



**REPRESENTACIONES CONFORMES  
DE SUPERFICIES DE CURVATURA  
GAUSSIANA O CURVATURA  
MEDIA CONSTANTE EN  
3-VARIEDADES**

**David Torregrosa Belén**





**REPRESENTACIONES CONFORMES DE  
SUPERFICIES DE CURVATURA GAUSSIANA O  
CURVATURA MEDIA CONSTANTE EN  
3-VARIEDADES**

David Torregrosa Belén

Memoria presentada como parte de los requisitos  
para la obtención del título de Máster Universita-  
rio en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Prof. Tutor Isabel Fernández Delgado



# Índice general

<b>English Abstract</b>	<b>1</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>3</b>
<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>11</b>
1.1. Parámetros isotermos y estructura conforme . . . . .	12
1.2. Superficies de Riemann . . . . .	15
1.3. El espacio hiperbólico . . . . .	18
<b>2. Representación de Weierstrass para superficies mínimas</b>	<b>25</b>
2.1. Superficies mínimas y aplicación de Gauss . . . . .	26
2.2. Teorema de representación de Weierstrass . . . . .	28
2.3. Construcción de superficies mínimas a través de datos de Weierstrass	36
2.4. Teoría compleja de superficies mínimas . . . . .	41
<b>3. Representación conforme de superficies con curvatura media constante 1 en <math>\mathbb{H}^3</math></b>	<b>43</b>
3.1. Superficies de Bryant y aplicación de Gauss hiperbólica . . . . .	44

**II REPRESENTACIONES CONFORMES DE SUPERFICIES**

3.2.	Teorema de representación conforme . . . . .	48
3.3.	Ejemplos de representación conforme de superficies de Bryant . . . . .	54
3.4.	Aplicaciones de la representación conforme de Bryant . . . . .	56
<b>4.</b>	<b>Representación conforme de superficies llanas en <math>\mathbb{H}^3</math></b>	<b>59</b>
4.1.	Superficies llanas y aplicación de Gauss hiperbólicas en $\mathbb{H}^3$ . . . . .	61
4.2.	Teorema de representación conforme . . . . .	63
4.3.	Ejemplos de representación conforme de superficies llanas . . . . .	69
4.4.	Aplicaciones de la representación conforme de superficies llanas en $\mathbb{H}^3$	73
4.5.	Representación conforme en el espacio de De Sitter . . . . .	75

# Abstract

Conformal representations provide a way of describing a surface by holomorphic data. The origin of this representations was given by the Weierstrass-Enneper representation for minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  which entailed a great development of the theory of this surfaces in the XIX century. In this work we study the Weierstrass-Enneper representation, the conformal representation of constant mean curvature one surfaces (Bryant surfaces) and null Gaussian curvature surfaces (flat surfaces) in  $\mathbb{H}^3$ , and the interrelation between these three.

## Resumen

Las representaciones conformes permiten describir una superficie por medio de datos holomorfos. El origen de estas representaciones tuvo lugar con la Representación de Weierstrass-Enneper para superficies mínimas en  $\mathbb{R}^3$  que supuso un gran desarrollo en la teoría de estas superficies en el siglo XIX. En este trabajo estudiaremos la representación de Weierstrass-Enneper, la representación conforme de superficies de curvatura media constante 1 (superficies de Bryant) y superficies de curvatura Gaussiana 0 (superficies llanas) en  $\mathbb{H}^3$ , y las relaciones entre ellas.



# Agradecimientos

Este trabajo no sería el mismo sin la ayuda de dos personas que me han acompañado durante el tiempo que le he dedicado, y a las que querría darles las gracias.

A Geraldo Beltrão con quien comencé a estudiar las representaciones conformes, resolvimos nuestras primeras dudas y realicé mi primer trabajo con motivo del “Doc Course 2019 on Geometric Analysis”.

A mi directora, Isabel Fernández Delgado, por su orientación en la elaboración de este trabajo, disponibilidad, comentarios y sugerencias; pero sobretodo por todo lo que ha hecho por mí durante este año, entre ellas ser mi directora en la Beca IMUS de Iniciación a la Investigación e invitarme a formar parte del “Doc Course 2019 on Geometric Analysis” con las que me ha abierto las puertas al mundo de la investigación. Muchas gracias.



# Introducción

Una representación conforme de una superficie es una manera de expresar las coordenadas de la misma en función de datos o aplicaciones holomorfas. La aparición de aplicaciones de este tipo añade una gran variedad de herramientas para trabajar con las superficies, provenientes generalmente del análisis complejo, y que pueden ser usadas tanto para construir nuevos ejemplos de superficies como para estudiar propiedades de ellas.

La posibilidad de definir aplicaciones holomorfas sobre superficies viene dada al considerar las superficies Riemannianas como superficies de Riemann. Estos conceptos de geometría compleja son detallados en el Capítulo 1. Aquí adquieren una gran importancia los *parámetros isotermos*, aquellos que nos permiten expresar la métrica de la superficie en la forma

$$ds^2 = \lambda^2 dx^2 + \lambda^2 dy^2,$$

con  $\lambda^2$  una función positiva definida sobre la superficie. A partir de los parámetros isotermos es posible definir un parámetro complejo, el *parámetro conforme*, y definir una *estructura conforme* sobre la superficie que abre la puerta a trabajar con ella como superficie de Riemann. A su vez, se introducirán los conceptos de aplicaciones conformes entre superficies y de aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann, y se mostrará su estrecha relación. Una aplicación conforme entre dos superficies de Riemann será holomorfa si conserva la orientación o antiholomorfa, en caso contrario.

Por último en este capítulo se dedica una sección a introducir los conceptos básicos del espacio hiperbólico. Dos de las representaciones conformes que estudiaremos son para superficies inmersas en este espacio modelo.

La estructura que se ha pretendido seguir en este trabajo, con sus respectivas secciones, ha tenido la finalidad de mostrar de manera clara las similitudes presentes en

los distintos tipos de representaciones conformes con las que se trabaja. A continuación se enunciarán los principales resultados, que se estudiarán en más detalle en sus respectivos capítulos.

## Representación de Weierstrass para superficies mínimas

La representación de Weierstrass es el primer ejemplo de representación conforme estudiado. Data del año 1863 y fue desarrollada gracias al trabajo de Karl Weierstrass y Alfred Enneper, por lo que también recibe el nombre de representación de Weierstrass-Enneper. Estos matemáticos descubrieron que era posible expresar las superficies mínimas en  $\mathbb{R}^3$  por medio de funciones holomorfas. A ella le dedicamos el Capítulo 2, seguiremos fundamentalmente las referencias [3] y [25].

Recordamos que las superficies mínimas son aquellas cuya curvatura media es nula. Es de sobra conocida la importancia de estas superficies en multitud de áreas de las Matemáticas. Aunque el origen de estas superficies data del siglo XVIII, enlazado al Cálculo de Variaciones y al problema de minimizar el área de una superficie con un borde dado, el gran desarrollo de la Teoría de Superficies Mínimas fue llevada a cabo en el siglo XIX por medio del uso del Análisis Complejo. En este periodo surge la representación conforme que aquí estudiaremos.

El primer dato holomorfo para la representación conforme de superficies mínimas se obtiene al considerar la aplicación de Gauss. Se presentará la demostración del siguiente teorema:

*Sea  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión de una 2-variedad orientable simplemente conexa. La aplicación de Gauss es conforme, con respecto a la estructura conforme inducida por la primera forma fundamental, si y sólo si la inmersión  $\psi$  es totalmente umbilical o bien mínima.*

En la demostración de este teorema intervendrá la diferencial de Hopf, una herramienta de gran utilidad en la teoría de superficies de curvatura media constante en espacios modelos, pues para estas superficies esta diferencial será holomorfa. Teoremas de esta naturaleza serán recurrentes entre las superficies para las cuales daremos representaciones conformes en este trabajo.

La Sección 2.2 irá dedicada a la demostración del Teorema 2.2 de representación

conforme de Weierstras. La aparición de funciones analíticas en este apartado se dará gracias a la siguiente relación del Laplaciano de una inmersión  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ , dada en coordenadas isotermas, con su curvatura media  $H$ :

$$\Delta \psi = 2\lambda^2 H N,$$

siendo  $N$  el vector normal a la inmersión.

Así en esta sección se demostrará que una superficie mínima  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  simplemente conexa puede ser totalmente expresada por medio de un par  $(g, \omega)$  formado por una función meromorfa  $g$  y una 1-forma holomorfa  $\omega$ , ambas respecto a la estructura conforme inducida por la primera forma fundamental, de manera que la inmersión será devuelta por medio de la siguiente integración:

$$\psi(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \left( \frac{1}{2}(1 - g^2) \omega, \frac{i}{2}(1 + g^2) \omega, g\omega \right) \quad \forall p \in M^2.$$

Al par  $(g, \omega)$  se le conoce como *datos de Weierstrass*. En particular,  $g$  cumple la interesante propiedad de ser la proyección estereográfica de la aplicación de Gauss.

En la Sección 2.3 se presentarán una gran cantidad de ejemplos de superficies mínimas y sus datos de Weierstrass. Se pretende mostrar la relevancia de la aparición del teorema de representación conforme para el descubrimiento de nuevas superficies mínimas. Por último, en la Sección 2.4 se da una pequeña muestra de las oportunidades generadas por la inclusión de aplicaciones holomorfas para estudiar las superficies mínimas. Se demuestra así el Teorema de Bernstein y la inexistencia de superficies mínimas compactas empleando técnicas de análisis complejo.

## Representación conforme de superficies de curvatura media constante 1 en $\mathbb{H}^3$ .

El segundo caso de representación conforme que se dará corresponde a las llamadas superficies de Bryant, aquellas superficies inmersas en el espacio hiperbólico tridimensional y con curvatura media constante igual a 1. A este valor de la curvatura media para superficies en  $\mathbb{H}^3$  se le conoce como valor crítico. Existen significativas diferencias entre las superficies de curvatura media  $H$  constante en  $\mathbb{H}^3$  para  $H > 1$  y  $H \leq 1$ , algunas de ellas se comentan en [10]. Además, cuando  $H = 1$  existe una relación entre las superficies de Bryant y superficies mínimas en  $\mathbb{R}^3$  dada por la correspondencia de Lawson, que comentaremos en más detalle en el Capítulo 2. El nombre de

estas superficies les es dado por el matemático americano Robert L. Bryant quien fue el primero en estudiar las propiedades de estas superficies, en particular, su representación conforme en 1987 [4]. Nosotros, en el capítulo que les dedicamos, seguiremos el enfoque presentado por Pablo Mira en su tesis doctoral [23].

La principal diferencia que se presenta en cuanto a la representación conforme para superficies mínimas es que la aplicación de Gauss ya no constituirá un dato holomorfo de la inmersión. Ahora, el papel de aplicación conforme de la superficie en la esfera de Riemann vendrá dado por la aplicación de Gauss hiperbólica. En particular, estudiaremos la aplicación de Gauss hiperbólica positivamente orientada, que denotaremos por  $G^+$ . Su demostración y su interpretación geométrica se presentan en la Sección 3.1. Se presenta el siguiente teorema análogo al de superficies mínimas y que relaciona la conformidad de la aplicación de Gauss con las superficies de Bryant.

*Sea  $M^2$  una superficie simplemente conexa y  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ . La aplicación de Gauss hiperbólica  $G^+ : M^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  es conforme con respecto a la primera forma fundamental de la inmersión si y sólo si  $\psi$  es una inmersión totalmente umbilical o de curvatura media constante 1. Además,  $G^+$  es holomorfa cuando la inmersión tiene curvatura media  $H = 1$ .*

Al igual que en el caso de superficies mínimas, y por estar trabajando con superficies de curvatura media constante en un espacio modelo, la diferencial de Hopf constituirá también un dato holomorfo. El tercer dato holomorfo que se empleará vendrá dado como solución de la ecuación de Liouville elíptica

$$\Delta \log \phi = -2\phi.$$

Por medio de estos tres elementos podremos dar la demostración del Teorema 3.2 de representación conforme de superficies de Bryant en la Sección 3.2.

La Sección 3.3 va dedicada a la presentación de algunos ejemplos de representación conforme de superficies de Bryant conocidas: la horosfera y la *catenoid cousin*. Concluimos el capítulo con una sección en la que se exponen algunos resultados en los que esta representación ha sido fundamental para el estudio de propiedades de las superficies de curvatura media constante 1 en  $\mathbb{H}^3$ .

## Representación conforme de superficies llanas en $\mathbb{H}^3$

El siguiente teorema de representación conforme que presentaremos es también para superficies inmersas en el espacio hiperbólico. En [13] (2000), Gálvez, Martínez y Milán dieron este nuevo tipo de representación conforme para las superficies llanas en  $\mathbb{H}^3$ , aquellas con curvatura intrínseca igual a 0. Por tanto, este es el primer caso en el que no estaremos considerando superficies de curvatura media constante. Esto nos trae una significativa diferencia y es que ahora la estructura conforme que usaremos ya no será la inducida por la primera forma fundamental, si no que comprobaremos que la segunda forma fundamental es definida positiva y trabajaremos con la estructura conforme por ella inducida.

La aplicación de Gauss hiperbólica vuelve a hacer el papel de aplicación conforme, aunque ahora con respecto a la segunda forma fundamental, de la superficie en la esfera de Riemann. Para mayor comodidad se trabajará con la aplicación de Gauss negativamente orientada  $G^-$ . Tendremos el siguiente teorema en la Sección 4.1:

*Sea  $N^2$  una superficie orientable y conexa y  $\varphi : N^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  una inmersión tal que su segunda forma fundamental es definida positiva para una elección del vector normal a la inmersión. Si sobre  $N^2$  consideramos la estructura conforme inducida por la segunda forma fundamental, entonces la inmersión  $G^- : N^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  ( $G^+ : N^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ ) es conforme si y sólo si o bien la métrica inducida por  $\varphi$  es llana o bien  $\varphi$  es una inmersión totalmente umbilical.*

La Sección 4.2 se dedica a la demostración del Teorema 4.3 de representación conforme de superficies llanas en  $\mathbb{H}^3$ . En la Sección 4.3 damos algunos ejemplos particulares de superficies llanas como las horosferas y los cilindros hiperbólicos. Nuevas demostraciones de resultados conocidos fueron dadas por los autores de [13] empleando la representación conforme. Estos, junto con nuevos resultados sobre superficies llanas en  $\mathbb{H}^3$  se presentan en la Sección 4.4. Por último, en la Sección 4.5 se introduce brevemente la representación conforme de superficies llanas en el espacio de De Sitter. Notar que este es un espacio Lorentziano por lo que tendremos superficies llanas Riemannianas y Lorentzianas, el teorema de representación conforme es dado para ambas.



# 1 | Preliminares

Una *variedad Riemanniana* es un par  $(M^n, g)$  donde  $M^n$  es una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y  $g$  es una métrica Riemanniana definida sobre  $M^n$ .

**Definición 1.1.** Sean  $M^n$  y  $\bar{M}^m$  variedades diferenciables, una *inmersión* de  $M^n$  en  $\bar{M}^m$  es una aplicación diferenciable  $f : M^n \rightarrow \bar{M}^m$  de manera que la diferencial  $df_p : T_p M^n \rightarrow T_{f(p)} \bar{M}^m$  es inyectiva  $\forall p \in M^n$ .

Una *inmersión* no tiene por qué ser (globalmente) inyectiva, en el caso en el que lo sea diremos que  $f$  es un *embebimiento*.

Sea  $f : M \rightarrow \bar{M}$  una inmersión entre variedades diferenciables y sea  $\bar{g}$  una métrica Riemanniana sobre  $\bar{M}$ , i.e.  $(\bar{M}, \bar{g})$  es una variedad Riemanniana. Entonces  $f$  induce una métrica Riemanniana  $f^* \bar{g}$  sobre  $M$  dada por

$$(f^* \bar{g})_p(u, v) = \bar{g}_{f(p)}(df_p(u), df_p(v)), \quad u, v \in T_p M.$$

La métrica  $f^* \bar{g}$  recibe el nombre de *métrica pullback*. En consecuencia, el par  $(M, f^* \bar{g})$  adquirirá estructura de variedad Riemanniana. Así podemos dar la definición de superficie con la que trabajaremos a lo largo de este texto.

**Definición 1.2.** Sea  $\bar{M}^3$  una variedad Riemanniana de dimensión 3. Una *superficie* en  $\bar{M}^3$  vendrá dada por una inmersión  $\psi : M^2 \rightarrow \bar{M}^3$  de una variedad diferenciable de dimensión 2,  $M^2$ , en  $\bar{M}^3$ . Llamaremos *superficie* tanto a la inmersión en sí como a la variedad  $M^2$  dotada con la métrica pullback.

Las 3-variedades en las que trabajaremos son  $\mathbb{R}^3$ , el *espacio hiperbólico*  $\mathbb{H}^3$  y la *esfera de De Sitter*  $\mathbb{S}_1^3$ ; que introduciremos más adelante.

Sea  $\psi : M^2 \rightarrow \bar{M}^3$  una inmersión. Sea  $\Omega$  un abierto simplemente conexo de  $\mathbb{R}^2$  y  $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M^2$  una *carta local* o *parametrización*, con parámetros  $\varphi = \varphi(x, y)$ .

Denotamos por  $\frac{\partial}{\partial x}$ , o bien  $\partial_x$ , a  $d\varphi(1, 0)$  y por  $\frac{\partial}{\partial y}$  o  $\partial_y$ , a  $d\varphi(0, 1)$ , ambos en  $TM^2$ . Entonces si  $\bar{g}$  es la métrica de  $\bar{M}^3$  y denotamos por  $g$  a la métrica pullback de la inmersión, tenemos

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \bar{g}\left(d\psi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), d\psi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right).$$

Para mayor brevedad usaremos la siguiente notación. Denotaremos  $\psi_x$  y  $\psi_y$  a  $d\psi(\partial_x)$  y  $d\psi(\partial_y)$ , respectivamente. También escribiremos  $\bar{g}(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle$ . Entoces queda

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \langle \psi_x, \psi_y \rangle.$$

De la misma manera

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \langle \psi_x, \psi_x \rangle \quad g\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \langle \psi_y, \psi_y \rangle.$$

La primera forma fundamental de la inmersión la se expresará como

$$g = \langle \psi_x, \psi_x \rangle dx^2 + 2 \langle \psi_x, \psi_y \rangle dx dy + \langle \psi_y, \psi_y \rangle dy^2.$$

## 1.1 Parámetros isotermos y estructura conforme

Dada una superficie dotada de una métrica Riemanniana podemos dotarla de una estructura compleja que nos permitirá definir funciones holomorfas sobre ella. Para ello comenzamos introduciendo las *parametrizaciones isotermas*.

Así, sea  $M^2$  una 2-variedad dotada de una métrica cualquiera, que denotaremos por  $ds^2$ . Diremos que una parametrización  $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M^2$  es *conforme* o *isoterma* si verifica que

$$ds^2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \lambda^2 = ds^2\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad ds^2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 0,$$

con  $\lambda^2 : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  función diferenciable. A parámetros que verifican estas condiciones se les denomina *parámetros isotermos*. A partir de ellos la métrica de la superficie se expresa como

$$ds^2 = \lambda^2 dx^2 + \lambda^2 dy^2.$$

La existencia de parámetros isotermos es una propiedad intrínseca de una superficie que no depende del espacio ambiente en el que se incluye. Así, tenemos los siguientes resultados sobre existencia de parámetros isotermos.

**| Teorema 1.1 (Existencia de parámetros isotermos).** Sea  $(M^2, g)$  una superficie Riemanniana, entonces para todo punto  $p \in M^2$  existe un entorno  $V \subset M^2$  y una parametrización  $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V$  dada en coordenadas isotermas.

*Demostración.* Una demostración, con hipótesis más generales que con las que se enuncian aquí, se puede encontrar en [9]. **|**

**| Teorema 1.2.** Sea  $(M^2, g)$  una superficie Riemanniana con  $M^2$  una 2-variedad orientada. Entonces existe un atlas, compatible con la orientación de  $M^2$ ,  $\mathcal{A} := \{(\Omega_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  de manera que cada carta  $\varphi_i : \Omega_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M^2$  es una parametrización isoterma.

*Nota 1.1.* La orientabilidad es por tanto una propiedades fundamental para poder asegurar la existencia de un atlas de parametrizaciones isotermas. Debido a ello a lo largo de este documento trabajaremos principalmente con 2-variedades orientables.

Dada una superficie Riemanniana orientable  $(M^2, ds^2)$ , consideramos la parametrización  $\varphi_1 : \Omega_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M^2$  con parámetros  $(x, y)$  y sea  $\varphi_2 : \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M^2$  otra parametrización con parámetros  $(u, v)$ . Tenemos el siguiente teorema que caracteriza parámetros isotermos en función de otros.

