcal{D}(D_R^*)$-módulo a la izquierda. Para ver $\mathcal{A}_R$ como $\mathcal{D}(D_R)$-módulo, basta definir el producto restringiendo el operador a D_R^*. Es decir, dados $L \in \mathcal{D}(D_R)$ y $g \in \mathcal{A}_R$, definimos $L \cdot g = L|_{D_R^*} \cdot g$.

Por otro lado, la observación anterior indica, en particular, que $\mathcal{N}_R$ es un subgrupo de $\mathcal{A}_R$. Por tanto, resta ver que si $L \in \mathcal{D}(D_R)$ y $g \in \mathcal{N}_R$, entonces $L \cdot g \in \mathcal{N}_R$:

Para ello, observamos que las derivadas de z^α y de $\operatorname{Log} z$ son meromorfas en $z = 0$, así como que la derivada de una función meromorfa en un punto también es meromorfa en el mismo punto. Además, los coeficientes de L son funciones holomorfas en D_R, de manera que al aplicar el operador L a una función regular en $z = 0$, todos los términos resultantes van a ser meromorfos en $z = 0$, y por tanto vamos a seguir obteniendo una función de $\mathcal{N}_R$. Concluimos que $\mathcal{N}_R$ es un sub-$\mathcal{D}(D_R)$-módulo a la izquierda de $\mathcal{A}_R$.

$\square$

Observación. Nótese que $\mathcal{N}_R$ no es un sub-$\mathcal{D}(D_R^*)$-módulo (a la izquierda) de $\mathcal{A}_R$. Para ello, basta considerar el operador $L = e^{1/z} \in \mathcal{D}(D_R^*)$ y aplicarlo sobre la función regular $g = 1$, obteniendo $L \cdot g = e^{1/z}$, que no es una función regular en $z = 0$, ya que $e^{1/z}$ tiene una singularidad esencial en dicho punto.

En la teoría clásica de ecuaciones diferenciales en el plano complejo, se dice que la ecuación diferencial:

$$\frac{d^n y}{dz^n} + p_1(z)\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(z)\frac{dy}{dz} + p_n(z)y = 0 \tag{4.1}$$

tiene un punto singular en $p \in \mathbb{C}$ si alguna de las funciones $p_k(z)$ tiene una singularidad en dicho punto.

Obsérvese que, si las funciones p_k son meromorfas en p, entonces en un entorno de p son de la forma $p_k(z) = (z-p)^{-r_k}P_k(z)$ con $r_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y P_k holomorfa en dicho entorno. Podemos construir, pues, un operador diferencial lineal de orden n asociado a esta ecuación en dicho entorno que también tiene un punto singular en p:

$$L = (z-p)^r \frac{d^n}{dz^n} + (z-p)^{r-r_1}P_1(z)\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + \ldots + (z-p)^{r-r_n}P_n(z),$$

siendo $r = \max\limits_{k \in \{1,\ldots,n\}} r_k$.

Recíprocamente, si tenemos un operador diferencial lineal $L = a_n \frac{d}{dz^n} + \ldots + a_1 \frac{d}{dz} + a_0 \in \mathcal{D}(U)$ en un abierto $U \subset \mathbb{C}$, la ecuación $L(g) = 0$ se puede escribir en la forma de (4.1) sin más que dividir todos los coeficientes por a_n. Si p es un punto singular de L, entonces $a_n(p) = 0$ y los coeficientes de la ecuación construida tendrán una singularidad en p, de manera que este será un punto singular de la ecuación. Vemos así que ambas definiciones son equivalentes en este caso.

Finalmente, se dice que p es un *punto singular regular de la ecuación* (4.1) si además todas las soluciones de dicha ecuación relativas al punto p son regulares en el sentido de la definición 4.3.

Observación. Nótese que conocer el carácter regular o no regular de un punto singular nos permite saber si las soluciones relativas a dicho punto son controlables por una función polinómica (es decir, son meromorfas), o bien tienen una singularidad esencial en dicho punto.

Tenemos ya todos los ingredientes necesarios para enunciar el Teorema de Fuchs en su versión clásica:

Teorema 4.5 (Teorema de Fuchs)**.** *Sea la ecuación diferencial:*

$$\frac{d^n y}{dz^n} + p_1(z)\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(z)\frac{dy}{dz} + p_n(z)y = 0.$$

Entonces, $p \in \mathbb{C}$ es un punto singular regular de la ecuación si y sólo si existen $P_1(z), \ldots, P_n(z)$ holomorfas en un entorno de p tales que $p_k(z) = \frac{P_k(z)}{(z-p)^k}$ para todo $k = 1, \ldots, n$.

Demostración. La prueba de este teorema puede encontrarse en [7], en las secciones 15.3, 15.31 y 15.311.

□

Nuestro objetivo es reescribir el Teorema 4.5 en términos de operadores diferenciales. Para ello, hemos de empezar diciendo qué se entiende por *punto singular regular* de un operador diferencial lineal:

Definición 4.6. Sea $L = a_n \frac{d^n}{dz^n} + \ldots + a_1 \frac{d}{dz} + a_0 \in \mathcal{D}(D_R)$ un operador diferencial lineal de orden n en D_R tal que $\Sigma(L) = \{0\}$, decimos que 0 es un *punto singular regular* de L si cada $g \in \mathcal{A}_R$ tal que $L(g) = 0$ es regular en 0 (o dicho de otra forma, si $\ker L_{\mathcal{A}_R} \subset \mathcal{N}_R$).

Observación. Dado $L \in \mathcal{D}(D_R)$, como la propiedad de ser meromorfa en $z = 0$ es de carácter local, tendremos que 0 será un punto singular regular si y sólo si lo es para $L|_D$, siendo D cualquier disco abierto centrado en 0 y contenido en D_R.

Esta última observación nos permite extender la definición anterior a cualquier punto e incluyendo el caso en que L tenga más de un punto singular:

Definición 4.7. Sea $L \in \mathcal{D}(U)$ un operador diferencial lineal en un abierto $U \subset \mathbb{C}$, diremos que:

a) 0 es un *punto singular regular* de L si lo es para $L|_D$, siendo $D \subset U$ un disco abierto centrado en 0 que no contenga más puntos singulares.

b) p es un *punto singular regular* de L si 0 es un punto singular regular del operador trasladado L':

$$L' = a'_n \frac{d^n}{dz^n} + \ldots + a'_1 \frac{d}{dz} + a'_0 \in \mathcal{D}(U'), \tag{4.2}$$

siendo $U' = \{z \in \mathbb{C} \mid z + p \in U\}$ entorno de 0 y $a'_j(z) = a_j(z+p)$ para todo $j = 0, \ldots, n$.

