



TRABAJO FIN DE GRADO

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

# **Problemas de localización de concentradores y diseño de redes**

**Francisco Temprano García**





# **Problemas de localización de concentradores y diseño de redes**

Francisco Temprano García

Supervisado por

Prof. Justo Puerto Albandoz



# Índice general

English Abstract	1
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Modelos matemáticos y clasificación de los HLPs</b>	<b>5</b>
2.1. Conexión completa entre los concentradores . . . . .	7
2.1.1. HLP individual . . . . .	8
2.1.2. $p$ -HLP . . . . .	10
2.1.3. Problema de localización mediana de $p$ -concentradores ( $p$ -HLP de asignación múltiple) . . . . .	13
2.1.4. $p$ -HLP con coste fijo por enlace . . . . .	15
2.1.5. Modelo con valor mínimo de flujo en los enlaces . . . . .	17
2.1.6. $p$ -HLP con capacidad limitada . . . . .	18
2.1.7. $p$ -HLP continuo . . . . .	20
2.1.8. $p$ -HLP multi-objetivo . . . . .	22
2.1.9. Problema <i>minimax</i> de localización de $p$ -concentradores: Problemas de centro . . . . .	23
2.1.10. Problema de localización de cobertura de $p$ -concentradores . . . . .	24

## II PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN DE CONCENTRADORES Y DISEÑO DE REDES

2.1.11. Problema de localización de cobertura del conjunto de concentradores . . . . .	25
2.1.12. Problema de localización de cobertura máxima de $p$ -concentradores . . . . .	27
2.1.13. Problemas de localización mediana ordenada de concentradores con asignación individual . . . . .	29
2.2. Arquitectura de árbol entre los concentradores . . . . .	33
2.2.1. Problema de localización de árbol de concentradores . . . . .	34
2.3. HLP con estructura de red estrella . . . . .	36
2.4. Otras arquitecturas . . . . .	39
2.4.1. HLP en anillo . . . . .	39
2.4.2. HLP en línea . . . . .	41
2.5. Conclusiones . . . . .	42
<b>3. Métodos de solución y algoritmos para los HLPs. Aplicaciones</b>	<b>45</b>
3.1. Aplicación de algoritmos exactos en HLPs . . . . .	45
3.2. Aplicación de algoritmos heurísticos y meta-heurísticos en HLPs . . . . .	46
3.3. Aplicaciones de casos en la vida real . . . . .	46
<b>4. Tendencias futuras</b>	<b>49</b>
<b>5. Aplicación en un diseño de red de metro en árbol en la ciudad de Sevilla</b>	<b>51</b>

# Abstract

In this project, we're going to present the Hub Location Problems which are a class of optimization problems that focus on the location of hub facilities and on the design of hub networks.

First, we'll explain the principal features, assumptions and properties of these problems. Then, we'll present and analyze the classification of some of the most important problems. In addition, we'll show different results for some types of problems with a simple example. After that we'll explain the types of methods of solving, their applications on real cases and their future trends.

Finally, as a conclusion we will apply one of the models that we have presented on a underground network design for the city of Seville and comment the results obtained.

## Resumen

En este trabajo, presentamos los problemas de localización de concentradores que son una clase de problemas de optimización que se centran en la localización de instalaciones concentradoras y el diseño de red de estas.

Primero, explicamos las principales características, hipótesis y propiedades de estos problemas. Después presentamos y analizamos la clasificación de algunos de los problemas más importantes. Además, mostramos la formulación de los diferentes tipos de problemas y sus resultados con un ejemplo sencillo. Tras esto, explicamos los tipos de métodos de resolución de estos problemas, sus aplicaciones en casos reales y sus tendencias en el futuro.

Finalmente, como conclusión aplicamos uno de los modelos presentados en un diseño de red de metro en la ciudad de Sevilla y comentamos los resultados obtenidos.





# 1 | Introducción

En la actualidad, las arquitecturas de concentradores y redes son usadas en muchos ámbitos como transporte, telecomunicaciones y redes de computadoras para dirigir de forma eficiente flujos entre varios nodos que hacen de origen y destino. La característica clave de estos diseños de redes se encuentra en el uso de puntos de trasbordo, llamados concentradores, que conectan un gran número de parejas origen/destino mediante una serie de enlaces. El uso de este concepto ayuda a reducir costes de instalaciones, centralizar el manejo de productos y clasificar operaciones. Así surgen los problemas de localización de concentradores o HLPs (*Hub Location Problems*), los cuales consisten en localizar los puntos que haran de concentradores y diseñar la red de conexión entre ellos de forma que se optimice un coste base o servicio base objetivo.

La principal dificultad que podemos encontrar es la relación entre los dos procesos de decisión: la selección de un conjunto de nodos en los que se localizan los concentradores y el diseño de red de concentradores mediante la selección de enlaces que conectan orígenes, destinos y concentradores y dirigen los flujos a través de la red.

Los HLPs tienen una gran variedad de aplicaciones. Por ejemplo, en transporte éstas incluyen envío de paquetes, transporte aéreo, envío de correo, camionaje y sistemas de tránsito rápido. En estos casos la demanda corresponde a productos (paquetes, pasajeros, correo) cargados por vehículos (aviones, trenes, camiones) y moviéndose a través de redes físicas como carreteras y raíles o a través del aire o el agua. En telecomunicaciones surgen aplicaciones de los HLPs en el diseño de redes de datos, donde la demanda corresponde a datos electrónicos que se direccionan a través de enlaces físicos (fibra óptica y cables coaxiales) o a través del aire (satélites). En este campo, los concentradores son routers y multiplexores.

El estudio de los HLPs empezó con los trabajos de *O'Kelly* (1986 [25] [26]) y desde entonces ha evolucionado en una importante área de investigación. Durante las tres últimas décadas se han realizado investigaciones sobre este tema desde el punto de vista de mu-

chas disciplinas como geografía, localización, transporte, telecomunicaciones y ciencia de computación. Esto ha dado lugar a muchos estudios y artículos enfocados en distintos aspectos de estos problemas, como los de *O'Kelly* y *Miller* (1994 [29]) que contienen esquemas de clasificación para modelos fundamentales. *Klincewicz* (1998 [21]) se centró en el diseño de redes de concentradores en el contexto de redes de telecomunicaciones y *Bryan* y *O'Kelly* (1999 [7]) presentaron una revisión enfocada en las redes de transporte aéreo.

Los HLPs comprenden una gran variedad de problemas que difieren tanto en las hipótesis como en el criterio de optimización, debido a sus múltiples aplicaciones. Estos modelos se diferencian en aspectos tales como la estructura topológica, los patrones de asignación de nodos origen/destino a concentradores y las restricciones de capacidad en la red de concentradores. A continuación, veremos distintos tipos de modelos de HLPs y su clasificación.

## 2 | Modelos matemáticos y clasificación de los HLPs

La clasificación de los HLPs se basa en los conceptos que se definen a continuación:

- Dominio de solución: red (el dominio de los concentradores candidatos son todos los nodos de la red), discreto (los concentradores candidatos son una serie de nodos particulares) y continuo (el dominio de los concentradores es un plano o una esfera).
- Criterio: *Mini-Max* (se busca minimizar el máximo de los costes de transporte desde los nodos origen a los nodos destino) y *Mini-Sum* (se busca minimizar el coste total incurrido en la localización de los concentradores y la asignación de los nodos no concentradores a estos).
- Fuente de determinación del número de concentradores a localizar: exógena (el número de concentradores es determinado con anterioridad) y endógena (el número de concentradores se determina como una parte de la solución).
- Número de concentradores: concentrador individual y concentradores múltiples.
- Capacidad del concentrador: capacidad ilimitada y capacidad limitada.
- Coste de localización de concentradores: sin coste, coste fijo y coste variable.
- Asignación de un nodo no concentrador a concentradores: asignación individual (si cada nodo no concentrador es asignado a un único concentrador) y asignación múltiple (si cada nodo no concentrador puede ser asignado a más de un concentrador).
- Coste de conexión de un nodo no concentrador a un concentrador: sin coste, coste fijo y coste variable.

También es importante introducir el concepto de arquitectura de los concentradores, es

decir, el diseño de red que tienen las conexiones entre los distintos concentradores. La arquitectura condiciona totalmente el problema de localización de concentradores, por eso exponemos las distintas arquitecturas de concentradores y la formulación de sus modelos matemáticos más importantes y comunes más adelante. Para distinguir los distintos modelos nos basamos en los conceptos definidos anteriormente y en su clasificación.

Dentro de cada tipo de problema, los parámetros que toman más fuerza y son más influyentes en la toma de decisiones de nuestro diseño de red son los costes de transporte de un nodo a otro, puede ser por ejemplo el coste por unidad transferida o la distancia a recorrer, y el flujo de demanda desde un nodo a otro.

En principio, la matriz de costes debe cumplir una serie de propiedades. Debe ser simétrica y sus valores positivos, salvo la diagonal que son valores nulos. Además, el coste de un nodo a otro es el menor coste posible de transporte, y por tanto no puede ser mayor que el coste de transporte con mismo origen y destino pero atravesando otro nodo, es decir,  $C_{ij} \leq C_{ik} + C_{kj} \forall i, j, k$  (desigualdad triangular).

Por otro lado, la matriz de flujo no debe cumplir ninguna propiedad, salvo que sus valores son no negativos y su diagonal son valores nulos, ya que suponemos que el coste de transporte es nulo.