*Proposición 1.1.* Supongamos que  $\varphi_1(\Omega_1) \cap \varphi_2(\Omega_2) \neq \emptyset$  y que  $(x, y)$  son parámetros isotermos. Entonces los parámetros  $(u, v)$  son también isotermos compatibles con la orientación fijada si y sólo si la aplicación cambio de parámetro  $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$  verifica

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} \quad \text{y} \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}. \quad (1.1)$$

*Demostración.* Por ser  $(x, y)$  parámetros isotermos se tiene

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2).$$

Haciendo uso de la fórmula de cambio de parámetro podemos expresar la primera forma fundamental como

$$ds^2 = \lambda^2 \left( (x_u^2 + y_u^2) du^2 + 2(x_u x_v + y_u y_v) dudv + (x_v^2 + y_v^2) dv^2 \right).$$

Por tanto,  $(u, v)$  serán parámetros isotermos si y sólo si

$$x_u x_v + y_u y_v = 0 \quad (1.2)$$

$$x_u^2 + y_u^2 = x_v^2 + y_v^2 \quad (1.3)$$

De (1.2) obtenemos que  $(x_v, y_v) = \epsilon(-y_u, x_u)$ . Por (1.3) se debe cumplir que  $\epsilon \in \{1, -1\}$ . Además, el Jacobiano del cambio de parámetros es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_u & -\epsilon y_u \\ y_u & \epsilon x_u \end{pmatrix} = \epsilon (x_u^2 + y_u^2).$$

Puesto que hemos exigido que el cambio de parámetros sea compatible con la orientación de  $M^2$  el Jacobiano debe ser positivo, con lo cual  $\epsilon = 1$  y probamos el resultado. |

Volvamos a las cartas locales que considerábamos antes,  $(\Omega_1, \varphi_1)$  y  $(\Omega_2, \varphi_2)$ . Es posible definir estas cartas en el plano complejo. Para ello basta considerar los parámetros complejos  $z = x + iy$  y  $w = u + iv$ . Entonces tenemos las parametrizaciones

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \Omega_1 \subset \mathbb{C} &\rightarrow M^2 \\ z = x + iy &\mapsto \varphi_1(z) = \varphi_1(x, y), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \Omega_2 \subset \mathbb{C} &\rightarrow M^2 \\ w = u + iv &\mapsto \varphi_2(w) = \varphi_2(u, v). \end{aligned}$$

Haciendo uso de la misma notación que en la Proposición 1.1 obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 1.1.** Sea  $M^2$  es una variedad orientable y  $(x, y)$  parámetros isotermos. Entonces  $(u, v)$  son parámetros isotermos si y sólo si  $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$  es un holomorfismo.

**Demostración.** Basta observar que las igualdades (1.1) se corresponden a las ecuaciones de Cauchy-Riemann de la función compleja  $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ . |

Al parámetro complejo que se construye de esta forma a partir de parámetros isotermos se le dice *parámetro conforme*. En función del parámetro conforme la métrica se expresa como

$$ds^2 = \lambda^2 |dz|^2. \quad (1.4)$$

Aquí resulta interesante introducir un nuevo tipo de aplicación entre superficies.

**Definición 1.3.** Sean  $M^2$  y  $N^2$  dos superficies, cuyas métricas denotamos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Diremos que una aplicación diferenciable  $\psi : M^2 \rightarrow N^2$  es conforme si existe una aplicación diferenciable  $\lambda^2 : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que dados dos vectores  $u, v \in TM^2$

$$\langle d\psi(u), d\psi(v) \rangle = \lambda^2 \langle u, v \rangle. \quad (1.5)$$

Las aplicaciones conformes son aquellas que conservan ángulos. La expresión de la métrica de una superficie dada en función del parámetro conforme en (1.4) nos dice que una parametrización en función de este parámetro es una aplicación conforme de una región del plano complejo en la superficie. A parametrizaciones de este tipo las denominamos *parametrizaciones conformes*.

**Definición 1.4.** Sea  $M^2$  una variedad diferenciable de dimensión 2, una estructura conforme sobre  $M^2$  es un atlas de parametrizaciones complejas  $\mathcal{A} := \{(\Omega_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  de manera que para un par de cartas  $(\Omega_1, \varphi_1)$  y  $(\Omega_2, \varphi_2)$  el cambio de cartas  $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : \Omega_2 \subset \mathbb{C} \rightarrow \Omega_1 \subset \mathbb{C}$  es biholomorfo. A las parametrizaciones del atlas  $\mathcal{A}$  las llamaremos parametrizaciones conformes. Una superficie de Riemann es una superficie diferenciable dotada de estructura conforme.

En resumen, sea  $\psi : M^2 \rightarrow \bar{M}^3$  una inmersión donde la variedad  $M^2$  es orientable, el Teorema 1.2 de existencia global de parámetros isotermos y el Corolario 1.1 nos garantiza la existencia de una estructura conforme para nuestra superficie  $M^2$ .

## 1.2 Superficies de Riemann

Este apartado va dirigido a las superficies de Riemann que introducíamos en la Definición 1.4. Toda inmersión de una superficie orientable tiene estructura de superficie de Riemann. Esto nos permite emplear la teoría de superficies de Riemann para estudiar nuestra inmersión. Aquí presentaremos algunos resultados de las superficies de Riemann que nos serán de utilidad. En primer lugar damos un ejemplo.

**Ejemplo 1.1 (Esfera de Riemann).** Denotamos por  $\mathbb{S}^2$  la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^3$  y le asociamos la estructura conforme dada por el par de cartas

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ z = x + iy &\mapsto \varphi_1(z) = \left( \frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ \tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y} &\mapsto \varphi_2(\tilde{z}) = \left( \frac{2\tilde{x}}{|\tilde{z}|^2+1}, \frac{2\tilde{y}}{|\tilde{z}|^2+1}, \frac{1-|\tilde{z}|^2}{|\tilde{z}|^2+1} \right) \end{aligned}$$

Estas dos cartas son suficientes para recubrir  $\mathbb{S}^2$ . La inversa de  $\varphi_1$  viene dada de forma explícita por

$$\begin{aligned} \varphi_1^{-1} : \mathbb{S}^2 - \{(0, 0, 1)\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \end{aligned}$$

A la aplicación  $\varphi_1^{-1}$  se le conoce como *proyección estereográfica* desde el punto  $\{(0, 0, 1)\}$ . De esta manera la composición de cartas  $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$  viene dada por  $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2(\tilde{z}) = 1/\tilde{z} = z$ , es decir, una aplicación conforme de  $0 < |\tilde{z}| < \infty$  sobre  $0 < |z| < \infty$ . La superficie de Riemann definida sobre la esfera a partir de esta estructura conforme recibe el nombre de *esfera de Riemann* y se denota con el símbolo  $\bar{\mathbb{C}}$  o  $\mathbb{C}_\infty$ .

De la misma manera que se extiende el concepto de funciones diferenciables a variedades diferenciables, las superficies de Riemann permiten extender las funciones holomorfas. Así, diremos que una aplicación  $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  entre dos superficies de Riemann es holomorfa si su composición con las cartas complejas correspondientes  $\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1$  es holomorfa, de manera análoga al caso diferenciable.

Dada una superficie de Riemann  $\Sigma$  con parámetro conforme  $z = x + iy$ , podemos considerar localmente los operadores

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

donde, recordamos,  $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x = d\varphi(1, 0)$  y  $\frac{\partial}{\partial y} = \partial_y = d\varphi(0, 1)$ , siendo  $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$  una carta local. También se usan las notaciones  $\partial_z$  y  $\partial_{\bar{z}}$ , respectivamente. De esta manera sea una función  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ , su diferencial se expresa como

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z},$$

donde  $dz = dx + idy$  y  $d\bar{z} = dx - idy$ . La función  $f$  es holomorfa si y sólo si  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ . Si  $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$  diremos que  $f$  es *antiholomorfa*.

Una función holomorfa de una superficie de Riemann sobre la esfera de Riemann se dice *meromorfa*.

**Observación 1.1.** Estos nuevos operadores nos permiten dar una caracterización de la conformidad de aplicaciones entre superficies. Así, dada una aplicación diferenciable  $\psi : M^2 \rightarrow N^2$  se comprueba fácilmente que, considerando un parámetro conforme  $z$  para la inmersión  $\psi$ , la condición (1.5) se traduce en

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial z}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\rangle = 0.$$

Las funciones holomorfas y meromorfas definidas sobre superficies de Riemann heredan muchas propiedades de las funciones complejas de una única variable. Recogemos aquí algunas de ellas. Para más información acerca de propiedades de estas funciones se recomienda [24].

**Proposición 1.2.** Sea  $\Sigma$  una superficie de Riemann y  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa. Entonces  $f$  es o bien abierta o su imagen es un único punto, i.e. es constante.

**Proposición 1.3.** Sea  $f : W \subset \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  una función meromorfa definida en un abierto conexo  $\Omega$  de la superficie de Riemann  $\Sigma$ . Si  $f$  no es idénticamente nula, los ceros y los polos de  $f$  forman un subconjunto discreto de  $W$ .

Sea  $\Sigma$  una superficie de Riemann y  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  una función meromorfa. Sea  $p \in M$  y  $\varphi : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \Sigma$  una carta compleja tal que  $0 \in \Omega$  y  $\varphi(0) = p$ . Entonces  $f \circ \varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función meromorfa que admite un desarrollo de Laurent. De esta manera, se define el orden de los ceros y los polos de una función meromorfa en un punto  $p$  de la superficie de Riemann empleando la serie de Laurent de  $f \circ \varphi$ , siendo  $\varphi$  una carta compleja que contiene a  $p$  (si  $\varphi(0) = p$  se dice centrada). Se comprueba que el orden es independiente de la carta escogida.

**Proposición 1.4.** Supongamos que  $f$  y  $g$  son dos funciones meromorfas definidas en un abierto conexo  $W$  de una superficie de Riemann  $\Sigma$ . Supongamos que  $f = g$  en un subconjunto  $S \subset W$  que tiene un punto de acumulación. Entonces  $f = g$  en  $W$ .

**Proposición 1.5 (Principio del máximo).** Sea  $\Sigma$  superficie de Riemann y  $f : W \subset \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa en el abierto  $W$ . Supongamos que existe un punto  $p \in W$  tal que  $|f(x)| \leq |f(p)|$  para todo  $x \in W$ . Entonces  $f$  es constante en  $W$ . Además, si  $\Sigma$  es compacta y  $f$  es holomorfa en todo  $\Sigma$ ,  $f$  es constante.

**Observación 1.2 (Principio del máximo para funciones armónicas).** Una hecho que usaremos más adelante es que las funciones armónicas definidas sobre superficies de Riemann verifican también la Proposición 1.5. En particular, si  $\Sigma$  es una superficie de Riemann compacta toda función armónica en  $\Sigma$  es constante.

En general, cualquier propiedad local de funciones holomorfas de una variable compleja es cierta para funciones holomorfas definidas en una superficie de Riemann.

Definimos la siguiente relación de equivalencia para superficies de Riemann.

**| Definición 1.5.** Diremos que dos superficies de Riemann son biholomorfas o conformemente equivalentes si existe un biholomorfismo entre ambas. Se denota con el símbolo  $\equiv$ .

**Ejemplo 1.2.** La esfera de Riemann es biholomorfa al plano complejo extendido  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , como se puede ver a partir de las cartas del Ejemplo 1.1.

Otro ejemplo de superficie de Riemann biholomorfa a la esfera de Riemann es la recta proyectiva compleja.

**Ejemplo 1.3 (Recta proyectiva compleja).** Definimos la recta proyectiva compleja  $\mathbb{C}P^1$  como el subconjunto de pares de elementos de  $\mathbb{C}$ , no ambos nulos, dotados de la relación de equivalencia

$$[z, w] = \lambda [z, w],$$

con  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Esto es

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \left\{ [z, w] : (z, w) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C})^*, [z, w] = \lambda [z, w] \forall \lambda \in \mathbb{C}^* \right\} = \frac{(\mathbb{C} \times \mathbb{C})^*}{\mathbb{C}^*}.$$

Sobre  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  es posible definir una atlas conforme que le dé estructura de superficie de Riemann conformemente equivalente al plano complejo extendido [24].

El siguiente teorema es de gran importancia para la clasificación de superficies de Riemann simplemente conexas, y nos será de gran utilidad.

**| Teorema 1.3 (Teorema de Uniformización).** *Una superficie de Riemann simplemente conexa es biholomorfa a exactamente una de las tres siguientes superficies de Riemann: el disco abierto unitario  $\mathbb{D}$ , el plano complejo  $\mathbb{C}$  o la esfera de Riemann  $\mathbb{C}_\infty$ .*

Por último vamos a estatar una relación existente entre aplicaciones holomorfas y conformes en superficies de Riemann. En primer lugar, notar que dado un atlas de cartas holomorfas sobre una superficie de Riemann es posible considerar la estructura conforme dada por los parámetros isotermos y hablar así de aplicaciones conformes.

**Proposición 1.6.** Sean  $\Sigma$  una superficie de Riemann cualquiera y  $\tilde{\Sigma}$ , el plano complejo o la esfera de Riemann, y  $f : \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$  una aplicación entre estas superficies de Riemann. La aplicación  $f$  es conforme si y sólo si  $f$  es holomorfa (en cuyo caso conserva la orientación) o es antiholomorfa (si invierte la orientación).

## 1.3 El espacio hiperbólico

Dos de las representaciones conformes que estudiaremos en este trabajo son para superficies inmersas en el espacio hiperbólico. En esta sección introduciremos las nociones básicas que necesitaremos de este *espacio modelo*. Aquí se mencionarán conceptos de Geometría Riemanniana, como es el caso de la curvatura seccional, que se pueden consultar en mayor detalle en [6].

### Los espacios modelos

Sea  $(\bar{M}^{n+1}, g)$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n+1$ ,  $n \geq 1$ , completa, simplemente conexa y con curvatura seccional constante  $c$ . Entonces el Teorema de Cartan [8] nos asegura que, salvo isometrías, ésta viene dada por uno de los siguientes espacios, conocidos como espacios modelos:

- El *espacio euclídeo*  $\mathbb{R}^{n+1}$  con la métrica usual, si  $c = 0$ .
- La *esfera euclídea*  $\mathbb{S}^{n+1}(c)$   $(n + 1)$ -dimensional de radio  $1/\sqrt{c}$  y con la métrica inducida por la métrica usual de  $\mathbb{R}^{n+2}$ , si  $c > 0$ .
- Si  $c < 0$ ,  $\bar{M}^{n+1}(c)$  es el *espacio hiperbólico*  $\mathbb{H}^{n+1}(c)$  que introduciremos en mayor detalle a continuación.

A partir de ahora nos centraremos en los casos en los que  $n = 2$ . Además  $c$ , salvo homotecias, se puede considerar tomando uno de los siguientes tres valores  $\{1, 0, -1\}$ .

Sea  $M^2$  una 2-variedad diferenciable inmersa en un espacio modelo 3-dimensional  $\bar{M}^3$  podemos obtener las siguientes relaciones entre las curvaturas intrínsecas y extrínsecas de la superficie inmersa. Recordamos que se define la curvatura intrínseca o Gaussiana de la superficie como la curvatura seccional de  $M^2$ , la denotamos como  $K_{\text{int}}$ . La curvatura extrínseca, denotada como  $K_{\text{ext}}$ , se define como el determinante del *endomorfismo de Weingarten*, que coincide con el determinante de la segunda forma fundamental dividido por el determinante de la primera forma fundamental. Como consecuencia de la *fórmula de Gauss* para inmersiones isométricas, se tiene que en cada punto  $p$  de  $M^2$ :

- $K_{\text{int}}(p) = K_{\text{ext}}(p)$ , si  $\bar{M}^3 = \mathbb{R}^3$  (Teorema Egregium de Gauss).
- $K_{\text{int}}(p) = K_{\text{ext}}(p) + 1$ , si  $\bar{M}^3 = \mathbb{S}^3(1)$ .
- $K_{\text{int}}(p) = K_{\text{ext}}(p) - 1$ , si  $\bar{M}^3 = \mathbb{H}^3(-1)$ .

Presentamos ahora en más detalle  $\mathbb{H}^3(-1)$ , que denotaremos por  $\mathbb{H}^3$ .

Sea  $\mathbb{L}^4$  el espacio de Minkowski 4-dimensional, con coordenadas  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  y el producto escalar dado por la forma cuadrática  $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ . Este es un espacio Lorentziano. Podemos ver el espacio hiperbólico 3-dimensional como

$$\mathbb{H}^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 : -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1, x_0 > 0\},$$

con la métrica inducida de  $\mathbb{L}^4$ ,  $ds^2 = -dx_0^2 + \sum_{i=1}^3 dx_i^2$ . De esta manera  $(\mathbb{H}^3, ds^2)$  es una variedad Riemanniana de dimensión 3. Observar que el conjunto de puntos de  $\mathbb{L}^4$  que verifican  $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1$  está formado por dos componentes conexas, al tomar  $x_0 > 0$  nos quedamos con una sola de ellas.

El espacio hiperbólico admite además otras *representaciones* que nos serán útiles en este trabajo.

## Modelo de la bola o modelo de Poincaré

Consideremos la bola abierta unitaria  $\mathbb{B}$  centrada en el origen de  $\mathbb{R}^3$ . En  $\mathbb{B}$  definimos la métrica

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2),$$

con  $x = (x_1, x_2, x_3)$  y  $|\cdot|$  la norma euclídea. Entonces  $(\mathbb{B}, ds^2)$  es isométrico al espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^3$ . La aplicación de  $\mathbb{H}^3$  en  $\mathbb{B}$  dada por

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}^3 \mapsto \left( \frac{x_1}{1 + x_0}, \frac{x_2}{1 + x_0}, \frac{x_3}{1 + x_0} \right) \in \mathbb{B}$$

es la que da la isometría entre estos dos modelos.

## Modelos del semiespacio superior de $\mathbb{R}^3$

Este modelo del espacio hiperbólico nos será de especial utilidad para representar las superficies inmersas en  $\mathbb{H}^3$  con las que trabajaremos en los capítulos 3 y 4. Este modelo viene dado por  $\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$ , el semiespacio superior de  $\mathbb{R}^3$ , y con métrica dada por

$$ds^2 = \frac{1}{x_3^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2).$$

La isometría entre el modelo del hiperboloide en  $\mathbb{L}^4$  y el de  $\mathbb{R}_+^3$  viene dada por

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{1}{x_0 + x_3} (x_1, x_2, 1) \in \mathbb{R}_+^3.$$

## $\mathbb{L}^4$ como el conjunto de las matrices hermíticas

Es posible realizar una identificación de  $\mathbb{L}^4$  con el espacio de matrices hermíticas  $2 \times 2$ , esto es

$$\text{Herm}(2) = \{g \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) : g = g^*\}$$

donde  $g^* = \bar{g}^t$ . Para ello un punto  $p = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4$  se identifica con la matriz

$$p = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix},$$

que hemos llamado de la misma forma. Bajo esta identificación, el producto lorentziano de  $\mathbb{L}^4$  se traduce sobre  $\text{Herm}(2)$  en

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \bar{b}_1 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ \bar{b}_2 & c_2 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{2} \{a_1 c_2 + a_2 c_1 - b_1 \bar{b}_2 - b_2 \bar{b}_1\}. \quad (1.6)$$

En particular, si denotamos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a la métrica de  $\mathbb{L}^4$ , tenemos que  $\langle p, p \rangle = -\det(p)$ . De acuerdo a esto y a la definición de  $\mathbb{H}^3$ , este se puede identificar con el subconjunto de  $\text{Herm}(2)$  formado por las matrices unimodulares de módulo positivo y con traza positiva:

$$\mathbb{H}^3 = \{p \in \text{Herm}(2) : \det(p) = 1, \text{traza}(p) > 0\}.$$

A continuación introducimos algunos espacios estrechamente relacionados con  $\mathbb{H}^3$  cuya conexión se hará patente a lo largo del trabajo.

## El cono de luz

En  $\mathbb{L}^4$  definimos el cono de luz orientado hasta el futuro como el espacio

$$\mathbb{N}^3 = \{p \in \mathbb{L}^4 : \langle p, p \rangle = 0, x_0 > 0\} = \{p \in \text{Herm}(2) : \det(p) = 0, \text{traza}(p) > 0\}.$$

Si consideramos el conjunto  $(\mathbb{C} \times \mathbb{C})^* = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : (z, w) \neq 0\}$ , podemos probar que la aplicación  $(\mathbb{C} \times \mathbb{C})^* \rightarrow \mathbb{N}^3$  definida por

$$(a_1, a_2) \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} (\bar{a}_1 \quad \bar{a}_2) = \begin{pmatrix} |a_1|^2 & a_1 \bar{a}_2 \\ \bar{a}_1 a_2 & |a_2|^2 \end{pmatrix}$$

es sobreyectiva. Además, para cada  $\theta \in [0, 2\pi)$  la imagen de  $(e^{i\theta} a_1, e^{i\theta} a_2)$  es la misma que la de  $(a_1, a_2)$ . Trabajando en el cociente se obtiene la siguiente equivalencia conforme

$$\mathbb{N}^3 \equiv \frac{(\mathbb{C} \times \mathbb{C})^*}{\mathbb{S}^1}. \quad (1.7)$$

## Borde ideal del espacio hiperbólico

El borde ideal de  $\mathbb{H}^3$  se define como el siguiente cociente de  $\mathbb{N}^3$ :

$$\mathbb{S}_\infty^2 = \{[p] : p \in \mathbb{N}^3, [p] = \lambda p, \lambda \in \mathbb{R}^+\}.$$

De esta manera se obtiene por (1.7),

$$\mathbb{S}_\infty^2 \equiv \mathbb{N}^3/\mathbb{R}^+ \equiv \frac{(\mathbb{C} \times \mathbb{C})^*/\mathbb{S}^1}{\mathbb{R}^+} \equiv \frac{(\mathbb{C} \times \mathbb{C})^*}{\mathbb{C}^*} \equiv \mathbb{C}\mathbb{P}^1,$$

donde  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  denota la recta proyectiva compleja del Ejemplo 1.3 que es biholomorfa a la esfera de Riemann. En definitiva, el borde ideal tiene la misma estructura conforme y puede ser identificado con  $\mathbb{C}_\infty$ . En concreto, la aplicación que interviene aquí es

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \mapsto \frac{x_1 - ix_2}{x_0 + x_3} \in \mathbb{C}_\infty \equiv \mathbb{C}\mathbb{P}^1. \quad (1.8)$$

Notar que se ha hecho uso de la proyección estereográfica desde el polo sur. Como veíamos en la Proposición 1.6, para poder hablar de aplicaciones holomorfas y antiholomorfas necesitamos considerar la orientación. Así sobre el borde ideal  $\mathbb{S}_\infty^2$  definiremos la siguiente orientación.

