Facultad de Matemáticas
Departamento de Geometría y Topología

Máster Universitario
en Matemáticas

TRABAJO FIN DE MÁSTER

El Operador de Evolución de un Álgebra de Evolución

Víctor Manuel Gómez Sousa

Tutorizado por:

Desamparados Fernández Ternero.
Profesora Contratada Doctora.
Dpto. de Geometría y Topología.
Universidad de Sevilla.

Juan Núñez Valdés.
Profesor Titular de Universidad.
Dpto. de Geometría y Topología.
Universidad de Sevilla.

Fdo: **Víctor Manuel Gómez Sousa**.
Graduado en Matemáticas.

Sevilla, Junio 2020.

AGRADECIMIENTOS

En estas líneas me gustaría expresar mi más profundo agradecimiento a todas aquellas personas que, de un modo u otro, me han apoyado y ayudado en la realización de este trabajo.

A mis tutores de este Trabajo Fin de Máster, Desamparados Fernández Ternero y Juan Núñez Valdés, gracias por haberme guiado a lo largo de estos meses, por la confianza que habéis depositado en mí y por vuestra dedicación y tiempo. Sin vosotros y vuestras incansables correcciones y aportaciones, este trabajo no hubiera sido posible, y no hubiera podido adentrarme en el fascinante mundo de la investigación matemática.

A todos mis amigos, por los buenos momentos que hemos vivido juntos y por estar siempre dispuestos a ayudar en lo que fuese necesario. Gracias por escucharme y regalarme una sonrisa cuando más lo necesitaba.

A mi familia, en especial a mis padres y mi hermana, por haber sido un apoyo constante y darme ánimos en todo momento, por acompañarme en las derrotas y victorias de mi vida, enseñándome que el esfuerzo es el camino para lograr los objetivos. Todo lo que soy ahora os lo debo a vosotros.

A todos vosotros, este trabajo es tan mío como vuestro.

Índice general

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1. Motivación para tratar con álgebras de evolución

La búsqueda de relaciones entre conceptos de distintas áreas de las Matemáticas es un objeto de estudio cada vez más habitual en investigación. Este es el caso de las llamadas álgebras de evolución, las cuales tienen conexiones con ramas tan diferentes como la Teoría de Grafos, la Teoría de la Probabilidad (concretamente, las cadenas de Markov), la Teoría de Grupos y la Teoría de Nudos, entre otras. Estas conexiones permiten no solo interpretar resultados conocidos de unos campos en otros, sino también trasladar el estudio de ciertos conceptos de unas áreas a otras.

Por otra parte, también es necesario señalar la aplicación directa que tienen las álgebras de evolución en genética no-Mendeliana, ya que su origen se debe, precisamente, a esta rama de la Biología y a la necesidad de explicar ciertos fenómenos de forma precisa y rigurosa. En el campo de las álgebras genéticas, al cual pertenecen las álgebras de evolución, el producto del álgebra tiene una clara interpretación: la reproducción entre individuos de una cierta población.

Ejemplos concretos de estas conexiones indicadas pueden verse, por ejemplo, en las referencias [9, 26] y [27], que relacionan álgebras de evolución con grafos y estructuras combinatorias, en las referencias [6] y [22], que unen a estas álgebras con las cadenas de Markov y en las referencias [8, 11, 20] y [28], que las utilizan para el estudio de diferentes poblaciones biológicas.

Las álgebras de evolución se definen como aquellas álgebras no asociativas que satisfacen que $e_i \cdot e_j = 0$, para cualesquiera dos elementos e_i y e_j distintos de una de sus bases. De esta forma, un álgebra de evolución viene determinada por los productos $e_i \cdot e_i$, pudiéndose reunir la información sobre los mismos en la llamada matriz de estructura, a partir de la cual se define el denominado operador de evolución L. Este operador, a pesar de que revela toda la información acerca de la dinámica del álgebra de evolución, ha sido poco estudiado, haciéndose visible la necesidad de investigaciones enfocadas al mismo. Esta ha sido precisamente la línea a seguir en el estudio que se presenta en este Trabajo Fin de Máster. Siendo precisos, se ha analizado cuándo este operador satisface ciertas igualdades que involucran a la segunda operación interna del álgebra, el producto. Así, se ha estudiado el caso en el que este operador es una derivación, es decir:

$$L(x \cdot y) = L(x) \cdot y + x \cdot L(y),$$

así como el caso en el que es un homomorfismo de álgebras, es decir:

$$L(x \cdot y) = L(x) \cdot L(y),$$

para todo par de elementos x e y del álgebra. Cabe matizar, a parte del interés matemático que pueda tener, el interés biológico de estas igualdades, las cuales pueden ser útiles para modelizar ciertas poblaciones cuya reproducción cumpla estos patrones.

1.2. Estructura del Trabajo Fin de Máster

Al objeto de llevar adelante el estudio propuesto, la estructura de este Trabajo Fin de Máster es la siguiente.

Tras esta Introducción, en el Capítulo 2, se hace una recopilación histórica sobre los orígenes de las álgebras genéticas y, en particular, de las álgebras de evolución. Al final de este capítulo se hace notar la escasez de estudios relativos al operador de evolución.

En el Capítulo 3 se recuerdan algunos conceptos básicos sobre álgebras de evolución, incorporando ejemplos para una adecuada comprensión de los mismos. También se introducen algunas nociones sobre álgebras de Lie, para posteriormente definir el espacio de derivaciones de un álgebra cualquiera, el cual tiene una estructura natural de álgebra de Lie. Asimismo, con la finalidad de no alargar innecesariamente este Trabajo, se incluyen únicamente los enunciados de aquellos resultados ya conocidos que van a ser utilizados a lo largo del mismo, sin demostraciones.

El Capítulo 4 constituye la parte de investigación de este trabajo y es totalmente novedoso. En él se exponen los resultados obtenidos por el autor en esta materia. Se comienza estudiando cuándo el operador de evolución es una derivación, distinguiendo entre dos casos bien diferenciados: las álgebras de evolución que son degeneradas y las que son no-degeneradas. La proposición 4.4 nos permite diferenciar entre estos dos tipos de álgebras de una forma más sencilla, facilitando la demostración del teorema 4.5, en el cual se explicitan todas las álgebras no-degeneradas. Como consecuencia directa de este teorema obtenemos el corolario 4.6, que nos muestra la inexistencia de álgebras no-degeneradas de dimensión impar. Posteriormente, en la proposición 4.7, se estudia el espacio de derivaciones de estas álgebras, el cual está formado por una familia de aplicaciones con una estructura muy parecida a la de su operador de evolución. Por último, se ha construido un algoritmo que permite simplificar el cálculo de todas las álgebras degeneradas de dimensión finita, utilizando únicamente las de una dimensión menor. Con todo esto, se puede obtener una clasificación completa de las álgebras de evolución cuyo operador de evolución es una derivación. Para ejemplificarlo, en las subsecciones 4.1.1, 4.1.2 y 4.1.3 se explicitan todas aquellas de dimensión menor que 5.

Por otra parte, también se ha llevado a cabo el estudio del caso en el que el operador de evolución es un homomorfismo algebraico. Siguiendo la misma estructura que anteriormente, se diferencian los casos en los que el álgebra es degenerada o no. Con un razonamiento similar, se construye un algoritmo para obtener todas las álgebras degeneradas de una dimensión específica utilizando las de una dimensión menor. Después de esto, se aborda el caso de las álgebras no-degeneradas de dimensión n, haciéndose un estudio según el rango del operador de evolución. Así, se obtienen las proposiciones 4.8, 4.10 y 4.11, las cuales caracterizan aquellas álgebras cuyo operador de evolución tiene rango n, $n-1$ y 1, respectivamente. Para otros rangos distintos se obtiene la proposición 4.12, que aunque no proporciona una caracterización, sí aporta una condición necesaria. Todo esto nos permite obtener una clasificación completa de aquellas álgebras de dimensión menor que 4, la cual ha sido expuesta en las subsecciones 4.2.1 y 4.2.2. Por último, en la subsección 4.2.3, se hace un estudio de una cierta familia de subálgebras, probándose que tienen estructura de álgebras de evolución (proposición 4.13) y que su operador de evolución asociado es también un endomorfismo algebraico que coincide con la restricción del operador de evolución del álgebra que las contiene (corolario 4.15). A partir de esta familia de subálgebras se define el concepto de resolubilidad, el cual se demuestra que es equivalente a la nilpotencia de la matriz de estructura del álgebra (proposición 4.17).

Finalmente, en el Capítulo 5 se indican varios problemas abiertos al respecto y diferentes formas de continuar con la investigación iniciada. El Trabajo termina con la relación de la correspondiente bibliografía utilizada, así como con los índices de autores y de conceptos, que permiten realizar una lectura contextualizada del mismo.

CAPÍTULO 2

Evolución histórica

Las álgebras de evolución están muy relacionadas con el estudio de la Genética de Poblaciones, disciplina que comenzó como un intento de combinar las leyes del monje agustino nacido en Checoslovaquia Gregor Johann Mendel (1822-1884), publicadas en 1865 y 1866, aunque ignoradas durante mucho tiempo hasta su redescubrimiento en 1900 [25] por la Bioestadística. Se considera que fueron el británico Fisher (1890-1962), el escocés Haldane (1892-1964) y el estadounidense Wright (1889-1988) quienes iniciaron y desarrollaron la Genética de Poblaciones en los años 30 del siglo pasado, teniendo más tarde también un peso importante en este desarrollo el americano Price (1922-1975), a partir de sus investigaciones en el Galton Laboratory on Mathematical Biology en Londres, en 1967.

En el año 1939, Petiau publicó un artículo [29] en cuyo título aparecían por primera vez las palabras “ecuaciones de evolución”. Esas ecuaciones dieron lugar de alguna manera a la aparición de las llamadas *álgebras genéticas*. Los dos primeros artículos publicados con las palabras “álgebras genéticas” en el título fueron el muy conocido de Etherington (1908-1994) en ese mismo año de 1939 [10] y la Tesis Doctoral de Shannon [34], en 1940. Etherington había trabajado primero en la Relatividad General y después se dedicó a la Genética, mientras que Shannon publicó posteriormente, en 1948, un libro titulado “Una teoría matemática de la comunicación”, que ha permitido que actualmente se le conozca con el nombre de “padre de la teoría de la información”.

A su vez, las álgebras genéticas pueden considerarse como las precursoras de las álgebras de evolución, pues fueron las que utilizó Jianjun Paul Tian para introducir estas últimas casi 70 años más tarde, aunque ambos tipos de álgebras son ciertamente bastante diferentes.

Pasamos a mostrar seguidamente una breve panorámica de estos dos tipos de álgebras, que permita una mejor contextualización y comprensión de lo que se trata en el resto de esta Memoria.

2.1. Los orígenes de las álgebras genéticas

Con referencia a las álgebras genéticas, ya tratadas de alguna manera, aunque aún no con ese nombre, en las décadas de 1920 y 1930, fue Serebrowski (1884-1938) el primero en dar en [33] una interpretación algebraica del signo $\times$, que indicaba reproducción sexual, y dar una formulación matemática de las leyes de Mendel. Glivenkov (1896-1940) [12] y Kostitzin (1883-1963) [19] también dieron pasos adelante en este estudio.

Posteriormente, otros autores también trataron de describir de forma matemática las Leyes de Mendel. Entre ellos, Jennings(1868-1947) en 1917 [17], Serebrowski y Glivenkov [12], en 1936 y ya algo más tarde Schafer [32], Gonshör [13], Haldane [14], Holgate [16], Heuch [15], Reiersöl [30], Korol [18], Lyubich [23] y Wörz-Busekros [38]. Es por el trabajo de todos ellos por lo que las álgebras no asociativas se consideran un marco teórico adecuado para abordar temas importantes en Genética.

En realidad, son tantas las álgebras no asociativas que han atraído el interés de los genetistas que sería difícil hacer una lista exhaustiva de todas ellas. Mencionemos, como ejemplo, las siguientes: álgebras mendelianas, álgebras gaméticas, álgebras cigóticas, álgebras báricas, álgebras train, álgebras copulares, álgebras de Bernstein y álgebras de evolución. Informalmente, a todas ellas se las denomina en general *álgebras genéticas*, aunque desde el punto de vista matemático existen notables diferencias entre unas y otras.