Por cada modelo ilustramos un ejemplo sencillo con 7 nodos que se basará en el grafo de costes y matriz de flujo que se muestran a continuación. Además, los resultados obtenidos son comentados en la conclusión al final del capítulo.

$$\text{Matriz de flujo entre los nodos: } h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

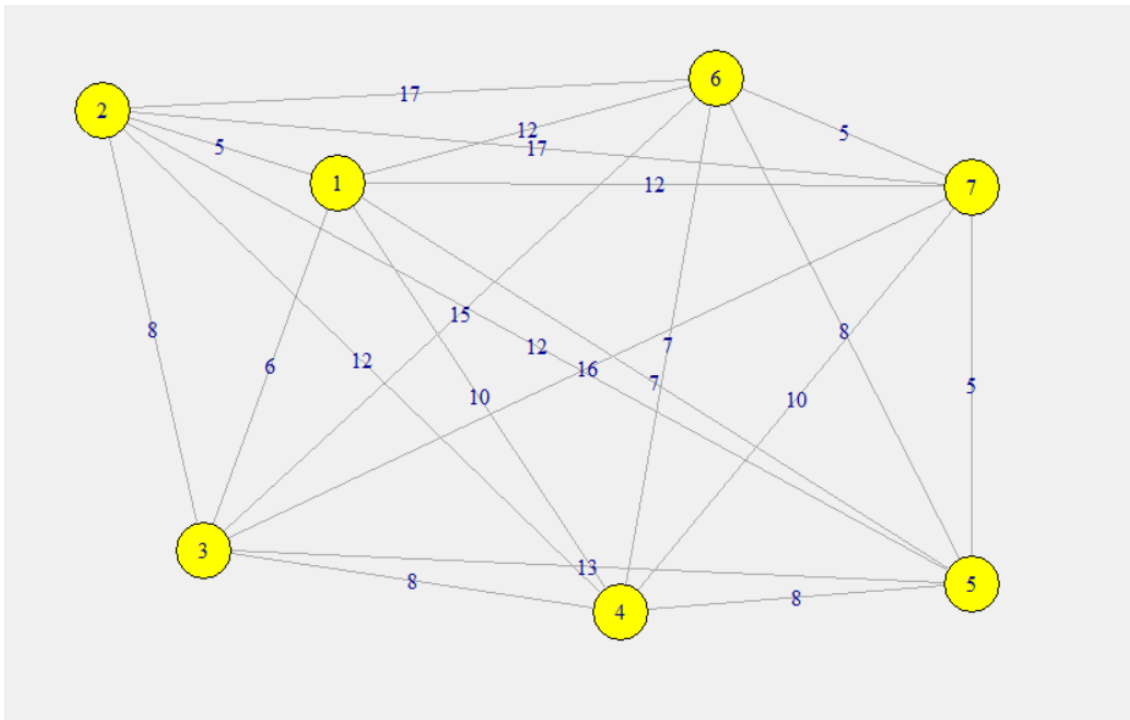


Figura 2.1: Grafo de costes con 7 nodos

## 2.1 Conexión completa entre los concentradores

Este tipo de arquitectura determina que los concentradores seleccionados están enlazados completamente, es decir, se puede viajar desde cualquier concentrador a cualquier otro concentrador directamente. De esta forma, no debemos plantearnos en la formulación el diseño de red entre los concentradores, sólo nos preocupamos por la localización de estos, por la asignación de estos a los nodos no concentradores y el diseño de estos enlaces.

Las formulaciones de los modelos más importantes y comunes con este tipo de arquitectura son introducidas y explicadas a continuación.

### 2.1.1 HLP individual

Este problema fue introducido por *O'Kelly* (1987 [27]) en el cual el criterio usado es *Mini-Sum*, el dominio de solución es del tipo red, el número de concentradores es definido exógenamente y es igual a uno, se considera que no hay coste por establecimiento del concentrador, que este tiene capacidad ilimitada y el problema es de asignación individual puesto que sólo hay un concentrador a localizar. Al igual que en todos los problemas de localización de concentradores en el HLP individual se considera que para viajar de un nodo no concentrador a otro hay que atravesar el concentrador.

Para describir el modelo es necesario expresar los valores de entrada y de salida. Las entradas son las siguientes:  $h_{ij}$  es la cantidad de flujo transportada desde el nodo  $i$  al  $j$  y  $C_{ij}$  es el coste por unidad transferida del nodo  $i$  al nodo  $j$  directamente (suponemos que  $C_{ij} = C_{ji}$ ). Las salidas son binarias, en las cuales  $Y_{ij}$  es igual a 1 si el nodo  $i$  es asignado al concentrador localizado en el nodo  $j$  y 0 en caso contrario. Consideramos que si  $Y_{jj}$  es igual a 1 entonces el nodo  $j$  es asignado a sí mismo lo que implica que el concentrador está localizado en el nodo  $j$ .

Con esta notación el modelo resultante es:

$$\text{mín} \quad \sum_i \sum_j \sum_k h_{ik}(C_{ij} + C_{jk})Y_{ij}Y_{kj} \quad (2.2)$$

sujeto a

$$\sum_j Y_{jj} = 1 \quad (2.3)$$

$$\sum_j Y_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (2.4)$$

$$Y_{ij} - Y_{jj} \leq 0 \quad \forall i, j \quad (2.5)$$

$$Y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (2.6)$$

Ec. (2.2) minimiza el coste total de transferencia a través del concentrador. Ec. (2.3) representa que hay un único concentrador. Ec. (2.4) impone que todos los nodos no concentradores son asignados a un único concentrador. Ec. (2.5) expresa que el nodo  $i$  es asignado

al nodo  $j$  como concentrador sólo si el nodo  $j$  es el concentrador. Ec. (2.6) define las variables de decisión del tipo binaria.

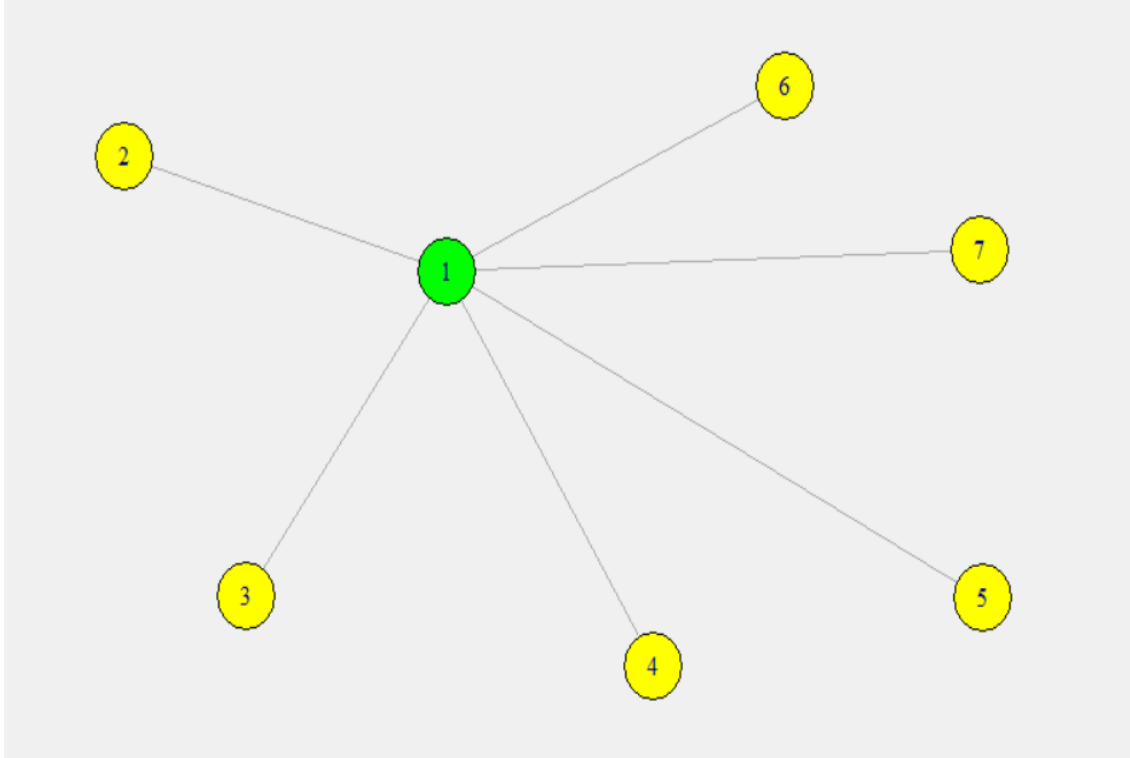


Figura 2.2: HLP simple con los datos de la figura 2.1

Para linealizar la función objetivo, usamos que si un nodo no concentrador  $i$  es asignado al concentrador en el nodo  $j$ , entonces el resto de nodos no concentradores tienen que estar asignados al mismo concentrador  $j$ . Por esto la Ec. (2.2) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \sum_i \sum_j \sum_k h_{ik}(C_{ij} + C_{jk})Y_{ij}Y_{kj} \\
 &= \sum_i \sum_j C_{ij}Y_{ij}(\sum_k h_{ik}) + \sum_j \sum_k C_{jk}Y_{kj}(\sum_i h_{ik}) \\
 &= \sum_i \sum_j C_{ij}Y_{ij}(O_i + D_i) \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

Siendo  $O_i$  la suma total de flujo con origen en el nodo  $i$  y  $D_i$  la suma total de flujo con destino en el nodo  $i$ . Reemplazando la función objetivo de nuestro problema por esta nueva expresión obtenemos el HLP individual linealizado.

O'Kelly (1986 [25]) propuso un método heurístico basado en las distancias más cercanas (*Nearest distance*) como algoritmo de resolución de este problema.