Por otro lado, es bien conocido en análisis complejo que si una función f es holomorfa en un abierto conexo $U \subset \mathbb{C}$, no es nula en todo U y tiene un cero en $p \in U$, entonces existen un abierto $V \subset U$, una función g holomorfa en V y un único $n \in \mathbb{N}$ tales que $f|_V(z) = (z-p)^n g(z)$ y $g(p) \neq 0$ (puede consultarse, por ejemplo, [17], Teorema 1.1, capítulo 3).

Definición 4.8. En las condiciones anteriores, se dice que f tiene un cero de *orden* (o *multiplicidad*) n en p.

Análogamente, si una función f tiene un polo en $p \in U$, siendo U un abierto conexo, existen un abierto $V \subset U$, una función g holomorfa en V y un único $n \in \mathbb{N}$ tales que $f|_V(z) = (z-p)^{-n} g(z)$ y $g(p) \neq 0$ ([17], Teorema 1.2, capítulo 3).

Definición 4.9. En las condiciones anteriores, se dice que f tiene un polo de *orden* (o *multiplicidad*) n en p.

Observación. Dados un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y un punto $p \in U$, podemos definir una aplicación $\nu_p : \mathcal{M}(U) \to \mathbb{Z}$ que a cada función f meromorfa en U le asigna el mínimo de los índices de la serie de Laurent de f centrada en p cuyo coeficiente es no nulo. Es decir, si:

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-p)^n,$$

entonces $\nu_p(f) = \text{mín}\{n \in \mathbb{Z} \mid b_n \neq 0\}$. Consideraremos que $\nu_p(0) = \infty$.

Nótese que, dado $n > 0$:

- $\nu_p(f) = n$ si f tiene un cero de orden n en p.
- $\nu_p(f) = -n$ si f tiene un polo de orden n en p.
- $\nu_p(f) = 0$ en otro caso.

Y claramente esta función verifica:

a) $\nu_p(fg) = \nu_p(f) + \nu_p(g)$.

b) $\nu_p(1/f) = -\nu_p(f)$.

c) $\nu_p(f+g) = \text{mín}\{\nu_p(f), \nu_p(g)\}$.

Dado que $\nu_p(f)$ sólo depende de cómo esté definida la función en un entorno de f, ν_p induce una aplicación en la fibra (que seguiremos denotando ν_p) que hace que $\mathcal{O}_{U,p}$ sea un anillo de valoración discreta (ver [2], capítulo 9).

Y con todo esto, el Teorema de Fuchs en términos de operadores diferenciales se enuncia como sigue:

Teorema 4.10 (Teorema de Fuchs para operadores diferenciales)**.** *Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $L = a_n \frac{d^n}{dz^n} + \ldots + a_1 \frac{d}{dz} + a_0 \in \mathcal{D}(U)$ un operador diferencial lineal de orden $n \geq 1$ en U y $p \in U$ un punto singular de L, son equivalentes:*

(1) p es un punto singular regular de L.

(2) $\underset{0 \leq k \leq n}{\text{máx}} \{k - \nu_p(a_k)\} = n - \nu_p(a_n)$.

Lema 4.11. *Las dos versiones del Teorema de Fuchs, 4.5 y 4.10, son equivalentes.*

Demostración. Ya vimos que los conceptos de punto singular regular para una ecuación con coeficientes meromorfos en el entorno del punto y para un operador diferencial eran equivalentes, por lo que basta demostrar, con la notación de los respectivos teoremas, que existen $P_1(z), \ldots, P_n(z)$ holomorfas en un entorno de p tales que $p_k(z) = \frac{P_k(z)}{(z-p)^k}$ para todo $k = 1, \ldots, n$ si y sólo si se verifica que $\underset{0 \leq k \leq n}{\text{máx}} \{k - \nu_p(a_k)\} = n - \nu_p(a_n)$:

($\Rightarrow$) El operador diferencial asociado a la ecuación (4.1) en este caso es:

$$L = (z-p)^n \frac{d^n}{dz^n} + (z-p)^{n-1} P_1(z) \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + \ldots + (z-p) P_{n-1}(z) \frac{d}{dz} + P_n(z),$$

de manera que $a_k(z) = (z-p)^k P_{n-k}(z)$ para todo $k = 0 \ldots n-1$ y $a_n(z) = (z-p)^n$. Como no se exige que $P_k(z) \neq 0$, tendremos que $\nu_p(a_k) \geq k$ para todo $k = 0, \ldots, n-1$ y $\nu_p(a_n) = n$, de manera que $k - \nu_p(a_k) \leq 0 = n - \nu_p(a_n)$ para todo k y $\underset{0 \leq k \leq n}{\text{máx}} \{k - \nu_p(a_k)\} = n - \nu_p(a_n)$.

($\Leftarrow$) Al dividir todos los coeficientes de la ecuación $L(g) = 0$ por a_n obtenemos una ecuación como (4.1) con $p_k(z) = a_{n-k}(z)/a_n(z)$. Por hipótesis, $k - \nu_p(a_k) \leq n - \nu_p(a_n)$ para todo k , de manera que $r_k := \nu_p(p_k) = \nu_p(a_{n-k}) - \nu_p(a_n) \geq n - k - n = -k$. Por tanto, existe $g_k(z)$ holomorfa en un entorno de p tal que $p_k(z) = (z-p)^{r_k} g_k(z)$. Definiendo $P_k(z) = (z-p)^{r_k+k} g_k(z)$ (holomorfa en un entorno de p ya que $k + r_k \geq 0$ para todo k), tendremos que $p_k(z) = (z-p)^{-k} P_k(z)$, concluyendo el resultado.

$\square$

Observación. Cabe destacar que el Teorema de Fuchs nos permite estudiar la regularidad de los puntos singulares de una ecuación diferencial sin necesidad de resolverla, lo que en muchos casos no será posible hacer analíticamente. Así, aun sin conocer las soluciones, podemos saber cómo se comportan en el entorno de estos puntos.