En general, las álgebras genéticas quedan definidas de la siguiente manera. Sea A un álgebra conmutativa, no asociativa, de dimensión $n+1$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Admitamos que A posee una base $\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$, con coeficientes de multiplicación λ_{ijk}, definidos por:

$$c_i \cdot c_j = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{ijk}\, c_k, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n,$$

que tiene las siguientes propiedades:

1. $\lambda_{000} = 1$.
2. $\lambda_{0jk} = 0$, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, $k \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $k < j$.
3. $\lambda_{ijk} = 0$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $k \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $k \leq \max\{i, j\}$.

En esas condiciones, A se denomina *álgebra genética* y $\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$, es una *base canónica* de A. Los coeficientes de multiplicación λ_{0ii}, $i = 0, 1, \ldots, n$, son invariantes del álgebra y se denominan las *raíces train* de A.

Un álgebra A se denomina *álgebra bárica* si existe un homomorfismo no trivial del álgebra en el cuerpo base $\mathbb{K}$, es decir, un homomorfismo $\omega : A \to \mathbb{K}$. Tal homomorfismo ω recibe el nombre de *homomorfismo peso*. Nótese que cada álgebra genética A es un álgebra bárica con ω definido como $\omega(c_0) = 1$, $\omega(c_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, y $ker(\omega)$ es un ideal n-dimensional de A.

Un álgebra bárica A con peso ω se denomina *álgebra train* de rango r si existen unos coeficientes $\beta_1, \ldots, \beta_{r-1} \in \mathbb{K}$ tales que:

$$x^r + \beta_1\, \omega(x)\, x^{r-1} + \ldots + \beta_{r-1}\, \omega(x)^{r-1}\, x = 0,$$

para todo $x \in A$.

Un álgebra bárica A con peso ω se denomina *álgebra train especial* si $N = ker(\omega)$ es nilpotente y las potencias principales N^i, con $i \in \mathbb{N}$, son ideales de A.

Las álgebras train fueron introducidas por Etherington en [10] para tratar problemas en genética matemática. Etherington también demostró que cada álgebra train especial es un álgebra train y Schafer probó que cada álgebra train especial es un álgebra genética y que cada álgebra genética es un álgebra train [32].

Si G es la llamada *álgebra de diferenciación de sexo*, definida como el álgebra bidimensional conmutativa, con base $\{m, f\}$ tal que $m^2 = f^2 = 0$ y $mf = fm = (f + m)/2$, un álgebra A se dice *dibárica* si es isomorfa a G. Holgate probó que toda álgebra dibárica es bárica [16].

Sea A un álgebra bárica con peso ω. Si todos los elementos $x \in A$ satisfacen la condición $x^2 \cdot x^2 = \omega(x)^2 \cdot x^2$, A se denomina *álgebra de Bernstein*. Estas álgebras fueron introducidas por el matemático soviético Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968) en [3].

Finalmente, es conveniente indicar que las álgebras genéticas también pueden definirse de la siguiente forma: sea A un álgebra conmutativa y no asociativa y sea $T(A)$ el *álgebra de transformación* de un álgebra A, es decir, el álgebra generada por las transformaciones (por ejemplo) a la izquierda de A, definidas según $L_\alpha : A \to A$, $x \mapsto \alpha\, x$, $x \in A$, y la identidad. El álgebra A es un álgebra genética si y solo si es bárica (con peso ω) y los coeficientes del polinomio característico de cada $T \in T(A)$, $T = f(L_{\alpha_1}, \ldots, L_{\alpha_k})$, son funciones solo de $\omega(\alpha_1), \ldots, \omega(\alpha_k)$.

Históricamente, fue Schafer quien definió por primera vez las álgebras genéticas mediante esta propiedad [32], si bien suele ser más reconocido que estas álgebras tuvieron su origen en varios documentos de Etherington entre 1939 y 1941.

Puede obtenerse más información sobre las álgebras genéticas en general en [4] o [38] y las referencias en ellos, por ejemplo.

2.2. El origen de las álgebras de evolución

La historia de las álgebras de evolución es todavía muy corta, quince años como máximo.

Aunque Conseibo y Quattara [7] por una parte y Bayara, Quattara, Micali y Motta Ferreira [2] publicaron dos artículos separados, ambos en 2002, que contienen las palabras "álgebras de evolución" en el título, es reconocido por todos los investigadores que los fundamentos de la *Teoría de las álgebras de evolución* provienen de la Tesis de Doctorado de Jianjun Paul Tian, titulada "Evolution algebra theory", que fue leída en la Universidad de California, Riverside, en 2004 [35].

Más tarde, aunque Tian y Vojtechovsky publicaron entre medio, en 2006, un artículo titulado "Mathematical concepts of evolution algebras in non-Mendelian genetics" [37], el contenido no solo completo sino después ampliado de la Tesis de Tian fue publicado posteriormente en 2008 por él mismo, en su libro [36] titulado "Evolution algebras and their Applications", que es el primer texto que los investigadores consideran cuando inician una investigación sobre estas álgebras o sobre sus aplicaciones. En cualquier caso y para ser preciso, es cierto que algunos documentos sobre "evolución" en el contexto de las álgebras en general se pueden encontrar en la literatura antes de esa fecha, pero esas álgebras no son propiamente de evolución en el sentido de Tian.

En su libro [36], Tian indica que las álgebras de evolución tienen muchas conexiones con otros campos matemáticos, incluyendo teoría de grupos, procesos estocásticos (cadenas de Markov), sistemas dinámicos, teoría de nudos y 3-variedades. Comenta que estas álgebras están basadas en la regla de auto-reproducción de la genética no-mendeliana y de hecho, él considera a los elementos de un álgebra de evolución bien como alelos en genética, bien como estados en un proceso estocástico. También expone que al igual que él con estas álgebras, matemáticos y genetistas usaron de forma parecida alguna vez álgebras no asociativas para estudiar el caso de la genética mendeliana.

Con respecto al denominado *operador de evolución*, tratado con detalle en esta Memoria, es conveniente indicar que en Física, un *operador* es una función definida entre dos espacios de estados físicos. El ejemplo más simple de la utilidad de los operadores es el estudio de la simetría (el cual hace que el concepto de grupo sea muy útil en este contexto). Debido a esto, los operadores constituyen unas herramientas muy útiles en la Mecánica Clásica. No obstante, los operadores son aún más importantes en la Mecánica Cuántica, en la que forman una parte intrínseca de la formulación de la teoría. Así, por ejemplo, la función de onda representa la amplitud de probabilidad de encontrar el sistema en un estado fijado.

Por el momento, estos operadores de evolución han sido muy poco tratados en la literatura dentro del contexto de las álgebras de evolución. No ocurre así, como ya se ha indicado, en Física, donde los estados físicos puros en la Mecánica Cuántica se representan como vectores unitarios (las probabilidades se normalizan a uno) en un espacio complejo especial de Hilbert, viniendo dada la evolución del tiempo en este espacio vectorial por la aplicación del operador de evolución.

Cualquier observable, es decir, cualquier cantidad que pueda medirse en un experimento físico, debe asociarse con un operador lineal autoadjunto. Los operadores deben producir valores propios reales, ya que son valores que pueden surgir como resultado del experimento. Aunque tradicionalmente los físicos asociaron valores propios reales con la hermiticidad, en 1998 los físicos se dieron cuenta de que también existen operadores no hermitianos con espectros completamente reales; a saber, operadores simétricos de tiempo de paridad. Para los operadores hermitianos, la probabilidad de cada valor propio está relacionada con la proyección del estado físico en el subespacio relacionado con ese valor propio.

Según Andrei Tokmakoff, conocido divulgador de la Física y Profesor de Química en la Universidad de Chicago, los procesos dinámicos en Mecánica Cuántica son descritos por un hamiltoniano que depende del tiempo. Como la complejidad matemática de resolver la ecuación de Schrödinger, que depende del tiempo para la mayoría de los sistemas moleculares, hace que sea imposible obtener soluciones analíticas exactas, hay que buscar soluciones numéricas basadas en métodos de perturbación o aproximación que reduzcan la complejidad.

Por ello, se buscan ecuaciones de movimiento para sistemas cuánticos que sean equivalentes a las ecuaciones de Newton, o más exactamente de Hamilton, para sistemas clásicos. Aunque aún no han sido contestadas adecuadamente, surgen de manera natural al respecto las dos siguientes preguntas, si conocemos la función de onda en un momento específico: ¿cómo cambia esa función con el tiempo? y ¿cómo se determina esa función para algún tiempo posterior? Ahí debería entrar la teoría de operadores, de acuerdo con la correspondencia con la Mecánica Clásica.

Volviendo de nuevo a las Matemáticas, como datos objetivos es importante notar que en la base de datos MathSciNet, a fecha 31 de diciembre de 2019, hay 203 publicaciones con las palabras “evolution” y “algebra” en el título (esta última en singular o plural), en cualquier orden, bien seguidas o separadas por otras palabras. De ellas, 106 son anteriores a la introducción por Tian de las álgebras de evolución en su Tesis Doctoral de 2004. En ninguna de las 203 publicaciones aparece también la palabra “operator” en el título.

Con las palabras “evolution” y “operator” en el título, en cualquier orden, bien seguidas o separadas por otras palabras, hay 866 publicaciones. De ellas, 342 corresponden a 2005 en adelante (posteriores por tanto a la introducción de las álgebras de evolución).

Afinando un poco más, con las palabras “evolution operator” así escritas (seguidas y en ese orden) hay 136. La primera data de 1970 [1].

Con las secuencias “evolution operator” y “algebra” hay solo dos, si bien en sus títulos no aparece la palabra “algebra” sino “algebraic” (años 1997 y 1998, respectivamente): MR1627522 y MR1482770. Sin embargo, con las secuencias “evolution algebra” y “operator” no hay ninguna publicación.

Con las secuencias “evolution”, “algebra” y “operator” (como palabras o parte de palabras, en cualquier orden, seguidas o separadas) hay 13. De ellas, solo una, debida a Rozikov, [31], trata con álgebras de evolución.

De estos artículos citados, podemos destacar los referidos al operador de evolución. En 2013, Ladra y Rozikov obtuvieron en [21] condiciones necesarias para que el estado de una población bisexual sea un punto fijo o un punto cero de su operador de evolución correspondiente y también establecieron una mejor estimación del límite de puntos fijos para las trayectorias de ese operador. Utilizando estas condiciones necesarias, dieron un análisis detallado de un caso especial de álgebra de evolución: el álgebra de evolución de la población bisexual en la cual el tipo “1” de mujeres y hombres tiene prioridad.

Finalmente, Mellon y Velasco establecieron en 2019 en [24] una condición suficiente para la continuidad del operador de evolución de un álgebra de evolución normada con respecto a su base natural, probando además que ese operador no es necesariamente continuo cuando la dimensión del álgebra no es finita.

CAPÍTULO 3

Preliminares

En este capítulo introducimos la mayor parte de los conceptos y resultados que serán utilizados a lo largo de esta Memoria. Comenzamos con aquellos relativos a álgebras de evolución, para posteriormente introducir las álgebras de Lie y establecer una conexión entre estos dos tipos de álgebras.

3.1. Álgebras de evolución

Partimos de un espacio vectorial $(E, +)$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, dotado de una segunda operación interna binaria $\cdot : E \times E \to E$ que es bilineal, es decir, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y todo $u, v, w \in E$ se tiene que:

- $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$,
- $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$,
- $(\alpha u) \cdot v = u \cdot (\alpha v) = \alpha(u \cdot v)$.

Entonces, se dice que $(E, +, \cdot)$ es un *álgebra* sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Si existe una base del álgebra $\mathcal{B} = \{e_i, i \in \Lambda\}$, donde Λ es un conjunto de índices, tal que $e_i \cdot e_j = 0$, si $i \neq j$, entonces se dice que E es un *álgebra de evolución*. Una base $\mathcal{B}$ de este tipo será llamada *natural*.

Puesto que $\mathcal{B}$ es base, podemos escribir $e_j \cdot e_j = \sum_{i \in \Lambda} a_{ij} e_i$, con $a_{ij} \in \mathbb{K}$, donde solo una cantidad finita de *constantes de estructura* a_{ij} son distintas de cero, para cada $j \in \Lambda$ fijado. Como consecuencia, la multiplicación en E está completamente determinada por la denominada *matriz de estructura* $A = (a_{ij})$.

Ejemplo 3.1. *Por propia definición, el álgebra conmutativa E, con base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ y productos definidos por:*

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_1 &= e_1 + e_2 + 3e_3, \\ e_2 \cdot e_2 &= -2e_1 + e_3, \\ e_3 \cdot e_3 &= e_3, \end{aligned}$$

es un álgebra de evolución.