### 2.1.2 $p$ -HLP

Este problema fue propuesto por O'Kelly (1987 [27]) y tiene como características principales que cada nodo no concentrador es asignado a un único concentrador y que el número de concentradores se define exógenamente siendo este  $p$ . Por tanto, se puede considerar como un problema de localización de  $p$ -concentradores con asignación individual. En este modelo el criterio usado es *Mini-Sum*, el dominio de solución es del tipo red y los concentradores están conectados completamente entre ellos. Para viajar entre dos nodos no concentradores hay que atravesar al menos uno o como máximo dos concentradores.

Las entradas de este problema son las mismas que las del anterior añadiendo el factor de descuento  $\alpha$  para transferencias entre concentradores ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ). Para calcular el coste por unidad transferida entre dos concentradores simplemente se multiplica  $C_{ij}$  por  $\alpha$ . Esto se debe a que el coste de transporte entre concentradores es menor que entre nodos no concentradores y concentradores. Las salidas son también similares a las del problema anterior. El modelo resultante del  $p$ -HLP es:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_i \sum_k C_{ik} Y_{ik} \left( \sum_j h_{ij} \right) + \sum_k \sum_i C_{ki} Y_{ik} \left( \sum_j h_{ji} \right) \\ & + \alpha \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m h_{ij} C_{km} Y_{ik} Y_{jm} \end{aligned} \quad (2.8)$$

s. a

$$\sum_j Y_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (2.9)$$

$$\sum_j Y_{jj} = p \quad (2.10)$$

$$Y_{ij} - Y_{jj} \leq 0 \quad \forall i, j \quad (2.11)$$

$$Y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (2.12)$$



Ec. (2.8) minimiza el coste de transporte total entre los nodos de la red. Ec. (2.9) estipula que cada nodo no concentrador es asignado a un único concentrador. Ec. (2.10) expresa que hay exactamente  $p$  concentradores. Ec. (2.11) fuerza a que el nodo  $i$  sea asignado al  $j$  como concentrador sólo si  $j$  es un concentrador. Ec. (2.12) define las variables de decisión del tipo binaria.

Para poder linealizar la función objetivo del problema es necesario añadir las siguientes variables de decisión  $Z_{ij}^{km}$ , que es igual a 1 si la demanda del nodo origen  $i$  al nodo destino  $j$  se cubre atravesando los concentradores  $k$  y  $m$ , y 0 en caso contrario. Añadiendo nuevas restricciones obtenemos un problema equivalente y lineal:

$$\text{mín} \quad \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m (C_{ik} + \alpha C_{km} + C_{mj}) h_{ij} Z_{ij}^{km} \quad (2.13)$$

s. a

$$\sum_j Y_{jj} = p \quad (2.14)$$

$$\sum_j Y_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (2.15)$$

$$Y_{ij} - Y_{jj} \leq 0 \quad \forall i, j \quad (2.16)$$

$$\sum_k \sum_m Z_{ij}^{km} = 1 \quad \forall i, j \quad (2.17)$$

$$Z_{ij}^{km} \leq Y_{mm} \quad \forall i, j, k, m \quad (2.18)$$

$$Z_{ij}^{km} \leq Y_{kk} \quad \forall i, j, k, m \quad (2.19)$$

$$Y_{ik} + Y_{jm} - 2Z_{ij}^{km} \geq 0 \quad \forall i, j, k, m \quad (2.20)$$

$$Z_{ij}^{km} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, k, m \quad (2.21)$$

$$Y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (2.22)$$

Ec. (2.13) minimiza el coste total de transporte entre nodos de la red. Ec. (2.17) impone que cada pareja origen-destino  $(i, j)$  es asignado a una pareja de concentradores  $(k, m)$  que cubre su demanda, esto se debe a que  $Z_{ij}^{km}$  toma los valores 0 ó 1. Ecs. (2.18) y (2.19) representan que la pareja origen-destino  $(i, j)$  es asignado a la pareja  $(k, m)$  solamente si ambos son concentradores. Ec. (2.20) expresa que la pareja origen-destino  $(i, j)$  es asignada a la pareja de concentradores  $(k, m)$  sólo si el nodo no concentrador  $i$  es asignado al concentrador  $k$  y el  $j$  al concentrador  $m$ . El resto de restricciones definen las variables o son las mismas que en el modelo no linealizado.

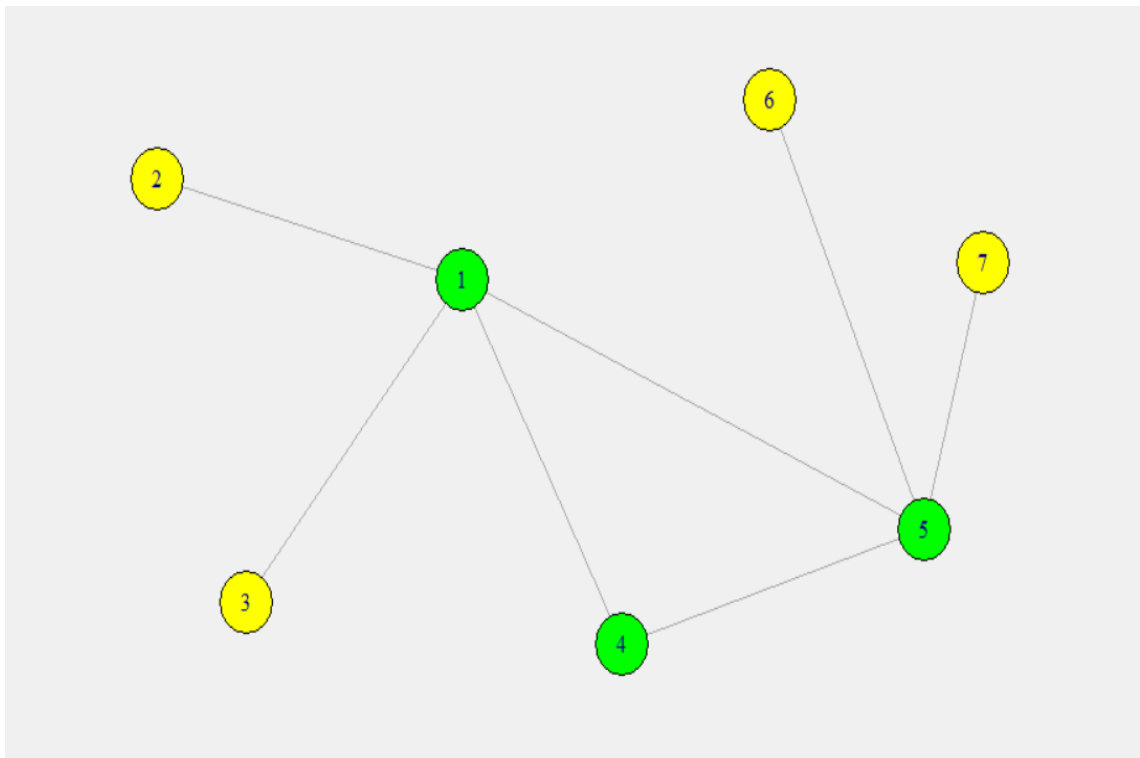


Figura 2.3:  $p$ -HLP con los datos de la figura 2.1,  $p = 3$  y  $\alpha = 1$

O'Kelly (1992 [28]) propuso un algoritmo heurístico (*Heuristic algorithm*) como método de resolución para los  $p$ -HLP y Puerto, Ramos y Rodríguez-Chía (2011 [30]) propusieron el uso de la Programación Entera Mixta (*MIP*) como método de resolución exacto y lo aplicaron sobre un dominio de red con tamaño de 20 nodos y 10 concentradores.

### 2.1.3 Problema de localización mediana de $p$ -concentradores ( $p$ -HLP de asignación múltiple)

Mientras que la función objetivo del  $p$ -HLP es cuadrática, *Campbell* (1991 [9]) propuso una formulación matemática para el problema de localización mediana de  $p$ -concentradores o  $p$ -HMLP (*Hub Median Location Problem*). En este caso cada nodo no concentrador puede estar asignados a varios concentradores. Este modelo tiene suposiciones similares a las del problema anterior excepto por las variables de asignación, que son denotadas por  $Z_{ij}^{km}$  y equivalen a la proporción de flujo desde el nodo origen  $i$  al nodo destino  $j$  atravesando los concentradores  $k$  y  $m$ , respecto al flujo total de  $i$  a  $j$ . Por tanto, asumimos que las variables de asignación son no negativas ( $Z_{ij}^{km} \geq 0$ ).

Las entradas de este problema son las mismas que las del problema anterior, sin embargo denotamos por  $C_{ij}^{km}$  al coste por unidad transferida desde el nodo  $i$  al nodo  $j$  atravesando los concentradores  $k$  y  $m$ .

$$C_{ij}^{km} = C_{ik} + \alpha C_{km} + C_{mj} \quad (2.23)$$

Las variables del problema son las siguientes:  $X_j$  que es 1 cuando el nodo  $j$  es un concentrador y 0 en caso contrario, y  $Z_{ij}^{km}$  presentadas anteriormente. De esta forma, el modelo resultante es:

$$\text{mín} \quad \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m C_{ij}^{km} h_{ij} Z_{ij}^{km} \quad (2.24)$$

s. a

$$\sum_j X_j = p \quad (2.25)$$

$$\sum_k \sum_m Z_{ij}^{km} = 1 \quad \forall i, j \quad (2.26)$$

$$Z_{ij}^{km} \leq X_m \quad \forall i, j, k, m \quad (2.27)$$

$$Z_{ij}^{km} \leq X_k \quad \forall i, j, k, m \quad (2.28)$$

$$Z_{ij}^{km} \geq 0 \quad \forall i, j, k, m \quad (2.29)$$

$$X_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \quad (2.30)$$

Ec. (2.24) minimiza el coste total de transporte. Ec. (2.25) asegura que hay exactamente  $p$  concentradores. Ec. (2.26) estipula que cada pareja origen-destino  $(i, j)$  es asignada a una pareja de concentradores  $(k, m)$ . Esto se debe a que en la solución óptima de estos problemas las variables  $Z_{ij}^{km}$  toman los valores 0 ó 1. Ecs. (2.27) y (2.28) representan que la pareja origen-destino  $(i, j)$  es asignada a la pareja  $(k, m)$  solamente si los nodos  $k$  y  $m$  son concentradores. El resto de restricciones definen las variables.