Para terminar esta sección, presentamos un par de ejemplos sencillos en los que la ecuación diferencial se puede resolver analíticamente, permitiéndonos comprobar que se verifica el Teorema de Fuchs:

Ejemplos:

- $L = z\frac{d}{dz} + 1$

  En este caso, el único punto singular de L es $z = 0$, y tenemos que $\nu_0(a_1) = 1$ y $\nu_0(a_0) = 0$, de manera que $\max_{0 \leq k \leq 1}\{k - \nu_0(a_k)\} = 0 = 1 - \nu_0(a_1)$. El Teorema de Fuchs nos asegura entonces que 0 es un punto singular regular. Comprobémoslo:

  $$z\frac{df}{dz} + f = 0 \quad \Rightarrow \quad f(z) = \frac{C}{z},\ C \in \mathbb{C},$$

  que, vista como función multiforme, es claramente una función regular en $z = 0$.

- $L = z^2\frac{d}{dz} + 1$

  Nuevamente, el único punto singular de L es $z = 0$ con $\nu_0(a_1) = 2$ y $\nu_0(a_0) = 0$, luego $\max_{0 \leq k \leq 1}\{k - \nu_0(a_k)\} = 0 = 0 - \nu_0(a_0) \neq 1 - \nu_0(a_1)$. Por tanto, en este caso, 0 será un punto singular no regular:

  $$z^2\frac{df}{dz} + f = 0 \quad \Rightarrow \quad f(z) = Ce^{1/z},\ C \in \mathbb{C},$$

  que, salvo para $C = 0$, no es una función regular en $z = 0$ (recuérdese que la función $e^{1/z}$ no es meromorfa en $z = 0$).

4.2. Índice de operadores diferenciales en puntos singulares

En el Teorema 2.29 vimos que, dados $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $p \in U$ y L operador diferencial lineal en U, se tiene que:

- Si p es un punto regular, $\dim_{\mathbb{C}}(\ker L_p) = n$ y L_p es sobreyectiva (o lo que es lo mismo, $\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{coker} L_p) = 0$).

- Si p es un punto singular, $\dim_{\mathbb{C}}(\ker L_p) \leq n$.

Por tanto, cabe preguntarse ahora qué es lo que ocurre con $\operatorname{coker} L_p$ en el caso en que p sea un punto singular. Una respuesta parcial a esta pregunta la da el *Teorema del Índice de Komatsu-Malgrange*, para el cual es necesario en primer lugar dar la siguiente definición:

Definición 4.12. Sean E y E' dos espacios vectoriales y $T : E \to E'$ una aplicación lineal entre ellos, se dice que T es un *operador con índice* si tanto $\ker T$ como $\operatorname{coker} T$ tienen dimensión finita. En tal caso, al número entero $\chi(T) = \dim(\ker T) - \dim(\operatorname{coker} T)$ se le denomina *índice de* T.

Teorema 4.13 (Teorema del Índice de Komatsu-Malgrange)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, $L = a_n \frac{d^n}{dz^n} + \ldots + a_1 \frac{d}{dz} + a_0 \in \mathcal{D}(U)$ un operador diferencial de orden n en U y $p \in U$ un punto singular de L, se verifica que:*

(1) $L_p : \mathcal{O}_{U,p} \to \mathcal{O}_{U,p}$ es un operador con índice.

(2) $\chi(L_p) = n - \nu_p(a_n)$.

Para la demostración de este teorema es necesario recurrir a varias definiciones y resultados propios del análisis funcional:

Definición 4.14. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f : U \to \mathbb{C}$ y $k \geq 0$ entero, diremos que f *es de clase C^k en $\overline{U}$* y escribiremos $f \in C^k(\overline{U})$ si f y todas sus derivadas parciales hasta orden k (viendo f como una función en $\mathbb{R}^2$) existen y son continuas en $\overline{U}$.

Dado $R > 0$, si denotamos por $D_{R,p}$ al disco abierto de radio R centrado en p y por $\Delta_{R,p}$ a su clausura (disco cerrado de radio R centrado en p), es claro que $C^k(\Delta_{R,p})$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Además, con la identificación de $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ ($z \equiv (x, y)$ si $z = x + iy$), podemos considerar $f(z) \equiv f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y definir la norma del máximo:

$$\|f\|_k = \max_{0 \leq i+j \leq k} \max_{z \in \Delta_{R,p}} \left| \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(z) \right|,$$

Es fácil ver que $\left(C^k(\Delta_{R,p}), \|\cdot\|_k\right)$ es un espacio de Banach (i.e. un espacio normado completo).

Proposición 4.15. *El espacio $B^k(\Delta_{R,p}) = \{f \in C^k(\Delta_{R,p}) \mid f \in \mathcal{O}(D_{R,p})\}$ es un subespacio cerrado de $C^k(\Delta_{R,p})$ (y por tanto también es un espacio de Banach).*

Demostración. Es claro que $B^k(\Delta_{R,p})$ es un subespacio de $C^k(\Delta_{R,p})$. Para ver que es cerrado, consideremos una sucesión $\{f_n\} \subset B^k(\Delta_{R,p})$ convergente a una función f y veamos que $f \in B^k(\Delta_{R,p})$. Por ser $C^k(\Delta_{R,p})$ completo, tenemos que $f \in C^k(\Delta_{R,p})$.

Un resultado clásico del análisis complejo establece que si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones holomorfas en un abierto U que convergen uniformemente a una función f en cada compacto $K \subset U$, entonces f también es holomorfa en U (Teorema 5.2 del capítulo 2 de [17]). Dado un compacto $K \subset D_{R,p}$, tenemos que $f_n|_K \in C^k(K)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (de hecho son holomorfas en K) y convergen a $f|_K \in C^k(K)$. Pero la convergencia en esta norma implica, en particular, la convergencia uniforme, luego $\{f_n\}$ converge a f uniformemente en cada compacto $K \subset D_{R,p}$ y, en consecuencia, f es holomorfa en $D_{R,p}$. Por tanto, $f \in B^k(\Delta_{R,p})$, concluyendo que este espacio es cerrado.

□

Introducimos ahora las siguientes definiciones, necesarias para enunciar posteriormente el Teorema de Arzelà-Ascoli:

Definición 4.16. Sea $K \subset \mathbb{C}$ un compacto, y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en K, se dirá que:

a) $\{f_n\}$ *es uniformemente acotada* si existe una constante $M > 0$ tal que para todo $z \in K$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tenga que $|f_n(z)| \leq M$.

b) $\{f_n\}$ *es equicontinua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $z, z' \in K$ con $|z - z'| < \delta$, se tenga que $|f_n(z) - f_n(z')| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

El Teorema de Arzelà-Ascoli se puede enunciar de diversas maneras e incluso admite generalizaciones, pero un enunciado concreto y válido para nuestros propósitos es el siguiente:

Teorema 4.17 (Teorema de Arzelà-Ascoli)**.** *Sea $K \subset \mathbb{C}$ un compacto, y sea $\{f_n\} \subset C^0(K)$ una sucesión de funciones continuas en K uniformemente acotada y equicontinua. Entonces $\{f_n\}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente.*

Demostración. La prueba de este resultado puede encontrarse, por ejemplo, en [19] (capítulo 3, sección 3).