**Observación 1.3 (Orientación en  $\mathbb{S}_\infty^2$ ).** Dado  $p \in \mathbb{N}^3$  podemos tomar  $e_0 \in \mathbb{H}^3$  y  $e_3 \in \mathbb{S}_1^3$  tales que  $p = e_0 + e_3$ , con  $\langle e_0, e_3 \rangle = 0$ . Sea  $\Pi$  el plano generado por  $e_0, e_3$  y tomemos una base  $\{e_1, e_2\}$  de  $\Pi^\perp$ . Así,  $e_1, e_2$  son tangente a  $\mathbb{N}^3$  en  $p$ , y se inducen de modo obvio a  $\mathbb{S}_2^\infty$  como vectores tangentes en  $[p]$ . Diremos entonces que  $e_1, e_2$  forman una base positivamente orientada para  $\mathbb{S}_2^\infty$  si y sólo si la base  $\{e_0 + e_3, e_1, e_2, e_0 - e_3\}$  está positivamente orientada en  $\mathbb{L}_4$ . Este procedimiento es independiente de la elección de  $e_1, e_2$ .

**Observación 1.4.** Con el anterior comentario sobre la orientación de  $\mathbb{S}_\infty^2$  se puede comprobar que al pasar al cociente en el cono de luz por medio de la aplicación (1.8) se invierte la orientación.

El borde ideal tiene una fácil visualización en los modelos de la bola de Poincaré y del semiespacio superior. En la bola de Poincaré se corresponde con la clausura del disco, mientras que en el modelo de  $\mathbb{R}_+^3$  es el plano  $x_3 = 0$ .

## Espacio de De Sitter

Otro importante subespacio del espacio de Minkowski es el espacio de De Sitter. Este viene dado por

$$\mathbb{S}_1^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 : -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} = \{p \in \mathbb{L}^4 : \langle p, p \rangle = 1\}.$$

Dotado de la métrica inducida por la métrica de  $\mathbb{L}^4$ ,  $\mathbb{S}_1^3$  es una 3-variedad Lorentziana. Una de las propiedades más importante que tiene  $\mathbb{S}_1^3$ , y sobre la que profundizaremos

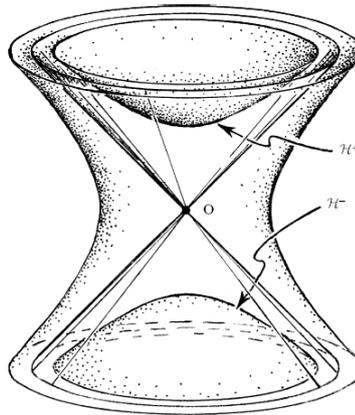


Figura 1.1: Representación del espacio hiperbólico 2-dimensional (componente conexa señalada por  $\mathcal{H}^+$ ). La región más externa que recuerda a una catenode es el espacio de De Sitter. El cono que se aprecia es el cono de luz, el cono de luz orientado hacia el futuro es la región que queda por arriba del origen  $O$ .

más adelante, es que el vector normal a una superficie en  $\mathbb{H}^3$  se encuentra en  $\mathbb{S}_1^3$ . Este hecho nos permitirá establecer una equivalencia entre las representaciones conformes de superficies en  $\mathbb{H}^3$  con las de superficies Riemannianas de  $\mathbb{S}_1^3$ .



## 2 | Representación de Weierstrass para superficies mínimas

El caso más clásico de representación conforme corresponde al dado para superficies mínimas en el espacio euclídeo 3-dimensional, i.e. las superficies inmersas en  $\mathbb{R}^3$  cuya curvatura media es nula. Introducimos en primer lugar algunos conceptos básicos sobre superficies en  $\mathbb{R}^3$ .

Sea  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces, sea  $g$  la métrica pullback de la métrica usual en  $\mathbb{R}^3$   $\langle \cdot, \cdot \rangle$  inducida a través de la inmersión,  $(M^2, g)$  es una variedad Riemanniana. La métrica  $g$  la denotaremos por  $ds^2$ , de acuerdo a la notación de la primera forma fundamental, y en función de la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$  viene dada por la matriz

$$(g_{i,j})_{i,j} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \psi_x, \psi_x \rangle & \langle \psi_x, \psi_y \rangle \\ \langle \psi_y, \psi_x \rangle & \langle \psi_y, \psi_y \rangle \end{pmatrix}.$$

La segunda forma fundamental, denotada por  $d\sigma^2$ , viene determinada, cuando consideramos la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ , por la matriz

$$(h_{i,j})_{i,j} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle N, \psi_{xx} \rangle & \langle N, \psi_{xy} \rangle \\ \langle N, \psi_{yx} \rangle & \langle N, \psi_{yy} \rangle \end{pmatrix},$$

donde  $N$  es el vector normal unitario al plano tangente de la inmersión, generado por  $\{\psi_x, \psi_y\}$ , en  $\mathbb{R}^3$ .

Si además  $(x, y)$  son parámetros isotermos para  $(M^2, ds^2)$ , es decir, para cada punto  $p \in M^2$  existe una carta local  $\varphi_i : \Omega_i \rightarrow M^2$  dada por parámetros isotermos de manera que  $p \in \varphi_i(\Omega_i)$  (esto se puede asegurar por el Teorema 1.1 de existencia local de parámetros isotermos). Entonces,  $g_{11} = g_{22} = \lambda^2$  y  $g_{12} = 0 = g_{21}$ . Por tanto, la

curvatura media de la inmersión en función de parámetros isotermos viene dada por

$$H = \frac{h_{22}g_{11} + h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12}}{2 \det(g_{i,j})} = \frac{h_{11} + h_{22}}{2\lambda^2}. \quad (2.1)$$

Las superficies mínimas son aquellas para las que  $H = 0$  en todo punto de la misma.

## 2.1 Superficies mínimas y aplicación de Gauss

Como comprobaremos también en los siguientes capítulos, la existencia de una representación conforme para un tipo de superficie está estrechamente relacionada con la existencia de una aplicación holomorfa de la superficie en la esfera de Riemann. En el caso de las superficies mínimas esta aplicación viene dada por la aplicación de Gauss. Teoremas del tipo del siguiente serán recurrentes en las próximas representaciones conformes que estudiaremos.

**| Teorema 2.1.** *Sea  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión de una 2-variedad orientable simplemente conexa. La aplicación de Gauss es conforme con respecto a la estructura conforme inducida por la primera forma fundamental si y sólo si la inmersión  $\psi$  es totalmente umbilical o bien mínima.*

Antes de demostrar el teorema introducimos una serie de conceptos que nos serán de utilidad. Dados los parámetros isotermos  $(x, y)$  el parámetro complejo  $z = x + iy$  constituirá un parámetro conforme para la inmersión  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Así, por lo visto en la Sección 1.1, la métrica se expresará como

$$ds^2 = \langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle |dz|^2 = \lambda^2 |dz|^2, \quad (2.2)$$

con  $\lambda^2 : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Definimos entonces la *diferencial de Hopf* como la 2-forma compleja global definida sobre la superficie  $M^2$  dada por

$$Q = \langle \psi_{zz}, N \rangle dz^2.$$

**Observación 2.1.** La diferencial de Hopf se extiende a una 2-forma compleja global, que además es holomorfa con respecto a la estructura de superficie de Riemann inducida por la métrica en el caso en el que la inmersión sea de curvatura media constante. Este hecho se deduce de la *ecuación de Codazzi* que nos dice que

$$Q_{\bar{z}} = 2\lambda^2 H_z.$$

**Lema 2.1.** La diferencial de Hopf se anula únicamente en aquellos puntos que son umbilicales, i.e. aquellos puntos cuyas curvaturas principales coinciden.

**Demostración.** Supongamos que  $Q = 0$ . Entonces  $\langle \psi_{zz}, N \rangle = 0$ . Teniendo en cuenta que  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$  entonces podemos expresar

$$\langle \psi_{zz}, N \rangle = \frac{1}{4} (\langle \psi_{xx}, N \rangle - \langle \psi_{yy}, N \rangle - 2i \langle \psi_{xy}, N \rangle) \quad (2.3)$$

Así,  $Q$  se anula en un punto  $p \in M^2$  si y sólo si la matriz de la segunda forma fundamental en la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$  en el punto  $p$  viene dada por

$$d\sigma^2 = \begin{pmatrix} \langle \psi_{xx}, N \rangle & \langle \psi_{xy}, N \rangle \\ \langle \psi_{yx}, N \rangle & \langle \psi_{yy}, N \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix},$$

siendo  $h = \langle \psi_{xx}, N \rangle$ , y por lo tanto la inmersión  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es totalmente umbilical en  $p$ . |

Ahora ya podemos realizar la demostración del Teorema 2.1

**Demostración.** Sea  $z = x + iy$  un parámetro conforme para la inmersión  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Denotamos  $q = \langle \psi_{zz}, N \rangle$ . Por (2.3), podemos expresar

$$q = \frac{1}{4} h_{11} - \frac{1}{4} h_{22} - \frac{i}{2} h_{12}, \quad (2.4)$$

siendo  $h_{11}$ ,  $h_{12}$  y  $h_{22}$  los coeficientes de la segunda forma fundamental de la inmersión  $\psi$  en la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ . Por otro lado, la expresión de las derivadas parciales del vector normal  $N$  en la base  $\{\psi_x, \psi_y, N\}$  de  $\mathbb{R}^3$  da como resultado

$$\begin{aligned} N_x &= -h_{11}/\lambda^2 \psi_x - h_{12}/\lambda^2 \psi_y, \\ N_y &= -h_{12}/\lambda^2 \psi_x - h_{22}/\lambda^2 \psi_y. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Teniendo en cuenta que la expresión (2.1) para la curvatura media de la inmersión  $\psi$  dada en parámetros isotermos, por (2.4) y (2.5) expresamos la derivada parcial del vector normal con respecto a  $z$  como

$$N_z = -H\psi_z - \frac{2q}{\lambda^2} \psi_{\bar{z}}. \quad (2.6)$$

Empleando esta última expresión junto con (2.2) obtenemos

$$\langle N_z, N_{\bar{z}} \rangle = 2qH. \quad (2.7)$$

Así, (2.7) y la Observación 1.1 nos dicen que la aplicación de Gauss  $N : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  será conforme con respecto al parámetro  $z$  si y sólo si se verifica la igualdad

$$2qH = 0 \quad (2.8)$$

en todo punto de  $M^2$ .

Obviamente si la superficie es totalmente umbilical la aplicación de Gauss será conforme por el Lema 2.1. Lo mismo ocurre si la inmersión es de curvatura media constante igual a 0. Así demostramos la implicación hacia la izquierda.

Por otro lado, supongamos que  $N$  es conforme y se cumple la igualdad (2.8). Si  $H(p) = 0$  para todo  $p \in M^2$  ya tendríamos el recíproco. Supongamos que el conjunto abierto  $M' = \{p \in M^2 : H(p) \neq 0\}$  es no vacío. Si tomamos una componente conexa  $V$  de  $M'$ , por la igualdad (2.8) todos los puntos de  $V$  son umbilicales. En particular,  $H$  es constante en  $V$  (pues las superficies totalmente umbilicales en  $\mathbb{R}^3$  son secciones de esferas y del plano, y por tanto de curvatura media constante [29]) por lo que también lo es en su adherencia  $\bar{V}$ . Al ser  $V$  componente conexa, esto indica que  $V = \bar{V}$ , y resulta por conexión en  $M^2$  que  $V = M^2$ . Esto es, la superficie es totalmente umbilical. Probamos así la otra implicación. |

En la sección que comenzamos a continuación veremos que la relación de la aplicación de Gauss con la representación conforme de superficies mínimas es mucho más estrecha de lo que el anterior teorema muestra. De hecho la aplicación de Gauss participará activamente en el proceso de expresar la superficie en función de datos holomorfos.

## 2.2 Teorema de representación de Weierstrass

| **Definición 2.1.** Dada la inmersión  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con parámetros  $(x, y)$  y sea  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ . Definimos el Laplaciano de  $\psi$ ,  $\Delta\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , como

$$\Delta\psi = (\psi_{1xx} + \psi_{1yy}, \psi_{2xx} + \psi_{2yy}, \psi_{3xx} + \psi_{3yy}).$$

**Nota 2.1.** De acuerdo a la definición anterior el operador Laplaciano se define como  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . En ocasiones será útil emplear su expresión en parámetros complejos, se comprueba fácilmente que esta es  $\Delta = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ .

**Lema 2.2.** Sea  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión con parámetros isotermos  $(x, y)$ , tenemos la siguiente expresión para el Laplaciano dependiente de la curvatura media de la inmersión:

$$\Delta\psi = 2\lambda^2 H N,$$

donde  $N$  denota nuevamente el vector normal unitario a la inmersión.

**Demostración.** Por ser  $(x, y)$  parámetros isotermos, tenemos las igualdades

$$\langle \psi_x, \psi_x \rangle = \langle \psi_y, \psi_y \rangle \quad \text{y} \quad \langle \psi_x, \psi_y \rangle = 0. \quad (2.9)$$

Derivando respecto de  $x$  en la primera igualdad de (2.9) obtenemos

$$\langle \psi_{xx}, \psi_x \rangle - \langle \psi_{xy}, \psi_y \rangle = 0. \quad (2.10)$$

y con respecto de  $y$  en la igualdad derecha de (2.9),

$$\langle \psi_{xy}, \psi_y \rangle + \langle \psi_x, \psi_{yy} \rangle = 0 \quad (2.11)$$

Sumando (2.10) y (2.11) conseguimos

$$\langle \Delta\psi, \psi_x \rangle = \langle \psi_{xx} + \psi_{yy}, \psi_x \rangle = 0.$$

Es decir, el Laplaciano es ortogonal a  $\psi_x$ . De manera similar se comprueba que  $\Delta\psi$  es ortogonal a  $\psi_y$ . Con ello,  $\Delta\psi$  pertenece al complemento ortogonal del plano tangente a la inmersión y es proporcional al vector normal  $N$ . Veamos la razón de proporcionalidad:

$$\langle \Delta\psi, N \rangle = \langle \psi_{xx} + \psi_{yy}, N \rangle = h_{11} + h_{22} = 2\lambda^2 H,$$

de acuerdo a (2.1). En consecuencia, obtenemos la igualdad deseada. |

De manera directa a partir del Lema 2.2 obtenemos el siguiente resultado.

**Lema 2.3.** Sea  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión dada en función de parámetros isotermos  $(x, y)$ . Entonces, la inmersión es mínima si y sólo si las funciones  $\psi_k$  son armónicas para  $k = 1, 2, 3$ .

De esta forma en el estudio de superficies mínimas aparece el concepto de funciones armónicas. Ahora vamos a relacionar las funciones armónicas con la estructura conforme de la superficie de Riemann asociada a nuestra superficie  $(M^2, ds^2)$ . Para ello, sea  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación diferenciable (no necesariamente una inmersión), para cada  $k \in \{1, 2, 3\}$  introducimos las funciones complejas  $\phi_k : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$\phi_k = \frac{\partial \psi_k}{\partial x} - i \frac{\partial \psi_k}{\partial y} = 2 \frac{\partial \psi_k}{\partial z}, \quad (2.12)$$

definida en el parámetro  $z = x + iy$ .

*Propiedad 2.1.* La función  $\phi_k$  es analítica en  $z = x + iy$  si y sólo si  $\psi_k$  es armónica en  $(x, y)$ .

La aplicación  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  verifica la igualdad siguiente.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \phi_k^2 &= \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial \psi_k}{\partial x} - i \frac{\partial \psi_k}{\partial y} \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^3 \left[ \left( \frac{\partial \psi_k}{\partial x} \right)^2 - 2i \frac{\partial \psi_k}{\partial x} \frac{\partial \psi_k}{\partial y} - \left( \frac{\partial \psi_k}{\partial y} \right)^2 \right] \\ &= \left\langle \frac{\partial \psi_k}{\partial x}, \frac{\partial \psi_k}{\partial x} \right\rangle - 2i \left\langle \frac{\partial \psi_k}{\partial x}, \frac{\partial \psi_k}{\partial y} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \psi_k}{\partial y}, \frac{\partial \psi_k}{\partial y} \right\rangle \\ &= g_{11} - 2ig_{12} - g_{22}. \end{aligned}$$

De aquí se deduce directamente la siguiente propiedad.

*Propiedad 2.2.* Los parámetros  $(x, y)$  son isotermos si y sólo si

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 = 0. \quad (2.13)$$

Por otra parte,

$$\sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2 = \sum_{k=1}^3 \left[ \left( \frac{\partial \psi_k}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_k}{\partial y} \right)^2 \right] = g_{11} + g_{22}.$$

Lo que en caso de ser  $(x, y)$  parámetros isotermos se transforma en

$$\sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2 = 2\lambda^2.$$

Como consecuencia directa tenemos la siguiente propiedad.

*Propiedad 2.3.* Si  $(x, y)$  son parámetros isotermos, la aplicación  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inmersión si y sólo si

$$\sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2 \neq 0. \quad (2.14)$$

Sea  $M^2$  una variedad de dimensión 2, conexa y orientable, hasta ahora hemos trabajado con la aplicación  $\phi$  definida, en términos de parámetros isotermos, en algún

entorno de cada punto de  $M^2$ . Sean  $z = x + iy$  y  $w = u + iv$  parámetros conformes definidos en entornos de puntos de  $M^2$ , entonces por la Proposición 1.1 el cambio de coordenadas  $w = w(z)$  es holomorfo con  $\frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$ . Se sigue que si  $\phi = \frac{\partial \psi}{\partial z}$  y  $\tilde{\phi} = \frac{\partial \psi}{\partial w}$  entonces  $\phi$  y  $\tilde{\phi}$  están relacionados por

$$\phi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} \tilde{\phi}. \quad (2.15)$$

Entonces, si consideramos las formas diferenciales  $\alpha = \phi dz$  y  $\tilde{\alpha} = \tilde{\phi} dw$ , tenemos por (2.15):

$$\alpha = \phi dz = \tilde{\phi} \frac{\partial w}{\partial z} dz = \tilde{\phi} dw = \tilde{\alpha}.$$

De esta forma se obtiene una forma diferencial  $\alpha$  globalmente definida en  $M^2$ , cuya expresión local es

$$\alpha = (\phi_1 dz, \phi_2 dz, \phi_3 dz). \quad (2.16)$$

Las tres propiedades anteriores nos permiten demostrar la primera implicación del siguiente lema. El recíproco lo probamos a continuación del enunciado.

**Lema 2.4.** Sea  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión de una superficie mínima con  $(x, y)$  parámetros isotermos. Entonces las funciones  $\phi_k$  definidas por (2.12) son analíticas y satisfacen las igualdades (2.13) y (2.14).

Recíprocamente, sean  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  funciones analíticas del parámetro  $z$  que satisfacen (2.13) y (2.14) en una variedad Riemanniana de dimensión 2 simplemente conexa  $M^2$ . Entonces existe una inmersión mínima  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , única salvo traslaciones en  $\mathbb{R}^3$ , tal que las ecuaciones (2.12) son válidas y que viene dada por

$$\psi(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \phi(z) dz,$$

donde  $p_0$  es un punto base en  $M^2$  y la integral se realiza por medio de cualquier camino que une  $p_0$  con  $p$ .

**Demostración.** Para probar el recíproco, definimos

$$\psi_k(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \phi_k(z) dz.$$

Esta integral está bien definida por ser  $\phi_k$  una forma holomorfa globalmente definida y encontrarnos en un dominio simplemente conexo. Queremos ver que se verifica (2.12). Para ello tenemos:

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x} - i \frac{\partial \psi_k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \operatorname{Re} \int \phi_k(z) dz \right) - i \frac{\partial}{\partial y} \left( \operatorname{Re} \int \phi_k(z) dz \right). \quad (2.17)$$

Como  $\int \phi_k(z) dz$  es holomorfa se verifica la ecuación de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \operatorname{Re} \int \phi_k(z) dz \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \operatorname{Im} \int \phi_k(z) dz \right). \quad (2.18)$$

Sustituyendo en (2.17),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_k}{\partial x} - i \frac{\partial \psi_k}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \int \phi_k(z) dz \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \int \phi_k(z) dz \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \int \phi_k(z) dz \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \operatorname{Re} \int \phi_k(z) dz + i \operatorname{Im} \int \phi_k(z) dz \right) \right] \end{aligned}$$

Usando de nuevo las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_k}{\partial x} - i \frac{\partial \psi_k}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \int \phi_k(z) dz \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \operatorname{Im} \int \phi_k(z) dz - i \operatorname{Re} \int \phi_k(z) dz \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \int \phi_k(z) dz \right) - i \frac{\partial}{\partial y} \left( i \operatorname{Im} \int \phi_k(z) dz + \operatorname{Re} \int \phi_k(z) dz \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \int \phi_k(z) dz \right) - i \frac{\partial}{\partial y} \left( \int \phi_k(z) dz \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \int \phi_k(z) dz = \phi_k(z) \end{aligned}$$

Así, probamos (2.12). Que la aplicación  $\psi := (\psi_1, \psi_2, \psi_3) : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una inmersión mínima se deduce de las Propiedades 2.1, 2.2 y 2.3. █

El Lema 2.4 da inicio a la representación conforme de superficies mínimas en  $\mathbb{R}^3$  pues nos permite expresar una inmersión mínima a partir de funciones holomorfas. Aunque nosotros hemos trabajado en el caso en que la superficie está inmersa en  $\mathbb{R}^3$ , hasta aquí todos los resultados son válidos para superficies mínimas en  $\mathbb{R}^n$  con  $n \geq 3$  (ver [25]). No obstante, el caso en que  $n = 3$  presenta una gran ventaja, y es que nos permite describir explícitamente todas las soluciones de la ecuación

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0. \quad (2.19)$$

**Lema 2.5.** Sea  $D$  un dominio simplemente conexo del plano complejo,  $g$  una función meromorfa en  $D$  y  $f$  una función holomorfa en  $D$  con la propiedad de que en cada

punto donde  $g$  tiene un polo de orden  $m$ ,  $f$  tiene un cero de orden al menos  $2m$ . Entonces las funciones

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \quad \phi_3 = fg, \quad (2.20)$$

son holomorfas en  $D$  y satisfacen (2.19).