Definición 3.2. *Un álgebra de evolución E de base $\mathcal{B} = \{e_i, i \in \Lambda\}$ se dice* graficable *si las constantes a_{ij} son 1 o 0, para todo $i, j \in \Lambda$.*

Ejemplo 3.3. *El álgebra conmutativa E de base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ y productos definidos por:*

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_1 &= e_1 + e_2, \\ e_2 \cdot e_2 &= e_2 + e_3, \\ e_3 \cdot e_3 &= e_1 + e_2 + e_3, \end{aligned}$$

es un álgebra de evolución graficable, a diferencia del ejemplo anterior, que es un álgebra de evolución no graficable.

Ejemplo 3.4. *Consideremos el álgebra conmutativa E de base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ y productos definidos por:*

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_1 &= e_1, \\ e_1 \cdot e_2 &= e_2, \\ e_2 \cdot e_2 &= e_1. \end{aligned}$$

Aunque en principio este álgebra parece no ser de evolución, si consideramos la base $\mathcal{B}' = \{\eta_1, \eta_2\}$, con $\eta_1 = e_1 + e_2$ y $\eta_2 = e_1 - e_2$, vemos que $\eta_1 \cdot \eta_2 = 0$. Por lo tanto, aunque $\mathcal{B}$ no sea una base natural, $\mathcal{B}'$ sí lo es, y E es un álgebra de evolución.

Ejemplo 3.5. *Consideremos el álgebra conmutativa E de base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ y productos definidos por:*

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_1 &= e_1, \\ e_1 \cdot e_2 &= e_2. \end{aligned}$$

Veamos que E no es un álgebra de evolución. Por reducción al absurdo, supongamos que sí lo es. Supongamos entonces que existe una base natural $\{\eta_1, \eta_2\}$ de E, con $\eta_1 = ae_1 + be_2$ y $\eta_2 = ce_1 + de_2$. Entonces:

$$0 = \eta_1 \cdot \eta_2 = ace_1^2 + bde_2^2 + (ad + bc)e_1 \cdot e_2 = ace_1 + (ad + bc)e_2.$$

Por lo tanto $ac = 0$ *y* $ad + bc = 0$*. Los escalares* a *y* c *no pueden ser ambos nulos, ya que en ese caso* η_1 *y* η_2 *serían linealmente dependientes. Por lo tanto las únicas soluciones posibles son* $a = b = 0$ *o* $c = d = 0$*. En ambos casos llegamos a que un elemento de la base natural es nulo, lo que es una contradicción.*

Mostramos a continuación algunas propiedades sobre álgebras de evolución probadas por Tian y Vojtechovsky en [37], indicando ejemplos particulares de algunas de ellas:

- Las álgebras de evolución no son, en general, asociativas. Un ejemplo de este aserto es el álgebra de evolución E de base natural $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ y productos definidos por $e_1^2 = e_2^2 = e_2$, ya que:
$$(e_1 \cdot e_1) \cdot e_2 = e_2 \cdot e_2 = e_2 \neq 0 = e_1 \cdot (e_1 \cdot e_2).$$
- Las álgebras de evolución no son, en general, de potencias asociativas, es decir, no se tiene la igualdad $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$, para todo $x \in E$ y $n, m \in \mathbb{N}$. Un ejemplo de esto es el álgebra de evolución E de base natural $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ y productos definidos por $e_1^2 = e_2^2 = e_2$, ya que:
$$e_1^2 \cdot e_1^2 = e_2^2 = e_2 \neq 0 = (e_2 \cdot e_1) \cdot e_1 = (e_1^2 \cdot e_1) \cdot e_1 = e_1^4.$$
- Las álgebras de evolución son conmutativas y por tanto flexibles, es decir, $(x \cdot y) \cdot x = x \cdot (y \cdot x)$, para todo $x, y \in E$.
- La suma directa de álgebras de evolución es un álgebra de evolución.
- El producto de Kronecker de álgebras de evolución es un álgebra de evolución. Recordemos que el producto de Kronecker de dos álgebras E y E', con bases $\{e_i, i \in \Lambda\}$ y $\{\eta_j, j \in \Omega\}$, respectivamente, es el álgebra $E \otimes E'$ de base $\{e_i \otimes \eta_j, i \in \Lambda, j \in \Omega\}$ y productos definidos por $(x_1 \otimes x_2) \cdot (y_1 \otimes y_2) = (x_1 \cdot y_1) \otimes (x_2 \cdot y_2)$.

Existen dos tipos de álgebras de evolución que se denominan *triviales*:

- Las álgebra de evolución de *tipo cero*, que son aquellas tales que $a_{ij} = 0$, para todo $i, j \in \Lambda$.
- Las álgebra de evolución de *tipo no-cero*, que son aquellas tales que $a_{ij} = 0$ si y sólo si $i \neq j$, es decir, $e_j^2 = a_j e_j$, para todo $j \in \Lambda$, donde $a_j \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Sobre este último tipo de álgebras de evolución, probamos a continuación, como resultado novedoso, que el concepto de álgebra de evolución de tipo no-cero no depende de la base natural elegida, es decir, es un concepto intrínseco al álgebra de evolución E.

Proposición 3.6. *Sea E un álgebra de evolución con base natural $\mathcal{B} = \{e_k, k \in \Lambda\}$ tal que $e_k^2 = a_k e_k$, con $a_k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Sea $\mathcal{B}' = \{\eta_i, i \in \Omega\}$ cualquier otra base natural. Entonces, salvo reordenación y multiplicación por escalares, estas bases son la misma.*

Demostración. Como $\mathcal{B}$ es base, $\eta_i = \sum_{k\in\Lambda} c_{ki} e_k$, donde solo un número finito de constantes c_{ki} son no nulas, para cada i fijo. Se tienen las siguientes propiedades:

- Para todo k existe un único i tal que $c_{ki} \neq 0$. La existencia se debe a que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases. Deduciremos la unicidad por reducción al absurdo. Dado que:

  $$\eta_i \cdot \eta_j = \left(\sum_{k\in\Lambda} c_{ki} e_k\right) \cdot \left(\sum_{k\in\Lambda} c_{kj} e_k\right) = \sum_{k\in\Lambda} c_{ki} c_{kj} e_k^2 = \sum_{k\in\Lambda} c_{ki} c_{kj} a_k e_k,$$

  si existieran i, j tales que $c_{ki} \neq 0 \neq c_{kj}$, entonces $\eta_i \cdot \eta_j \neq 0$ y $\mathcal{B}'$ no sería una base natural.

- Para todo i existe un único k tal que $c_{ki} \neq 0$. La causa de esta existencia es la misma. Para la unicidad procedemos de nuevo por reducción al absurdo. Supongamos que $\eta_i = c_{k_1 i} e_{k_1} + \cdots + c_{k_r i} e_{k_r}$ con $r > 1$. Entonces, e_{k_1} no puede escribirse como combinación lineal de los η_j y tenemos una contradicción. En efecto, en una tal combinación debe aparecer η_i, ya que es el único de los η_j con $c_{k_1 j} \neq 0$. Pero si aparece η_i ningún otro η_j puede contrarrestar el término $c_{k_2 i} e_{k_2}$ de η_i, ya que es el único de los η_j con $c_{k_2 j} \neq 0$.

De esta forma se puede definir una aplicación $f : \Omega \to \Lambda$ tal que $\eta_i = c_{f(i)i} e_{f(i)}$. $\square$

Tian demuestra en [36] que un álgebra de evolución E tiene elemento unidad si y solo si E es un álgebra de evolución de tipo no-cero. En este caso el elemento unidad es $\mu = \sum_{i\in\Lambda} \frac{1}{a_{ii}} e_i$.

Pasamos ahora a recordar algunos conceptos fundamentales sobre álgebras de evolución, ya introducidos por Tian:

- Un álgebra de evolución E con base natural $\mathcal{B} = \{e_i, i \in \Lambda\}$ se dice *no-degenerada* si $e_i^2 \neq 0$, para todo $i \in \Lambda$. En caso contrario se dice que E es *degenerada*.

  En [5] se demuestra que E es no-degenerada si y solo si el único $x \in E$ tal que $x \cdot E = 0$ es $x = 0$. Como consecuencia, la definición de álgebra de evolución no-degenerada no depende de la base natural considerada, por lo que es un concepto bien definido.

- Un subespacio $E' \subseteq E$ es una *subálgebra* del álgebra de evolución E si es cerrado bajo la segunda operación interna del álgebra.
- Un subespacio $E' \subseteq E$ es una *subálgebra de evolución* de E si es subálgebra y es de evolución, es decir, existe una base natural $\mathcal{B}' = \{e_i, i \in \Lambda'\}$ de E' tal que $e_i \cdot e_j = 0$, si $i \neq j$.
- Se dice que una subálgebra de evolución E' del álgebra de evolución E tiene la *propiedad de extensión* si la base natural $\mathcal{B}'$ de E' puede ser extendida a una base natural $\mathcal{B}$ de E.
- Sea E un álgebra de evolución. Se dice que un subespacio $E \subseteq I$ es un *ideal* si $I \cdot E \subseteq I$. Dado que todo ideal es una subálgebra, podemos definir los conceptos de ideal de evolución e ideal de evolución con la propiedad de extensión.

En [36] Tian da una definición diferente de subálgebra de evolución, ya que exige el tener la propiedad de extensión. Sin embargo, Cabrera, Siles y Velasco demuestran en [5] que, considerando las definiciones anteriores, no todas las subálgebras de evolución tienen la propiedad de extensión. De hecho, exponen ejemplos mostrando que todos los conceptos definidos anteriormente son diferentes, excepto los de subálgebra e ideal de evolución teniendo la propiedad de extensión, que son equivalentes, ya que toda subálgebra con la propiedad de extensión es un ideal. Por lo tanto, nosotros diferenciaremos entre todos estos conceptos y mencionaremos explícitamente cuándo una subálgebra o un ideal tiene la propiedad de extensión.

Ejemplo 3.7. *Un ejemplo de álgebra de evolución degenerada es la de base* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ *y productos definidos por:*

$$e_1 \cdot e_1 = e_1,$$

mientras que un álgebra de evolución no-degenerada es la definida por:

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_1 &= e_1, \\ e_2 \cdot e_2 &= -e_2, \end{aligned}$$

que además es de tipo no-cero. Es evidente que cualquier álgebra de tipo no-cero es no-degenerada. Sin embargo, el recíproco no es cierto, como puede observarse en el álgebra definida por los productos:

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_1 &= e_1, \\ e_2 \cdot e_2 &= -e_1. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.8. *Consideremos el álgebra de evolución E de base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ y productos definidos por:*

$$e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_2,$$
$$e_3 \cdot e_3 = e_3.$$

El subespacio E' de base $\{e_1 + e_2 + e_3\}$ es una subálgebra de evolución, ya que:

$$(e_1 + e_2 + e_3) \cdot (e_1 + e_2 + e_3) = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = e_1 + e_2 + e_3.$$

Sin embargo, no es un ideal, ya que $e_1 \cdot (e_1 + e_2 + e_3) = e_1^2 = e_1 + e_2 \notin E'$. Por lo tanto, tampoco puede tener la propiedad de extensión, ya que en ese caso sería un ideal.

Un ejemplo de ideal (y en consecuencia subálgebra) de evolución es el subespacio I de base $\{e_1 + e_2\}$, ya que para todo $a, b, c \in \mathbb{K}$ se tiene que:

$$(ae_1 + be_2 + ce_3) \cdot (e_1 + e_2) = ae_1^2 + be_2^2 = a(e_1 + e_2) \in I.$$

Además tiene la propiedad de extensión, ya que $\{e_1 + e_2, e_2, e_3\}$ es una base natural de E.

Por último hacemos referencia al grupo de endomorfismos algebraicos de un álgebra de evolución, es decir, aquellos endomorfismos $G : E \to E$ tales que $G(x \cdot y) = G(x) \cdot G(y)$. Para caracterizar este grupo es necesaria la siguiente definición:

Definición 3.9. *Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices de dimensión $n \times m$. Se definen las siguientes operaciones matriciales:*

- *El producto de Hadamard $A \odot B = (a_{ij}b_{ij})$. Se define $A^{(2)} = A \odot A$.*
- *$A * B = (c_{ij}^k)$ una matriz de tamaño $n \times \frac{m(m-1)}{2}$, donde $c_{ij}^k = a_{ki}b_{kj}$, para pares (i, j) con $i < j$. Las filas están indexadas por k y las columnas por pares (i, j) con el orden lexicográfico.*

De nuevo en [36] podemos encontrar la siguiente caracterización del grupo de endomorfismos algebraicos de un álgebra de evolución E con matriz de estructura A:

$$End(E) = \Big\{G : E \to E \text{ tal que } AG^{(2)} = GA \text{ y } A(G * G) = 0\Big\}.$$

3.2. Álgebras de Lie

En esta sección se recuerda el concepto de álgebra de Lie y se establece una relación entre este tipo de álgebras y las de evolución. Concretamente, veremos que el espacio de derivaciones de un álgebra de evolución es un álgebra de Lie.