□

También necesitaremos el concepto de *operador compacto* y el *Teorema de invariancia del índice por perturbaciones compactas*:

Definición 4.18. Sean X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Decimos que T es *compacto* si verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

a) Para cada conjunto acotado $A \subset X$ se tiene que $\overline{T(A)}$ es compacto en Y.

b) La imagen de la bola unidad de X tiene clausura compacta en Y.

c) Para cada sucesión $\{x_n\} \subset X$ acotada, la sucesión $\{T(x_n)\}$ posee una subsucesión convergente.

Proposición 4.19 (Aditividad del índice por composición)**.** *Sean E, E' y E'' espacios de Banach, y sean $T : E \to E'$ y $T' : E' \to E''$ dos operadores lineales con índice. Entonces, la composición $T' \circ T$ es un operador con índice y $\chi(T' \circ T) = \chi(T) + \chi(T')$.*

Demostración. Se puede encontrar, por ejemplo, en [4] (capítulo 1, Teorema 3.16).

□

Teorema 4.20 (Invariancia del índice por perturbaciones compactas)**.** *Sean E y E' espacios de Banach y $T : E \to E'$ un operador lineal con índice. Si $K : E \to E'$ es un operador compacto, entonces $T + K$ es un operador con índice y $\chi(T + K) = \chi(T)$.*

Demostración. La prueba de este teorema puede encontrarse, por ejemplo, en [4] (capítulo 1, Teorema 3.17).

□

Ya estamos en disposición de probar el Teorema 4.13:

Demostración. En primer lugar, dado $R > 0$, por la Proposición 4.15, tenemos que $B^k(\Delta_{R,p})$ es un espacio de Banach para todo $k \geq 0$. Como los ceros de las funciones holomorfas están aislados, se puede elegir un R lo suficientemente pequeño para que a_n no se anule en $\Delta_{R,p} \setminus \{p\}$ (recordemos que se anula en p por ser este un punto singular) y $\Delta_{R,p} \subset U$.

Observemos que el operador L lleva el espacio $B^n(\Delta_{R,p})$ en $B^0(\Delta_{R,p})$, ya que, por definición, la derivada m-ésima de una función de clase C^k es una función de clase C^{k-m} (y será holomorfa donde lo sea la primera) y los coeficientes a_m son holomorfos en todo U. Por tanto, podemos considerar $L : B^n(\Delta_{R,p}) \to B^0(\Delta_{R,p})$, que será un operador lineal entre espacios de Banach.

Veamos que $L' = a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{d}{dz} + a_0$ es un operador compacto, de manera que, por el Teorema 4.20, tendremos que $\chi(L) = \chi\left(a_n\frac{d^n}{dz^n}\right)$. Para ello, tomaremos una sucesión acotada $\{f_k\}$ en $B^n(\Delta_{R,p})$ y veremos que $\{L'(f_k)\}$ tiene una subsucesión convergente en $B^0(\Delta_{R,p})$ (donde la convergencia en norma es equivalente a la convergencia uniforme).

Como $\Delta_{R,p}$ es compacto y $B^0(\Delta_{R,p}) \subset C^0(\Delta_{R,p})$, por el Teorema de Arzelà-Ascoli bastará ver que $\{L'(f_k)\}$ es uniformemente acotada y equicontinua:

- Uniformemente acotada: por ser $\{f_k\}$ acotada en $B^n(\Delta_{R,p})$, existe un $M_1 > 0$ tal que todas las f_k y sus derivadas hasta orden n están acotadas en módulo por M_1 (si están acotadas las parciales, por la relación que existe entre ellas, también lo está la derivada). Además, las funciones a_m y sus derivadas son continuas en $\Delta_{R,p}$, que es un compacto, luego por el Teorema de Weierstrass existirá $M_2 > 0$ que acotará superiormente los módulos de todas ellas. Aplicando la desigualdad triangular:

$$|L'(f_k)(z)| \leq \sum_{m=0}^{n-1} |a_m(z)| \left|\frac{d^m f_k}{dz^m}(z)\right| \leq nM_1M_2,$$

  para todo $z \in \Delta_{R,p}$ y para todo $k \in \mathbb{N}$, luego $\{L'(f_k)\}$ es uniformemente acotada en $\Delta_{R,p}$.

- Equicontinua: como L' deriva f_k a lo más $n-1$ veces, tendremos que $\{L'(f_k)\} \subset B^1(\Delta_{R,p})$. Observamos entonces que:

$$\left|\frac{d}{dz}L'(f_k)(z)\right| \leq \sum_{m=0}^{n-1} \left[|a'_m(z)| \left|\frac{d^m f_k}{dz^m}(z)\right| + |a_m(z)| \left|\frac{d^{m+1} f_k}{dz^{m+1}}(z)\right|\right] \leq 2nM_1M_2,$$

  para todo $z \in \Delta_{R,p}$ y para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\Delta_{R,p}$ es convexo, dados $z_1, z_2 \in \Delta_{R,p}$, podemos considerar el segmento $\gamma(t) = z_2 t + z_1(1-t)$ que une z_1 y z_2, de manera que para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$\left|L'(f_k)(z_2) - L'(f_k)(z_1)\right| = \left|\int_\gamma \frac{d}{dz}L'(f_k)(z)dz\right| \leq 2nM_1M_2 \cdot |z_2 - z_1|,$$

  donde se ha usado que $|\int_a^b f dt| \leq \int_a^b |f| dt$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{4nM_1M_2}$, de modo que si $|z_2 - z_1| < \delta$ tendremos que $|L'(f_k)(z_2) - L'(f_k)(z_1)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$, probando así la equicontinuidad.

Entonces, por el Teorema de Arzelà-Ascoli, $\{L'(f_k)\}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente y, consecuentemente, convergente en la norma de $B^0(\Delta_{R,p})$. Por tanto, L' es compacto y $\chi(L) = \chi(a_n \frac{d}{dz^n})$.