Recíprocamente, toda tripleta de funciones holomorfas en  $D$  satisfaciendo (2.19) se pueden representar en la forma (2.20), excepto por  $\phi_1 \equiv i\phi_2$ ,  $\phi_3 \equiv 0$ .

*Demostración.* La comprobación de que las funciones definidas en (2.20) satisfacen (2.19) es un cálculo simple. Recíprocamente, dadas soluciones  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  de la ecuación (2.19), definimos las funciones complejas

$$f = \phi_1 - i\phi_2, \quad g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}. \quad (2.21)$$

Reescribiendo (2.19) como

$$(\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) = -\phi_3^2,$$

llegamos a la expresión

$$\phi_1 + i\phi_2 = -\frac{\phi_3^2}{\phi_1 - i\phi_2} = -fg^2.$$

Por medio de esta igualdad con (2.21) despejamos las correspondientes  $\phi_k$ , para  $k = 1, 2, 3$ , y obtenemos (2.20). La condición de los ceros y los polos debe cumplirse para poder asegurar que la función  $\phi_1 + i\phi_2$  sea holomorfa en la última igualdad, lo cual se debe a ser suma de funciones holomorfas.

Por último, la representación falla únicamente si el denominador de  $g$  es siempre nulo. En este caso  $\phi_1 \equiv i\phi_2$  y  $\phi_3 \equiv 0$ , que se corresponde al caso excepcional mencionado. |

*Observación 2.2.* De acuerdo al Lema 2.5 podemos expresar la 1-forma  $\alpha$  que definíamos en (2.2) en función de  $g$  y la 1-forma holomorfa  $\omega = f dz$  quedando

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)\omega, \quad \alpha_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)\omega, \quad \alpha_3 = g\omega.$$

En el Lema 2.4 a parte de la condición (2.19) exigíamos también que

$$|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 \neq 0.$$

Es natural entonces preguntarse qué condiciones deben cumplir  $f$  y  $g$  para que esta igualdad se cumpla. Para ello observamos que se cumple la expresión

$$\sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2 = \frac{1}{2}(1 + |g|^2)^2 |f|^2. \quad (2.22)$$

La cual será mayor que cero si  $g$  tiene un polo de orden  $m$  donde  $f$  tiene un cero de orden  $2m$ .

Los lemas 2.4 y 2.5 nos permiten enunciar el Teorema de representación de Weierstrass para superficies mínimas.

**| Teorema 2.2 (Teorema de representación de Weierstrass).** *Sea  $M^2$  una 2-variedad simplemente conexa y sea  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión mínima. Existe un par  $(g, \omega)$ , dado por una función meromorfa  $g$  y una 1-forma holomorfa  $\omega$  con respecto a la estructura conforme inducida por la métrica pullback de la inmersión, tal que todo cero de orden  $2m$  de  $f$  coincide con un polo de orden  $m$  de  $g$ , de manera que en cada punto  $p \in M^2$  se puede devolver la inmersión como*

$$\psi(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \left( \frac{1}{2}(1 - g^2) \omega, \frac{i}{2}(1 + g^2) \omega, g\omega \right). \quad (2.23)$$

*Recíprocamente, supongamos que sobre una superficie de Riemann  $M^2$  tenemos definidas una función meromorfa  $g$  y una 1-forma holomorfa  $\omega = f dz$ , tal que todo cero de orden  $2m$  de  $f$  coincide con un polo de orden  $m$  de  $g$ , entonces la aplicación  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por (2.23) es una inmersión mínima.*

**| Definición 2.2.** *Al par  $(g, \omega)$  que aparece en el Teorema sobre la Representación de Weierstrass se le denomina datos de Weierstrass.*

**Observación 2.3 (Problema de los periodos).** Aunque hemos trabajado con 2-variedades simplemente conexas es posible generalizar el teorema de representación de Weierstrass sin requerir la hipótesis de ser  $M^2$  simplemente conexa. No obstante, en este trabajo hemos preferido seguir el modelo de la referencia clásica [25], que simplifica los cálculos y nos permite homogeneizar las hipótesis con los demás tipos de representaciones conformes que veremos ([4], [13]). La diferencia cuando no exigimos que  $M^2$  sea simplemente conexa es que se requiere que

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} \phi_k = 0, \quad \text{para } k \in \{1, 2, 3\},$$

siendo  $\gamma$  cualquier curva cerrada ([1], [3]). Esta condición es necesaria para que la inmersión dada por (2.23) no sea multivaluada. La verificación de estas condiciones se conoce como el *problema de los periodos*.

Las cantidades geométricas básicas asociadas a la superficie pueden ser expresadas en función de los datos de Weierstrass. Este hecho nos será crucial para poder emplear nuevas herramientas para el estudio de la superficies mínimas, como haremos en la Sección 2.4.

En particular, de las igualdades (2.14) y (2.22) tenemos que

$$\lambda^2 = 1/2 \sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2 = \left[ \frac{|f|(1+|g|^2)}{2} \right]^2.$$

Por lo que la primera forma fundamental se puede expresar a partir de los datos de Weierstrass como

$$ds^2 = \frac{1}{4} |f|^2 (1+|g|^2)^2 |dz|^2 = \frac{1}{4} (1+|g|^2)^2 |w|^2.$$

La función meromorfa  $g$  que aparece en la Definición 2.2 de los datos de Weierstrass tiene una interpretación geométrica muy relevante, y es que puede ser identificada con la aplicación de Gauss como consecuencia de la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.** Sean  $(g, \omega)$  los datos de Weierstrass asociados a una inmersión mínima  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Entonces la aplicación  $g$  es la proyección estereográfica de la aplicación de Gauss de  $\psi$ .

**Demostración.** La base del plano tangente a la inmersión  $\left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\}$  está relacionada con  $\phi$  por (2.12) de manera que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \operatorname{Re}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\operatorname{Im}(\phi_1, \phi_2, \phi_3).$$

Así al realizar el producto vectorial de los vectores de esta base

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y} &= -(\operatorname{Re} \phi_1, \operatorname{Re} \phi_2, \operatorname{Re} \phi_3) \wedge (\operatorname{Im} \phi_1, \operatorname{Im} \phi_2, \operatorname{Im} \phi_3) \\ &= (\operatorname{Im} \phi_2 \bar{\phi}_3, \operatorname{Im} \phi_3 \bar{\phi}_1, \operatorname{Im} \phi_1 \bar{\phi}_2), \end{aligned}$$

y sustituyendo de acuerdo a (2.5) se llega fácilmente a la expresión

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{|f|^2 (1+|g|^2)}{4} (2 \operatorname{Re} g, 2 \operatorname{Im} g, |g|^2 - 1),$$

siendo el módulo de este vector  $\lambda^2$ . De esta manera el campo normal unitario a la superficie vendrá dado por

$$N = \left( \frac{2 \operatorname{Re} g}{|g|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im} g}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right). \quad (2.24)$$

Ahora, consideramos la proyección estereográfica desde el punto  $\{(0, 0, 1)\}$  que denotábamos por  $\varphi_1^{-1}$  en el Ejemplo 1.1, la renombramos como  $\pi$  y la extendemos de forma que  $\pi((0, 0, 1)) = \infty$ . De esta manera  $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \equiv \mathbb{C}_\infty$  es una aplicación biholomorfa que cumple

$$\pi \circ N = g,$$

de acuerdo a lo que veíamos en el Ejemplo 1.1. Esto quiere decir que la aplicación meromorfa  $g$  de la representación de Weierstrass de una inmersión mínima  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es la proyección estereográfica de la aplicación de Gauss de la inmersión  $\psi$ . |

## 2.3 Construcción de superficies mínimas a través de datos de Weierstrass

Vamos a ver algunos ejemplos de representación conforme de Weierstrass.

**Ejemplo 2.1 (Representación de Weierstrass del helicoides).** Sea  $M^2 = \mathbb{C}$ . Tomamos la función holomorfa  $g_h(z) = e^z$  y la forma holomorfa  $\omega_h = f_h dz$  con  $f_h(z) = ie^{-z}$ . Al ser holomorfa,  $g$  no tiene ningún polo. Por (2.20) tenemos

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -i \sinh(z), \\ \phi_2 &= -\cosh(z), \\ \phi_3 &= i. \end{aligned}$$

Con lo que

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \operatorname{Re} \int -i \sinh(z) dz = \operatorname{Re} (-i \cosh(z) + i) = \sin(y) \sinh(x), \\ \psi_2 &= \operatorname{Re} \int -\cosh(z) dz = \operatorname{Re} (-\sinh(z)) = -\cos(y) \sinh(x), \\ \psi_3 &= \operatorname{Re} \int i dz = \operatorname{Re} (iz) = -y, \end{aligned}$$

que es la parametrización como superficie de revolución del helicoides. De esta forma se comprueba que el par  $(g_h, \omega_h)$  son datos de Weierstrass para el helicoides.

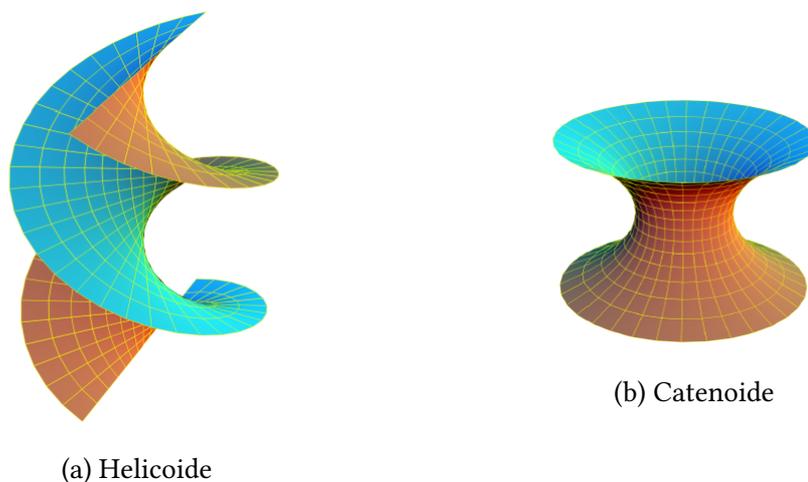


Figura 2.1: Imágenes extraídas de [33].

**Ejemplo 2.2 (Representación de Weierstrass de la catenoide).** Ahora, tomemos como  $M^2 = \mathbb{C}$  y datos de Weierstrass  $g_c(z) = ie^z$  y  $w_c = f_c dz$  con  $f_c(z) = e^{-z}$ . Al igual que en el ejemplo anterior,  $g$  no presenta ningún polo. De (2.20) obtenemos

$$\begin{aligned}\phi_1 &= -\sinh(z), \\ \phi_2 &= i \cosh(z), \\ \phi_3 &= 1.\end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \operatorname{Re}(-\cosh(z) + 1) = -\cos(y) \cosh(x) + 1, \\ \psi_2 &= \operatorname{Re}(i \sinh(z)) = -\cosh(x) \sin(y), \\ \psi_3 &= \operatorname{Re}(z) = x.\end{aligned}$$

Esta es la parametrización usual de la catenoide a la que se le ha realizado una traslación por el vector  $(1, 0, 0)$ .

**Observación 2.4 (Superficies conjugadas).** Observar que los datos de Weierstrass del helicoide  $(g_h, \omega_h)$  y la catenoide  $(g_c, \omega_c)$  verifican

$$g_h = g_c, \quad \omega_h = i \omega_c.$$

Cuando para dos superficies mínimas podemos encontrar datos de Weierstrass que verifican estas relaciones diremos que son *superficies conjugadas*. Así el catenoide y el helicoide son superficies conjugadas.

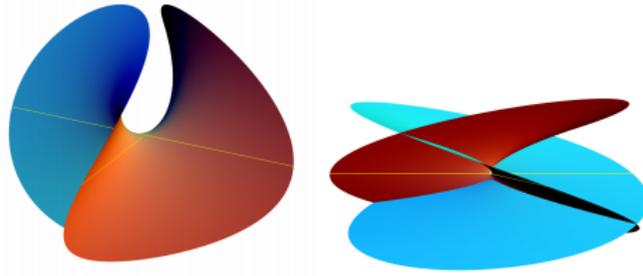


Figura 2.2: Representaciones de la superficie de Enneper. Imagen extraída de [33].

Una de las principales ventajas que tuvo la representación de Weierstrass es que supuso una nueva forma de construcción de superficies mínimas que hizo posible el descubrimiento de superficies hasta entonces desconocidas. Un ejemplo de ello es la *superficie de Enneper*.

**Ejemplo 2.3 (Superficie de Enneper).** La superficie de Enneper es la superficie mínima resultante de realizar la elección más trivial de los datos de Weierstrass. Tomamos  $M^2 = \mathbb{C}$ ,  $g(z) = z$  y  $\omega = dz$ . Entonces

$$\begin{aligned}\phi_1 &= 1/2(1 - z^2), \\ \phi_2 &= i/2(1 + z^2), \\ \phi_3 &= z dz.\end{aligned}$$

y con ello

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \operatorname{Re} \int 1/2(1 - z^2) dz = 1/2(x - 1/3 x^3 + x y^2), \\ \psi_2 &= \operatorname{Re} \int i/2(1 + z^2) dz = 1/2(-y + 1/3 y^3 - x^2 y), \\ \psi_3 &= \operatorname{Re} \int z dz = 1/2(x^2 - y^2).\end{aligned}$$

La superficie de Enneper es conjugada de sí misma, esto es, tomando datos de Weierstrass  $(z, i dz)$  la superficie inmersa obtenida es la misma.

**Ejemplo 2.4 (Superficies de Scherk).** En 1834 Heinrich Scherk descubrió dos nuevas superficies mínimas [28], las primeras desde 1776. Una de ellas es conocida como la *superficie de Schreck doblemente periódica*. Se trata de una superficie que es invariante por traslaciones en dos direcciones independientes ([33], [26]). Las piezas fundamentales que conforman esta superficie periódica pueden ser construidas empleando el

Teorema de representación de Weierstrass tomando  $M^2 = \bar{\mathbb{C}} - \{\pm 1, \pm i\}$  y datos de Weierstrass dados por

$$g(z) = z, \quad \omega(z) = \frac{1}{z^4-1} dz.$$

La segunda superficie de Scherk es conocida como *superficie de Scherk simplemente periódica*, se puede observar en la Figura 2.3. Se trata de una superficie invariante por traslaciones en una dirección. Su construcción por medio de datos de Weierstrass se consigue tomando  $M^2 = \bar{\mathbb{C}} - \{\pm 1, \pm i\}$  y datos de Weierstrass

$$g(z) = z, \quad \omega(z) = \frac{i}{z^4-1} dz.$$

Se observa que las superficies de Scherk son conjugadas. En ambos casos, el dominio no es simplemente conexo y además los datos de Weierstrass no satisfacen las condiciones de los periodos expuestas en la Observación 2.3. Este hecho se traduce en la invarianza de las superficies por traslaciones.



(a) Superficie de Scherk doblemente periódica. (b) Superficie de Scherk simplemente periódica.

Figura 2.3: Imágenes extraídas de [33].

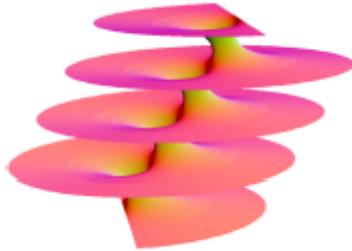
Las superficies mínimas conjugadas son en realidad un caso particular de lo que se conoce como *familias asociadas*. Dada una superficie mínima cuyos datos de Weierstrass definen la tripleta de funciones holomorfas  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ , la *familia asociada* a esta superficie mínima es la familia uniparamétrica, con parámetro  $\theta \in [0, 2\pi]$  de superficies mínimas descrita por

$$\psi_k = \operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \int \phi_k(z) dz \right\}, \quad \text{para } k \in \{1, 2, 3\}.$$

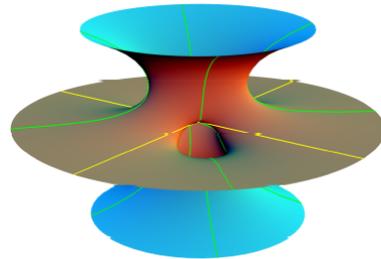
Es obvio que se cumplen las condiciones del Lema 2.4 para que la inmersión resultante sea mínima. En particular, tomando  $\theta = \pi/2$  se obtiene la superficie conjugada de la inmersión mínima inicial.

**Ejemplo 2.5 (Los ejemplos de Riemann).** Una de las familias asociadas más relevantes es la conocida como *ejemplos de Riemann*, estas superficies aparecen por primera vez en un documento póstumo de Riemann hacia el año 1867. En este documento Riemann estudia el problema de determinar las superficies mínimas bordeadas por dos circunferencias en planos paralelos y que además cada plano paralelo comprendido entre estos dos corte a la superficie en una circunferencia, i.e. la superficie esté foliada por circunferencias. Así, Riemann probó que las únicas soluciones a este problema (salvo homotecias y movimientos rígidos) son la catenoide y la familia asociada de los ejemplos de Riemann ([1], [20]).

Otra importante propiedad de los ejemplos de Riemann es que junto con el plano, el helicoide y el catenoide son las únicas superficies con la topología del plano menos un número finito de puntos que pueden ser propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$ , esto último es, son embebidas y en todo punto de  $\mathbb{R}^3$  que no pertenezca a la superficie se puede dar una bola que no interseque con esta. Este resultado fue demostrado por Meeks-Pérez-Ros en [22].



(a) Ejemplo mínimo de Riemann.  
Imagen extraída de [1].



(b) Imagen de la superficie mínima de Costa  
extraída de [33].

Todos los ejemplos vistos hasta ahora se corresponden a superficies con género 0, esto es la superficie de Riemann sobre la que se definen los datos de Weierstrass son la esfera menos un número finito de puntos (lo que incluye al plano). El primer ejemplo de superficie mínima conocida de género no nulo fue dado por el matemático brasileño Celso José Costa en 1982. La *superficie mínima de Costa*, como se conoce, se obtiene a partir de un toro menos tres puntos y es embebida en  $\mathbb{R}^3$  [11]. El descubrimiento de Costa abrió las puertas a la aparición de multitud de nuevas superficies mínimas, ahora mismo se conocen superficies mínimas en  $\mathbb{R}^3$  de todos los géneros.

## 2.4 Teoría compleja de superficies mínimas

Otro hecho de gran importancia sobre la representación de Weierstrass es que abre la puerta al empleo de resultados de análisis complejo y funciones armónicas para estudiar las propiedades de las superficies mínimas. Un sencillo ejemplo de ello es el siguiente teorema que presentamos. Observar que este teorema puede ser demostrado de manera alternativa a través de la clasificación de sus puntos según la curvatura, como es propuesto como ejercicio en [5].

**| Teorema 2.3.** *Una superficie mínima en  $\mathbb{R}^3$  no puede ser compacta.*

*Demostración.* Consideramos la inmersión mínima  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada en función de coordenadas isotermas. Entonces por el Lema 2.3 para cada  $k \in \{1, 2, 3\}$  las aplicaciones  $\psi_k$  son armónicas en  $M^2$ . Si  $M^2$  fuese compacta estas aplicaciones alcanzarían un máximo en  $M^2$  y por el principio del máximo para funciones armónicas, que tratábamos en la Observación 1.2, serían constantes. **|**

Puesto que la esfera de Riemann es topológicamente equivalente a una esfera, del anterior teorema y el Teorema 1.3 de Uniformización obtenemos como corolario el siguiente teorema.

**| Teorema 2.4.** *Una superficie mínima simplemente conexa en  $\mathbb{R}^3$  es biholomorfa al disco  $\mathbb{D}$  o bien al plano complejo  $\mathbb{C}$ .*

Otro teorema que probaremos haciendo uso de la representación de Weierstrass es el Teorema de Bernstein.

**| Teorema 2.5 (Teorema de Bernstein).** *Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  un grafo entero (i.e. definido en todo  $\mathbb{R}^2$ ) mínimo, entonces  $S$  es un plano.*

Para probar el Teorema de Bernstein utilizaremos el siguiente Lema cuya demostración se puede encontrar en el libro de Osserman [25].

*Lema 2.6.* *Sea  $f$  una función holomorfa en el disco unidad  $\mathbb{D}$  con como mucho un número finito de ceros. Entonces existe un camino divergente  $C$  en  $\mathbb{D}$  tal que*

$$\int_C |f(z)| |dz| < \infty.$$

*Demostración (Teorema de Bernstein).* En primer lugar observamos que un grafo entero es topológicamente equivalente a  $\mathbb{R}^2$ . Por ello, será simplemente conexo. Además, el grafo es a su vez completo.

Por ser  $S$  simplemente conexa el Teorema de Uniformización nos dice que o bien es biholomorfa a  $\mathbb{C}$  o bien al disco  $\mathbb{D}$ . No obstante, si  $S$  fuese biholomorfa por el Lema 2.6 llegaríamos a una contradicción con la completitud de  $S$ . Es decir,  $S \cong \mathbb{C}$ .

Sean  $(g, \omega)$  los datos de Weierstrass de  $S$ . Entonces  $g : S \cong \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  es un homomorfismo identificable con la aplicación de Gauss de la inmersión, de acuerdo a la Proposición 2.1. Por ser  $S$  un grafo, el vector normal  $N$  nunca es horizontal. Es decir, la aplicación de Gauss tomará valores únicamente en un hemisferio de  $\mathbb{C}_\infty$ .

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $g$  toma valores en el hemisferio sur de  $\mathbb{C}_\infty \cong \overline{\mathbb{C}}$ . Esto, componiendo con la proyección estereográfica  $\pi$  desde el hemisferio correspondiente, nos indica que  $g$  es una aplicación entera en el disco unidad abierto,  $g = \pi \circ N : S \cong \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ . Al estar  $g$  entera y con  $|g| < 1$  por el Teorema de Liouville concluimos que  $g$  debe ser constante. Por su identificación con la aplicación de Gauss el vector normal es constante y esto implica que  $S$  es un plano. |

### 3 | Representación conforme de superficies con curvatura media constante 1 en $\mathbb{H}^3$

El segundo caso de representación conforme que vamos a presentar es el dado por R. Bryant [4], en 1987, para superficies de curvatura constante igual a 1 ( $H = 1$ ) en el espacio hiperbólico. Estas superficies se conocen desde entonces como *superficies de Bryant*. La idea de Bryant de estudiar una representación de tipo Weierstrass para estas superficies vino motivada por la *correspondencia de Lawson*. Este es un resultado de la teoría de superficies de curvatura media constante que establece identificaciones entre estas superficies en los espacios modelos 3-dimensionales.