Comenzaremos definiendo un *álgebra de Lie* $(L, +, [\cdot, \cdot])$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ como aquella álgebra que satisface las siguiente propiedades:

- Anti-conmutatividad: Para todo $u, v \in L$ se tiene que $[v, u] = -[u, v]$.
- Para todo $u, v, w \in L$ se verifica la denominada *identidad de Jacobi*: $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$.

donde la primera propiedad es equivalente a que $[u, u] = 0$, para todo $u \in L$. En álgebras de Lie es habitual denotar por $[\cdot, \cdot]$ a la segunda operación interna, que es llamada producto corchete.

Estas álgebras se denominan así en honor del matemático noruego Marius Sophus Lie (1842-1899). Lie fue uno de los principales fundadores de la teoría de la simetría continua y su logro más importante fue el descubrimiento de que los grupos continuos de transformaciones (actualmente denominados "grupos de Lie", también en su honor) estaban generados por sus correspondientes campos vectoriales (llamados generadores infinitesimales), que dotados de la ley denominada "corchete" o "producto conmutador" poseen una estructura algebraica que es la que actualmente se denomina "álgebra de Lie".

Algunas propiedades sobre álgebras de Lie son las siguientes:

- Las álgebras de Lie no son, en general, asociativas.
- Las álgebras de Lie son de potencias asociativas, ya que cualquier potencia es nula, dado que $[u, u] = 0$, para todo $u \in L$.
- Las álgebras de Lie son anticonmutativas y por tanto flexibles, es decir, $[[u, v], u] = [u, [v, u]]$, para todo $u, v \in L$.

Pasamos a dar algunas definiciones básicas sobre álgebras de Lie:

- Se define la *serie central descendente* de un álgebra de Lie L como
$$L^1 \supseteq L^2 \supseteq \cdots \supseteq L^k \supseteq \ldots,$$
donde $L^1 = L$ y $L^k = [L^{k-1}, L]$.
- Se dice que L es *nilpotente* si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $L^m = 0$. El menor de estos m se denomina el *índice de nilpotencia*.

- Un álgebra de Lie nilpotente L se dice *filiforme* si verifica $dim\, L^k = n - k$, para todo $k \in \{2, \ldots, n\}$.
- Se define la *serie derivada* de un álgebra de Lie L como

$$L^{[0]} \supseteq L^{[1]} \supseteq \cdots \supseteq L^{[k]} \supseteq \ldots,$$

donde $L^{[0]} = L$ y $L^{[k]} = [L^{[k-1]}, L^{[k-1]}]$.

- Se dice que L es *resoluble* si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $L^{[m]} = 0$. El menor de estos m se denomina el *índice de resolubilidad*.

La siguiente definición, válida para cualquier álgebra en general, está estrechamente relacionada con las álgebras de Lie.

Definición 3.10. *Sea A un álgebra sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $d : A \to A$ un endomorfismo. Se dice que d es una derivación de A si para todo $x, y \in A$ se satisface la regla de Leibniz $d(x \cdot y) = d(x) \cdot y + x \cdot d(y)$. Al conjunto de todas las derivaciones de A se le denota por $Der(A)$.*

Se prueba que el conjunto $Der(A)$ tiene estructura de espacio vectorial. Además, si definimos el producto corchete de dos derivaciones como $[d_1, d_2] = d_1 d_2 - d_2 d_1$, el resultado es una derivación. Este producto dota al espacio de derivaciones de estructura de álgebra de Lie.

Tian demuestra en [36] que el espacio de derivaciones para el caso particular de un álgebra de evolución E con base natural $\mathcal{B} = \{e_i, i \in \Lambda\}$ es:

$$Der(E) = \Bigg\{ d : E \to E \text{ tal que } 2a_{ji}d_{ii} = \sum_{k \in \Lambda} a_{ki}d_{jk}, \text{ para todo } i, j \in \Lambda; \\ a_{kj}d_{ji} + a_{ki}d_{ij} = 0, \text{ para todo } i, j, k \in \Lambda \text{ con } i \neq j \Bigg\},$$

donde $e_j^2 = \sum_{i \in \Lambda} a_{ij} e_i$ y $d(e_j) = \sum_{i \in \Lambda} d_{ij} e_i$. Con ayuda de la matriz de estructura $A = (a_{ij})$ y la matriz $D = (d_{ij})$, que representa al endomorfismo d con respecto a la base $\mathcal{B}$, podemos expresar la primera condición en forma matricial como $2ADiag(D) = DA$, donde $Diag(D)$ es la matriz diagonal de entradas d_{ii}.

CAPÍTULO 4

Nuevos resultados sobre el operador de evolución

Pasamos ahora a introducir el concepto de operador de evolución, que será el principal objeto de estudio de esta Memoria.

Definición 4.1. *Sea E un álgebra de evolución con base natural $\mathcal{B} = \{e_i, i \in \Lambda\}$ y matriz de estructura $A = (a_{ij})$. Se define el* operador de evolución *asociado a $\mathcal{B}$ como el endomorfismo $L : E \to E$ que lleva cada generador en su cuadrado, es decir, $L(e_j) = e_j^2 = \sum_{i \in \Lambda} a_{ij} e_i$, para todo $j \in \Lambda$.*

Notemos que la representación matricial del operador de evolución con respecto a la base $\mathcal{B}$ es la matriz de estructura $A = (a_{ij})$.

Una forma alternativa de definir el operador de evolución es $L(x) = \theta \cdot x$, donde se expresa formalmente $\theta = \sum_{i \in \Lambda} e_i$, sin importar que esta suma no sea finita, pues el producto siempre lo será. En efecto, como L así definido es lineal (en virtud de la propiedad distributiva) y $L(e_j) = \left(\sum_{i \in \Lambda} e_i\right) e_j = e_j^2$, las dos definiciones son equivalentes.

Dado que el operador de evolución L ha sido definido a partir de la base $\mathcal{B}$, es natural preguntarse por la rigidez de este operador. Es decir, si consideramos otro operador de evolución L' asociado a otra base natural $\mathcal{B}'$, ¿serán L y L' el mismo operador cuando los expresemos en una misma base? Tian responde a esta pregunta en [36] a través de la siguiente proposición:

Proposición 4.2. *Sea E un álgebra de evolución. Consideremos dos bases naturales $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$. Sean L y L' los operadores de evolución asociados a cada una de estas bases. Entonces, L y L' son el mismo operador lineal si y solo si las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son la misma, o si una puede ser obtenida de la otra mediante una permutación.*

Otro hecho conocido que involucra subálgebras de evolución es el siguiente:

Proposición 4.3. *Sea E un álgebra de evolución. Sea E' una subálgebra de evolución de base $\mathcal{B}'$ que puede ser extendida a una base $\mathcal{B}$ de E. Entonces, el operador de evolución L de E asociado a la base $\mathcal{B}$ deja invariante a E'.*

4.1. Álgebras de evolución cuyo operador de evolución es una derivación

En esta sección estudiamos aquellas $\mathbb{C}-$álgebras de evolución E con base natural $\mathcal{B} = \{e_i, i \in \Lambda\}$ y matriz de estructura $A = (a_{ij})$, tales que $L \in Der(E)$, es decir, el operador de evolución es también una derivación. Dado que una derivación d se caracteriza por el hecho de que su matriz asociada $D = (d_{ij})$ cumple las ecuaciones $2ADiag(D) = DA$ y $a_{kj}d_{ji} + a_{ki}d_{ij} = 0$ (si $i \neq j$), estas álgebras vienen caracterizadas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} &2ADiag(A) = A^2, \\ &a_{kj}a_{ji} + a_{ki}a_{ij} = 0, \;\; \forall\, k, \;\; \forall\, i \neq j. \end{aligned}$$

La primera ecuación es equivalente a $A(A - 2Diag(A)) = 0$, o lo que es lo mismo, $A\bar{A} = 0$, donde $\bar{A}$ es la matriz obtenida de A al cambiar el signo de los elementos de la diagonal.

Analicemos la segunda ecuación: Si $a_{ij} = 0$, entonces o bien $a_{ji} = 0$ o bien la columna j es nula. Si $a_{ij} \neq 0$, entonces las entradas de la columna i y las de la columna j se relacionan mediante las igualdades $a_{ki} = \frac{-a_{ji}}{a_{ij}} a_{kj}$.

Por lo tanto, la matriz de estructura debe cumplir las condiciones:

$$A\bar{A} = 0, \tag{4.1}$$

$$\text{Si } a_{ij} = 0, \text{ con } i \neq j, \text{ entonces } a_{ji} = 0 \text{ o } a_{kj} = 0, \;\; \forall\, k, \tag{4.2}$$

$$\text{Si } a_{ij} \neq 0, \text{ con } i \neq j, \text{ entonces } a_{ki} = \frac{-a_{ji}}{a_{ij}} a_{kj}, \;\; \forall\, k. \tag{4.3}$$

Proposición 4.4. *Sea E un álgebra de evolución con matriz de estructura $A = (a_{ij})$ y tal que $L \in Der(E)$. Entonces, E es degenerada si y solo si existe j tal que $a_{jj} = 0$.*

Demostración. La implicación hacia la derecha se tiene por definición de álgebra degenerada. Deduzcamos la otra implicación por reducción al absurdo. Sea j tal que $a_{jj} = 0$. Si E es no-degenerada, ninguna columna de A es nula, por lo que existe $i \neq j$ tal que $a_{ij} \neq 0$. Como la columna i no es nula, a_{ji} debe ser distinto de 0, ya que en otro caso no se cumpliría la condición 4.2. Por la condición 4.3 tenemos que:

$$a_{kj} = \frac{-a_{ij}}{a_{ji}} a_{ki}, \ \forall\, k.$$

En particular, para $k = j$ tenemos que $0 = a_{jj} = -a_{ij} \neq 0$, lo que es una contradicción. □

A continuación analizamos cómo debe ser la matriz A para que $L \in Der(E)$. Para ello no tenemos en cuenta las permutaciones de la base $\mathcal{B}$, ya que por la proposición 4.2 el operador de evolución será el mismo. Comenzamos estudiando el caso en el que E es no-degenerada.

Teorema 4.5. *Sea E un álgebra de evolución no-degenerada con base natural $\mathcal{B} = \{e_i, i \in \Lambda\}$ y matriz de estructura $A = (a_{ij})$. Entonces, $L \in Der(E)$ si y solo si existe una reordenación de la base $\mathcal{B}$ tal que la matriz de estructura es diagonal por bloques, siendo los bloques de la forma:*

$$M_a = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix},$$

para algún $a \neq 0$.

Demostración. La implicación hacia la izquierda es una simple comprobación. Para la otra implicación tenemos las siguientes propiedades:

1. Al ser E no degenerada, se tiene que $a_{jj} \neq 0$, para todo j.

2. No puede haber una columna (o fila) j en la que todos los elementos, salvo a_{jj}, sean nulos. Por reducción al absurdo, si esto ocurriese, entonces la entrada de $A\bar{A}$ en la posición (j, j) sería $-a_{jj}^2 \neq 0$, lo que contradice a la condición 4.1.

3. Si $a_{ij} \neq 0$ con $i \neq j$, entonces $a_{ij} = -a_{jj}$. En efecto, por la condición 4.2 sabemos que $a_{ji} \neq 0$ y utilizando la condición 4.3 tenemos que:

$$a_{kj} = \frac{-a_{ij}}{a_{ji}} a_{ki}, \ \forall\, k.$$

   En particular, para $k = j$ obtenemos $a_{ij} = -a_{jj}$.

4. Para todo j, solo puede existir un $i \neq j$ con $a_{ij} \neq 0$. En efecto, supongamos que existe un $k \neq i, j$ con $a_{kj} \neq 0$. Sabemos que:

$$a_{kj} = \frac{-a_{ij}}{a_{ji}} a_{ki}.$$

Utilizando la propiedad anterior nos queda:

$$-a_{jj} = \frac{a_{jj}}{-a_{ii}}(-a_{ii}),$$

que es una contradicción, ya que $a_{jj} \neq 0$.