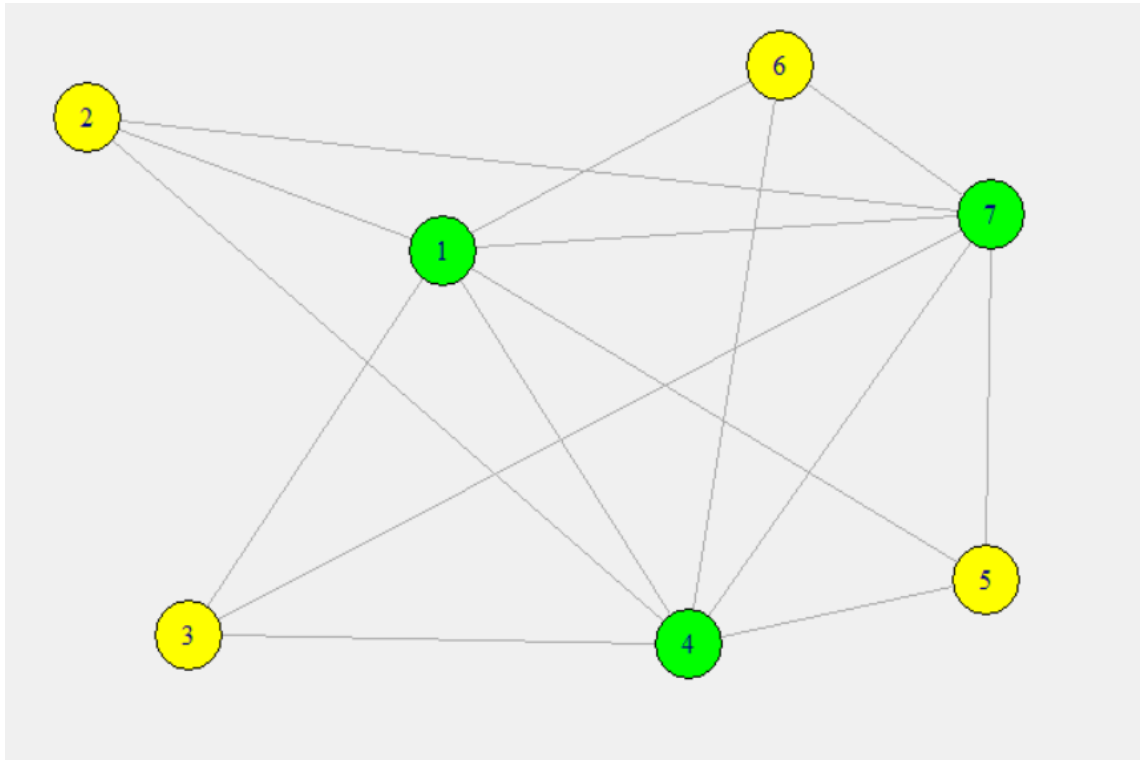


Figura 2.4:  $p$ -HLMP con los datos de la figura 2.1,  $p = 3$  y  $\alpha = 1$

Una de las dificultades de este modelo es que el número de variables de decisión de asignación ( $Z_{ij}^{km}$ ) puede llegar a ser enorme. Si todos los nodos son candidatos a ser concentradores, hay un tamaño de variables de  $O(N^4)$  el cual aumenta con gran rapidez.

Campbell (1991 [9]) propuso el uso de la programación entera (*Integer Programming*) como algoritmo de solución exacto de los problemas de localización mediana de  $p$ -concentradores. Por otro lado, O'Kelly (1987 [27]) propuso un método heurístico basado en las

distancias cuadráticas enteras más cercanas (*Nearest distance-quadratic integer*) como algoritmo para resolver este tipo de problemas.

*Daskin* (1995 [18]) reconsideró otra formulación para el caso de asignación individual de los nodos no concentradores a los concentradores, llamado problema de localización mediana de  $p$ -concentradores con asignación individual.

### 2.1.4 $p$ -HLP con coste fijo por enlace

Se puede considerar un coste fijo por todas las conexiones de nodos no concentradores y concentradores. *Campbell* (1994 [10]) sugirió que los modelos básicos pueden extenderse con un coste fijo por cada conexión. Por ejemplo, añadiendo un coste fijo a los enlaces al  $p$ -HMLP obtendríamos un nuevo problema de interés. Las entradas y salidas del problema son similares a las del anterior, añadiendo  $g_{ik}$ , el coste fijo por conectar el nodo no concentrador  $i$  al concentrador  $k$ , y definiendo  $Z_{ij}^{km}$  como una variable binaria en vez de real. Además, es necesario añadir las variables binarias  $Y_{ik}$  que denotan la selección del enlace  $(i, k)$  si es igual a 1 con  $i$  un nodo no concentrador y  $k$  un concentrador y 0 en caso contrario. De esta forma, sustituiríamos las variables  $X_k$  del  $p$ -HMLP por  $Y_{kk}$ . El criterio es similar al del problema anterior añadiendo el término de coste por enlace obteniendo así el siguiente modelo para  $p$ -HLP con asignación múltiple y con coste fijo por enlace:

$$\text{mín} \quad \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m C_{ij}^{km} h_{ij} Z_{ij}^{km} + \sum_i \sum_k g_{ik} Y_{ik} \quad (2.31)$$

s. a

$$\sum_j Y_{jj} = p \quad (2.32)$$

$$Y_{ij} - Y_{jj} \leq 0 \quad \forall i, j \quad (2.33)$$

$$\sum_k \sum_m Z_{ij}^{km} = 1 \quad \forall i, j \quad (2.34)$$

$$Z_{ij}^{km} \leq Y_{mm} \quad \forall i, j, k, m \quad (2.35)$$

$$Z_{ij}^{km} \leq Y_{kk} \quad \forall i, j, k, m \tag{2.36}$$

$$Y_{ik} + Y_{jm} - 2Z_{ij}^{km} \geq 0 \quad \forall i, j, k, m \tag{2.37}$$

$$Z_{ij}^{km} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, k, m \tag{2.38}$$

$$Y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \tag{2.39}$$

Ec. (2.31) presenta en su segundo término la suma total de todos los costes por conexiones de nodos no concentradores a concentradores. No se consideran costes por conexión entre concentradores ya que suponemos que están completamente conectados. Ec. (2.32) impone que el número de concentradores es  $p$  y Ec. (2.33) que un nodo no concentrador  $i$  es asignado a otro nodo  $j$  sólo si este último es un concentrador. Ec. (2.34) expresa que la demanda de la pareja de nodos  $(i, j)$  es cubierta por una única pareja de concentradores  $(k, m)$  y Ecs. (2.35) y (2.36) que si la pareja  $(k, m)$  cubren una demanda entonces  $k$  y  $m$  tienen que ser concentradores. Ec. (2.37) impone que si la demanda de la pareja  $(i, j)$  es cubierta por la pareja de concentradores  $(k, m)$  entonces el nodo  $i$  es asignado al concentrador  $k$  y el  $j$  al  $m$ . El resto de restricciones definen las variables.

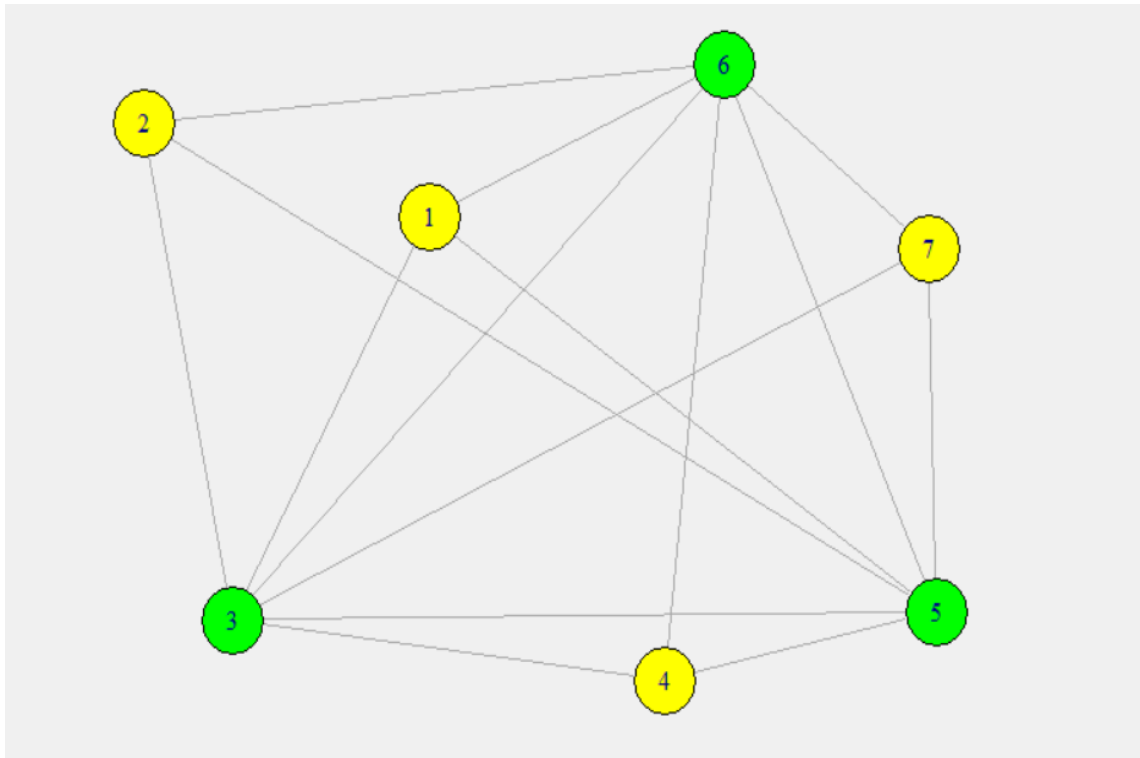


Figura 2.5:  $p$ -HLP con costes fijos con los datos de la figura 2.1,  $p = 3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $g_{i1} = 15 \quad \forall i \neq 1$  y el resto de costes 0

Al igual que en los problemas de localización mediana de  $p$ -concentradores, *Campbell* (1994 [10]) propuso el uso de la programación entera (*Integer Programming*) como algoritmo exacto de solución para los  $p$ -HLP con coste fijo por enlace.