En particular, en el caso que nos concierne, la *correspondencia de Lawson* nos dice que toda superficie de Bryant es localmente isométrica a una superficie mínima en  $\mathbb{R}^3$ . Este hecho indica que propiedades locales de las superficies mínimas son trasladadas a las superficies de curvatura constante 1 en  $\mathbb{H}^3$ , lo que supuso el punto de partida para el trabajo de Bryant.

Nosotros, sin embargo, no seguiremos el artículo de Bryant para este apartado sino que emplearemos la tesis doctoral de Pablo Mira [23] basada en una demostración alternativa de la representación conforme de Bryant dada por Gálvez-Mira [17].

### 3.1 Superficies de Bryant y aplicación de Gauss hiperbólica

Comenzamos este apartado introduciendo algunas nociones generales de superficies en  $\mathbb{H}^3$ . Sea  $M^2$  una 2-variedad orientable, y sea  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  una inmersión en  $\mathbb{H}^3$ . Como veíamos en la Sección 1.3 el vector normal a la inmersión en cada punto, que denotaremos por  $\eta$ , se encuentra en el espacio de De Sitter, así  $\eta \in \mathbb{S}_1^3$ .

Supongamos además que la inmersión viene dada en función de parámetros isotermos  $(x, y)$  de manera que la métrica se expresa como

$$ds^2 = \lambda^2 (dx^2 + dy^2).$$

Entonces el conjunto de vectores  $\{\psi_x, \psi_y, \eta, \psi\}$ , donde  $\psi$  es el vector de posición, forman una base ortogonal de  $\mathbb{L}^4$ .

En el capítulo anterior veíamos como la aplicación de Gauss intervenía de manera fundamental en el teorema de representación conformes de superficies mínimas. De hecho, dados unos datos de Weierstrass  $(g, \omega)$ , la Proposición 2.1 nos decía que  $g$  es la proyección estereográfica de la aplicación de Gauss. Así teníamos que la aplicación de Gauss de la inmersión era meromorfa con la estructura conforme inducida por la primera forma fundamental. En el caso de representaciones conformes en  $\mathbb{H}^3$  existirán también teoremas análogos al Teorema 2.1 sobre existencia de aplicaciones holomorfas en la esfera. Estas aplicaciones serán las *aplicaciones de Gauss hiperbólicas*, a las que les dedicamos las siguientes líneas.

**Observación 3.1.** En cada punto de  $M^2$  la resta de vectores  $\psi + \eta$  verifica

$$\langle \psi + \eta, \psi + \eta \rangle = \langle \psi, \psi \rangle + 2\langle \psi, \eta \rangle + \langle \eta, \eta \rangle = 1 + 0 - 1 = 0.$$

Con lo cual, en cada punto de  $M^2$ ,  $\psi + \eta \in \mathbb{N}^3$ . Aplicando la relación cociente definida sobre  $\mathbb{N}^3$  en la Sección 1.3, obtenemos la aplicación  $[\psi + \eta] : M^2 \rightarrow \mathbb{S}_\infty^2$  sobre el borde ideal del espacio hiperbólico.

**Definición 3.1 (Aplicaciones de Gauss hiperbólicas).** Sea  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  una inmersión con campo normal unitario  $\eta : M^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ . Denotamos por  $G^+ = [\psi + \eta] : M^2 \rightarrow \mathbb{S}_\infty^2$  a la inmersión que definíamos en la Observación 3.1. De forma similar llamamos  $G^- = [\psi - \eta] : M^2 \rightarrow \mathbb{S}_\infty^2$ . A estas aplicaciones las llamaremos *aplicaciones de Gauss hiperbólicas*.

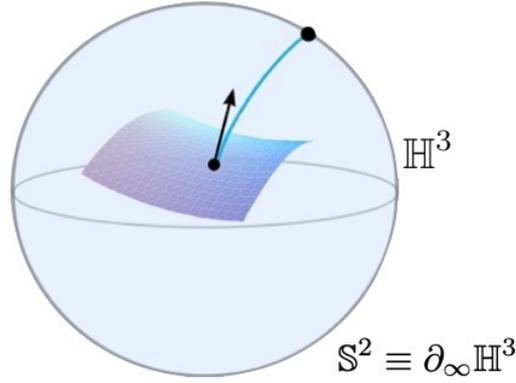


Figura 3.1: Representación de la geodésica que parte de un punto de una superficie inmersa en la bola de Poincaré en la dirección del vector normal y corta con el borde ideal (en este modelo el borde de  $\mathbb{B}$ ) en  $[\psi + \eta]$ . Imagen por I. Fernández.

**Observación 3.2 (Interpretación geométrica de las aplicaciones de Gauss hiperbólicas).** Las aplicaciones de Gauss hiperbólicas tienen la siguiente interpretación geométrica. Para cada  $p \in M^2$ , la única geodésica que pasa por el punto  $\psi(p) \in \mathbb{H}^3$  en la dirección del vector tangente  $\eta(p)$  a  $\mathbb{H}^3$  corta con el borde ideal  $\mathbb{S}^2_\infty$  en  $[\psi - \eta]$  y  $[\psi + \eta]$ , ver [4] y [6]. Considerando la orientación de la geodésica dada por  $\eta$  podemos tomar  $[\psi - \eta]$  como el punto inicial y  $[\psi + \eta]$  como el punto final. En la Figura 3.1 podemos ver una representación de la aplicación de Gauss hiperbólica  $G^+$  en el modelo de la bola de Poincaré.

Al igual que sucedía en la Sección 2.1 la diferencial de Hopf desarrollará un papel importante en este apartado. Introducimos brevemente esta diferencial para el caso de inmersiones en  $\mathbb{H}^3$  y con la notación aquí usada. Dados los parámetros isotermos  $(x, y)$  el parámetro complejo  $z = x + iy$  constituirá un parámetro conforme para la inmersión  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ . La métrica se expresará como

$$ds^2 = \langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle |dz|^2 = \lambda^2 |dz|^2, \tag{3.1}$$

con  $\lambda^2 : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Definimos entonces la *diferencial de Hopf* como la 2-forma compleja global definida sobre la superficie  $M^2$  dada por

$$Q = \langle \psi_{zz}, \eta \rangle dz^2.$$

Recordamos los resultados que ya se exponían anteriormente en la Observación 2.1 y el Lema 2.1 y que también se cumplen para inmersiones en el espacio hiperbólico.

**Observación 3.3.** La diferencial de Hopf se extiende a una 2-forma compleja global, que además es holomorfa con respecto a la estructura de superficie de Riemann inducida por la métrica, en el caso en el que la inmersión sea de curvatura media constante [17].

**Lema 3.1.** La diferencial de Hopf se anula únicamente en aquellos puntos que son umbilicales, i.e. aquellos puntos cuyas curvaturas principales coinciden.

Recordemos también la siguiente expresión que nos será de utilidad más adelante:

$$\langle \psi_{zz}, \eta \rangle = \frac{1}{4} (\langle \psi_{xx}, \eta \rangle - \langle \psi_{yy}, \eta \rangle - 2i \langle \psi_{xy}, \eta \rangle) \quad (3.2)$$

Ahora presentamos un teorema análogo al Teorema 2.1 para superficies de Bryant y la aplicación de Gauss hiperbólica  $G^+$ .

**Teorema 3.1.** Sea  $M^2$  una superficie simplemente conexa y  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ . La aplicación de Gauss  $G^+ = [\psi + \eta] : M^2 \rightarrow \mathbb{S}_\infty^2$  es conforme con respecto a la métrica  $ds^2$  si y sólo si  $\psi$  es una inmersión totalmente umbilical o de curvatura media constante 1. Además,  $G^+$  es holomorfa cuando la inmersión tiene curvatura media  $H = 1$ .

**Demostración.** Sea  $z = x + iy$  un parámetro conforme para la inmersión  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ . Denotamos  $q = \langle \psi_{zz}, \eta \rangle$ . Por (3.2), podemos expresar

$$q = \frac{1}{4}E - \frac{1}{4}G - \frac{i}{2}F, \quad (3.3)$$

siendo  $E$ ,  $F$  y  $G$  los coeficientes de la segunda forma fundamental de la inmersión  $\psi$  en la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ . Por otro lado, la expresión de las derivadas parciales del vector normal  $\eta$  en la base  $\{\psi_x, \psi_y, \eta, \psi\}$  de  $\mathbb{L}^4$  da como resultado

$$\begin{aligned} \eta_x &= -E/\lambda^2 \psi_x - F/\lambda^2 \psi_y, \\ \eta_y &= -F/\lambda^2 \psi_x - G/\lambda^2 \psi_y. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Teniendo en cuenta que la curvatura media de  $\psi$  se calcula como  $H = (E + G)/(2\lambda^2)$ , por (3.3) y (3.4) expresamos la derivada parcial del vector normal con respecto a  $z$  como

$$\eta_z = -H\psi_z - \frac{2q}{\lambda^2} \psi_{\bar{z}}. \quad (3.5)$$

Empleando esta última expresión junto con (3.1) obtenemos

$$\langle (\psi + \eta)_z, (\psi + \eta)_z \rangle = 2q(1 - H). \quad (3.6)$$

Así, (3.6) nos dice que la aplicación  $\psi + \eta : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  será conforme con respecto al parámetro  $z$ , y con ello la aplicación de Gauss hiperbólica  $G^+$  si y sólo si se verifica la igualdad

$$2q(1 - H) = 0 \tag{3.7}$$

en todo punto de  $M^2$ .

Obviamente si la superficie es totalmente umbilical la aplicación  $G^+$  será conforme por el Lema 3.1. Lo mismo ocurre si la inmersión es de curvatura media constante igual a 1. Así demostramos la implicación hacia la izquierda.

Por otro lado, supongamos que  $G^+$  es conforme y se cumple la igualdad (3.7). Si  $H(p) = 1$  para todo  $p \in M^2$  ya tendríamos el recíproco. Supongamos que el conjunto abierto  $M' = \{p \in M^2 : H(p) \neq 1\}$  es no vacío. Si tomamos una componente conexa  $V$  de  $M'$ , por la igualdad (3.7) todos los puntos de  $V$  son umbilicales. En particular,  $H$  es constante en  $V$  (pues las superficies totalmente umbilicales en  $\mathbb{H}^3$  son de curvatura media constante [29]) por lo que también lo es en su adherencia  $\bar{V}$ . Al ser  $V$  componente conexa, esto indica que  $V = \bar{V}$ , y resulta por conexión en  $M^2$  que  $V = M^2$ . Esto es, la superficie es totalmente umbilical. Probamos así la otra implicación.

Si además,  $H = 1$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} (\psi + \eta)_z &= -\frac{2q}{\lambda^2} \psi_{\bar{z}}, \\ (\psi + \eta)_{\bar{z}} &= -\frac{2\bar{q}}{\lambda^2} \psi_z. \end{aligned}$$

Por lo que la matriz de cambio de bases entre estas dos bases será

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2q}{\lambda^2} \\ -\frac{2\bar{q}}{\lambda^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta matriz es negativo, y puesto que la identificación del borde ideal con la esfera de Riemann invierte la orientación, como comentábamos en la Observación 1.4, tenemos que la aplicación  $G^+ = [\psi + \eta]$  conserva la orientación. Por la Proposición 1.6 concluimos que en este caso  $G^+$  es holomorfa. |

**Observación 3.4.** Notar que el teorema es cierto para la aplicación de Gauss hiperbólica  $G^- : [\psi - \eta] : M^2 \rightarrow \mathbb{S}_\infty^2$  si la inmersión  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  tiene curvatura media constante igual a -1, lo que se consigue tomando la otra orientación del vector normal.

## 3.2 Teorema de representación conforme

Presentamos en esta sección el teorema sobre la representación conforme de las superficies de Bryant. Así, consideraremos  $M^2$  una variedad simplemente conexa y  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  una inmersión con curvatura constante igual a 1.

En el apartado anterior hemos dado dos datos holomorfos de las superficies de Bryant: la diferencial de Hopf  $Q$  y la aplicación de Gauss hiperbólica  $G^+$ . Antes de formular el teorema de representación vamos a hacer notar que existe un tercer dato holomorfo para estas superficies que surge a partir de la *ecuación de Liouville elíptica*

$$\Delta \log \phi = -2\phi. \quad (3.8)$$

Esta ecuación que fue introducida por Liouville en [19] cumple la principal propiedad de que admite un *resolución holomorfa* [17], esto es, cualquier solución  $\phi$  de (3.8) en un dominio simplemente conexo  $\Omega \subset \mathbb{C}$  toma la forma

$$\phi(z) = \frac{4|g_z|^2}{(1 + |g|^2)^2}, \quad (3.9)$$

con  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función meromorfa.

Empleando la expresión del Laplaciano en parámetros complejos que presentábamos en la Nota 2.1 de la ecuación (3.8) queda la ecuación diferencial compleja

$$(\log \phi)_{z\bar{z}} = -\frac{1}{2}\phi. \quad (3.10)$$

Así, enunciamos el siguiente conocido lema de la teoría de superficies de curvatura Gaussiana constante [17] que dará pie a la relación entre las superficies de Bryant y la ecuación de Liouville, y que usaremos para el teorema de representación conforme.

**Lema 3.2.** Sea  $U \subset \mathbb{C}$  un dominio plano y sea  $z$  un parámetro complejo en  $U$ . Si  $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$  es una métrica pseudo-Riemanniana en  $U$ , entonces  $\lambda^2$  satisface la ecuación de Liouville si y sólo si  $ds^2$  tiene curvatura Gaussiana constante 1.

Podemos ahora enunciar el teorema obtenido por Bryant en 1987.

**| Teorema 3.2 (Representación conforme de superficies de Bryant).** Sea  $M^2$  una 2-variedad simplemente conexa y sea  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  una inmersión de curvatura media constante igual a 1. Entonces, podemos encontrar una inmersión holomorfa

$h : M^2 \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C}) := \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) : \det(A) = 1\}$  respecto a la estructura conforme inducida por la primera forma fundamental de la inmersión en  $M^2$  verificando  $\det(dh) = 0$  y de manera que la inmersión se puede devolver como  $\psi = hh^*$ . La inmersión  $h$  es única salvo multiplicación a la derecha por una constante  $h_0 \in \mathbb{S}\mathbb{U}(2)$ , donde  $\mathbb{S}\mathbb{U}(2) = \{m \in \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C}) / mm^* = I_2\}$ .

Recíprocamente, sea  $h : M^2 \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$  una inmersión holomorfa de una superficie de Riemann  $M^2$  en  $\mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$  con  $\det(dh) = 0$ . Entonces la aplicación  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  dada por  $\psi = hh^*$  tiene curvatura media 1.

Además, esta inmersión holomorfa  $h : M^2 \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$  verificando  $\det(dh) = 0$  que nos permite definir una superficie de Bryant puede ser expresada a partir de una función meromorfa  $g$  y una 1-forma holomorfa  $\omega$  tales que

$$h^{-1}dh = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \omega, \quad (3.11)$$

y de manera que la métrica de la inmersión viene dada por

$$ds^2 = (1 + |g|^2)^2 |\omega|^2. \quad (3.12)$$

**Demostración.** Sea  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  una superficie de Bryant simplemente conexa y tomemos el parámetro global conforme  $z$  en  $M^2$  de manera que la métrica de la inmersión venga dada por

$$ds^2 = \langle d\psi, d\psi \rangle = \lambda^2 |dz|^2,$$

siendo  $\lambda : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Denotemos por  $\eta \in \mathbb{S}_1^3$  al vector normal unitario en cada punto de  $M^2$ . La diferencial de Hopf, que viene dada por  $Q = q(z) dz^2$  siendo  $q = \langle \psi_{zz}, \eta \rangle$ , será una 2-forma holomorfa por la Observación 3.3. Esto es  $q : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa. Esto indica que  $q$  es o bien idénticamente nula, en cuyo caso  $\psi$  es una horoesfera, o que sus ceros son aislados. A partir de ahora supondremos que  $q \not\equiv 0$ . La representación de Bryant en el caso en que  $q \equiv 0$  se estudiará en el Ejemplo 3.2.

Consideremos la aplicación en el cono de luz:  $\psi + \eta : M^2 \rightarrow \mathbb{N}^3$ . Recordando la expresión que obteníamos anteriormente para la derivada de  $\eta$  en función de  $z$  y operando de la misma manera tenemos

$$\begin{aligned} \eta_z &= -\psi_z - \frac{2q}{\lambda^2} \psi_{\bar{z}}, \\ \eta_{\bar{z}} &= -\frac{2\bar{q}}{\lambda^2} \psi_z - \psi_{\bar{z}}, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta ahora que la curvatura media de la inmersión  $\psi$  es  $H = 1$ . Así tendremos

$$\langle d(\psi + \eta), d(\psi + \eta) \rangle = \langle (\psi + \eta)_z, (\psi + \eta)_{\bar{z}} \rangle |dz|^2 = \frac{4|q|^2}{\lambda^2} |dz|^2. \quad (3.13)$$

El hecho de que  $\psi$  sea una superficie de Bryant nos indica que  $\langle d(\psi + \eta), d(\psi + \eta) \rangle$  define una pseudo-métrica de curvatura constante 1. Este hecho es consecuencia de la ecuación de Gauss y de que  $q$  sea holomorfa [23]. Así, por Lema 3.2 [17] obtenemos que  $\phi = 4|q|^2/\lambda^2$  es solución de la ecuación de Liouville (3.10). Y por (3.9) existe una función meromorfa  $g : M^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  de manera que

$$\phi = \frac{4|q|^2}{\lambda^2} = \frac{4|g_z|^2}{(1 + |g|^2)^2}. \quad (3.14)$$

Por el Teorema 3.1, la aplicación de Gauss hiperbólica  $G^+ = [\psi + \eta] : M^2 \rightarrow \mathbb{S}_\infty^2 \equiv \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  es una aplicación holomorfa. Por ello, por la identificación del borde ideal con la recta proyectiva compleja, existirán  $A, B : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$  funciones holomorfas tales que  $G^+ = [A, B]$ , y una función diferenciable positiva  $\mu : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que

$$\psi + \eta = \mu \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} A\bar{A} & A\bar{B} \\ \bar{A}B & B\bar{B} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Por medio del producto escalar de Herm(2) (1.6), a partir de esta expresión llegamos a que

$$\frac{\mu^2}{2} |AB_z - BA_z|^2 = \langle (\psi + \eta)_z, (\psi + \eta)_{\bar{z}} \rangle = \frac{2|q|^2}{\lambda^2}, \quad (3.16)$$

donde la última igualdad es (3.13). Así por (3.14) tendremos la igualdad

$$\mu^2 |AB_z - BA_z|^2 = \frac{4|g_z|^2}{(1 + |g|^2)^2}. \quad (3.17)$$

De esta última expresión, teniendo en cuenta que  $M^2$  es simplemente conexa, deducimos la existencia de una función meromorfa sobre  $M^2$ ,  $S : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$  verificando  $S^2 = g_z/(AB_z - BA_z)$ . Para hacer posible este paso hemos requerido que  $q$  no sea idénticamente nula en (3.16), de ahí el que realizáramos el descarte de este caso anteriormente. Si definimos ahora las funciones meromorfas  $C = AS$  y  $D = BS$ , por (3.17) la expresión de  $\psi + \eta$  en (3.15) queda

$$\psi + \eta = \rho \begin{pmatrix} C\bar{C} & C\bar{D} \\ \bar{C}D & D\bar{D} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

siendo

$$\rho = \frac{2}{1 + |g|^2}. \quad (3.19)$$

En particular, la aplicación de Gauss hiperbólica se puede expresar como la clase de equivalencia  $G^+ = [C, D]$  y  $C, D$  verifican

$$CD_z - DC_z = g_z. \quad (3.20)$$

Consideramos ahora la aplicación  $F : M^2 \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$  dada por

$$F = \begin{pmatrix} C & 1/g_z C_z \\ D & 1/g_z D_z \end{pmatrix}.$$

Notar que es posible dividir por  $g_z$  al ser  $g \neq 0$  y por la igualdad (3.14). Fácilmente se comprueba que la expresión

$$\psi + \eta = F \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} h^* \quad (3.21)$$

devuelve (3.18). Diferenciando (3.20) obtenemos que  $CD_{zz} - DC_{zz} = g_{zz}$ , lo que nos ayuda por cálculo directo a conseguir la igualdad

$$F^{-1} F_z = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ g_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

siendo  $\theta$  la función meromorfa  $\theta = 1/g_z^2 (C_{zz} D_z - C_z D_{zz})$ . De (3.19), (3.21) y (3.22), y teniendo en cuenta que  $F_z^* = 0$ , obtenemos

$$(\psi + \eta)_z = F \left[ F^{-1} F_z \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] F^* = F \begin{pmatrix} \frac{-2\bar{g}g_z}{(1+|g|^2)^2} & 0 \\ \frac{2g_z}{1+|g|^2} & 0 \end{pmatrix} F^*.$$

Es posible expresar la derivada de  $\psi$  con respecto a  $z$  en función de las aplicaciones holomorfas  $q$  y  $g$  como

$$\psi_z = F \begin{pmatrix} g q/g_z & -q/g_z(1 + |g|^2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} F^*. \quad (3.23)$$

Por otro lado,  $\mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$  actúa isométricamente sobre  $\mathbb{H}^3$  (ver por ejemplo [13]). De manera que existirá una aplicación  $\Omega : M^2 \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$  tal que  $\psi = F\Omega F^*$ . Si escribimos

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix},$$

siendo  $a, c : M^2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  y  $b : M^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Diferenciando la igualdad  $\psi = F\Omega F^*$ , y para que se cumpla la igualdad (3.23), tendrá que cumplirse el sistema diferencial

$$\begin{pmatrix} a_z + \bar{b}\theta & b_z + c\theta \\ \bar{b}_z + ag_z & c_z + bg_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gq/g_z & -q/g_z(1 + |g|^2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

junto con la condición  $\det(\Omega) = 1$ . Este sistema es resoluble [23] obteniéndose la solución

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{g} \\ -g & 1 + |g|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & -ig \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & i\bar{g} \end{pmatrix}.$$

Finalmente,  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  se puede recuperar como  $\psi = hh^*$ , siendo  $h : M^2 \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$  la inmersión holomorfa

$$h = F \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & -ig \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Inmediatamente se comprueba que  $\det(dh) = 0$ , gracias a (3.20).