5. Para todo i, solo puede existir un $j \neq i$ con $a_{ij} \neq 0$. Esto se deduce de la propiedad anterior y de la condición 4.2, la cual nos dice que $a_{ij} \neq 0$ si y solo si $a_{ji} \neq 0$.

Por lo tanto la matriz A tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \dots & a_{jj} & \dots & -a_{ii} & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \dots & -a_{jj} & \dots & a_{ii} & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix},$$

donde los cuatro elementos indicados son los únicos no nulos de las i-ésimas y j-ésimas filas y columnas. Imponiendo que $A\bar{A} = 0$, obtenemos que $a_{ii} = a_{jj}$. Reordenando la base podemos escribir la matriz de estructura como $Diag(M_{a_{ii}}, A')$, con A' cumpliendo las cinco propiedades vistas anteriormente. Reiterando estas ordenaciones llegamos al resultado deseado. □

Consecuencia inmediata del resultado anterior es el siguiente corolario.

Corolario 4.6. *No existe ningún álgebra de evolución E de dimensión impar, no-degenerada y tal que $L \in Der(E)$.*

Basándonos en que conocemos la matriz de estructura que tienen estas álgebras no-degeneradas, podemos explicitar cuál es su espacio de derivaciones.

Proposición 4.7. *Sea E un álgebra de evolución no-degenerada cuyo operador de evolución es una derivación, es decir, con matriz de estructura de la forma $A = (a_{ij}) = Diag(M_{a_1}, M_{a_2}, \dots)$ con $a_k \neq 0$, para todo k. Entonces, su espacio de derivaciones está formado por aquellos endomorfismos cuya representación matricial es de la forma $Diag(M_{b_1}, M_{b_2}, \dots)$.*

Demostración. Sea $D = (d_{ij})$ la matriz asociada a una derivación. Entonces:

$$2ADiag(D) = DA,$$
$$a_{kj}d_{ji} + a_{ki}d_{ij} = 0, \ \forall k, \ \forall i \neq j.$$

Si $d_{ij} = 0$, entonces $a_{kj}d_{ji} = 0$, para todo k. Como ninguna columna de A es nula, existe k tal que $a_{kj} \neq 0$ y entonces $d_{ji} = 0$. Como consecuencia, d_{ij} es nulo si y solo si d_{ji} lo es.

Si $d_{ij} \neq 0$, entonces $d_{ji} \neq 0$. Como $a_{ki} = -\frac{d_{ji}}{d_{ij}}a_{kj}$, tenemos que, para todo k, a_{ki} es nulo si y solo si a_{kj} es nulo. Dada la estructura que tiene A, esto solo puede ocurrir cuando i y j son iguales a $2r-1$ y $2r$, para algún $r > 0$. Por lo tanto, si i y j no son de la forma $2r-1$ y $2r$, entonces $d_{ij} = 0$. Una consecuencia directa de esto es que $D = Diag(D_1, D_2, \dots)$, siendo D_k una matriz de tamaño 2, para todo k.

Veamos que, en efecto, cada D_k es de la forma M_b, para algún $b \in \mathbb{C}$. De la igualdad $2ADiag(D) = DA$ se deduce que $2M_{a_k}Diag(D_k) = D_kM_{a_k}$, para todo k. Estos sistemas son de la forma:

$$2\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}.$$

Operando obtenemos:

$$2a\begin{pmatrix} d_{11} & -d_{22} \\ -d_{11} & d_{22} \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} d_{11}-d_{12} & d_{12}-d_{11} \\ d_{21}-d_{22} & d_{22}-d_{21} \end{pmatrix}.$$

La única solución a este sistema es $d_{11} = d_{22} = -d_{12} = -d_{21}$, por lo que cada D_k es de la forma M_b, para algún $b \in \mathbb{C}$. □

Estudiemos ahora el caso en el que E es degenerada y de dimensión finita n. Al ser degenerada, debe existir una columna de A que sea nula. Mediante una reordenación de la base podemos suponer que esta columna es la última. Entonces, esta matriz se escribe como:

$$A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ v^t & 0 \end{pmatrix},$$

donde A' es una matriz cuadrada de tamaño $n-1$ y v un vector con $n-1$ entradas. La condición 4.1 es equivalente a:

$$A'\bar{A}' = 0 \;\text{ y }\; v^t\bar{A}' = 0.$$

Dado que las condiciones 4.2 y 4.3 se pueden restringir a A', esta matriz será la matriz de estructura de un álgebra de evolución E' de dimensión $n-1$ con operador de evolución $L' \in Der(E')$.

El razonamiento anterior nos proporciona el siguiente algoritmo para obtener todas las matrices de estructura de estas álgebras degeneradas:

Paso 1: Obtener todas las matrices A' de una dimensión menor, tanto degeneradas como no-degeneradas.

Paso 2: Resolver el sistema lineal $v^t\bar{A}' = 0$, para cada matriz A' obtenida.

Paso 3: Ver si $A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ v^t & 0 \end{pmatrix}$ satisface las condiciones 4.2 y 4.3.

Pongamos en práctica este razonamiento para calcular todas las álgebras de evolución de dimensiones 2, 3 y 4 cuyo operador de evolución es una derivación.

4.1.1. Álgebras de evolución de dimensión 2

Las únicas álgebras de evolución no-degeneradas cuyo operador de evolución es una derivación son aquellas cuya matriz de estructura es M_a, con $a \neq 0$. Por otra parte, dado que la única de dimensión 1 es el álgebra trivial de tipo cero, las degeneradas de dimensión 2 son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \text{ con } a \in \mathbb{C},$$

todas las cuales cumplen las condiciones 4.2 y 4.3.

4.1.2. Álgebras de evolución de dimensión 3

Por el corolario 4.6 sabemos que no existe ninguna que sea no-degenerada. Por otra parte, las candidatas de entre las degeneradas son:

$$\begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo los sistemas lineales $v^t\bar{A}' = 0$ llegamos a que deben ser de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ b & -b & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix},$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$. Todas estas matrices cumplen las condiciones 4.2 y 4.3.

4.1.3. Álgebras de evolución de dimensión 4

Las no-degeneradas serán de la forma $Diag(M_a, M_b)$, para $a, b \neq 0$. Las candidatas de entre las degeneradas son:

$$\begin{pmatrix} a & -a & 0 & 0 \\ -a & a & 0 & 0 \\ b & -b & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo los sistemas lineales $v^t \bar{A}' = 0$ llegamos a que deben ser de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & -a & 0 & 0 \\ -a & a & 0 & 0 \\ b & -b & 0 & 0 \\ c & -c & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & -a & 0 & 0 \\ -a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & -b & c & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & \frac{-ad}{b} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \end{pmatrix},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Todas estas matrices satisfacen las condiciones 4.2 y 4.3, salvo la tercera, en la que hay que imponer que $d = 0$. En efecto, podemos suponer que $a \neq 0$, ya que en caso contrario sería un caso particular del quinto modelo. Entonces, imponiendo la condición 4.2 al elemento en la posición $(1, 2)$, llegamos a que $d = 0$.

4.2. Álgebras de evolución cuyo operador de evolución es un endomorfismo algebraico

En esta sección estudiamos aquellas $\mathbb{C}-$álgebras de evolución E con base natural $\mathcal{B} = \{e_i, i \in \Lambda\}$ y matriz de estructura $A = (a_{ij})$, tales que $L \in End(E)$, es decir, el operador de evolución es un endomorfismo algebraico. Dado que un endomorfismo algebraico se caracteriza por el hecho de que su matriz asociada G cumple las ecuaciones $AG^{(2)} = GA$ y $A(G * G) = 0$, estas álgebras vienen caracterizadas por las ecuaciones:

$$AA^{(2)} = A^2,$$
$$A(A * A) = 0.$$

La primera ecuación es equivalente a $A(A^{(2)}-A)=0$. Los elementos de $A^{(2)}-A$ son de la forma $a_{ij}^2-a_{ij}=a_{ij}(a_{ij}-1)$. Por lo tanto la condición anterior es equivalente a la igualdad:

$$A\left(c_j \odot (c_j-\vec{1}\,)\right)=0,\ \ \forall\, j,$$

donde c_j es la columna j-ésima de A y $\vec{1}$ es el vector $(1,\ldots,1)^t$.

Por otra parte, según la definición de la operación $*$, la segunda ecuación es equivalente a:

$$A\,(c_i \odot c_j)=0,\ \ \forall\, i\neq j.$$

Por lo tanto, la matriz de estructura debe cumplir las condiciones:

$$A\left(c_j \odot (c_j-\vec{1}\,)\right)=0,\ \ \forall\, j, \tag{4.4}$$

$$A\,(c_i \odot c_j)=0,\ \ \forall\, i\neq j. \tag{4.5}$$

Comenzaremos estudiando el caso en el que E es degenerada y de dimensión finita n. Entonces, esta matriz se escribe como:

$$A=\begin{pmatrix} A' & 0\\ v^t & 0\end{pmatrix},$$

donde A' es una matriz cuadrada de tamaño $n-1$ y v un vector con $n-1$ entradas. La condición 4.4 es equivalente a:

$$A'\left(c'_j \odot (c'_j-\vec{1}\,)\right)=0\ \text{ y }\ v^t\left(c'_j \odot (c'_j-\vec{1}\,)\right)=0,\ \ \forall\, j,$$

donde c'_j es la columna j-ésima de A'. La condición 4.5 es equivalente a:

$$A'\left(c'_i \odot c'_j\right)=0\ \text{ y }\ v^t\left(c'_i \odot c'_j\right)=0,\ \ \forall\, i\neq j.$$

De esta forma, A' será la matriz de estructura de un álgebra de evolución E' de dimensión $n-1$ con operador de evolución $L'\in End(E')$. Por otra parte, v será un vector ortogonal a cada vector $c'_j \odot (c'_j-\vec{1}\,)$ y $c'_i \odot c'_j$, para todo i,j con $i\neq j$.

Gracias al razonamiento anterior nos podemos centrar en el estudio de las álgebras no-degeneradas, ya que si estas son conocidas podemos obtener las matrices de estructura de todas las degeneradas mediante el siguiente algoritmo:

Paso 1: Obtener todas las matrices A' de una dimensión menor, tanto degeneradas como no-degeneradas.

Paso 2: Para cada matriz A' obtenida, encontrar el espacio de vectores ortogonales a $\{c'_j \odot (c'_j - \vec{1}\,), c'_i \odot c'_j : i \neq j\}$. Si v pertenece a este espacio entonces las matrices buscadas serán aquellas de la forma $A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ v^t & 0 \end{pmatrix}$.

Estudiemos ahora el caso en el que L sea un automorfismo, es decir, el rango de A sea máximo.

Proposición 4.8. *Sea E un álgebra de evolución con matriz de estructura $A = (a_{ij})$ y tal que L es un automorfismo. Entonces, $L \in End(E)$ si y solo si A se obtiene permutando las columnas de la matriz identidad. En particular, E es un álgebra de evolución graficable.*

Demostración. La implicación hacia la izquierda es una simple comprobación. Para la otra implicación procedemos del siguiente modo:
Como A tiene rango máximo, de la condición 4.4 obtenemos que:

$$c_j \odot (c_j - \vec{1}\,) = 0, \;\; \forall\, j.$$

Es decir, $a_{ij}(a_{ij} - 1) = 0$, para todo i, j. Equivalentemente, a_{ij} es cero o uno, para todo i, j.