Para hallar el índice de $a_n \frac{d}{dz^n}$, factorizamos este operador de la siguiente manera:

$$B^n(\Delta_{R,p}) \xrightarrow{\frac{d}{dz}} B^{n-1}(\Delta_{R,p}) \xrightarrow{\frac{d}{dz}} \dots \xrightarrow{\frac{d}{dz}} B^0(\Delta_{R,p}) \xrightarrow{a_n} B^0(\Delta_{R,p}),$$

y por la Proposición 4.19, su índice será la suma de los índices de cada uno de los operadores de esta descomposición:

- El núcleo del operador $d/dz : B^k(\Delta_{R,p}) \to B^{k-1}(\Delta_{R,p})$ está formado por las funciones constantes, que claramente es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 1. Además, este operador es sobreyectivo, ya que toda función holomorfa h tiene primitiva en un dominio simplemente conexo (como lo es $\Delta_{R,p}$), y si h es de clase C^{k-1} en la frontera, su primitiva será de clase C^k, pues será derivable una vez más que h. Por tanto, $\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{coker} d/dz) = 0$ y $\chi(d/dz) = 1$ para todo $k = 1, \dots, n$.
- Es claro que si $a_n(z)f(z) = 0$ en $\Delta_{R,p}$, como a_n solo se anula en p, $f(z) = 0$ en $\Delta_{R,p} \setminus \{0\}$. Por extensión, ha de anularse en $z = 0$ también, luego $f = 0$ y $\dim_{\mathbb{C}}(\ker a_n) = 0$. Para hallar la dimensión del conúcleo, observamos que si $g = a_n f \in \operatorname{Im} a_n$, como f debe ser holomorfa en $D_{R,p}$, $\nu_p(f) \geq 0$ y por tanto $\nu_p(g) \geq \nu_p(a_n)$. Recíprocamente, como a_n no se anula fuera de p, dada g con $\nu_p(g) \geq \nu_p(a_n)$, se podrá tomar $f = g/a_n$. Al ser $\nu_p(f) = \nu_p(g) - \nu_p(a_n) \geq 0$, f será holomorfa. De esta forma, al tomar el cociente, las únicas funciones que quedarán serán aquellas cuyo orden de anulación sea mayor o igual que 0 y a lo más $\nu_p(a_n) - 1$, y no tengan ningún término de grado mayor o igual que $\nu_p(a_n)$. Es claro que estas funciones estarán generadas por el conjunto $\{1, z, \dots, z^{\nu_p(a_n)-1}\}$, de donde $\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{coker} a_n) = \nu_p(a_n)$. Concluimos que $\chi(a_n) = -\nu_p(a_n)$.

Finalmente, obtenemos que $\chi(L) = n \cdot \chi(d/dz) + \chi(a_n) = n - \nu_p(a_n)$. Como esto se ha probado para cualquier R suficientemente pequeño y $\mathcal{O}_{U,p} = \lim\limits_{R \to 0} B^m(\Delta_{R,p})$ (ya que la condición de ser continua en la frontera "desaparece" al tomar $R \to 0$ y queda simplemente la de ser holomorfa en un entorno de p), la aplicación L_p inducida en la fibra tendrá índice $\chi(L_p) = n - \nu_p(a_n)$, como queríamos demostrar.

□

Para el siguiente resultado, necesitamos introducir el concepto de *completación* de un anillo A respecto de un ideal $\mathfrak{a}$:

Definición 4.21. Sean A un anillo y $\mathfrak{a}$ un ideal de A, definimos la *completación* $\widehat{A}$ de A respecto del ideal $\mathfrak{a}$ como el límite inverso:

$$\widehat{A} = \varprojlim A/\mathfrak{a}^n = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \in \prod_{n=1}^{\infty} A/\mathfrak{a}^n \;\middle|\; x_m - x_n \in \mathfrak{a}^n \text{ para todo } m > n \right\}.$$

donde $\mathfrak{a}^n$ es la potencia n-ésima del ideal $\mathfrak{a}$ (ideal generado por todos los productos de n elementos de $\mathfrak{a}$).

Se tiene que $\widehat{A}$ es un anillo. Es más, si A es un anillo local y lo completamos con respecto a su ideal maximal $\mathfrak{m}$, entonces $\widehat{A}$ también es un anillo local con ideal maximal $\widehat{\mathfrak{m}} = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \in \widehat{A} \mid x_1 = 0\}$.

Observación. Dado un espacio métrico no completo X, siempre se puede construir otro espacio $\widehat{X}$ que sí lo sea y que contenga a X como subespacio denso. Este proceso se denomina completación y consiste en definir una cierta relación de equivalencia en el conjunto de sucesiones de Cauchy y tomar el conjunto cociente. Por otro lado, dados un anillo A y un ideal $\mathfrak{a}$, se puede definir una topología, denominada *topología $\mathfrak{a}$-ádica*, para la cual las operaciones de A son continuas: $U \subset A$ es abierto si y sólo si para cada $x \in A$, existe un $n \in \mathbb{N}$ con $x+\mathfrak{a}^n = \{x+y \mid y \in \mathfrak{a}^n\} \subset U$. Esto permite definir los conceptos de sucesión de Cauchy y convergencia en A, y el resultado de completar este espacio es un anillo isomorfo a $\widehat{A}$. De ahí que esta construcción reciba el nombre de completación.

Recordemos de la Proposición 2.16 que $\mathcal{O}_{U,p}$ es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}_{U,p} = \{f_p = \overline{(V, f)} \in \mathcal{O}_{U,p} \mid f(p) = 0\}$. Por simplicidad, a partir de ahora denotaremos $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{U,p}$ y $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{U,p}$. Por otro lado, en la Proposición 2.15, vimos que existe un isomorfismo entre $\mathcal{O}$ y $\mathbb{C}\{z\}$, el cual envía $\mathfrak{m}$ en el ideal (z).

Podemos considerar entonces la completación $\mathfrak{m}$-ádica $\widehat{\mathcal{O}}$ de $\mathcal{O}$, que será isomorfa a la completación (z)-ádica de $\mathbb{C}\{z\}$, que es el anillo de series formales $\mathbb{C}[[z]]$. L_p inducirá un endomorfismo $\widehat{L_p} : \widehat{\mathcal{O}} \to \widehat{\mathcal{O}}$, el cual actuará de forma análoga sobre las series formales y coincidirá con L_p cuando $f \in \mathcal{O}$.

Considerando ahora el cociente $\widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$, tenemos la aplicación inducida $\widetilde{L_p} : \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \to \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ tal que $\widetilde{L_p}(f + \mathcal{O}) = \widehat{L_p}(f) + \mathcal{O}$ para cada $f \in \widehat{\mathcal{O}}$ (nótese que $\widetilde{L_p}$ está bien definida, pues si $f + \mathcal{O} = g + \mathcal{O}$, entonces $f - g \in \mathcal{O}$ y $\widehat{L_p}(f - g) = L_p(f - g) = L_p(f) - L_p(g) \in \mathcal{O}$, de donde $\widehat{L_p}(f) + \mathcal{O} = \widehat{L_p}(g) + \mathcal{O}$).