Para probar la unicidad de  $h$  salvo multiplicación por una constante supongamos que existe otra inmersión holomorfa  $\tilde{h} : M^2 \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$  tal que  $\psi = \tilde{h}\tilde{h}^*$ . Igualando las dos expresiones para  $\psi$  tenemos

$$hh^* = \tilde{h}\tilde{h}^*. \quad (3.25)$$

Por tanto, se puede expresar  $h = \tilde{h}h_0$  con  $h_0 = \tilde{h}^*(h^*)^{-1} : M^2 \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$ . Empleando las propiedades de la transposición y conjugación de matrices se llega a que

$$h_0h_0^* = \tilde{h}^*(h^*)^{-1}h^{-1}\tilde{h}. \quad (3.26)$$

Por otra parte de (3.25) se obtiene la igualdad  $\tilde{h}^{-1}h = \tilde{h}^*(h^*)^{-1}$ , que sustituida en (3.26) da finalmente lugar a

$$h_0h_0^* = \tilde{h}^{-1}hh^{-1}\tilde{h} = I_{2 \times 2}.$$

Así  $h_0 \in \mathbb{S}\mathbb{U}(2)$ . De manera que al diferenciar la expresión  $h_0h_0^* = I_{2 \times 2}$

$$(h_0)_z h_0^* + h_0 (h_0^*)_z = 0.$$

Como  $h_0$  es holomorfa  $(h_0^*)_z = 0$  y por tanto  $(h_0)_z = 0$ , lo que implica que  $h_0$  es una constante.

Recíprocamente, sea  $h : M^2 \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$  una inmersión holomorfa con  $\det(dh) = 0$ . Consideramos  $h^{-1}dh$ , verifica:

$$\begin{aligned} \det(h^{-1}dh) &= \det(h^{-1}) \det(dh) = 0, \\ \text{traza}(h^{-1}dh) &= (\det(h))_z = 0. \end{aligned}$$

Esto implica la existencia de una función meromorfa  $g : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$  y una 1-forma holomorfa  $\omega$  tal que

$$h^{-1}dh = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \omega.$$

Definimos la aplicación  $\psi = hh^* : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ . Esta aplicación es inmersión por serlo  $h$ . Ahora, sea  $N : M^2 \rightarrow \mathbb{N}^3$  dada por

$$N = \frac{2}{1 + |g|^2} F \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} F^*,$$

con  $F$  dada por (3.24). Directamente se comprueba que  $\langle N, N \rangle = 0$ ,  $\langle N, \psi \rangle = -1$ , por medio de (3.23) resulta que  $\langle \psi_z, N \rangle = 0$ . Además, sea  $\eta$  el vector normal a la inmersión  $\psi$  ahora definida, por la igualdad (3.21) obtenemos que  $N = \psi + \eta$ . Por ser  $N$  conforme y  $F$  holomorfa,  $\psi$  tiene curvatura media constante 1 y define una superficie de Bryant.

La obtención de (3.12) es consecuencia directa de (3.14). |

**Observación 3.5.** Hay que observar que a pesar de emplear la misma notación que en los datos de Weierstrass, la función meromorfa  $g : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$  que aparece en (3.11) no tiene ninguna relación con la aplicación de Gauss, de hecho no tiene ningún significado geométrico.

**Observación 3.6 (Problema de los periodos).** Al igual que en la representación de Weierstrass en  $\mathbb{R}^3$ , la representación de superficies de Bryant requiere de un proceso de integración para recuperar la inmersión a partir de los datos holomorfos. En dominios simplemente conexos no supone ningún problema pero al considerar datos definidos sobre superficies de Riemann con topología no trivial la inmersión puede ser multivaluada sobre dicho dominio. Aparece de nuevo el llamado *problema de los periodos*. Comentábamos el caso de la representación de Weierstrass en la Observación 2.3. Para el caso de las superficies de Bryant el problema surge debido a que cuando la variedad  $M^2$  no es simplemente conexa la función  $g$  a la que le dedicábamos la observación anterior es multivaluada en  $M^2$ . Aunque la resolución de este problema en este caso es más compleja que en el caso minimal, también es posible extender la representación conforme de Bryant al caso no simplemente conexo [23].

### 3.3 Ejemplos de representación conforme de superficies de Bryant

En esta sección vamos a ver como construir algunas superficies de Bryant conocidas de manera que la inmersión venga dada en la forma  $\psi = hh^* : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ , siendo  $M^2$  una superficie de Riemann y  $h : M^2 \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$  una inmersión con  $\det(dh) = 0$ . Para ello, emplearemos la siguiente observación expuesta en [17]. Si expresamos la imagen de la aplicación de Gauss hiperbólica en la recta proyectiva compleja como  $G^+ = [1, G^+]$  (es decir, tomando en (3.15)  $A = 1$  y  $B = G^+$ ), y siguiendo el desarrollo realizado a continuación, la matriz  $h$  en (3.24) quedará de la forma

$$h = \begin{pmatrix} dC/dg & C - g dC/dg \\ dD/dg & D - g dD/dg \end{pmatrix}, \quad C = i\sqrt{dg/dG^+}, \quad D = iG^+ \sqrt{dg/dG^+}, \quad (3.27)$$

donde  $g$  es la función meromorfa que aparece en (3.14). Así la matriz de Bryant se recupera explícitamente en términos de  $G^+$  y  $g$ . De esta manera para construir los siguientes ejemplos basta dar  $G^+$  y  $g$  para recuperar la inmersión buscada a partir de (3.27).

**Ejemplo 3.1 (Dualidad sobre superficies de Bryant).** El primer ejemplo que vamos a ver es una noción de dualidad para superficies de Bryant introducida por Umehara y Yamada en [31]. Dada una superficie de Bryant, definida sobre una 2-variedad simplemente conexa, a partir de una inmersión  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  representada como  $\psi = hh^*$  para la aplicación holomorfa  $h : M^2 \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$ . Entonces, la aplicación  $h^\# = h^{-1} : M^2 \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$  vuelve a ser holomorfa y con  $\det(dh^\#) = 0$ .

Por tanto, por el Teorema (3.2) de la representación conforme de Bryant, la inmersión  $\psi^\# = h^\# (h^\#)^*$  define una nueva superficie de Bryant a la que denominaremos *superficie de Bryant dual* de la superficie  $\psi$ . Tenemos las siguientes relaciones entre los datos de holomorfos de ambas superficies de Bryant.

$$(G^+)^\# = g^{-1}, \quad g^\# = (G^+)^{-1}, \quad Q^\# = -Q.$$

A la métrica definida en  $M^2$  por  $\psi^\#$  la denominamos métrica dual de  $\psi$  y viene dada por

$$ds^{2\#} = (1 + |G^+|^2)^2 \left| \frac{Q}{dG^+} \right|^2.$$

El siguiente ejemplo corresponde a la horosfera, una superficie de Bryant especial por ser la única que verifica que es totalmente umbilical. Por tanto, su diferencial de Hopf es nula.

**Ejemplo 3.2 (Horofera).** Una horosfera en  $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$  es la superficie de revolución que se obtiene al intersecar  $\mathbb{H}^3$  con un plano cuyo vector normal se encuentra en  $\mathbb{N}^3$ . El origen de la noción se encuentra en una carta de F. L. Watcher a su profesor Gauss en 1816, aunque el término es atribuido a Lobachevsky quien estudió las similitudes de su geometría con las rectas del espacio euclídeo.

Así, consideraremos la horosfera dada por la intersección de  $\mathbb{H}^3$  con el plano

$$P = (1, 0, 0, 1) + \text{span} \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 0)\}.$$

Así la horosfera queda como

$$P \cap \mathbb{H}^3 = \{(1 + a, b, -c, -a) : 2a = b^2 + c^2\},$$

o pasando a forma hermítica

$$P \cap \mathbb{H}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b - ic \\ b + ic & 1 + 2a \end{pmatrix} : 2a = b^2 + c^2 \right\}.$$

Tomando  $w = b + ic$  obtenemos la horosfera expresada por medio de una inmersión  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}^3$  dada por

$$\psi(w) = \begin{pmatrix} 1 & \bar{w} \\ w & 1 + |w|^2 \end{pmatrix}.$$

Bastará tomar

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix}$$

para poder expresar la inmersión como  $\psi = hh^*$ . Puesto que  $\det(dh) = 0$  estamos obteniendo la representación conforme para la horosfera. En particular

$$h^{-1}dh = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dw,$$

lo que se corresponde a la expresión (3.11) tomando  $g = 0$  y  $\omega = dw$ .

**Ejemplo 3.3 (Catenoide cousin).** Las catenoides cousins conforman una familia uniparamétrica de superficies de revolución de curvatura media igual a 1 en  $\mathbb{H}^3$ . Fueron estudiadas por Bryant en [4], quien les otorgó este nombre en respuesta a que su métrica dual, que definíamos en el Ejemplo 3.1, coincide con la métrica de una catenoide en  $\mathbb{R}^3$ .

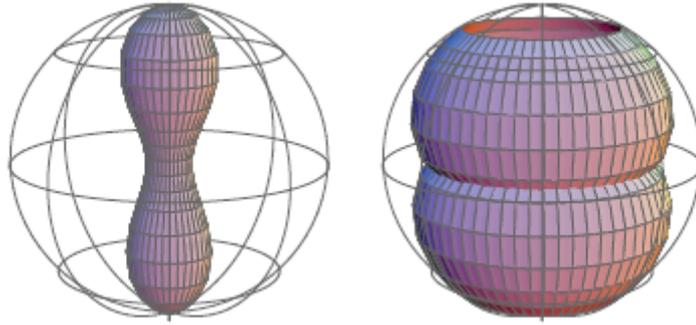


Figura 3.2: Representación de un par de catenoides cousin en el modelo de la bola de Poincaré extraída de [17]. Como se puede ver en la imagen dependiendo del parámetro que define la superficie esta puede ser embebida o no embebida.

En particular, las catenoides cousin se caracterizan por ser las superficies de Bryant que contienen una circunferencia como geodésica. A partir de este hecho [17] es posible obtener los siguientes datos holomorfos. Sea  $\varepsilon = \pm 1$  la aplicación de Gauss hiperbólica y la diferencial de Hopf de una catenoide cousin serán

$$G^+(z) = \varepsilon e^{-iz}, \quad Q = -\frac{b}{2} \left( b + \varepsilon \sqrt{1 + b^2} \right) dz^2.$$

Por medio de estos dos datos holomorfos es posible obtener el tercer dato de la inmersión por medio de la ecuación de Umehara-Yamada que es presentada en [17]. Así se obtiene

$$g(z) = \exp \left( i\sqrt{2k}z \right),$$

siendo  $k = 1/2 + b \left( b + \varepsilon \sqrt{1 + b^2} \right)$ . Se consiguen así todos los datos para recuperar la inmersión por medio de (3.27). La parametrización se realiza como  $\psi : \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{H}^3$ .

### 3.4 Aplicaciones de la representación conforme de Bryant

Al igual que la representación de Weierstrass abrió las puertas al empleo de nuevas técnicas para el estudio de superficies mínimas, lo mismo sucede con la representación conforme de superficies de Bryant. En particular, muchas de las técnicas de análisis

complejo que se emplean para superficies mínimas pueden ser utilizadas en este caso. Por ejemplo, tenemos el siguiente resultado obtenido análogamente al que daba Osserman para mínimas en  $\mathbb{H}^3$  en [25].

**| Teorema 3.3.** *Toda superficie de Bryant completa de curvatura total finita está parametrizada sobre una superficie de Riemann compacta menos una cantidad finita de puntos.*

Recordar que curvatura total finita designa a que la integral de la curvatura intrínseca a lo largo de la superficie converge. Las superficies que, como las del teorema anterior, son homeomorfas a una 2-variedad compacta a falta de una cantidad finita de puntos, se dice que son de *topología finita*. El recíproco del anterior teorema, exigiendo que la superficie sea propiamente embebida (ver Ejemplo 2.5) fue probado por primera vez por Collin-Hauswirth-Rosenberg en [10].

**| Teorema 3.4.** *Las superficies propiamente embebidas de curvatura constante 1 en  $\mathbb{H}^3$  de topología finita tienen curvatura total finita.*

Así mismo, en [10] los autores emplean la representación conforme de las superficies de Bryant para estudiar los finales, i.e. de que forma la superficie se acerca al borde ideal de  $\mathbb{H}^3$  en aquellos puntos en los que lo hace. La definición rigurosa es la siguiente.

**| Definición 3.2.** *Entendemos por final la imagen mediante una inmersión de un anillo difeomorfo a  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1\}$ . Diremos que el final es completo si lo es la inmersión.*

Los finales de una superficie de Bryant se pueden clasificar en dos tipos según como se extiende la aplicación de Gauss hiperbólica en ellos. Así, un final es *regular* si  $G^+$  se extiende de modo meromorfo sobre él, e *irregular* en caso contrario. En [10] se prueba el siguiente teorema al respecto.

**| Teorema 3.5.** *Las superficies propiamente embebidas de curvatura constante 1 en  $\mathbb{H}^3$  de topología finita son de finales regulares.*

Además, se clasifica el comportamiento asintótico de los finales de estas superficies.

**| Definición 3.3.** *Sean  $\psi, \phi : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{H}^3$  finales de superficies de Bryant regulares. Diremos que  $\psi$  y  $\phi$  son asintóticos si y sólo si la distancia (del espacio hiperbólico) entre  $\psi(\zeta)$  y  $\phi(\zeta)$  tiende a cero cuando  $\zeta$  tiende al origen.*

**| Teorema 3.6.** *Los finales regulares de una superficie de Bryant propiamente embebida son asintóticos a los finales de una catenoide cousin, a excepción del caso en que la superficie sea una horoesfera.*

Finalmente, por medio de este teorema los autores clasifican las superficies de Bryant propiamente embebidas, simplemente conexas, y con dos finales.

**| Teorema 3.7.** *La única superficie de Bryant simplemente conexa y propiamente embebida es la horoesfera, y la única con dos finales, la catenoide cousin.*

## 4 | Representación conforme de superficies llanas en $\mathbb{H}^3$

En este capítulo presentaremos una representación conforme para superficies llanas inmersas en  $\mathbb{H}^3$ . Las superficies llanas son aquellas cuya curvatura intrínseca es igual a 0. Esta representación fue dada por Gálvez, Martínez y Milán en [13].

La representación conforme de inmersiones llanas en el espacio hiperbólico se basan en un factor fundamental de este tipo de inmersiones. Este hecho es que la segunda forma fundamental de la inmersión definirá una métrica sobre la superficie. Así podremos trabajar con la estructura conforme definida a partir de esta métrica. En esta parte introductoria al capítulo desarrollaremos este resultado.

Sea  $M^2$  una 2-variedad simplemente conexa y  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  una inmersión cuya métrica  $ds^2 = \langle d\psi, d\psi \rangle$  es isométrica a la métrica del plano. Una inmersión de este tipo diremos que es *llana*. Dada una inmersión llana podemos tomar parámetros isotermos  $(x, y)$  de manera que la métrica viene dada como

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \quad (4.1)$$

**Observación 4.1.** Notar que por la relación que establecíamos en la Sección 1.3 para las curvaturas intrínsecas y extrínsecas en el espacio hiperbólico, obtenemos que  $K_{ext} = 1$  para inmersiones llanas en  $\mathbb{H}^3$ .

Denotemos por  $\eta$  al vector normal unitario a la inmersión en cada punto. Como comentábamos en la Sección 1.3 sobre el espacio hiperbólico,  $\eta \in \mathbb{S}_1^3$ . De esta manera se comprueba que  $\{\psi_x, \psi_y, \eta, \psi\}$  es una base ortonormal en cada punto de  $\mathbb{L}^4$ , siendo  $\psi$  el vector posición. Realizando cálculos sencillos llegamos a las siguientes ecuaciones de estructura de nuestra inmersión, que no son más que expresar los siguientes

vectores en función de la base  $\{\psi_x, \psi_y, \eta, \psi\}$ :

$$\begin{aligned}\psi_{xx} &= E\eta + \psi, \\ \psi_{xy} &= F\eta, \\ \psi_{yy} &= G\eta + \psi, \\ \eta_x &= -E\psi_x - F\psi_y, \\ \eta_y &= -F\psi_x - G\psi_y,\end{aligned}\tag{4.2}$$

donde  $E, F$  y  $G$  son funciones diferenciables sobre  $M$ . Realmente estas funciones son los coeficientes de la segunda forma fundamental de la inmersión, i.e.

$$E = \langle \psi_{xx}, \eta \rangle, \quad F = \langle \psi_{xy}, \eta \rangle, \quad y \quad G = \langle \psi_{yy}, \eta \rangle.$$

Recordamos ahora las ecuaciones fundamentales de la Teoría de Superficies. La ecuación de Gauss viene dada por

$$\langle (\psi_{xx})_y, \psi_y \rangle = \langle (\psi_{xy})_x, \psi_y \rangle.$$

Sustituyendo las ecuaciones de estructura (4.2) por medio de la ecuación de Gauss y usando el hecho de que  $\{\psi_x, \psi_y, \eta, \psi\}$  es un base ortonormal, obtenemos

$$\begin{aligned}\langle (E\eta + \psi)_y, \psi_y \rangle &= \langle (F\eta)_x, \psi_y \rangle, \\ \langle E_y\eta + E\eta_y + \psi_y, \psi_y \rangle &= \langle F_x\eta + F\eta_x, \psi_y \rangle, \\ E\langle -F\psi_x - G\psi_y, \psi_y \rangle + \langle \psi_y, \psi_y \rangle &= F\langle -E\psi_x - F\psi_y, \psi_y \rangle, \\ -EG + 1 &= -F^2.\end{aligned}$$

Verificándose entonces

$$EG - F^2 = 1\tag{4.3}$$

Las ecuaciones de Codazzi-Mainardi son

$$\langle (\psi_{xx})_y, \eta \rangle = \langle (\psi_{xy})_x, \eta \rangle, \quad y \quad \langle (\psi_{xy})_y, \eta \rangle = \langle (\psi_{yy})_x, \eta \rangle.$$

A partir de la primera de estas ecuaciones, procedemos de la misma manera que como lo hacíamos para la ecuación de Gauss, teniendo en cuenta que  $\eta \in \mathbb{S}_1^3$ ,

$$\begin{aligned}\langle E_y\eta + E\eta_y + \psi_y, \eta \rangle &= \langle F_x\eta + F\eta_x, \eta \rangle, \\ E_y\langle \eta, \eta \rangle + E\langle -E\psi_x - F\psi_y, \eta \rangle &= F_y\langle \eta, \eta \rangle + F\langle -F\psi_x - G\psi_y, \eta \rangle, \\ -E_y &= -F_x.\end{aligned}$$

Haciendo lo mismo para la segunda de las ecuaciones de Codazzi-Mainardi obtenemos las siguientes relaciones entre las derivadas parciales de las funciones  $E, F$  y  $G$ :

$$E_y = F_x, \quad y \quad F_y = G_x,\tag{4.4}$$

respectivamente de cada ecuación.

Ahora usaremos el Teorema de Frobenius, que enunciaremos a continuación.

**| Teorema 4.1 (Teorema de Frobenius).** *Dada una variedad simplemente conexa  $M$  orientable y dadas funciones diferenciables  $E$ ,  $F$  y  $G$  definidas sobre  $M$ . Entonces existirá una función diferenciable  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\phi_{xx} = E$ ,  $\phi_{yy} = G$  y  $\phi_{xy} = F$  si y sólo si  $F_x = E_y$  y  $G_x = F_y$ .*

En nuestro caso, al haber considerado  $M^2$  variedad simplemente conexa, las igualdades (4.4) nos aseguran la existencia de una función  $\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$  verificando las hipótesis del Teorema de Frobenius. De esta forma la segunda forma de la inmersión se puede expresar a partir de  $\phi$  como

$$d\sigma^2 = \phi_{xx} dx^2 + \phi_{yy} dy^2 + 2\phi_{xy} dx dy, \quad (4.5)$$

traduciéndose la ecuación de Gauss (4.3) en

$$\phi_{xx} \phi_{yy} - \phi_{xy}^2 = 1. \quad (4.6)$$

De (4.3) deducimos que por medio de la elección de una orientación adecuada de  $M^2$  podemos tomar  $\phi_{xx} > 0$ . De esta forma la segunda forma fundamental será definida positiva y definirá una métrica sobre  $M^2$ . Así, de acuerdo a lo estudiado en la sección 1.1, consideraremos  $M^2$  como superficie de Riemann dotada de la estructura conforme inducida por la segunda forma fundamental  $d\sigma^2$ .

## 4.1 Superficies llanas y aplicación de Gauss hiperbólicas en $\mathbb{H}^3$

Como hemos visto en el resto de capítulos la existencia de representaciones conformes para un determinado tipo de superficie está estrechamente relacionada con la existencia de una aplicación holomorfa de la superficie en la esfera de Riemann. En el caso de inmersiones llanas en  $\mathbb{H}^3$  esta aplicación viene dada por las aplicaciones de Gauss hiperbólicas y tenemos el siguiente teorema análogo al Teorema 2.1, para superficies mínimas y al Teorema 3.1. Observar que la diferencia fundamental con respecto al teorema para superficies de Bryant es que aquí las aplicaciones de Gauss hiperbólicas son holomorfas con respecto a la estructura conforme inducida por  $d\sigma^2$ , y no de  $ds^2$ .