### 2.1.5 Modelo con valor mínimo de flujo en los enlaces

*Campbell* (1994 [10]) propuso este problema similar al  $p$ -HMLP en el que imponemos que el flujo entre un nodo no concentrador y un concentrador debe ser mayor o igual que un valor mínimo de flujo. Las entradas son similares a las del problema de localización mediana de  $p$ -concentradores, añadiendo  $L_{ik}$ , los valores mínimos de flujo en los enlaces entre el nodo no concentrador  $i$  y el concentrador  $k$ , y  $N$ , el número de nodos. Las salidas y el criterio son similares a las del problema de localización mediana de  $p$ -concentradores añadiendo las variables de binarias  $Y_{ik}$  que es igual a 1 si el nodo no concentrador  $i$  es asignado al concentrador  $k$  y 0 en caso contrario, sustituyendo las variables  $X_k$  por  $Y_{kk}$  y añadiendo las siguientes restricciones:

$$Y_{ij} - Y_{jj} \leq 0 \quad \forall i, j \quad (2.40)$$

$$Y_{ik} + Y_{jm} - 2Z_{ij}^{km} \geq 0 \quad \forall i, j, k, m \quad (2.41)$$

$$NY_{ii} + \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} Y_{ij} \leq N \quad \forall i \quad (2.42)$$

$$\sum_m \sum_j h_{ij} Z_{ij}^{km} + \sum_p \sum_s h_{pi} Z_{pi}^{sk} \geq L_{ik} Y_{ik} \quad \forall i, k \quad (2.43)$$

$$Z_{ij}^{km} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, k, m \quad (2.44)$$

$$Y_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i, k \quad (2.45)$$

Ec. (2.40) impone que un nodo no concentrador es asignado a otro nodo sólo si este es un concentrador. Ec. (2.41) estipula que la demanda desde el nodo origen  $i$  al nodo destino  $j$  sólo se puede direccionar a través de los concentradores  $k$  y  $m$  si el nodo no concentrador  $i$  es asignado al concentrador  $k$  y si el nodo no concentrador  $j$  es asignado al concentrador  $m$ . Ec. (2.42) expresa que un concentrador  $i$  sólo puede ser asignado a sí

mismo como concentrador, además, de esta forma la demanda de la pareja de concentradores  $(k, m)$  es cubierta por la misma pareja  $(k, m)$  y la demanda de un concentrador y un nodo no concentrador  $(k, i)$  es cubierta por la pareja  $(k, k)$  o en todo caso  $(k, m)$ . Ec. (2.43) asegura el flujo mínimo en los enlaces entre un nodo no concentrador y otro concentrador, donde el primer término acumula el flujo que pasa por enlace y tiene como origen el nodo  $i$  y el segundo el que tiene el nodo  $i$  como destino. Ec. (2.44) sustituye a Ec. (2.29) como definición de las variables  $Z_{ij}^{km}$  y Ec. (2.45) define las variables  $Y_{ik}$ .

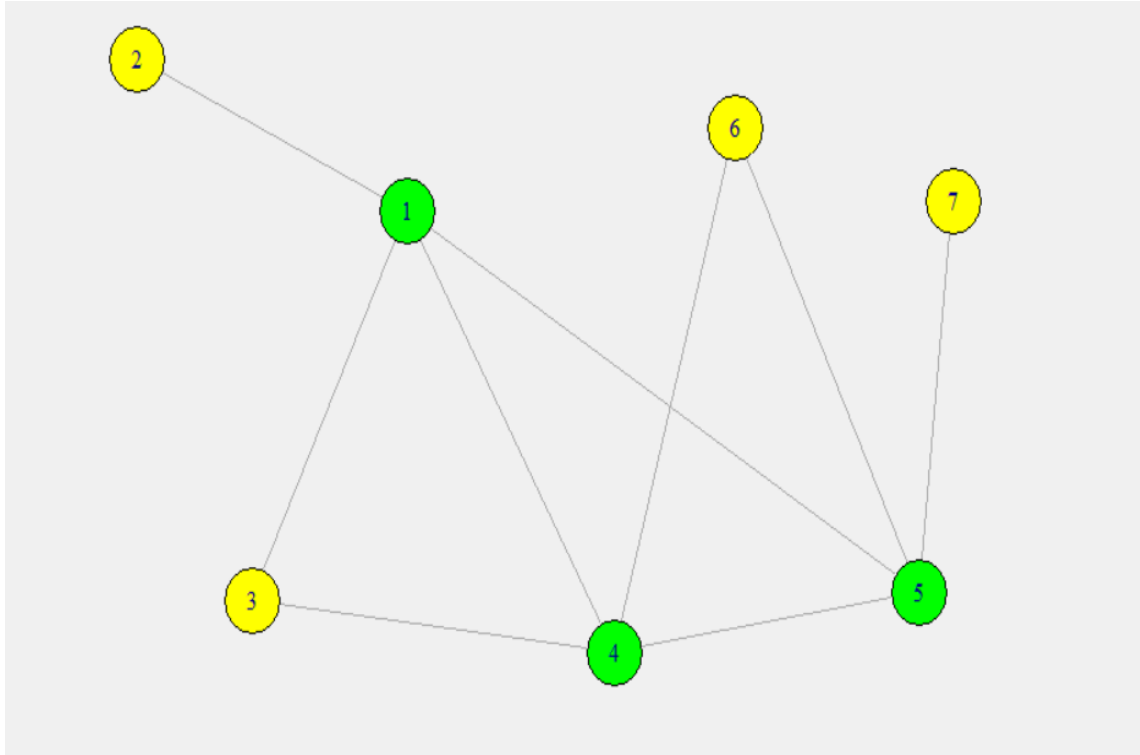


Figura 2.6:  $p$ -HLP con flujo mínimo con los datos de la figura 2.1,  $p = 3$ ,  $\alpha = 1$  y  $L_{ik} = 10 \forall i, k; i \neq k$

### 2.1.6 $p$ -HLP con capacidad limitada

*Campbell* (1994 [10]) propuso un problema donde la capacidad de los concentradores tiene un límite, por tanto el flujo total que pasa por cada concentrador tiene que ser menor o igual que la capacidad de estos. Las entradas y salidas del modelo son muy similares a las del problema de localización mediana de  $p$ -concentradores añadiendo la capacidad de cada concentrador situado en el nodo  $k$  denotado por  $\sigma_k$ . Formulamos el



$p$ -HLP con capacidad limitada de la misma forma que el modelo de valor mínimo de flujo en los enlaces presentado en el apartado anterior, sustituyendo la Ec. (2.43) por las restricciones de capacidad expresadas de la siguiente forma:

$$\sum_m \sum_i \sum_j h_{ij} Z_{ij}^{km} + \sum_{\substack{s \\ s \neq k}} \sum_i \sum_j h_{ij} Z_{ij}^{sk} \leq \sigma_k Y_{kk} \quad \forall k \tag{2.46}$$

En esta expresión el primer y el segundo término denotan el flujo total que atraviesa el concentrador como primer concentrador de la trayectoria y como segundo, respectivamente. Imponemos en el segundo término que el primer concentrador de la trayectoria es distinto del segundo ya que en caso contrario estaríamos repitiendo flujos que atraviesan el concentrador. De esta forma, nos aseguramos que se respeta la capacidad de los concentradores.