Tenemos ya todo lo necesario para enunciar el siguiente teorema:

Teorema 4.22. *Con la notación anterior, se tiene que:*

(1) Los $\mathbb{C}$-espacios vectoriales $\ker \widehat{L_p}$ *y* $\operatorname{coker} \widehat{L_p}$ *son de dimensión finita y:*

$$\chi\left(\widehat{L_p}\right) = \max_{0\leq k\leq n} \{k - \nu_p(a_k)\}.$$

(2) La aplicación inducida $\widetilde{L_p} : \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \to \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ es sobreyectiva y:

$$\dim_{\mathbb{C}}(\ker \widetilde{L_p}) = \max_{0\leq k\leq n} \{k - \nu_p(a_k)\} - (n - \nu_p(a_n)).$$

Demostración.

(1) Sea $m = \max_{0\leq k\leq n}\{k - \nu_p(a_k)\}$, tendremos que $\nu_p(a_k) \geq k - m$ para todo k desde 0 hasta n, y la igualdad se alcanzará para algunos de ellos. Entonces, por definición, para todo k existirá $b_k \in \mathcal{O}$ (definida en un entorno de p) tal que $a_k(z) = (z - p)^{k-m} b_k(z)$, y si definimos el conjunto $A = \{k \in \{0, \ldots, n\} \mid \nu_p(a_k) = k - m\}$, se tendrá que $b_k(p) \neq 0$ para todo $k \in A$.

Por otro lado, si j es un entero mayor o igual que m:

$$a_k \frac{d^k}{dz^k}(z-p)^j = \prod_{s=0}^{k-1}(j-s)\cdot(z-p)^{j-k}(z-p)^{k-m}b_k(z) = \prod_{s=0}^{k-1}(j-s)\cdot(z-p)^{j-m}b_k(z).$$

En un entorno de p, b_k es analítica, luego $b_k(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{b_k^{r)}(p)}{r!}(z-p)^r$ y:

$$a_k \frac{d^k}{dz^k}(z-p)^j = \prod_{s=0}^{k-1}(j-s)\cdot b_k(p)(z-p)^{j-m} + \ldots,$$

donde los puntos suspensivos indican términos de grado mayor que $j-m$. Del mismo modo, tendremos que:

$$L_p\left((z-p)^j\right) = \sum_{k\in A}\left(\prod_{s=0}^{k-1}(j-s)\right) b_k(p)\cdot(z-p)^{j-m} + \ldots,$$

ya que para los $k \notin A$, $b_k(p) = 0$ y el primer término de $a_k \frac{d^k}{dz^k}(z-p)^j$ ya será de grado mayor que $j-m$. Ahora bien, como el coeficiente de $(z-p)^{j-m}$, que denominaremos B_j, es un polinomio en j cuyo término de mayor grado es $b_{k_0}(p)j^{k_0} \neq 0$ (siendo $k_0 = \sup A$), existirá un j_0 tal que para todo $j \geq j_0$, $B_j \neq 0$. Veamos entonces que para $j \geq j_0$, $\widehat{L_p}$ es un isomorfismo entre $\widehat{\mathfrak{m}}^j$ y $\widehat{\mathfrak{m}}^{j-m}$:

Sea $g = \sum_{r=r_0}^{\infty} d_r(z-p)^r \in \widehat{\mathfrak{m}}^{j-m}$ con $d_{r_0} \neq 0$ (es decir, $\nu_p(g) = r_0 \geq j-m$), veamos que existe un único $f = \sum_{s=s_0}^{\infty} c_s(z-p)^s \in \widehat{\mathfrak{m}}^j$ (con $c_{s_0} \neq 0$ y por tanto $\nu_p(f) = s_0 \geq j$) tal que $\widehat{L_p}(f) = g$. Para ello, basta determinar los coeficientes c_s (que determinan a f). Si estos coeficientes quedan unívocamente determinados, entonces f también, y tendremos que $\widehat{L_p}$ es un isomorfismo. Para el cálculo de los c_s procedemos por recurrencia:

- Como $s_0 \geq j \geq j_0$, tendremos que el término de menor grado de $\widehat{L_p}(f)$ será $c_{s_0}B_{s_0}(z-p)^{s_0-m}$ con $B_{s_0} \neq 0$, y este tendrá que coincidir con el de menor grado de g, que es $d_{r_0}(z-p)^{r_0}$. Por tanto, $r_0 = s_0 - m$ y $c_{s_0}B_{s_0} = d_{r_0}$, de donde $c_{s_0} = d_{r_0}/B_{s_0}$.

- En el siguiente término de $\widehat{L_p}(f)$ aparecerá $c_{s_0+1}B_{s_0+1}(z-p)^{s_0+1-m}$ pero también el término de grado s_0+1-m de $\widehat{L_p}((z-p)^{s_0})$ (a cuyo coeficiente llamaremos C_0, que podría ser nulo) multiplicado por c_{s_0}. La suma de estos dos términos tendrá que ser justamente el término de grado $s_0+1-m = r_0+1$ de g, de manera que $c_{s_0}C_0 + c_{s_0+1}B_{s_0+1} = d_{r_0+1}$ y $c_{s_0+1} = \frac{d_{r_0+1} - c_{s_0}C_0}{B_{s_0+1}}$ (recuérdese que $B_j \neq 0$ para todo $j \geq j_0$). Como ya conocemos c_{s_0}, podemos calcular c_{s_0+1}.

- Siguiendo con este procedimiento, en el paso $(k+1)$-ésimo podremos obtener c_{s_0+k} a partir de una ecuación de la forma:

  $$c_{s_0}\alpha_0 + \ldots + c_{s_0+k}\alpha_k = d_{r_0+k},$$

  siendo α_i $(i = 0, \ldots, k)$ constantes conocidas a partir de la actuación de $\widehat{L_p}$ sobre los $k+1$ primeros términos de f y c_{s_0+i} $(i = 1, \ldots, k)$ los coeficientes ya calculados en los pasos previos. Este proceso infinito permite ir obteniendo, de manera recursiva y única, los coeficientes del desarrollo de f, determinándola unívocamente.