**| Teorema 4.2.** *Sea  $N^2$  una superficie orientable y conexa y  $\varphi : N^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  una inmersión tal que su segunda forma fundamental es definida positiva para una elección del vector normal  $\eta$ . Si sobre  $N^2$  consideramos la estructura conforme inducida por la segunda forma fundamental, entonces la inmersión  $G^- = [\varphi - \eta] : N^2 \rightarrow \mathbb{S}_\infty^2$  ( $G^+ = [\varphi + \eta] : N^2 \rightarrow \mathbb{S}_\infty^2$ ) es conforme si y sólo si o bien la métrica inducida por  $\varphi$  es llana o bien  $\varphi$  es una inmersión totalmente umbilical.*

**Demostración.** Sea  $p \in N^2$  y  $\{E_1, E_2\}$  una base ortonormal en un entorno de  $p$  que diagonaliza la métrica asociada a la segunda forma fundamental, esto es

$$d\sigma^2(E_i, E_j) = \langle -d\eta(E_i), d\varphi(E_j) \rangle = h_{ij}\delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2\}, \quad (4.7)$$

donde  $\delta_{ij}$  denota la función Delta de Kronecker. Para comprobar que  $[\varphi - \eta]$  sea conforme con respecto a la métrica inducida por la segunda forma fundamental basta que se cumpla

$$\langle d(\varphi - \eta)(E_i), d(\varphi - \eta)(E_j) \rangle = \lambda h_{ij}\delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2\}, \quad (4.8)$$

para  $\lambda : N^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  diferenciable. Por medio de las igualdades en (4.7) las expresiones de (4.8) se verificarán si y sólo si se cumple

$$\frac{(1 - h_{11})^2}{h_{11}} = \frac{(1 - h_{22})^2}{h_{22}},$$

para todo  $p \in N^2$ . O equivalentemente

$$(h_{22} - h_{11})(1 - h_{11}h_{22}) = 0. \quad (4.9)$$

Si la inmersión  $\varphi$  es totalmente umbilical las curvaturas principales coinciden en todos los puntos. Por otra parte, recordamos que la curvatura exterior de una superficie llana es 1, Observación 4.1. Dada la base  $\{E_1, E_2\}$  de  $d\sigma^2$  se tiene que  $K_{ext} = h_{11}h_{22}$ . En consecuencia tenemos la implicación hacia la izquierda del teorema.

Para la implicación hacia la derecha partimos de la igualdad (4.9). Consideremos el conjunto  $N' = \{p \in N^2 : K_{ext}(p) \neq 1\}$ . Este conjunto es abierto y en él  $\psi|_{N'}$  es totalmente umbilical. Así,  $K_{ext}$  es constante sobre cada componente conexa de  $N'$  (pues las superficies totalmente umbilicales en  $\mathbb{H}^3$  son o bien horosferas o trozos de esferas [29]) y, por tanto, de su clausura. Con lo que,  $\psi$  es llana o totalmente umbilical. |

## 4.2 Teorema de representación conforme

Esta sección está dedicada a la demostración del teorema de representación conforme para superficies llanas en  $\mathbb{H}^3$ . Continuamos empleando la misma notación que introducíamos al comienzo de este capítulo.

*Observación 4.2.* Para adaptarnos a la notación empleada por los autores de [13] en esta sección realizaremos la identificación de  $S_\infty^2$  en  $\mathbb{C}_\infty$  por medio de la proyección estereográfica contraria a la que usábamos en el capítulo anterior, ahora desde el polo norte. Como consecuencia ahora al pasar al cociente en el cono de luz estamos conservando la orientación. La identificación será

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \mapsto \frac{x_1 - ix_2}{x_0 - x_3} \in \mathbb{C}_\infty \equiv \mathbb{C}\mathbb{P}^1.$$

*Lema 4.1.* El parámetro complejo

$$z = u + iv = (x + \phi_x) + i(y + \phi_y) \quad (4.10)$$

es un parámetro conforme para la estructura conforme inducida por  $d\sigma^2$ .

*Demostración.* La matriz Jacobiana del cambio de coordenadas  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  es

$$J \begin{pmatrix} (x, y) \\ (u, v) \end{pmatrix} = \frac{1}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}} \begin{pmatrix} +1 + \phi_{yy} & -\phi_{xy} \\ -\phi_{xy} & 1 + \phi_{xx} \end{pmatrix}.$$

De esta forma tenemos

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}} \left( (1 + \phi_{yy}) du - \phi_{xy} dv \right) \\ dy &= \frac{1}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}} \left( -\phi_{xy} du + (1 + \phi_{xx}) dv \right). \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (4.5) y usando (4.6) llegamos a la siguiente expresión para la segunda forma fundamental en función de  $z$

$$d\sigma^2 = \frac{1}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}} |dz|^2, \quad (4.11)$$

que nos indica, por (1.4), que efectivamente  $z$  es un parámetro conforme para la estructura conforme inducida por la segunda forma fundamental. |

*Lema 4.2.* La aplicación de Gauss hiperbólica  $G^- = [\psi - \eta] : M^2 \rightarrow S_\infty^2 \equiv \mathbb{C}_\infty$  (Observación 3.1) es holomorfa con respecto a la estructura conforme inducida por la segunda forma fundamental en  $M^2$ .

*Demostración.* Empleando la matriz Jacobiana para obtener las expresiones de las derivadas parciales de  $\psi$  y  $\eta$  con respecto a  $u$  y  $v$  llegamos a que

$$(\psi - \eta)_u = \psi_x, \quad y \quad (\psi - \eta)_v = \psi_y. \quad (4.12)$$

Entonces, puesto que  $(x, y)$  son parámetros isotermos para la inmersión  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$ , los parámetros  $(u, v)$  serán a su vez isotermos para la aplicación  $\psi - \eta : M^2 \rightarrow \mathbb{N}^3 \subset \mathbb{L}^4$ . De manera que  $z = u + iv$  es un parámetro conforme para  $\psi - \eta$ , y con ello para  $[\psi - \eta] : M^2 \rightarrow \mathbb{S}_\infty^2$ . Además de (4.12) vemos que  $\psi - \eta$  conserva la orientación, por lo que  $[\psi - \eta] : M^2 \rightarrow \mathbb{S}_\infty^2 \cong \mathbb{C}_\infty$  también la conserva (Observación 4.2) y será holomorfa. |

*Observación 4.3.* Recordamos que el borde ideal presenta una estructura de superficie de Riemann conformemente equivalente a la esfera de Riemann (Sección 1.3). De esta forma, con el lema anterior hemos probado que la aplicación  $[\psi - \eta] : M^2 \rightarrow \mathbb{S}_\infty^2 \cong \mathbb{C}_\infty$  se puede ver como una aplicación holomorfa de  $M^2$  en la esfera de Riemann.

*Lema 4.3.* La inmersión  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  puede ser recuperada a partir de la aplicación  $\psi - \eta : M^2 \rightarrow \mathbb{N}^3$  como

$$\psi = \frac{1}{2} (\psi - \eta) + 2(\psi - \eta)_{z\bar{z}}. \quad (4.13)$$

*Demostración.* Obtenemos las siguientes expresiones para las derivadas parciales de segundo orden de  $\psi - \eta$

$$\begin{aligned} (\psi - \eta)_{uu} &= \frac{1 + \phi_{yy}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}} \psi + \frac{1 + \phi_{xx}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}} \eta, \\ (\psi - \eta)_{vv} &= \frac{1 + \phi_{xx}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}} \psi + \frac{1 + \phi_{yy}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}} \eta. \end{aligned}$$

A partir de estas expresiones el laplaciano de  $\psi - \eta$  queda:

$$4(\psi - \eta)_{z\bar{z}} = (\psi - \eta)_{uu} + (\psi - \eta)_{vv} = \psi + \eta.$$

Aplicando dos veces esta igualdad deducimos finalmente

$$\psi = 2(\psi - \eta)_{z\bar{z}} + 2(\psi - \eta)_{z\bar{z}} - \eta = 2(\psi - \eta)_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}(\psi - \eta). \quad |$$

*Proposición 4.1.* La aplicación  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  se puede recuperar como  $\psi = gg^*$ , de acuerdo a la identificación de  $\mathbb{H}^3$  con  $\text{Herm}(2)$ , donde  $g : M^2 \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$  es una

inmersión holomorfa de  $M^2$  en el grupo especial lineal complejo de orden 2, i.e. las matrices complejas de determinante igual a 1, que verifica

$$g^{-1}dg = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dz, \quad (4.14)$$

siendo  $f : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$  con  $|f| < 1$ .

*Demostración.* En la Observación 4.3 veíamos como  $[\psi - \eta] : M^2 \rightarrow \mathbb{S}_\infty^2 \equiv \mathbb{C}_\infty \equiv \mathbb{CP}^1$  es una aplicación holomorfa. Por ello, existirán  $A, B : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$  funciones holomorfas tal que la imagen de  $[\psi - \eta]$  queda representada por  $[A, B]$ , por medio de la identificación de la esfera de Riemann con la recta proyectiva compleja. De esta manera, de acuerdo a la identificación de  $\mathbb{S}_\infty^2$  como el cociente  $\mathbb{N}^3/\mathbb{R}^+$  que hacíamos en la Sección 1.3,  $\psi - \eta : M^2 \rightarrow \mathbb{N}^3$  viene dada por

$$\psi - \eta = \lambda \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} (\bar{A}, \bar{B}) = \lambda \begin{pmatrix} A\bar{A} & A\bar{B} \\ \bar{A}B & B\bar{B} \end{pmatrix} \in \text{Herm}(2), \quad (4.15)$$

para alguna función real positiva  $\lambda \in C^\infty(M^2)$ . Por medio de esta expresión, empleando el producto escalar de  $\text{Herm}(2)$ , que detallábamos en (1.6), llegamos a

$$\langle (\psi - \eta)_z, (\psi - \eta)_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{2} \lambda^2 |AB_z - BA_z|^2. \quad (4.16)$$

Por otro lado, a partir de (4.1) y (4.12) tenemos

$$\langle (\psi - \eta)_z, (\psi - \eta)_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{2}.$$

Sustituyendo en (4.16), finalmente llegamos a que

$$\frac{1}{2} \lambda^2 |AB_z - BA_z|^2 = \frac{1}{2}.$$

De aquí obtenemos que  $AB_z - BA_z$  no se anula sobre  $M^2$ , así existirá una función holomorfa  $R : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$  con  $R^2 = AB_z - BA_z$ . Llamamos  $C = A/(\sqrt{2}R)$  y  $D = B/(\sqrt{2}R)$  entonces la expresión (4.15) queda

$$\psi - \eta = 2 \begin{pmatrix} C\bar{C} & C\bar{D} \\ \bar{C}D & D\bar{D} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Por su construcción  $C, D : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$  son funciones holomorfas. En particular cumplen

$$CD_z - DC_z = \frac{1}{2}. \quad (4.18)$$

Por medio de (4.13) y (4.17) podemos expresar  $\psi$  en forma hermítica como

$$\psi = \begin{pmatrix} C\bar{C} + 4C_z\bar{C}_z & C\bar{D} + 4C_z\bar{D}_z \\ \bar{C}D + 4\bar{C}_zD_z & D\bar{D} + 4D_z\bar{D}_z \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

y para su normal unitario

$$\eta = \begin{pmatrix} -C\bar{C} + 4C_z\bar{C}_z & -C\bar{D} + 4C_z\bar{D}_z \\ -\bar{C}D + 4\bar{C}_zD_z & -D\bar{D} + 4D_z\bar{D}_z \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Definimos ahora la función  $f : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$f = \frac{\phi_{yy} - \phi_{xx} + 2i\phi_{xy}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}}. \quad (4.21)$$

Esta función  $f$  verifica la igualdad  $(\psi + \eta)_z = f(\psi - \eta)_{\bar{z}}$ , lo que en forma matricial queda

$$4 \begin{pmatrix} C_{zz}\bar{C}_z & \bar{C}_{zz}\bar{D}_z \\ \bar{C}_zD_{zz} & D_{zz}\bar{D}_z \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} C\bar{C}_z & C\bar{D}_z \\ \bar{C}_zD & D\bar{D}_z \end{pmatrix}.$$

De (4.18) tenemos que  $C_z$  y  $D_z$  no se pueden anular simultáneamente. Por tanto, de la anterior igualdad deducimos que

$$C_{zz} = \frac{1}{4}fC, \quad D_{zz} = \frac{1}{4}fD. \quad (4.22)$$

Así,  $f : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa. Se comprueba fácilmente a partir de la definición y de la igualdad (4.6) que el módulo de  $f$  es siempre estrictamente menor a 1:

$$|f| < 1.$$

Finalmente, definimos la inmersión holomorfa  $g : M^2 \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$  dada por

$$g = \begin{pmatrix} C & 2C_z \\ D & 2D_z \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Se comprueba a partir de (4.19) que la inmersión  $\psi$  es devuelta por

$$\psi = gg^*.$$

Además, aplicando (4.22) de forma directa se comprueba

$$g^{-1}dg = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dz. \quad (4.24)$$

■

**Observación 4.4.** Es posible obtener expresiones para la primera y la segunda forma fundamental de la inmersión  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  a partir de la función  $f$ . Así, sea  $\omega = \frac{1}{2}dz$ , estas se expresan como

$$\begin{aligned} ds^2 &= f\omega^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2 + (1 + |f|^2) |\omega|^2, \\ d\sigma^2 &= (1 - |f|^2) |\omega|^2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Tenemos ahora las herramientas necesarias para poder presentar el Teorema de representación conforme para superficies llanas en  $\mathbb{H}^3$ .

**| Teorema 4.3 (Representación conforme de superficies llanas en  $\mathbb{H}^3$ ).** *Sea  $M^2$  una superficie simplemente conexa y  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  una inmersión llana. Si sobre  $M^2$  consideramos la estructura conforme determinada por la segunda forma fundamental de  $\psi$ , entonces existe una inmersión holomorfa  $g : M^2 \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$  y un par  $(f, \omega)$  formado por una función holomorfa  $f$  y una 1-forma holomorfa  $\omega$  definidas sobre  $M^2$  tal que:*

- a)  $|f| < 1$  y  $\omega \neq 0$  en todo punto,
- b) Se verifica

$$g^{-1}dg = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega. \quad (4.26)$$

- c)  $\psi = gg^*$ .
- d) la métrica inducida por la inmersión y la segunda forma fundamental vienen dadas por (4.25).

Además,  $g$  es única salvo multiplicación a la derecha por una matriz constante  $g_0 \in \mathbb{S}\mathbb{U}(2)$ , donde  $\mathbb{S}\mathbb{U}(2) = \{m \in \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C}) / mm^* = I_2\}$ .

Recíprocamente, sean  $M^2$  una superficie de Riemann y  $g : M^2 \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$  una inmersión holomorfa tal que  $g^{-1}dg$  se expresa como en (4.26) donde  $(f, \omega)$  es un par formado por una función holomorfa con  $|f| < 1$  y  $\omega$  una 1-forma holomorfa la cual nunca se anula definidas sobre  $M^2$ . Entonces  $\psi = gg^* : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  es una inmersión llana con métrica y segunda forma fundamental dadas por (4.25).

**| Definición 4.1.** El par  $(f, \omega)$  en el teorema anterior serán llamados datos de Weierstrass asociados a la representación conforme de la inmersión llana.

**Demostración.** Para la primera implicación del teorema, la existencia de  $g$  y  $f$  así como la verificación de a), b), c) y d) ha sido desarrollada en la Proposición 4.1 y la

Observación 4.4. La demostración de la unicidad es idéntica a la que realizábamos el caso del Teorema 3.2 de representación conforme para superficies de Bryant.

Para probar el recíproco, sean  $g : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  una inmersión holomorfa cumpliendo (4.26) y sea  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  la aplicación dada por  $\psi = gg^*$ . Tenemos que

$$dg = g \begin{pmatrix} 0 & f\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte  $(g^{-1}dg)^* = dg^*(g^{-1})^*$  y por tanto

$$dg^* = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega} \\ \bar{f}\bar{\omega} & 0 \end{pmatrix} g^*.$$

Así tenemos

$$d\psi = g \begin{pmatrix} 0 & f\omega + \bar{\omega} \\ \omega + \bar{f}\bar{\omega} & 0 \end{pmatrix} g^*. \quad (4.27)$$

Como  $f$  y  $\omega$  son holomorfas, entonces  $(1+f)\omega$  y  $(1+\bar{f})\bar{\omega}$  serán holomorfas y antiholomorfas, respectivamente. Por tanto, sus diferenciales se anulan y tendremos

$$d\left(\frac{1}{2}(1+f)\omega + \frac{1}{2}(1+\bar{f})\bar{\omega}\right) = 0, \quad d\left(\frac{i}{2}(1-f)\omega - \frac{i}{2}(1-\bar{f})\bar{\omega}\right) = 0.$$

Observar que estas son las diferenciales de la parte real e imaginaria de  $(1+f)\omega$ . Es decir, tenemos formas diferenciales reales cerradas. Así empleando el Lema de Poincaré [30] existen funciones locales bien definidas localmente  $x$  e  $y$  que cumplen

$$dx = \frac{1}{2}(1+f)\omega + \frac{1}{2}(1+\bar{f})\bar{\omega}, \quad dy = \frac{i}{2}(1-f)\omega - \frac{i}{2}(1-\bar{f})\bar{\omega},$$

verificándose

$$dx \wedge dy = \frac{-i}{2} (1 - |f|^2) \omega \wedge \bar{\omega}.$$

Como  $|f| < 1$ , tenemos que  $(x, y)$  son nuevas coordenadas. Y, de (4.27), la métrica inducida viene dada por

$$ds^2 = \langle d\psi, d\psi \rangle = -\det(d\psi) = f\omega^2 + (1 + |f|^2) |\omega|^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2 = dx^2 + dy^2,$$

al ser  $g \in \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$ . Lo que se corresponde a una inmersión llana.

Además, de (4.27) se comprueba que un normal a la inmersión es

$$\eta = -g \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g^*,$$

con

$$d\eta = -g \begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega} - f\omega \\ \omega - \bar{f}\bar{\omega} & 0 \end{pmatrix} g^*.$$

Así, concluimos que la segunda forma fundamental de la inmersión  $\psi$  queda

$$d\sigma^2 = \langle d\psi, -d\eta \rangle = (1 - |f|^2) |\omega|^2.$$

Concluimos así la demostración. |

**Observación 4.5.** Pese a que hemos enunciado el Teorema de representación conforme de superficies llanas para 2-variedades simplemente conexas, es posible generalizarlo al caso en el que  $M^2$  no cumple necesariamente esta hipótesis con un espíritu similar a lo que comentábamos en la Observación 2.3 para superficies mínimas y en la Observación 3.6 para superficies de Bryant.

### 4.3 Ejemplos de representación conforme de superficies llanas

En este apartado vamos a dar algunos ejemplos de superficies llanas en  $\mathbb{H}^3$  construidas a partir de datos de Weierstrass. En primer lugar, dados unos datos de Weierstrass damos una expresión de la inmersión  $g : M^2 \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$  en función de estos datos de manera similar a la dada en (4.23).

Si consideramos los datos de Weierstrass  $(f, \omega)$  definidos sobre una superficie de Riemann  $M^2$  escritos en un parámetro arbitrario  $\zeta$  como  $(f(\zeta), h(\zeta)d\zeta)$  y sea la inmersión holomorfa  $g : M^2 \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$  dada por

$$g = \begin{pmatrix} C & E \\ D & F \end{pmatrix}.$$

De (4.26) obtenemos la siguiente igualdad matricial

$$\begin{pmatrix} C_\zeta & E_\zeta \\ D_\zeta & F_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hE & fhC \\ hF & fhD \end{pmatrix}.$$

Igualando las entradas de las matrices obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{h}C_\zeta, \\ F &= \frac{1}{h}D_\zeta, \\ C &= \frac{1}{fh}E_\zeta, \\ D &= \frac{1}{fh}F_\zeta. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Sustituyendo las dos primeras igualdades en las dos últimas obtenemos que  $C$  y  $D$  serán soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial ordinaria

$$X_{\zeta\zeta} - \frac{h_\zeta}{h} X_\zeta - fh^2 X = 0. \quad (4.29)$$

Recíprocamente podemos tomar soluciones  $C$  y  $D$  linealmente independientes de (4.29) con

$$\frac{1}{h} (CD_\zeta - DC_\zeta) = 1$$

de manera que la inmersión  $g : M^2 \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$  dada por

$$g = \begin{pmatrix} C & \frac{1}{h}C_\zeta \\ D & \frac{1}{h}D_\zeta \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

determina una inmersión llana con datos de Weierstrass  $(f(\zeta), h(\zeta)d\zeta)$ .

**Observación 4.6.** Si tomamos otras soluciones independientes de la ecuación (4.29) obtendremos otra inmersión llana  $\tilde{\psi}$  que coincide con  $\psi$  salvo una isometría de  $\mathbb{H}^3$  (ver [12]).

**Ejemplo 4.1 (Superficies paralelas).** Consideremos una superficie simplemente conexa  $M^2$  y una inmersión llana  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ . Por el Teorema 4.3 existe un parámetro conforme con respecto a la segunda forma fundamental  $\zeta$  sobre  $M^2$  y datos de Weierstrass  $(f, h d\zeta)$  tal que  $\psi = gg^*$  con  $g : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  determinada por (4.29) y (4.30).

Si ahora tomamos  $f_t = e^{2t}f$  y  $\omega_t = e^{-t}h d\zeta$  para  $t$  tal que  $|f_t|$  siga teniendo módulo menor a 1, para cada  $t$  podemos definir la inmersión  $g_t : M^2 \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{C})$  dada por

$$g_t = \begin{pmatrix} e^{-t/2}C & \frac{1}{h}e^{t/2}C_\zeta \\ e^{-t/2}D & \frac{1}{h}e^{t/2}D_\zeta \end{pmatrix}$$

y verificando que

$$g_t^{-1}dg_t = \begin{pmatrix} 0 & e^{2t}f \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{-t}hd\zeta.$$

Es decir,  $(f_t, h_t d\zeta)$  son datos de Weierstrass para la inmersión  $\psi_t = g_t g_t^*$ . Además  $\psi_t = \cosh(t)\psi + \sinh(t)\eta$ , que es una inmersión llana paralela a  $\psi$  a distancia  $|t|$ .