De la condición 4.5 obtenemos que:

$$c_i \odot c_j = 0, \;\; \forall\, i \neq j.$$

Por tanto no puede haber dos columnas que tengan un elemento no nulo en la misma posición. Como ninguna columna es nula (ya que el rango de A es máximo), la única posibilidad es que cada columna c_j sea un vector básico e_{k_j}, con $k_j \neq k_{j'}$ cuando $j \neq j'$. □

Si el rango de A no es máximo tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.9. *Sea E un álgebra de evolución de dimensión n tal que $L \in End(E)$. Sea c_k una columna no nula que puede escribirse como combinación lineal de las demás. Entonces, $Ac_k = Ac_k^{(2)} = 0$. En particular, si E es no-degenerada y el rango de A es $n - k$, entonces existen al menos $k + 1$ de estas columnas.*

Demostración. Supongamos que existe una columna no nula c_k que es combinación lineal de las demás. Es decir, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$ tales que:

$$c_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i c_i.$$

Sea $j \neq k$ tal que $\lambda_j \neq 0$ y $c_j \neq 0$. Entonces:

$$c_k \odot c_j = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i c_i \right) \odot c_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i c_i \odot c_j.$$

Utilizando la condición 4.5 tenemos que:

$$0 = A\left(c_k \odot c_j\right) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i A\left(c_i \odot c_j\right) = \lambda_j A\left(c_j \odot c_j\right).$$

Como $\lambda_j \neq 0$, entonces $A\left(c_j \odot c_j\right) = 0$. Dado que la condición 4.4 nos asegura que $A(c_j \odot c_j - c_j) = 0$, deducimos que $Ac_j = 0$. Para finalizar solo es necesario señalar que los papeles de c_j y c_k son intercambiables. □

Estudiamos a continuación los casos particulares en los que el rango de A es $n-1$ o 1:

Proposición 4.10. *Sea $n \geq 2$. Sea E un álgebra de evolución no-degenerada con base natural $\mathcal{B} = \{e_i : i = 1, \ldots, n\}$ y matriz de estructura $A = (a_{ij})$ de rango $n-1$. Entonces, $L \in End(E)$ si y solo si existe una reordenación de la base $\mathcal{B}$ tal que la matriz de estructura es de la forma:*

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & P \end{pmatrix},$$

donde:

- $A_1 = \begin{pmatrix} a & -a \\ a & -a \end{pmatrix}$, *para algún $a \neq 0$.*
- *A_2 es una matriz de dimensión $2 \times (n-2)$ cuyas dos filas son iguales.*
- *O es la matriz nula de dimensión $(n-2) \times 2$.*
- *P es una matriz de dimensión $(n-2) \times (n-2)$ que se obtiene al permutar las columnas de la matriz identidad de tamaño $n-2$.*

Demostración. La implicación hacia la izquierda es una simple comprobación. Para la otra implicación procedemos del siguiente modo:
Como el rango de A es $n-1$, el espacio vectorial $V = \{v \in \mathbb{C}^n : Av = 0\}$ es unidimensional. Por la proposición anterior, sabemos que existen j, k tales que $V = < c_j > = < c_j^{(2)} > = < c_k > = < c_k^{(2)} >$. Mediante una reordenación de la base,

podemos suponer que estas columnas son las dos primeras. Además, la igualdad $< c_1 >=< c_1^{(2)} >$ solo es posible si las entradas no nulas de c_1 son todas iguales. Es decir, existe $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que a_{i1} es 0 o a, dependiendo de cada i. Sea $\Omega = \{i : a_{i1} \neq 0\}$. Por la condición 4.5 sabemos que $c_j \odot c_1 \in V =< c_1 >$, para todo $j \neq 1$, lo que implica que:

$$a_{ij}a_{i1} = \mu_j a_{i1} \Rightarrow a_{ij} = \mu_j, \ \ \forall\, i \in \Omega, \ \ \forall\, j \neq 1,$$

donde μ_j solo depende de la columna j. Entonces todas las filas i-ésimas, con $i \in \Omega$, son iguales. Como el rango de A es $n-1$, $|\Omega| \leq 2$. Es decir, todas las entradas de c_1, excepto una o dos, son nulas.

Veamos que $|\Omega| = 2$. Por reducción al absurdo, supongamos que $|\Omega| = 1$. Sea i la posición del elemento no nulo de c_1. Entonces, de la igualdad $Ac_1 = 0$ obtenemos que $ac_i = 0$, lo cual es una contradicción, ya que $a \neq 0$ y $c_i \neq 0$ (E es no-degenerada).

Sean r, s las posiciones de los elementos no nulos de c_1. De la igualdad $Ac_1 = 0$ obtenemos que $ac_r + ac_s = 0$. Como el rango de A es $n-1$ y ya conocemos dos columnas que son linealmente dependientes, no pueden existir más. Por lo tanto r y s son iguales a 1 y 2. Además $c_2 = -c_1$.

Sea ahora $i > 2$, entonces tenemos que $a_{i1} = a_{i2} = 0$. La condición 4.4 nos asegura que todas las entradas de la fila i-ésima son ceros y unos. Además, no puede haber más de un uno, ya que en caso contrario no se cumpliría la condición 4.5. Por lo tanto, hay $n-2$ filas que son vectores básicos $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ o son nulas. Como las filas 1 y 2 son linealmente dependientes, entonces no puede haber ninguna otra fila nula. Por el mismo motivo estos vectores básicos deben ser todos distintos. $\square$

Proposición 4.11. *Sea E un álgebra de evolución no-degenerada de dimensión n. Supongamos que su matriz de estructura A tiene rango 1. Entonces, $L \in End(E)$ si y solo si $c_j = \lambda_j c_1$, para todo $j \neq 1$, donde $\vec{\lambda} = (1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^t$ es ortogonal a c_1 y a $c_1^{(2)}$.*

Demostración. Si el rango de A es 1, entonces existen escalares $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ no nulos tales que $c_j = \lambda_i c_1$, para todo $j = 2, \ldots, n$. La condición 4.5 se reduce a:

$$A\,(c_1 \odot c_1) = 0,$$

mientras que la condición 4.4 es equivalente a:

$$0 = A\left(c_1 \odot (\lambda_j c_1 - \vec{1}\,)\right) = \lambda_j A\,(c_1 \odot c_1) - Ac_1 = -Ac_1.$$

Por lo tanto, basta estudiar cuando $Ac_1 = Ac_1^{(2)} = 0$. Esto es:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k a_{k1} = \sum_{k=1}^{n} c_k a_{k1}^2 = 0.$$

Tomando $\lambda_1 = 1$ y sustituyendo $c_k = \lambda_k c_1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_1 a_{k1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_1 a_{k1}^2 = 0.$$

Como existe alguna entrada no nula en c_1, esto es equivalente a:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{k1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{k1}^2 = 0.$$

Es decir, el vector $\vec{\lambda} = (1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^t$ debe ser perpendicular al espacio $< c_1, c_1^{(2)} >$. □

La proposición 4.10 se puede generalizar, de cierto modo, a otros rangos de A:

Proposición 4.12. *Sean k y n dos números naturales con $n \geq 2k$. Sea E un álgebra de evolución no-degenerada con base natural $\mathcal{B} = \{e_i : i = 1, \ldots, n\}$ y matriz de estructura $A = (a_{ij})$ de rango $n - k$. Si $L \in End(E)$, entonces existe una reordenación de la base $\mathcal{B}$ tal que la matriz de estructura es de la forma:*

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix},$$

donde:

- *B es una matriz de dimensión $2k \times n$.*
- *C es una matriz de dimensión $(n-2k) \times n$ cuyas entradas son ceros y unos, con a lo sumo un uno por fila.*

Como consecuencia existe una submatriz de dimensión $(n-2k) \times 2k$ que es nula.

Demostración. Sea $V = \{v \in \mathbb{C}^n : Av = 0\}$ y $\Omega = \{i : \exists\ v = (v_1, \ldots, v_n)^t \in V, v_i \neq 0\}$. Si $i \in \Omega$, entonces existe $v = (v_1, \ldots, v_n)^t \in \mathbb{C}$ tal que $Av = 0$ y $v_i \neq 0$. De $Av = 0$ obtenemos que $\sum_{i=1}^{n} v_i c_i = 0$. Como $v_i \neq 0$, de la proposición 4.9 se deduce que $c_i \in V$. Es decir, si $i \in \Omega$, entonces $c_i \in V$.

Veamos que $|\Omega| \leq 2k$. Por reducción al absurdo, supongamos que $|\Omega| > 2k$. Entonces, existen más de $2k$ columnas que pertenecen a V. Como la dimensión de V es k, el rango de la matriz formada por estas columnas es menor o igual que k. Esto implica que el rango de A es menor que $k + (n - 2k) = n - k$, lo que es una contradicción.

Como $|\Omega| \leq 2k$, entonces existen, al menos, $n - 2k$ coordenadas que son nulas en todos los vectores de V. Podemos suponer, mediante una reordenación de la base, que estas coordenadas son las $n - 2k$ últimas. Como ya hemos hecho otras veces, las condiciones 4.4 y 4.5 nos aseguran que todas las entradas de las últimas $n - 2k$ filas son ceros y unos, y que no puede haber más de un uno por fila. Por lo tanto, las últimas $n - 2k$ filas son vectores básicos $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ o son nulas. $\square$

Nótese que en la demostración anterior no se puede volver a reordenar la base para que la submatriz nula quede en la parte inferior izquierda, como en la proposición 4.10, ya que al hacer esto se deshace lo que habíamos conseguido con la reordenación anterior.

4.2.1. Álgebras de evolución de dimensión 2

Comencemos estudiando aquellas que son degeneradas. Como las únicas de dimensión 1 son (0) y (1), entonces las degeneradas de dimensión 2 deben ser de la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

con $a \in \mathbb{C}$. Para cualquier valor de a se cumple la condición de ortogonalidad.

Por otra parte, las no-degeneradas de rango máximo son dos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mientras que las no-degeneradas de rango $n - 1$ son:

$$\begin{pmatrix} a & -a \\ a & -a \end{pmatrix},$$

con $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. En este caso $n-1 = 1$. Veamos que utilizando la proposición para rango igual a uno obtenemos las mismas matrices. Según este resultado, deben ser aquellas de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & \lambda a \\ b & \lambda b \end{pmatrix},$$

con $(1, \lambda)^t$ ortogonal a $< (a, b)^t, (a^2, b^2)^t >$ y $(a, b) \neq (0, 0)$. Si $a \neq b$, entonces $(a, b)^t$ y $(a^2, b^2)^t$ son linealmente independientes y no existe ninguna solución. Por lo tanto $a = b$ y $(1, \lambda)^t$ debe ser ortogonal a $< (a, a) >$, de donde $\lambda = -1$, llegándose al mismo resultado.

4.2.2. Álgebras de evolución de dimensión 3

Utilizando las de una dimensión menos, las matrices de estructura de aquellas álgebras degeneradas deben ser de la forma:

$$\begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ a & -a & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{pmatrix},$$

donde δ es 0 o 1 y $v_1, v_2, a \in \mathbb{C}$. Imponiendo las condiciones de ortogonalidad a $(v_1, v_2)^t$ obtenemos que todas las matrices degeneradas son:

$$\begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ \delta' & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ v_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ a & -a & 0 \\ v_1 & -v_1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\delta, \delta' \in \{0, 1\}$, $v_1, v_2, a \in \mathbb{C}$ y $b \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Por otra parte, las no-degeneradas de rango máximo son, salvo reordenación de la base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las no-degeneradas de rango $n - 1 = 2$ son:

$$\begin{pmatrix} a & -a & \lambda \\ a & -a & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Por último, las no-degeneradas de rango 1 son:

$$\begin{pmatrix} a & \lambda a & \lambda' a \\ b & \lambda b & \lambda' b \\ c & \lambda c & \lambda' c \end{pmatrix},$$

con $(1, \lambda, \lambda')^t$ ortogonal a $< (a, b, c)^t, (a^2, b^2, c^2)^t >$ y $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Diferenciamos distintos casos:

- Si $b, c \neq 0$ y $b \neq c$, entonces:

$$\lambda = -\frac{a(c-a)}{b(c-b)} \quad \text{y} \quad \lambda' = -\frac{a(b-a)}{c(b-c)}.$$

- Si $b, c \neq 0$, $b = c$ y $a = 0$, obtenemos las matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & \lambda b & -\lambda b \\ b & \lambda b & -\lambda b \end{pmatrix},$$

para todo λ y $b \neq 0$.

- Si $b, c \neq 0$, $b = c$ y $a \neq 0$, obtenemos las matrices:

$$\begin{pmatrix} a & \lambda a & -(\lambda+1)a \\ a & \lambda a & -(\lambda+1)a \\ a & \lambda a & -(\lambda+1)a \end{pmatrix},$$

para todo λ y $a \neq 0$.

- Si $b = 0$ y $c \neq 0$, obtenemos las matrices:

$$\begin{pmatrix} a & \lambda a & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & \lambda a & -a \end{pmatrix},$$

para todo λ y $a \neq 0$.

- Si $b \neq 0$ y $c = 0$, obtenemos las matrices:

$$\begin{pmatrix} a & -a & \lambda' a \\ a & -a & \lambda' a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

para todo λ' y $a \neq 0$.