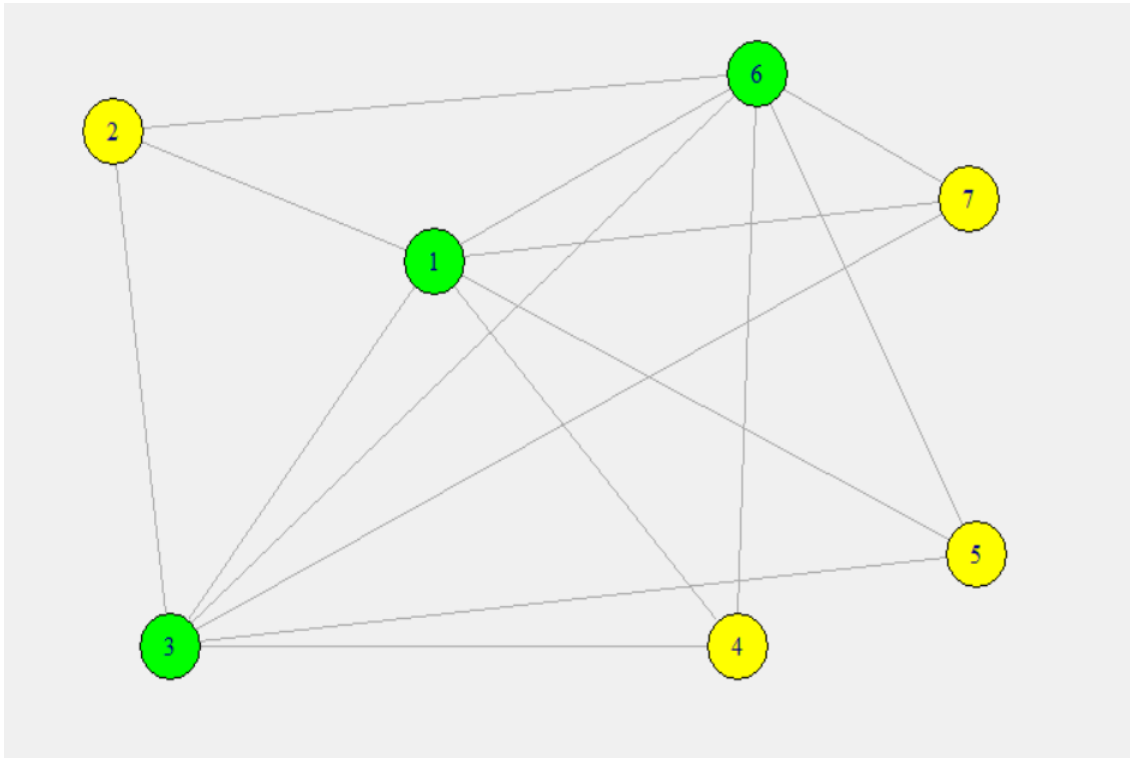


Figura 2.7:  $p$ -HLP con capacidad limitada con los datos de la figura 2.1,  $p = 3$ ,  $\alpha = 1$  y  $\sigma = (40, 40, 40, 20, 20, 40, 40)$

Bryan (1998 [6]) introdujo un modelo en el cual el límite de capacidad es asociado a

los enlaces entre concentradores en vez de a los concentradores. De esta forma, tenemos unos valores que determinan el límite de capacidad de flujo que atraviesa un enlace entre dos concentradores. Notamos por  $\sigma_{km}$  al límite de flujo total que puede viajar entre los concentradores  $k$  y  $m$  de forma directa. Por tanto, esta restricción de capacidad se expresa de la siguiente forma:

$$\sum_i \sum_j h_{ij} Z_{ij}^{km} + \sum_i \sum_j h_{ij} Z_{ij}^{mk} \leq \sigma_{km} \quad \forall k, m; \quad k \neq m \quad (2.47)$$

Ec. (2.47) expresa que la cantidad total de flujo que pasa por el enlace directo entre los concentrador  $k$  y  $m$  tiene que ser menor al límite de capacidad  $\sigma_{km}$

Para este tipo de problemas *Campbell* (1994 [10]) propuso el uso de la programación entera (*Integer Programming*) como método exacto de resolución.

### 2.1.7 $p$ -HLP continuo

Normalmente los HLPs son considerados con un dominio de solución de red o discreto; sin embargo, hay estudios que consideran un dominio de solución continuo, como un plano o una esfera. Casos especiales de este problema que consideran uno o dos concentradores fueron planteados por primera vez por *O'Kelly* (1986 [25] [26]) y posteriormente extendidos a  $p$  concentradores por *Aykin* y *Brown* (1992 [3]). En este problema, cada nodo no concentrador es asignado a un único concentrador y el número de concentradores es  $p$  como el  $p$ -HLP de asignación individual. El criterio usado en este modelo es *Mini-Sum*, los concentradores están completamente conectados entre sí y para viajar entre dos nodos no concentradores al menos uno o como máximo dos concentradores tienen que ser visitados. Además, no se considera coste por instalación de concentradores, los concentradores no tienen capacidad limitada y las variables de decisión son binarias.

Las entradas del problema son similares a las del  $p$ -HLP, donde  $N_i$  es el vector de localización del nodo no concentrador  $i$ . Las salidas son similares a las de problemas anteriores añadiendo la variable de decisión  $P_k$  que denota el vector de localización del concentrador  $k$  ( $k = 1, \dots, p$ ). Consideramos  $d(a, b)$  como la distancia euclídea entre dos nodos  $a$  y  $b$ . Para formular el problema usamos la formulación propuesta por *Puerto* y *Blanco* (2016 [4]) como un problema MISOCO (*Mixed-integer second-order cone optimization*) de optimización convexa. Para ello usamos las variables auxiliares  $d_{ik}^O$ ,  $d_{km}^H$  y  $d_{jm}^D$  que en

la solución óptima del problema son la distancia desde un nodo no concentrador a un concentrador, desde un concentrador a otro concentrador y desde un concentrador a un nodo no concentrador, respectivamente, gracias a las Ecs. (2.50), (2.51) y (2.52). Obteniendo así el siguiente modelo:

$$\text{mín} \quad \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m h_{ij} Y_{ik} Y_{jm} (d_{ik}^O + \alpha d_{km}^H + d_{jm}^D) \quad (2.48)$$

s. a

$$\sum_j Y_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (2.49)$$

$$\|N_i - P_k\| \leq d_{ik}^O \quad \forall i, \forall k = 1, \dots, p \quad (2.50)$$

$$\|P_k - P_m\| \leq d_{km}^H \quad \forall k = 1, \dots, p, \forall m = 1, \dots, p \quad (2.51)$$

$$\|N_j - P_m\| \leq d_{jm}^D \quad \forall j, \forall k = 1, \dots, p \quad (2.52)$$

$$P_k = (a_k, b_k) \quad k = 1, \dots, p \quad (2.53)$$

$$Y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (2.54)$$

Ec. (2.48) minimiza el coste total de transporte, donde el primer término es el coste de los transportes con origen un nodo no concentrador y destino un concentrador, el segundo término es el coste de los transportes entre concentradores y el tercero es el coste de los transportes con origen un concentrador y destino un nodo no concentrador. Ec. (2.49) estipula que cada nodo no concentrador es asignado exactamente a un concentrador. Ecs. (2.53) y (2.54) definen el tipo de las variables de decisión.

Aykin y Brown (1992 [3]) propusieron heurísticas de localización-asignación (*location-allocation heuristics*) como algoritmo de solución para el  $p$ -HLP continuo y lo aplicaron sobre dominios del tipo esfera y plano.

### 2.1.8 $p$ -HLP multi-objetivo

*Costa, Captivo y Climaco* (2008 [17]) propusieron un HLP multi-objetivo en el cual el primer objetivo es minimizar el coste total de transporte, mientras que el segundo es minimizar el tiempo máximo que un nodo concentrador toma para procesar el flujo. En este problema, cada nodo no concentrador es asignado a un único concentrador, los criterios son *Mini-Sum* y *Mini-Max*, el dominio de solución es de red, los concentradores están completamente conectados, el número de concentradores es exógeno y para viajar de un nodo no concentrador a otro hay que atravesar al menos uno o como máximo dos concentradores. Además, no consideramos coste por instalación ni límite de capacidad de los concentradores, y las variables de decisión son binarias.

Las entradas son similares a las del  $p$ -HLP añadiendo  $T_k$ , que es el tiempo que tarda el concentrador  $k$  en procesar una unidad de flujo. Las salidas son similares a las del  $p$ -HLP, llegando así al siguiente modelo:

$$\text{mín} \quad \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m h_{ij} Y_{ik} Y_{jm} (C_{ik} + \alpha C_{km} + C_{jm}) \quad (2.55)$$

$$\text{mín} \quad \text{máx}_k \left\{ T_k \sum_i \sum_j h_{ij} Y_{ik} + T_k \sum_i \sum_j \sum_{\substack{m \\ m \neq k}} h_{ji} Y_{ik} Y_{jm} \right\} \quad (2.56)$$

s. a

$$\sum_k Y_{ik} = 1 \quad \forall i \quad (2.57)$$

$$\sum_k Y_{kk} = p \quad (2.58)$$

$$Y_{ik} - Y_{kk} \leq 0 \quad \forall i, k \quad (2.59)$$

$$Y_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i, k \quad (2.60)$$

Ec. (2.55) minimiza el coste total de transporte en la red y Ec. (2.56) minimiza el tiempo máximo que toma un concentrador  $k$  en procesar el flujo de entrada y salida, donde el

primer término es el flujo total que tiene a  $k$  como primer concentrador y el segundo término el que lo tiene como segundo. Ec. (2.57) expresa que cada nodo no concentrador es asignado a un único concentrador, Ec. (2.58) indica que el número de concentradores seleccionados es  $p$  y Ec. (2.59) expresa que un nodo no concentrador puede ser asignado a un nodo como concentrador sólo si este último es un concentrador. Para terminar, Ec. (2.60) define que las variables de decisión son del tipo binaria.