Los siguientes ejemplos de representación conforme se corresponderán con superficies de revolución en  $\mathbb{H}^3$ , así que vamos a introducir brevemente estas superficies. Para ello emplearemos el modelo del semiespacio superior de  $\mathbb{R}^3$  que presentábamos

en la Sección 1.3. En este espacio una superficie de revolución alrededor de la geodésica  $\{(0, 0, x_3) : x_3 > 0\}$  puede ser parametrizada de la forma

$$\psi(r, \theta) = (y_1(r) \cos(\theta), y_1(r) \sin(\theta), y_3(r))$$

con  $y_1(r) > 0$  y tomando  $r$  el parámetro longitud de arco de la curva generatriz  $(y_1(r), 0, y_3(r))$ , ver [13]. La curvatura intrínseca o de Gauss de esta inmersión, ver [7], viene dada por

$$K_{int} = -\frac{d^2}{dr^2} \left( \frac{y_1(r)}{y_3(r)} \right) \frac{y_3(r)}{y_1(r)}.$$

Se comprueba que  $K_{int}$  se anula, si y sólo si,  $y_1(r) = (ar + b)y_3(r)$ , con  $a$  y  $b$  no ambos nulos. Tendríamos en ese caso una superficie de revolución llana.

Vamos a centrarnos en estudiar las representaciones conforme de dos tipos de superficie de revolución llanas. Estas son las horosferas, cuando  $a \in \{-1, +1\}$  y los cilindros hiperbólicos, si  $a = 0$ .

**Ejemplo 4.2 (Horosferas).** Recordamos que una horosfera en  $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$  es la superficie de revolución que se obtiene al intersecar  $\mathbb{H}^3$  con un plano cuyo vector normal se encuentra en  $\mathbb{N}^3$ . La Figura 4.1 muestra dos horosferas en el modelo del semiespacio superior de  $\mathbb{R}^3$

Los datos de Weierstrass para una horosfera se consiguen tomando  $M^2 = \mathbb{C}$  con  $f = 0$  y  $\omega = d\zeta$ . De acuerdo a las expresiones (4.29) y (4.30) la inmersión  $g$  en este caso vendrá dada de la forma

$$g = \begin{pmatrix} C & C_\zeta \\ D & D_\zeta \end{pmatrix}$$

siendo  $C$  y  $D$  soluciones independientes de la ecuación

$$X_{\zeta\zeta} = 0.$$

Podemos así tomar las soluciones  $C = 1$  y  $D = \zeta$ , en este caso la inmersión  $\psi = gg^*$  de una horosfera queda

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & \bar{\zeta} \\ \zeta & |\zeta|^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 4.3.** Un cilindro hiperbólico en  $\mathbb{H}^3$  es el conjunto de puntos a una distancia fija de una geodésica, Figura 4.2. Los datos de Weierstrass de un cilindro hiperbólico son

$$f = \frac{1}{k^2}, \quad \omega = \frac{k}{2\zeta} d\zeta,$$

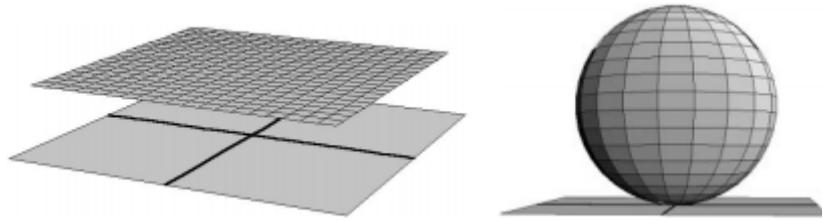


Figura 4.1: En el modelo del espacio hiperbólico del semiespacio: a la izquierda horosfera para  $a = -1$ , a la derecha horosfera obtenida con  $a = 1$ . Imágenes extraídas de [13].

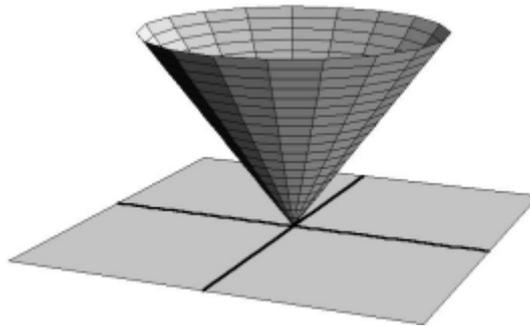


Figura 4.2: Cilindro hiperbólico representado en el modelo del semiespacio. Imagen extraída de [13].

con  $k^2 = 2b^2 + 1$ , y tomando  $M^2 = \mathbb{C}^*$ . Así la ecuación diferencial (4.29) queda

$$X_{\zeta\zeta} + \frac{1}{\zeta}X_{\zeta} - \frac{1}{4}\frac{1}{\zeta^2}X = 0.$$

Tomamos las soluciones independientes  $C = \zeta^{1/2}$  y  $D = \zeta^{-1/2}$ . Así la inmersión  $g$ , de acuerdo a (4.30), será

$$g = \begin{pmatrix} \zeta^{1/2} & \frac{1}{k}\zeta^{1/2} \\ \zeta^{-1/2} & -\frac{1}{k}\zeta^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

La correspondiente inmersión llana será

$$\psi = \frac{k^2}{|\zeta|} \begin{pmatrix} (k^2 + 4)|\zeta|^2 & (k^2 - 4)\zeta \\ (k^2 - 4)\bar{\zeta} & (k^2 + 4) \end{pmatrix}.$$

Finalmente mencionamos que cuando  $a \notin \{-1, 0, 1\}$  las superficies obtenidas son superficies de revolución llanas no completas [13]. Se trata de superficies que

presentan una singularidad provocada debido a que la curva generatriz corta al eje de rotación de forma no perpendicular. Al eliminar dicha singularidad no diferenciable el resultado es la pérdida de la completitud.

## 4.4 Aplicaciones de la representación conforme de superficies llanas en $\mathbb{H}^3$

En esta sección haremos uso de la representación conforme que hemos desarrollado en este capítulo para estudiar las superficies llanas inmersas en  $\mathbb{H}^3$ . En primer lugar debemos tener en cuenta que existe una clasificación total de las superficies llanas completas en  $\mathbb{H}^3$  que fue propuesta de manera independiente por Sasaki y Volkov-Vladimirova en [27] y [32], respectivamente. El teorema es el siguiente.

**Teorema 4.4.** *Sea  $M^2$  una 2-variedad simplemente conexa y  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ . Entonces  $\psi(M^2)$  es o bien una horosfera o el conjunto de puntos a una distancia fija de una geodésica (cilindro hiperbólico).*

Aunque las demostraciones originales no hacen uso de la representación conforme nosotros daremos una prueba alternativa empleando esta herramienta propuesta en [13].

**Demostración.** La variedad  $M^2$  con la estructura conforme inducida por la segunda forma fundamental  $d\sigma^2$  adquiere estructura de superficie de Riemann simplemente conexa. Por el Teorema 1.3 de uniformización  $M^2$  será conformemente equivalente a uno de los siguientes espacios:  $\mathbb{C}_\infty$ ,  $\mathbb{C}$  o  $\mathbb{D}$ . En primer lugar, podemos excluir la esfera de Riemann pues la métrica  $d\sigma^2$  es conforme a la métrica llana del plano complejo, ver (4.11).

Sean  $(f, \omega)$  los datos de Weierstrass asociados a la inmersión  $\psi$ , recordamos las expresiones para  $ds^2$  y  $d\sigma^2$  en función de estos datos:

$$\begin{aligned} ds^2 &= f\omega^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2 + (1 + |f|^2) |\omega|^2, \\ d\sigma^2 &= (1 - |f|^2) |\omega|^2. \end{aligned}$$

Por ser  $|f| < 1$  tenemos la desigualdad

$$ds^2 \leq 4|\omega|^2. \quad (4.31)$$

Por la expresión (4.31), si  $M^2$  fuera conformemente equivalente al disco, por el Lema 2.6, (al ser  $\omega \neq 0$ ), llegaríamos a una contradicción con la completitud de  $ds^2$ .

Concluimos que  $M^2$  debe ser biholomorfa a  $\mathbb{C}$ . Ahora, como en este caso  $f$  será una función entera de módulo menor que 1, será constante. Así, podemos tomar datos de Weierstrass para la inmersión de la forma  $(c, d\zeta)$  con  $c$  constante y  $\zeta \in \mathbb{C}$ . De acuerdo al Ejemplo 4.2 si  $c = 0$  la inmersión  $\psi$  se corresponderá con una horosfera, por el contrario si  $c \neq 0$ , por medio del cambio de variable  $z = e^{2\zeta/c}$ , obtenemos los datos de Weierstrass del Ejemplo 4.3 y  $\psi$  será un cilindro hiperbólico. |

Otra característica de las superficies llanas que es posible estudiar por medio de la representación conforme son los finales, que definíamos en 3.2. En particular, un final completo de una superficie puede ser de dos tipos: biholomorfo a una corona circular o a un disco menos un punto, que pese a ser difeomorfos no son conformemente equivalente. Así Gálvez, Martínez y Milán probaron la siguiente caracterización de los finales de una superficie llana completa en [13].

**Proposición 4.2.** Todo final completo de una superficie llana en  $\mathbb{H}^3$  es biholomorfo, con la estructura conforme dada por la segunda forma fundamental, a un disco menos un punto.

Por tanto, el estudio de finales completos es equivalente al estudio de inmersiones  $\psi : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ , donde  $\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ , para las cuales la métrica inducida es completa en el origen.

**Definición 4.2.** Sea  $\psi : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{H}^3$  una inmersión llana con final completo en el origen. Diremos que el final es regular si la aplicación de Gauss hiperbólica  $G^-$  se extiende de manera holomorfa sobre el origen.

Así en [13] se prueba el siguiente teorema relativo a finales regulares.

**Teorema 4.5.** Sea  $\psi : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{H}^3$  una inmersión llana con final completo en el origen, y sean  $(f, \omega)$  datos de Weierstrass asociados a  $\psi$ . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) El final es regular.
- b)  $f\omega^2$  tiene como mucho un polo de orden 2 en el origen.
- c) La ecuación diferencial (4.29) tiene una singularidad regular en el origen.

Otro aspecto estudiado en [13] es el comportamiento de los finales regulares en el infinito. Así se comprueba que guardan similitudes con el comportamiento de las superficies llanas de revolución. Presentamos la siguiente definición análoga a la definición de finales asintóticos que dábamos para superficies de Bryant (Definición 3.3).

**| Definición 4.3.** Sean  $\psi, \phi : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{H}^3$  inmersiones llanas con finales regulares en el infinito. Diremos que  $\psi$  y  $\phi$  tienen el mismo comportamiento en el infinito si y sólo si la distancia (del espacio hiperbólico) entre  $\psi(\zeta)$  y  $\phi(\zeta)$  tiende a cero cuando  $\zeta$  tiende al origen.

**| Teorema 4.6.** Sea  $\psi : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{H}^3$  una inmersión llana con final regular en el origen. Entonces existe una inmersión de una superficie de revolución llana  $\psi_R : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{H}^3$  con un final en el origen tal que  $\psi$  y  $\psi_R$  tienen el mismo comportamiento en el infinito.

Por último, la representación conforme de estas superficies también ha resultado fundamental para el estudio de los conocidos como *flat fronts*, superficies llanas inmersas en  $\mathbb{H}^3$  que presentan unas ciertas singularidades admisibles [16], [18]. Más tarde se descubrió una conexión entre los *flat fronts* y las superficies mínimas en el espacio euclídeo [21].

## 4.5 Representación conforme en el espacio de De Sitter

En el espacio de Sitter también es posible dar un teorema de representación conforme para inmersiones llanas [12]. Hay que tener en cuenta que, como comentábamos en la Sección 1.3, el espacio de De Sitter es una 3-variedad Lorentziana. Por ello, podemos encontrar inmersiones llanas Riemannianas y Lorentzianas.

La representación conforme en el caso Riemanniano se deduce directamente por los siguientes resultados.

**Proposición 4.3.** Sea  $M^2$  una 2-variedad y sea  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  una inmersión llana con parámetros isotermos unitarios  $(x, y)$  para la métrica inducida. Si consideramos el campo vectorial normal unitario a la inmersión  $\eta : M^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ , este define una inmersión llana Riemanniana en el espacio de de Sitter.

**Proposición 4.4.** Toda inmersión llana con métrica inducida Riemanniana  $\tilde{\eta} : M^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^3$  puede ser vista como el campo vectorial normal unitario a una inmersión llana en el espacio hiperbólico  $\tilde{\psi} : M^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ . Además la segunda forma fundamental de ambas inmersiones coincide, y viene dada por  $\langle d\tilde{\psi}, -d\tilde{\eta} \rangle$ .

De las anteriores proposiciones y siguiendo el teorema de representación conforme que estudiábamos en este capítulo se comprueba que toda inmersión llana Riemanniana en  $\mathbb{S}_1^3$  puede ser expresada en términos de datos holomorfos para la estructura

conforme inducida por su segunda forma fundamental. Además, el caso de inmersiones Lorentzianas también acepta una representación de este tipo. Así, en [12] se enuncia el siguiente teorema.

**| Teorema 4.7 (Representación conforme de superficies llanas de  $\mathbb{S}_1^3$ ).** Sea  $M^2$  una superficie simplemente conexa y  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^3$  una inmersión llana con métrica no degenerada. Si sobre  $M^2$  consideramos la estructura conforme dada por la segunda forma fundamental de  $\psi$ , entonces existe una inmersión holomorfa  $g : M^2 \rightarrow \mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$  y un par  $(f, \omega)$  formado por una función holomorfa  $f$  y una 1-forma holomorfa  $\omega$  para la mencionada estructura tal que  $g$  verifica (4.26) y tal que

a) si la inmersión es Riemanniana,  $|f| < 1$ ,  $\omega \neq 0$  en todo punto y la inmersión es recuperada como  $\psi = \pm g e_3 g^*$ , donde

$$e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En este caso, la métrica inducida y segunda forma fundamental vienen dadas por

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f\omega^2 + (1 + |f|^2) |\omega|^2 - \bar{f}\bar{\omega}^2, \\ d\sigma^2 &= (1 - |f|^2) |\omega|^2. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Además,  $g$  es única salvo multiplicación a la derecha por una matriz constante  $g_0$  tal que  $g_0 e_3 g_0^* = e_3$ .

b) si la inmersión es Lorentziana,  $\text{Im}(f) < 0$ ,  $\omega \neq 0$  en todo punto y la inmersión puede ser recuperada como  $\psi = -g e_1 g^*$ , donde

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En cuyo caso, la métrica inducida y segunda forma fundamental vienen dadas por

$$\begin{aligned} ds^2 &= - (f\omega^2 + (f + \bar{f}) |\omega|^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2), \\ d\sigma^2 &= i (\bar{f} - f) |\omega|^2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Y  $g$  es única salvo multiplicación a la derecha por una matriz constante  $g_0$  tal que  $g_0 e_1 g_0^* = e_1$ .

Recíprocamente, sea  $M^2$  una superficie de Riemann y  $g : M^2 \rightarrow \mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$  una inmersión holomorfa cumpliendo (4.26) para una función holomorfa  $f$  y una 1-forma holomorfa  $\omega$ , ambas respecto a la estructura conforme de  $M^2$

a) si  $|f| < 1$ , la aplicación  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^3$  dada por  $\psi = g e_3 g^*$  es una inmersión llana Riemanniana con métrica inducida y segunda forma fundamental dadas por (4.32).

b) si  $\omega \neq 0$  en todo punto y  $\text{Im}(f) < 0$ , la aplicación  $\psi : M^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^3$  dada por  $\psi = ge_1g^*$  es una inmersión llana Lorentziana con métrica inducida y segunda forma fundamental dadas por (4.33).

Las grandes similitudes entre las representaciones conformes de las superficies llanas en  $\mathbb{H}^3$  y en  $\mathbb{S}_1^3$  nos permiten obtener resultados para inmersiones llanas Riemannianas en  $\mathbb{S}_1^3$  del tipo de los vistos en la Sección 4.4. Sin embargo, para inmersiones Lorentzianas las diferencias en la métrica no permite el empleo de las mismas técnicas de forma tan directa. Algunos resultados de este caso han sido obtenidos, por ejemplo, en [2] y [15]. No obstante, a día de hoy el estudio de las inmersiones llanas Lorentzianas en  $\mathbb{S}_1^3$  sigue siendo un campo abierto de estudio con resultados que aún no han sido generalizados, entre ellos destaca la extensión de la teoría de los *flat fronts* [18] a este ambiente.



# Bibliografía

- [1] A. Alarcón, F. Forstneric: New complex analytic methods in the theory of minimal surfaces: a survey, *J. Aust. Math. Soc.* 106 (2019), no 3, 287-341.
- [2] J. A. Aledo, J. A. Gálvez, P. Mira: Isometric Immersions of  $\mathbb{L}^2$  into  $\mathbb{L}^4$ , *Differential Geom. Appl.* 24 (2006), no. 6, 613-627.
- [3] J. Lucas M. Barbosa, A. Gervasio Colares: Minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$ , Berlin, Springer-Verlag (1980).
- [4] R. L. Bryant: Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space, *Astérisque*, 154-155 (1987), 321-347.
- [5] M. P. do Carmo: Curves and Surfaces: Englewoof Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc. (1976).
- [6] M. P. do Carmo: Riemannian Geometry. Mathematics: Theory & Applications, Boston, Massachusetts, Birkhäuser (1992).
- [7] M. P. do Carmo, M. Dajczer: Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.* 277, 2 (1983), 685-709.
- [8] E. Cartan, Les surfaces qui admettent une seconde forme fondamentale donnée, *Bull. Sci. Math.* 67 (2) (1943), 9-32.
- [9] S. S. Chern: An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface, *Proc. Amer. Math. Soc.* 6 (1955), 771-782.
- [10] P. Collin, L. Hauswirth, H. Rosenberg: The geometry of finite topology Bryant surfaces, *Ann. of Math.* (2) 153 (2001), no. 3, 623-659.
- [11] C. J. da Costa: La geometría de las superficies de jabón: superficies mínimas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 2, no. 2 (1999)

- [12] J. A. Gálvez: Superficies de Curvatura Constante, Tesis defendida en la Universidad de Granada (2000).
- [13] J. A. Gálvez, A. Martínez, F. Milán: Flat surfaces in hyperbolic 3-space, *Math. Ann.* 316 (2000), 419-435.
- [14] J.A. Gálvez, A. Martínez, F. Milán: Complete linear Weingarten surfaces of Bryant type. A Plateau problem at infinity, *Trans. Amer. Math. Soc.* 356 (2004), no. 9, 3405-3428.
- [15] J.A. Gálvez, A. Martínez, F. Milán: Flat surfaces in  $\mathbb{L}^4$ , *Ann. Global Anal. Geom.* 20 (2001), 243-251.
- [16] J. A. Gálvez, P. Mira: Embedded isolated singularities of flat surfaces in hyperbolic 3-space. *Calc.Var. Partial Differential Equations* 24 (2005), no 4, 239-260
- [17] J.A. Gálvez, P. Mira: The Cauchy problem for the Liouville equation and Bryant surfaces, *Adv. Math.* 195 (2005), no. 2, 456-490.
- [18] M. Kokubu, M. Umehara, K. Yamada: Flat Fronts in hyperbolic 3-space, *Pacific J. Math.* 216 (2004), 149-175.
- [19] J. Liouville, Sur l'équation aux différences partielles  $\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \partial v} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$ , *J. Math. Pures Appl.* 36 (1991), 457-465.
- [20] F. Martín, J. Pérez: Superficies minimales foliadas por circunferencias: los ejemplos de Riemann, *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 6, no 3 (2003).
- [21] A. Martínez, P. Roitman, K. Tenenblat: A connection between flat fronts in hyperbolic space and minimal surfaces in euclidean space. *Annal. Global Anal. Geom.* 48 (2015), no 3, 233-254.
- [22] W. H. Meeks, J. Pérez, A. Ros: Properly embedded minimal planar domains, *Ann. of Math.* 181 (2015), no 2, 473-546.
- [23] P. Mira: Resolución geométrica del problema de Cauchy para superficies y aplicaciones, Tesis doctoral defendida en la Universidad de Murcia.
- [24] R. Miranda: Algebraic Curves and Riemann. Surfaces, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematica Society (1995).
- [25] R. Osserman: A survey on minimal surfaces, New York, Van Nostrand (1969).

- [26] J. Pérez: Una nueva edad de oro de las superficies mínimas, *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 20, no 1 (2017).
- [27] S. Sasaki: On complete flat surfaces in hyperbolic 3-space, *Kodai Math. Sem. Rep.* 25 (1973), 449-457.
- [28] H.F. Scherk: Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Volume 13 (1835), 185–208.
- [29] R. Souam, E. Toubiana: Totally umbilical surfaces in homogeneous 3-manifolds, *Comment. Math. Helv.* 84 (2009), 673–704.
- [30] M. Spivak: *Calculus on manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company (1965).
- [31] M. Umehara, K. Yamada: Surfaces of constant mean curvature- $c$  in  $\mathbb{H}^3(-c^2)$  with prescribed hyperbolic Gauss map, *Math. Ann.* 304 (1996), 203-224.
- [32] J. A. Volkov, S. M. Vladimirova: Isometric immersion of the Euclidean plane in Lobachevskii space, *Math. Notes* 10 (1971), 655-661.
- [33] M. Weber: *Classical minimal surfaces in the Euclidean space by examples*, <https://minimal.sitehost.iu.edu/research/claynotes.pdf> (2001).