4.2.3. Resolubilidad

Sabemos que las álgebras de evolución no son, en general, ni asociativas ni de potencias asociativas. Hasta ahora hemos trabajado siempre con las denominadas *potencias principales*, que se definen sobre un elemento $a \in E$ de forma recursiva como:

$$a^1 = a,$$
$$a^n = a^{n-1} \cdot a.$$

Sin embargo, se pueden considerar otras potencias distintas a la habitual, como las *potencias plenas*, que se definen sobre un elemento $a \in E$ como:

$$\begin{aligned} a^{[0]} &= a, \\ a^{[n]} &= a^{[n-1]} \cdot a^{[n-1]}. \end{aligned}$$

Es un hecho conocido que estas potencias cumplen la siguiente propiedad:

$$\left(a^{[n]}\right)^{[m]} = a^{[n+m]}.$$

Definamos también, de forma recursiva, los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} E^{[0]} &= E, \\ E^{[n]} &= E^{[n-1]} \cdot E^{[n-1]} = \{x \cdot y : x, y \in E^{[n-1]}\}. \end{aligned}$$

Aunque es habitual definir $E^{[n]}$ como el subespacio generado por los productos de la forma $x \cdot y$, con $x, y \in E^{[n-1]}$, vemos en la siguiente proposición que en nuestro caso es algo innecesario, ya que $E^{[n]}$ tiene estructura de espacio vectorial con la definición que hemos considerado. Por otra parte, es inmediato ver que:

$$\left(E^{[n]}\right)^{[m]} = E^{[n+m]}.$$

Tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.13. *Sea E un álgebra de evolución con base natural dada por $\mathcal{B} = \{e_i : i \in \Lambda\}$ y matriz de estructura $A = (a_{ij})$. Si $L \in End(E)$, entonces $E^{[n]}$ es una subálgebra de evolución de E, para todo $n \geq 0$. Una base natural de $E^{[n]}$ es $\{e_i^{[n]} : i \in \Omega\}$, para un cierto $\Omega \subseteq \Lambda$. Además, se tienen las igualdades:*

$$e_i^{[n+1]} = L\left(e_i^{[n]}\right) = L^{n+1}(e_i) = \sum_{k \in \Lambda} a_{ki} e_k^{[n]}.$$

Demostración. Lo demostraremos por inducción en n. Para $n = 0$ el resultado es obvio. Supongamos que es cierto para $n - 1$ y veamos que es cierto para n.

Veamos en primer lugar que $E^{[n]} = E^{[n-1]} \cdot E^{[n-1]}$ tiene estructura de espacio vectorial. Si $x, y \in E^{[n]}$, entonces existen $x_1, x_2, y_1, y_2 \in E^{[n-1]}$, tales que $x = x_1 \cdot x_2$ y $y = y_1 \cdot y_2$. Como $\{e_i^{[n-1]} : i \in \Omega\}$ es una base de $E^{[n-1]}$, entonces:

$$x_i = \sum_{k \in \Omega} x_{ki} e_k^{[n-1]}, \quad y_i = \sum_{k \in \Omega} y_{ki} e_k^{[n-1]},$$

para ciertos escalares x_{ki} y y_{ki}. Como esta base es natural:

$$x = x_1 \cdot x_2 = \sum_{k \in \Omega} x_{k1} x_{k2} e_k^{[n-1]} \cdot e_k^{[n-1]},$$

$$y = y_1 \cdot y_2 = \sum_{k\in\Omega} y_{k1}y_{k2}e_k^{[n-1]} \cdot e_k^{[n-1]}.$$

Así, la suma es:

$$x + y = \sum_{k\in\Omega}(x_{k1}x_{k2} + y_{k1}y_{k2})e_k^{[n-1]} \cdot e_k^{[n-1]},$$

que, a su vez, puede escribirse como el producto:

$$\left(\sum_{k\in\Omega}(x_{k1}x_{k2} + y_{k1}y_{k2})e_k^{[n-1]}\right) \cdot \left(\sum_{k\in\Omega} e_k^{[n-1]}\right).$$

Cada uno de estos factores es un elemento de $E^{[n-1]}$, por lo que $x + y \in E^{[n]}$.

Además, como $E^{[n-1]}$ es una subálgebra, se tiene que $E^{[n]} \subseteq E^{[n-1]}$. Como consecuencia, si $x, y \in E^{[n]}$, entonces $x, y \in E^{[n-1]}$ y por lo tanto $x \cdot y \in E^{[n]}$. Esto prueba que $E^{[n]}$ tiene estructura de subálgebra.

Por otra parte, de lo visto anteriormente se deduce que $\{e_i^{[n-1]} \cdot e_i^{[n-1]} : i \in \Omega\} = \{e_i^{[n]} : i \in \Omega\}$ es un conjunto generador de $E^{[n]}$, por lo que existe $\Omega' \subseteq \Omega \subseteq \Lambda$ de forma que $\{e_i^{[n]} : i \in \Omega'\}$ es una base. Además, esta base es natural, ya que si $i \neq j$:

$$e_i^{[n]} \cdot e_j^{[n]} = L\left(e_i^{[n-1]}\right) \cdot L\left(e_j^{[n-1]}\right) = L\left(e_i^{[n-1]} \cdot e_j^{[n-1]}\right) = L(0) = 0.$$

Por último:

$$e_i^{[n+1]} = e_i^{[n]} \cdot e_i^{[n]} = L\left(e_i^{[n-1]}\right) \cdot L\left(e_i^{[n-1]}\right) = L\left(e_i^{[n-1]} \cdot e_i^{[n-1]}\right) = L\left(e_i^{[n]}\right),$$
$$L\left(e_i^{[n]}\right) = L\left(L^n(e_i)\right) = L^{n+1}(e_i),$$
$$L^{n+1}(e_i) = L^n\left(L(e_i)\right) = L^n\left(\sum_{k\in\Lambda} a_{ki}e_k\right) = \sum_{k\in\Lambda} a_{ki}L^n(e_k) = \sum_{k\in\Lambda} a_{ki}e_k^{[n]}.$$

□

Una observación importante es que de la igualdad:

$$\left(e_i^{[n]}\right)^2 = \sum_{k\in\Lambda} a_{ki}e_k^{[n]}$$

no se puede deducir, en general, que la matriz de estructura asociada al subálgebra de evolución $E^{[n]}$, respecto de la base natural $\{e_i^{[n]} : i \in \Omega\}$, sea A o una submatriz de A, ya que Ω está contenido en Λ. De hecho, la proposición 4.9 nos asegura que esta inclusión es estricta siempre que L no sea un automorfismo. En el caso en el que:

$$\sum_{k\in\Lambda\setminus\Omega} a_{ki}e_k^{[n]} = 0,$$

sí se tendrá que la matriz de estructura es la submatriz de A formada por las filas y columnas cuyos índices estén en Ω.

Por otra parte, se tiene que $E^{[n]}$ es un ideal de evolución de $E^{[n-1]}$. En efecto, como $E^{[n]} \subseteq E^{[n-1]}$, si $x \in E^{[n]}$ entonces $x \cdot y \in E^{[n]}$, para todo $y \in E^{[n-1]}$. En particular, $E^{[1]}$ es un ideal de evolución de E. En el siguiente ejemplo se muestra que, en general, $E^{[n]}$ no es un ideal, para $n > 1$. También se muestra que, en general, la subálgebra de evolución $E^{[n]}$ no tiene la propiedad de extensión.

Ejemplo 4.14. *Consideremos el álgebra de evolución E de base $\{e_1, e_2, e_3\}$ con matriz de estructura:*

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & \lambda \\ a & -a & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde a y λ son escalares no nulos. Hemos visto, en la subsección 4.2.2, que en este caso $L \in End(E)$. Como:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $e_i^{[2]} = L^2(e_i)$, entonces $e_1^{[2]} = e_2^{[2]} = 0$, $e_3^{[2]} = \lambda(e_1 + e_2) + e_3$ y $E^{[2]} =< e_3^{[2]} >$.

Veamos que $E^{[2]}$ no es un ideal. Para ello consideramos:

$$x = e_1 \in E,$$
$$y = \lambda(e_1 + e_2) + e_3 \in E^{[2]}.$$

Entonces:

$$x \cdot y = \lambda e_1^2 = \lambda a(e_1 + e_2) \notin E^{[2]}.$$

De donde se deduce que $E^{[2]}$ no es un ideal.

Consideremos ahora $E^{[1]}$. Como $e_1^{[1]} = -e_2^{[1]} = a(e_1 + e_2)$ y $e_3^{[1]} = \lambda(e_1 + e_2) + e_3$, entonces $E^{[1]} =< e_1^{[1]}, e_3^{[1]} >$. Veamos que $E^{[1]}$ no tiene la propiedad de extensión. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $x = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i$ linealmente independiente de $e_1^{[1]}$ y $e_3^{[1]}$ y tal que $x \cdot e_1^{[1]} = x \cdot e_3^{[1]} = 0$. Como $x \cdot e_1^{[1]} = 0$, entonces:

$$a(x_1 e_1^2 + x_2 e_2^2) = 0,$$

de donde:

$$a^2(x_1 - x_2)(e_1 + e_2) = 0,$$

por lo que $x_1 = x_2$*. Como* $x \cdot e_3^{[1]} = 0$*, entonces:*

$$0 = \lambda(x_1 e_1^2 + x_2 e_2^2) + x_3 e_3^2 = x_3 e_3^2 = \lambda x_3(e_1 + e_2) + x_3 e_3,$$

por lo que $x_3 = 0$*. En consecuencia,* $x = x_1(e_1 + e_2)$*, que depende linealmente de* $e_1^{[1]}$*, lo cual es una contradicción.*

Corolario 4.15. *Sea* E *un álgebra de evolución con base natural dada por* $\mathcal{B} = \{e_i : i \in \Lambda\}$*, matriz de estructura* $A = (a_{ij})$ *y operador de evolución* $L \in End(E)$*. Sea* n *un número natural y* $\Omega \subseteq \Lambda$ *un subconjunto de forma que* $\{e_i^{[n]} : i \in \Omega\}$ *es una base natural de* $E^{[n]}$*. Sea* L' *el operador de evolución de* $E^{[n]}$ *asociado a esta base. Entonces,* $L' = L|_{E^{[n]}}$ *y* $L' \in End(E^{[n]})$*.*

Demostración. Para probar que $L' = L|_{E^{[n]}}$ solo es necesario ver que se cumple la igualdad para los elementos de la base natural $\{e_i^{[n]} : i \in \Omega\}$, lo cual se tiene de forma inmediata:

$$L'\left(e_i^{[n]}\right) = \left(e_i^{[n]}\right)^2 = e_i^{[n+1]} = L\left(e_i^{[n]}\right).$$

Además, como:

$$L'(x \cdot y) = L(x \cdot y) = L(x) \cdot L(y) = L'(x) \cdot L'(y),$$

para todo $x, y \in E^{[n]}$, se tiene que $L' \in End(E^{[n]})$. $\square$

Una pregunta que surge de forma natural es si la sucesión de subálgebras:

$$E = E^{[0]} \supseteq E^{[1]} \supseteq \cdots \supseteq E^{[n]} \supseteq \cdots$$

se estabiliza y, en caso afirmativo, cuándo lo hace. Si el álgebra de evolución E es de dimensión finita obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.16. *Sea* E *un álgebra de evolución con base natural dada por* $\mathcal{B} = \{e_i : i = 1, \ldots, n\}$*, matriz de estructura* $A = (a_{ij})$ *de rango* $n - k$ *y operador de evolución* $L \in End(E)$*. Entonces:*

1. *Si* $E^{[i]} = E^{[i+1]}$*, entonces* $E^{[i+r]} = E^{[i]}$*, para todo* $r \geq 0$*.*
2. $k = 0$ *si y solo si* $E^{[r]} = E$*, para todo* $r \geq 0$*.*
3. *Si* $k > 0$*, entonces* $E^{[n-k+1+r]} = E^{[n-k+1]}$*, para todo* $r \geq 0$*.*

Demostración.

1. Probémoslo por inducción en r. Para $r = 0$ y $r = 1$ es trivial. Si consideremos el resultado cierto para r, entonces:

$$E^{[i+r+1]} = E^{[i+r]} \cdot E^{[i+r]} = E^{[i]} \cdot E^{[i]} = E^{[i+1]} = E^{[i]}.$$

   Es decir, el resultado es cierto para $r + 1$.