Concluimos, pues, que $\widehat{\mathfrak{m}}^j \cong \widehat{\mathfrak{m}}^{j-m}$. Consideramos entonces el siguiente diagrama conmutativo, cuyas filas son exactas (pues la inclusión i_j es inyectiva, la proyección π_j es sobreyectiva y $\ker \pi_j = \widehat{\mathfrak{m}}^j = \operatorname{Im} i_j$, y análogamente para la fila inferior):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widehat{\mathfrak{m}}^j \arrow[r, hook, "i_j"] \arrow[d, "\widehat{L_p}|_{\widehat{\mathfrak{m}}^j}", "\cong"'] & \widehat{\mathcal{O}} \arrow[r, "\pi_j"] \arrow[d, "\widehat{L_p}"] & \widehat{\mathcal{O}}/\widehat{\mathfrak{m}}^j \arrow[r] \arrow[d, "\overline{L_p}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widehat{\mathfrak{m}}^{j-m} \arrow[r, hook, "i_{j-m}"] & \widehat{\mathcal{O}} \arrow[r, "\pi_{j-m}"] & \widehat{\mathcal{O}}/\widehat{\mathfrak{m}}^{j-m} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por el Lema 1.13, este diagrama da lugar a la sucesión exacta:

$$0 \to \ker \widehat{L_p}|_{\widehat{\mathfrak{m}}^j} \to \ker \widehat{L_p} \to \ker \overline{L_p} \to \operatorname{coker} \widehat{L_p}|_{\widehat{\mathfrak{m}}^j} \to \operatorname{coker} \widehat{L_p} \to \operatorname{coker} \overline{L_p} \to 0.$$

Como $\widehat{L_p}|_{\widehat{\mathfrak{m}}^j}$ es un isomorfismo, su núcleo y su conúcleo son nulos, de donde tenemos las sucesiones exactas $0 \to \ker \widehat{L_p} \to \ker \overline{L_p} \to 0$ y $0 \to \operatorname{coker} \widehat{L_p} \to \operatorname{coker} \overline{L_p} \to 0$. Entonces $\ker \widehat{L_p} \cong \ker \overline{L_p}$ y $\operatorname{coker} \widehat{L_p} \cong \operatorname{coker} \overline{L_p}$. Basta hallar, pues, la dimensión de estos espacios isomorfos:

Sabemos que $\widehat{\mathcal{O}}/\widehat{\mathfrak{m}}^j$ es un espacio vectorial generado por $1, z, \ldots, z^{j-1}$ y por tanto es de dimensión j. Al ser de dimensión finita, el núcleo y el conúcleo de $\overline{L_p}$ también lo serán. Entonces, de las relaciones $j = \dim_{\mathbb{C}} \left(\widehat{\mathcal{O}}/\widehat{\mathfrak{m}}^j\right) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\ker \overline{L_p}\right) + \dim_{\mathbb{C}} \left(\operatorname{Im} \overline{L_p}\right)$ y $\dim_{\mathbb{C}} \left(\operatorname{coker} \overline{L_p}\right) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\widehat{\mathcal{O}}/\widehat{\mathfrak{m}}^{j-m}\right) - \dim_{\mathbb{C}} \left(\operatorname{Im} \overline{L_p}\right) = j - m - \dim_{\mathbb{C}} \left(\operatorname{Im} \overline{L_p}\right)$ obtenemos finalmente que $\chi\left(\widehat{L_p}\right) = \chi\left(\overline{L_p}\right) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\ker \overline{L_p}\right) - \dim_{\mathbb{C}} \left(\operatorname{coker} \overline{L_p}\right) = m = \max\limits_{0 \leq k \leq n} \{k - \nu_p(a_k)\}$.

(2) Dada $f + \mathcal{O} \in \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$, la aplicación inducida $\widetilde{L_p}$ la envía en $\widehat{L_p}(f) + \mathcal{O}$. Por tanto, probar que $\widetilde{L_p}$ es sobreyectiva significa probar que, para cada $g \in \widehat{\mathcal{O}}$, existe $f \in \widehat{\mathcal{O}}$ tal que $\widehat{L_p}(f) - g \in \mathcal{O}$. Para ello, observamos que si $h \in \mathcal{O}$ es la suma de los términos de grado menor que $j_0 - m$ de g, entonces $\nu_p(g-h) \geq j_0 - m$, luego $g - h \in \widehat{\mathfrak{m}}^{j_0 - m}$, donde sabemos que $\widehat{L_p}$ es un isomorfismo. Existe, por tanto, $f \in \widehat{\mathfrak{m}}^{j_0}$ tal que $\widehat{L_p}(f) = g - h$, y de aquí, $g - \widehat{L_p}(f) \in \mathcal{O}$. Concluimos que $\widetilde{L_p}$ es sobreyectiva.

Para ver la dimensión del núcleo, consideramos un diagrama análogo al anterior:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O} \arrow[r, hook] \arrow[d, "L_p"] & \widehat{\mathcal{O}} \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{L_p}"] & \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{L_p}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O} \arrow[r, hook] & \widehat{\mathcal{O}} \arrow[r] & \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Nuevamente, se trata de un diagrama conmutativo de filas exactas que da lugar a la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to \ker L_p \to \ker \widehat{L_p} \to \ker \widetilde{L_p} \to \operatorname{coker} L_p \to \operatorname{coker} \widehat{L_p} \to \operatorname{coker} \widetilde{L_p} \to 0.$$

Aplicando sucesivas veces el primer teorema de isomorfía y relacionando por exactitud los núcleos e imágenes de las aplicaciones, puede comprobarse que:

$$\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{coker} \widetilde{L_p}) = \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{coker} \widehat{L_p}) - \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{coker} L_p) + \dim_{\mathbb{C}}(\ker \widetilde{L_p}) - \dim_{\mathbb{C}}(\ker \widehat{L_p}) + \dim_{\mathbb{C}}(\ker L_p).$$

Y de aquí, $\chi(\widetilde{L_p}) = \chi(\widehat{L_p}) - \chi(L_p)$. Por el Teorema 4.13, sabemos que $\chi(L_p) = n - \nu_p(a_n)$ y por (1), tenemos que $\chi(\widehat{L_p}) = \text{máx}_{0\leq k\leq n}\{k - \nu_p(a_k)\}$. Además, como $\widetilde{L_p}$ es sobreyectiva, $\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{coker}\widetilde{L_p}) = 0$, luego $\chi(\widetilde{L_p}) = \dim_{\mathbb{C}}(\ker\widetilde{L_p})$. Con todo esto, obtenemos finalmente que $\dim_{\mathbb{C}}(\ker\widetilde{L_p}) = \underset{0\leq k\leq n}{\text{máx}}\{k - \nu_p(a_k)\} - (n - \nu_p(a_n))$.