### 2.1.9 Problema *minimax* de localización de $p$ -concentradores: Problemas de centro

Originalmente propuesto por *Campbell* (1994 [10]), el  $p$ -HCLP (*Hub Center Location Problem*) es aplicable en situaciones que tratan productos perecederos en redes de transporte. La notación es similar a la del problema de localización mediana de  $p$ -concentradores, excepto por el criterio que es *Mini-Max*, minimizando así el coste máximo de todos los viajes, y las variables  $Z_{ij}^{km}$  que son binarias. Por ejemplo, estos problemas son útiles en problemas de localización de instalaciones de emergencia, donde podríamos minimizar el tiempo máximo que tarda una ambulancia en realizar cualquier viaje. El modelo de este problema es el siguiente:

$$\text{mín} \quad \text{máx}_{i,j,k,m} \{C_{ij}^{km} h_{ij} Z_{ij}^{km}\} \quad (2.61)$$

s. a

$$\sum_k X_k = p \quad (2.62)$$

$$\sum_k \sum_m Z_{ij}^{km} = 1 \quad \forall i, j \quad (2.63)$$

$$Z_{ij}^{km} \leq X_k \quad \forall i, j, k, m \quad (2.64)$$

$$Z_{ij}^{km} \leq X_m \quad \forall i, j, k, m \quad (2.65)$$

$$Z_{ij}^{km} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, k, m \quad (2.66)$$

$$X_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \quad (2.67)$$

Ec. (2.61) minimiza coste de transporte máximo desde nodos origen a nodos destino. Además, Ecs. (2.62)-(2.67) son las mismas que las del problema de localización mediana de  $p$ -concentradores de las cuales sabemos cual es su función, salvo Ec. (2.66) que sustituye a Ec. (2.29) ya que suponemos que no podemos fraccionar el flujo entre dos nodos con dos caminos distintos.

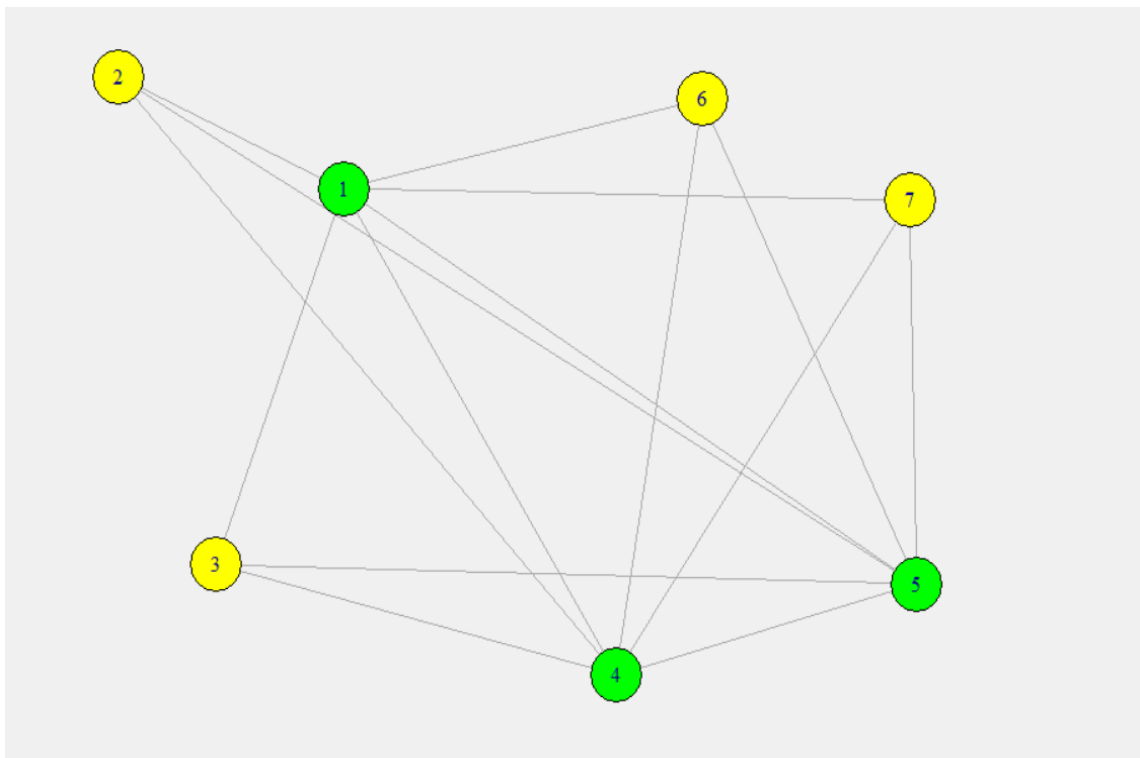


Figura 2.8:  $p$ -HCLP con los datos de la figura 2.1,  $p = 3$  y  $\alpha = 1$

*Campbell* (1994 [10]) propuso el uso de la programación entera (*Integer Programming*) como algoritmo de solución para el  $p$ -HLP de centro.

### 2.1.10 Problema de localización de cobertura de $p$ -concentradores

Este problema es una extensión de los problemas clásicos de localización de cobertura y trata de localizar concentradores de forma que todas las parejas de nodos no concen-

tradores están cubiertas al menos por una pareja de concentradores. Una pareja origen-destino está cubierta si hay concentradores a una distancia especificada anteriormente del enlace que une la pareja. Debido a esto, el coste de transporte, que es equivalente a la distancia, de un nodo origen a otro destino a través de la pareja de concentradores que cubre la demanda debe ser menor o igual que un valor pre-especificado.

$$C_{ij}^{km} Z_{ij}^{km} \leq \gamma_{ij} \quad (2.68)$$

Este problema fue originalmente propuesto por *Campbell* (1994 [10]) y se puede desarrollar en dos HLPs distintos: el problema de localización de cobertura del conjunto de concentradores y el problema de localización de cobertura máxima de  $p$ -concentradores. Ambos son analizados a continuación.

*Karimi* y *Bashiri* (2011 [20]) propusieron algoritmos heurísticos (*heuristic algorithms*) como método de solución del problema de localización de cobertura de  $p$ -concentradores y lo probaron para casos con 37 nodos y 6 concentradores. Mientras que *Campbell* (1994 [10]) propuso el uso de la programación entera (*Integer Programming*) como algoritmo de solución para el  $p$ -HLP de cobertura.

### 2.1.11 Problema de localización de cobertura del conjunto de concentradores

El  $p$ -HSCLP (*Hub Set Covering Location Problem*) es una extensión particular del problema anterior con una excepción, el número de concentradores a localizar es desconocido. Se formula de forma similar al problema de localización mediana de  $p$ -concentradores y en este caso se considera el coste fijo por establecer concentradores. Las entradas del problema son  $F_k$  el coste fijo por establecer un concentrador en el nodo  $k$ ,  $C_{ij}^{km}$  el coste de transferencia desde el nodo origen  $i$  al nodo destino  $j$  atravesando los concentradores  $k$  y  $m$ ,  $\gamma_{ij}$  el coste máximo para poder recubrir el enlace de conexión del nodo  $i$  al  $j$ , y  $V_{ij}^{km}$  que es igual a 1 si la pareja de concentradores  $(k, m)$  puede cubrir el par de demanda  $(i, j)$  y 0 en caso contrario. Las salidas son similares a las del problema de localización mediana de  $p$ -concentradores, lo que lleva al siguiente modelo final:

$$\text{mín} \quad \sum_k F_k X_k \quad (2.69)$$

s. a

$$\sum_k \sum_m V_{ij}^{km} Z_{ij}^{km} \geq 1 \quad \forall i, j \quad (2.70)$$

$$Z_{ij}^{km} \leq X_k \quad \forall i, j, k, m \quad (2.71)$$

$$Z_{ij}^{km} \leq X_m \quad \forall i, j, k, m \quad (2.72)$$

$$Z_{ij}^{km} \geq 0 \quad \forall i, j, k, m \quad (2.73)$$

$$X_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \quad (2.74)$$

Ec. (2.69) minimiza el coste total por establecer los nuevos concentradores. Además, Ec. (2.70) estipula que cada pareja de demanda debe estar cubierta al menos una vez por una pareja de concentradores. Ecs. (2.72) y (2.73) imponen que la pareja origen-destino  $(i, j)$  es asignado a la pareja  $(k, m)$  solamente si  $k$  y  $m$  son concentradores. El resto de restricciones definen las variables de decisión.



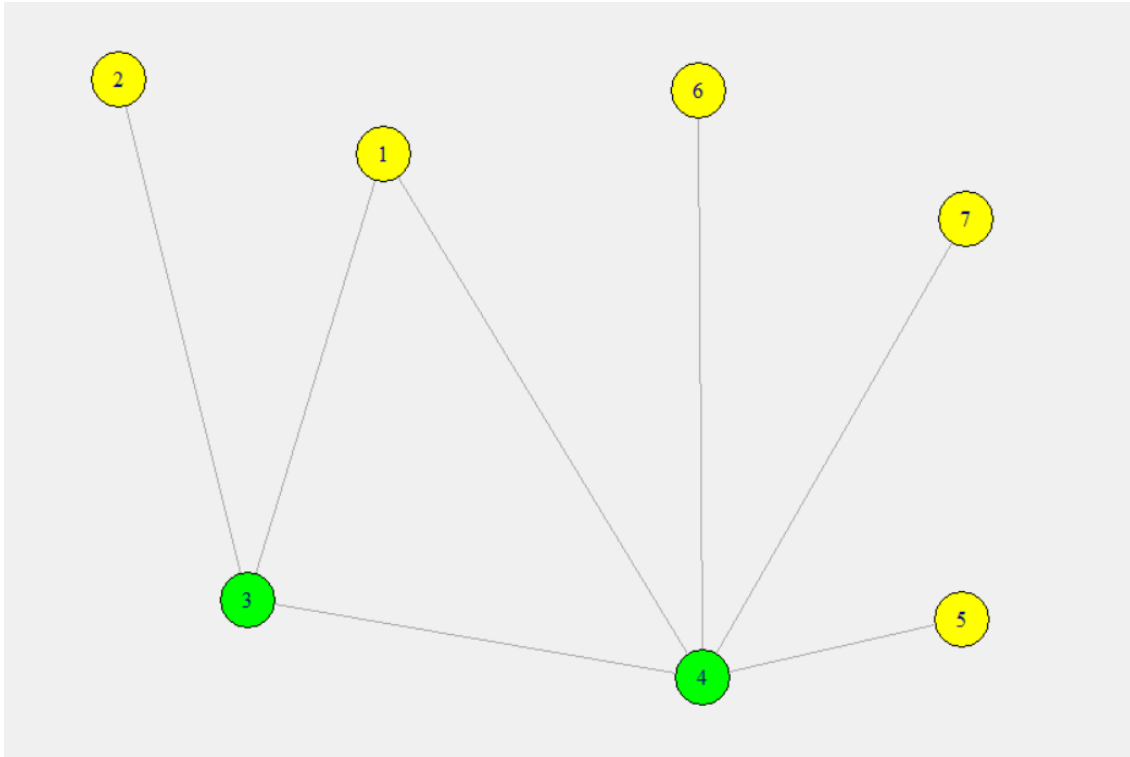


Figura 2.9:  $p$ -HSCLP con los datos de la figura 2.1,  $\alpha = 1$ ,  $F = (7, 6, 5, 6, 7, 5, 5)$  y suponemos que  $V_{ij}^{km} = 1$  si  $C_{ik}, C_{km}, C_{mj} \leq 10$