2. Si $k = 0$, entonces, por la proposición 4.8, A se obtiene al permutar las columnas de la matriz identidad. Como $E^{[1]}$ está generado por $\{e_i^2 : i = 1, \ldots, n\}$, entonces $E^{[1]} = E$. Por el apartado anterior, $E^{[r]} = E$, para todo $r \geq 0$.

   Si $E^{[r]} = E$, para todo $r \geq 0$, entonces $E^{[1]} = E$. Como $E^{[1]} = E$ está generado por $\{e_i^2 : i = 1, \ldots, n\}$, entonces A debe ser de rango n, es decir, $k = 0$.

3. Como $E^{[1]} = E$ está generado por $\{e_i^2 : i = 1, \ldots, n\}$, entonces $dim(E^{[1]}) = n - k$. Por dimensión, la igualdad $E^{[i]} = E^{[i+1]}$ se obtendrá para algún $i \leq n - k + 1$. Utilizando el apartado 1 se obtiene el resultado.

□

Al igual que para álgebras de Lie, diremos que un álgebra de evolución E es resoluble si existe un número natural n tal que $E^{[n]} = 0$. El menor número natural que cumpla esto se denomina el índice de resolubilidad. Cuando la dimensión de E es finita, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.17. *Sea E un álgebra de evolución con base natural dada por $\mathcal{B} = \{e_i : i = 1, \ldots, n\}$, matriz de estructura $A = (a_{ij})$ y operador de evolución $L \in End(E)$. Entonces, $E^{[n]} = 0$ si y solo si $A^n = 0$. Como consecuencia, E es resoluble si y solo si A es una matriz nilpotente. Además, los índices de resolubilidad de E y de nilpotencia de A coinciden.*

Demostración. Es consecuencia directa de que $E^{[n]}$ está generado por $\{e_i^{[n]} : i = 1, \ldots, n\}$ y de que $e_i^{[n]} = L^n(e_i)$. □

Los siguientes ejemplos muestran que este resultado no es cierto si $L \notin End(E)$:

Ejemplo 4.18. *Consideremos el álgebra de evolución E de base $\{e_1, e_2\}$ con matriz de estructura:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puede comprobarse que $A^n = 2^{n-1}A$, por lo que A no es nilpotente. Por otra parte:

$$\begin{aligned} e_1^2 \cdot e_1^2 &= (e_1 - e_2) \cdot (e_1 - e_2) = e_1^2 + e_2^2 = 0, \\ e_2^2 \cdot e_2^2 &= (-e_1 + e_2) \cdot (-e_1 + e_2) = e_1^2 + e_2^2 = 0, \\ e_1^2 \cdot e_2^2 &= (e_1 - e_2) \cdot (-e_1 + e_2) = -e_1^2 - e_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Como $E^{[1]}$ está generado por $\{e_1^2, e_2^2\}$, entonces $E^{[2]} = 0$, por lo que E es resoluble.

Ejemplo 4.19. *Consideremos el álgebra de evolución E de base $\{e_1, e_2\}$ con matriz de estructura:*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Puede comprobarse que $A^2 = 0$, por lo que A es nilpotente. Por otra parte:

$$\begin{aligned} e_1^2 \cdot e_2^2 &= (6e_1 + 4e_2) \cdot (-9e_1 - 6e_2) = -54e_1^2 - 24e_2^2 = \\ &= -54(6e_1 + 4e_2) - 24(-9e_1 - 6e_2) = -108e_1 - 72e_2 = \\ &= -18\, e_1^2 = 12\, e_2^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$(e_1^2 \cdot e_2^2)^{[1]} = -18 \cdot 12\, e_1^2 \cdot e_2^2 = (-18)^2 \cdot 12\, e_1^2 = -18 \cdot 12^2\, e_2^2.$$

Por inducción puede probarse que:

$$(e_1^2 \cdot e_2^2)^{[n]} = (-18)^{2^n} \cdot 12^{2^n - 1} e_1^2 = (-18)^{2^n - 1} \cdot 12^{2^n} e_2^2,$$

por lo que E no es resoluble.

CAPÍTULO 5

Problemas abiertos

A raíz de los nuevos resultados obtenidos en el capítulo anterior, surgen de forma natural una serie de problemas abiertos, algunos de los cuales ilustramos a continuación:

- Cuando el operador de evolución es una derivación, es fácil comprobar que se tiene la igualdad:

  $$L^n(x \cdot y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L^{n-k}(x) \cdot L^k(y),$$

  para todo $n \geq 1$. Un operador se dice que es una *derivación de orden* n cuando satisface la igualdad anterior para n. Así, hemos estudiado el caso en que L es una derivación de orden 1. Una cuestión que se podría abordar es cuándo el operador de evolución es una derivación de orden n, para $n \geq 2$.

  Cuando L es una derivación también se cumple que:

  $$L(x_1 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_1 \cdots x_{i-1} \cdot L(x_i) \cdot x_{i+1} \cdots x_n,$$

  para todo $n \geq 2$, siempre que se efectúen los productos a ambos lados de la igualdad en el mismo orden. Un operador se dice que es una n-*derivación* cuando cumple la igualdad anterior para n. De igual forma, podría estudiarse cuándo L es una n-derivación, para $n \geq 3$.

- En los dos casos estudiados, se han expuesto algoritmos para obtener todas las álgebras de evolución degeneradas de dimensión n a partir de todas las de dimensión $n-1$, degeneradas o no. Se propone encontrar una caracterización de estas álgebras que permita obtener una clasificación sin necesidad de utilizar dimensiones menores.

- Estudiar el caso en el que el operador de evolución es un endomorfismo algebraico de rango r, con $2 \leq r \leq n-2$, con el fin de obtener una caracterización de estas álgebras que permita una clasificación completa para dimensiones mayores que 3.

- Trasladar los resultados obtenidos a otras ramas de las Matemáticas que tengan una conexión directa con las álgebras de evolución. Por ejemplo, cada álgebra de evolución tiene un grafo dirigido asociado de forma que la arista que parte de e_i a e_j tiene peso a_{ij}. Partiendo de esto, ¿cómo se expresa en el grafo el hecho de que el operador de evolución sea una derivación o un endomorfismo algebraico? ¿Qué propiedades tienen estos grafos?

- Estudiar cuándo el operador de evolución satisface ciertas igualdades, distintas a las estudiadas, que involucren al producto y que tengan un mayor interés biológico para modelizar ciertas poblaciones.

Bibliografía

[1] Abedin-Zadeh, R., Pucker, N., The evolution operator method and its application to problems of reactor theory, *Acta Phys. Austriaca* **32** (1970), 47-59.

[2] Bayara, J.; Quattara, M.; Micali, A., Ferreira, J.C., Sur une classe d'algèbres d'évolution. (French. English summary) [A class of evolution algebras] *Algebras Groups Geom.* **19**:3 (2002), 315-345.

[3] Bernstein, S., Principe de stationnarité et généralisation de la loi de Mendel, *C.R. Acad. Sci. Paris* **177** (1923), 581-584.

[4] Bertrand, M., *Algèbres non associatives et algèbres génétiques*, Mémorial des Sciences Mathématiques, Fasc. 162 , Gauthier-Villars Editeur, Paris, 1966.

[5] Cabrera, Y., Siles, M., Velasco, M.V., Evolution algebras of arbitrary dimension and their decompositions, *Linear Algebra Appl.* **495** (2016), 122-162.

[6] Cadavid, P., Rodiño, M.L. and Rodríguez, P.M., The connection between evolution algebras, random walks and graphs, *J. Algebra Appl.***19**:02 (2020), 2050023.

[7] Conseibo, A., Quattara, M., Sur les sous-algèbres monogènes d'algèbres d'évolution stationnaire.(French) [Monogenic subalgebras of stationary evolution algebras] *Algebras Groups Geom.* **19**:4 (2002), 495-512.

[8] Dzhumadil'daev, A., Omirov, B.A., Rozikov, U.A. Constrained evolution algebras and dynamical systems of a bisexual population, *Linear Algebra Appl.* **496** (2016), 351-380.

[9] Elduque, A., Labra, A., Evolution algebras and graphs, *J. Algebra Appl.* **14**:7 (2015), 1550103, 10 pp.

[10] Etherington, I.M.H., Genetic algebras, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **59** (1939), 242-258.

[11] Falcón, O.J., Falcón, R.M., Núñez, J., Classification of asexual diploid organisms by means of strongly isotopic evolution algebras defined over any field, *J. Algebra* **472** (2017), 573-593.

[12] Glivenkov, V., Algebra Mendelienne, *Comptes Rendus de Acad. des Sci. de l'URSS*, **4**:13 (1936), 385-386.

[13] Gonshör H., Derivations in genetic algebras, *Comm. Algebra* **16**:8 (1988), 1525-1542.

[14] Haldane, J.B.S., A mathematical theory of natural and artificial selection-I, *Bull. Math. Biol.* **52**:1/2 (1990), 209-240.

[15] Heuch, I., Sequences in genetic algebras for overlapping generations, *Proc. Edinb. Math. Soc.* **18** (1972/73), 19-29.

[16] Holgate P., The interpretation of derivations in genetic algebras, *Linear Algebra Appl.* **85** (1987), 75-79.

[17] Jennings, H.S., Observed changes in hereditary characters in relation to evolution, *J. Washington Acad. Sci.* **7**:10 (1917), 281-301.

[18] Korol, A.B., Preygel, I.A., Preygel, S.I., *Recombination Variability and Evolution: Algorithms of estimation and population-genetic models*. London, Chapman & Hall, 1994.

[19] Kostitzin, V.A., Sur les coefficients mendeliens d'heredite, *Comptes Rendus de Acad. des Sci.*, **206** (1938), 883-885.

[20] Labra, A., Ladra, M., Rozikov, U.A., An evolution algebra in population genetics, *Linear Algebra Appl.* **457** (2014), 348-362.

[21] Ladra, M., Rozikov, U.A., Evolution algebra of a bisexual population, *J. Algebra* **378** (2013), 153-172.

[22] López-Blázquez, F., Núñez-Valdés, J., Recacha, S., Villar-Liñán, M.T., Evolution algebras, Graph Theory and Markov chains. Submitted, 2018.

[23] Lyubich, Y.I., *Mathematical structures in population genetics* (English translation), Biomathematics 22, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[24] Mellon, P., Velasco, M.V., Analytic aspects of evolution algebras, *Banach J. Math. Anal.* **13**:1 (2019), 113-132.

[25] Mendel, G., *Experiments in plant-hybridization*, Classic Papers in Genetics, Prentice-Hall Inc., 1959.

[26] Núñez, J., Rodríguez-Arévalo, M.L., Villar, M.T., Certain particular families of graphicable algebras, *Applied Mathematics and Computation*, **246**:1 (2014), 416-425.

[27] Núñez, J., Silvero, M., Villar, M.T., Mathematical tools for the future: Graph Theory and graphicable algebras, *Appl. Math. Comput.* **219**:11 (2013), 6113-6125.

[28] Omirov, B.A., Rozikov, U.A. On subalgebras of an evolution algebra of a "chicken" population, *J. Algebra Relat. Topics* **5**:2, (2017), 13-24.

[29] Petiau, G., Sur la représentation de l'équation d'ondes et l'évolution des grandeurs électromagnétiques dans la théorie du photon, (French), *J. Phys. Radium (8)* **10** (1939), 413-419.

[30] Reiersöl, O., Genetic algebras studied recursively and by means of differential operators, *Math. Scand.* **10** (1962), 25-44.

[31] Rozikov, U.A., Evolution Operators and Algebras of Sex Linked Inheritance, *Asia Pac. Math. Newsl.* **3**:1 (2013), 6-11.

[32] Schafer, R.D., Structure of genetic algebras, *Amer. J. Math.* **71** (1949), 121-135.

[33] Serebrowsky, A., On the properties of the Mendelian equations, *Doklady A.N.SSSR.*, **2** (1934), 33-36 (in Russian).

[34] Shannon, C.E., Algebra for thoretical genetics. Thesis (Ph.D.)- Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1940.

[35] Tian, J.P., Evolution algebra theory. Thesis (Ph.D.)- University of California, Riverside. 2004.

[36] Tian, J.P., *Evolution Algebras and their Applications*, Lecture Notes in Mathematics 1921, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[37] Tian, J.P., Vojtechovsky, P., Mathematical concepts of evolution algebras in non-Mendelian genetics, *Quasigroups Related Systems*, **14**:1 (2006), 111-122.

[38] Wörz-Busekros, A., *Algebras in Genetic*, Lecture Notes in Biomathematics 36, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.

Índice de autores

Índice de conceptos