$\square$

Corolario 4.23. *Con la notación anterior, son equivalentes:*

(1) p *es un punto singular regular de* L*.*

(2) $\chi(\widetilde{L_p}) = 0$*.*

(3) $\ker\widetilde{L_p} = 0$*.*

(4) $\widetilde{L_p}$ *es un isomorfismo.*

(5) Las aplicaciones $\ker L_p \to \ker\widehat{L_p}$ *y* $\operatorname{coker} L_p \to \operatorname{coker}\widehat{L_p}$ *son isomorfismos.*

(6) $\dim_{\mathbb{C}}(\ker L_p) = \dim_{\mathbb{C}}(\ker\widehat{L_p})$ *y* $\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{coker} L_p) = \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{coker}\widehat{L_p})$*.*

Demostración.

($1 \Leftrightarrow 2$) Por el Teorema de Fuchs 4.10, p es un punto singular regular de L si y sólo si $\underset{0\leq k\leq n}{\text{máx}}\{k - \nu_p(a_k)\} = n - \nu_p(a_n)$. Esto, por el Teorema 4.22, se tendrá si y sólo si $\chi(\widetilde{L_p}) = 0$.

($2 \Rightarrow 3$) Por el Teorema 4.22, $\widetilde{L_p}$ es sobreyectiva y, por tanto, $\chi(\widetilde{L_p}) = \dim_{\mathbb{C}}(\ker\widetilde{L_p})$. Si $\chi(\widetilde{L_p}) = 0$, entonces $\ker\widetilde{L_p} = 0$.

($3 \Rightarrow 4$) Si $\ker\widetilde{L_p} = 0$, entonces $\widetilde{L_p}$ es inyectiva, y como siempre es sobreyectiva, es un isomorfismo.

($4 \Rightarrow 5$) Al ser $\widetilde{L_p}$ un isomorfismo, tenemos que $\ker\widetilde{L_p} = \operatorname{coker}\widetilde{L_p} = 0$ y por tanto las sucesiones exactas $0 \to \ker L_p \to \ker\widehat{L_p} \to 0$ y $0 \to \operatorname{coker} L_p \to \operatorname{coker}\widehat{L_p} \to 0$. De aquí, las aplicaciones $\ker L_p \to \ker\widehat{L_p}$ y $\operatorname{coker} L_p \to \operatorname{coker}\widehat{L_p}$ son isomorfismos.

($5 \Rightarrow 6$) Si $\ker L_p \cong \ker\widehat{L_p}$ y $\operatorname{coker} L_p \cong \operatorname{coker}\widehat{L_p}$, en particular, tienen la misma dimensión.

($6 \Rightarrow 2$) Si las dimensiones de los núcleos y conúcleos de L_p y $\widehat{L_p}$ coinciden, entonces $\chi(L_p) = \chi\left(\widehat{L_p}\right)$. Pero recordemos que $\chi(\widetilde{L_p}) = \chi(\widehat{L_p}) - \chi(L_p)$, luego $\chi(\widetilde{L_p}) = 0$.

$\square$

Observación. Del corolario anterior deducimos que $\ker\widetilde{L_p}$ es una medida de la no regularidad del punto singular p de L, de manera que el punto p será regular sólo cuando $\widetilde{L_p}$ sea inyectiva y $\chi(\widetilde{L_p}) = 0$.

Este resultado conecta de forma directa con la teoría de $\mathcal{D}$-módulos, una teoría algebraica extremadamente útil para el estudio de las ecuaciones lineales en derivadas parciales, aunque también tiene su interés en dimensión 1. En particular, este es el punto de partida para el estudio de los *complejos de irregularidad de* $\mathcal{D}$*-módulos holónomos*, que generalizan estas ideas a dimensiones superiores y a otros contextos geométricos como las hipersuperficies. Un amplio desarrollo de esta teoría puede encontrarse en [11].

Bibliografía

[1] W. ARVESON, *A short course on spectral theory*, Springer, 2002.

[2] M. F. ATIYAH Y I.G. MACDONALD, *Introduction to Commutative Algebra (Addison-Wesley Series in Mathematics)*, Westview Press Incorporated, 1969.

[3] J. A. DIEUDONNÉ, *Foundations of Modern Analysis*, Acad. Press, 1969.

[4] D. E. EDMUNDS Y W. D. EVANS, *Spectral theory and differential operators*, Oxford University Press, 2018.

[5] D. EISENBUD, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, World Publishing Corp., 2008.

[6] A. HATCHER, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2018.

[7] E. L. INCE, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, 1956.

[8] B. IVERSEN, *Cohomology of Sheaves*, Springer, 1986.

[9] B. MALGRANGE, *Sur les points singuliers des équations différentielles*, L'Enseignement Mathématique, XX (1974), pp. 147–176.

[10] W. S. MASSEY, *Algebraic topology: an introduction*, Springer, 1998.

[11] Z. MEBKHOUT, *Le théorème de positivité, le théorème de comparaison et le théorème d'existence de Riemann*, in Éléments de la théorie des systèmes différentiels géométriques. Cours du CIMPA, École d'été de Seville (1996). Séminaires et congrès, P. Maisonobe y L. Narváez Macarro, ed., vol. 8, Soc. Math. France, Paris, 2004, pp. 165–308.

[12] L. NARVÁEZ MACARRO, *D-modules in dimension 1*, in Algebraic Approach to Differential Equations: Bibliotheca Alexandrina, Alexandria, Egypt, 12-24 Nov. 2007, L. D. Tráng, ed., World Scientific, 2010, p. 1–51.

[13] L. NARVÁEZ MACARRO, *La teoría algebraica de los sistemas diferenciales lineales*, in Actas del Encuentro de Matemáticos Andaluces, Colecc. Abierta, 52, Univ. Sevilla Secr. Publ, 2001, pp. 143–184.

[14] J. J. ROTMAN, *An introduction to algebraic topology*, Springer, 1988.

[15] J. J. ROTMAN, *An Introduction to Homological Algebra*, Springer, 2009.

[16] C. SABBAH, *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, in Éléments de la théorie des systèmes différentiels, P. Maisonobe y C. Sabbah, ed., vol. I, Hermann, Paris, 1993, pp. 1–80.

[17] E. M. STEIN Y R. SHAKARCHI, *Complex analysis*, Princeton Univ. Press, 2003.

[18] C. A. WEIBEL, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 2011.

[19] K. YOSHIDA, *Functional analysis: 6th ed.*, Springer-Verlag, 1980.