### 2.1.12 Problema de localización de cobertura máxima de $p$ -concentradores

El  $p$ -HMCLP (*Hub Maximal Covering Location Problem*) es un caso particular del problema de localización de cobertura de  $p$ -concentradores, en el cual no imponemos que exista por obligación una solución en la que todas las parejas de nodos no concentradores están cubiertas por una pareja de concentradores. De esta forma, el objetivo es maximizar la cantidad de demanda de transporte que está cubierta. La formulación propuesta para este problema es similar a la del problema de localización mediana de concentradores ya que el número de concentradores se determina exógenamente. Además, en este caso no se consideran costes fijos por establecer concentradores. El criterio y las restricciones del modelo son los siguientes:

$$\text{máx} \quad \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m h_{ij} V_{ij}^{km} Z_{ij}^{km} \quad (2.75)$$

s. a

$$\sum_k X_k = p \quad (2.76)$$

$$\sum_k \sum_m Z_{ij}^{km} = 1 \quad \forall i, j \quad (2.77)$$

$$Z_{ij}^{km} \leq X_m \quad \forall i, j, k, m \quad (2.78)$$

$$Z_{ij}^{km} \leq X_k \quad \forall i, j, k, m \quad (2.79)$$

$$Z_{ij}^{km} \geq 0 \quad \forall i, j, k, m \quad (2.80)$$

$$X_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \quad (2.81)$$

Ec. (2.75) maximiza la cantidad de demanda de transporte cubierta. El resto de restricciones son iguales que las del problema de localización mediana de  $p$ -concentradores de las cuales sabemos su función.

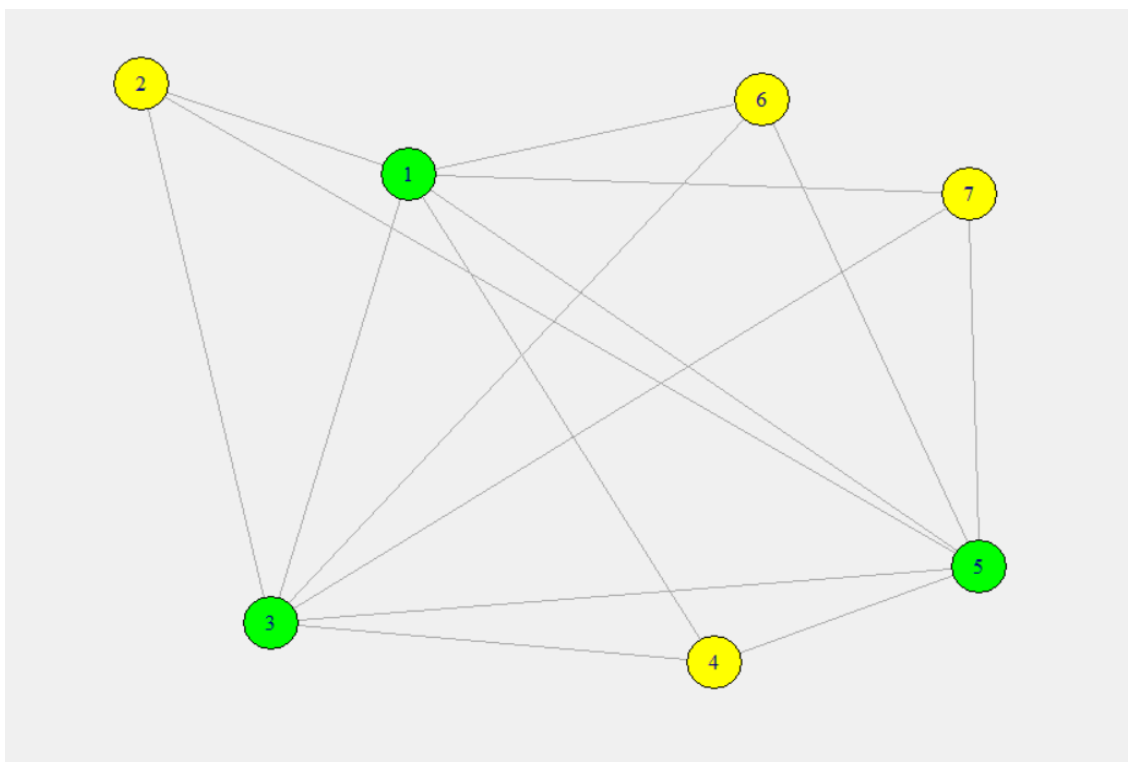


Figura 2.10:  $p$ -HMCLP con los datos de la figura 2.1,  $p = 3$ ,  $\alpha = 1$  y suponemos que  $V_{ij}^{km} = 1$  si  $C_{ij}^{km} \leq 16$

Qu y Weng (2009 [31]) propusieron un enfoque evolutivo basado en la vinculación de ruta (*Evolutionary approach based on path relinking*) como método heurístico de resolución y lo aplicaron sobre dominios de un tamaño de 82 nodos y 4 concentradores.

### 2.1.13 Problemas de localización mediana ordenada de concentradores con asignación individual

El SA-OMHLP (Single Allocation Order Median Hub Location Problem), propuesto por Puerto, Ramos y Rodríguez-Chía (2011 [30]), es una variante al problema de localización mediana de concentradores donde introducimos un nuevo tipo de patrón de distribución inducido por los roles de cada usuario en la cadena de suministros. Nuestro objetivo es instalar un sistema de distribución intermediario formado por un número fijo de concentradores que minimice los costes de operación de la cadena de suministros.

En primer lugar, asumimos que cada origen carga con los costes de llevar su flujo al primer concentrador, mientras que el sistema de distribución se encarga de una vez recibida cada mercancía en su primer concentrador transportarla a su destino. Además, suponemos que los costes de transportes dentro del sistema de distribución son más baratos que su coste original debido al uso de grandes vehículos o modos de transporte más baratos. Por ello suponemos que dentro del sistema de distribución los costes de transporte entre concentradores tienen un factor de descuento  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) y los costes de transporte desde un concentrador a su destino tienen asociado otro factor de descuento  $\delta$  ( $\alpha \leq \delta \leq 1$ ). El uso de dos factores distintos es debido a los distintos sistemas de carga y descarga de los concentradores respecto de los destinos.

Finalmente, los costes de entrega desde un origen al sistema de distribución son escalados mediante un vector  $\lambda$  de pesos de forma que se pueda compensar a los orígenes que sufren situaciones injustas, beneficiando así a la cadena de suministros. La asignación de cada origen a su peso se basa en el coste total de transporte de cada uno a su concentrador asignado, de forma que  $\lambda_i$  está asociado al origen con el  $i$ -ésimo coste de transporte al sistema de distribución más pequeño. De esta forma, a la hora de beneficiar a distintos orígenes nos basamos en el orden según su coste de transporte.

Para formular nuestro modelo, tenemos en cuenta que hay  $N$  nodos como posibles candidatos a concentradores, que cada nodo no concentrador es asignado a un único concentrador y como en los casos anteriores para viajar de un nodo no concentrador a otro es necesario atravesar al menos uno o como máximo dos concentradores. Sin embargo, dentro del sistema de distribución el flujo se transporta sin tener en cuenta las asignaciones individuales de los orígenes.

Las entradas del problema son las mismas que las del problema de localización mediana de  $p$ -concentradores, añadiendo los factores de descuento  $\alpha$  y  $\delta$ , y el vector de pesos  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ , además, usamos el flujo total con origen en el nodo  $j$  ( $O_j = \sum_k h_{jk}$ ). Las variables de decisión son distintas y son las siguientes:  $r_{jk}^i$  es igual a 1 si el nodo  $j$  es asignado al concentrador  $k$  y, además,  $O_j C_{jk}^i$  es el  $i$ -ésimo valor más pequeño de los costes de transporte de cada origen a su concentrador asignado, y 0 en caso contrario;  $x_{klm}$  es el flujo que viaja a través de un primer concentrador  $k$  y un segundo concentrador  $l$  con destino el nodo  $m$ ;  $Y_k$  es igual a 1 si el nodo  $k$  es un concentrador y 0 en caso contrario. El criterio del modelo y sus restricciones son los siguientes:

$$\text{mín} \quad \sum_i \sum_j \sum_k \lambda_i C_{jk} r_{jk}^i O_j + \sum_k \sum_l \sum_m x_{klm} (\alpha C_{kl} + \delta C_{lm}) \quad (2.82)$$

s. a

$$\sum_i \sum_k r_{jk}^i = 1 \quad \forall j \quad (2.83)$$

$$\sum_j \sum_k r_{jk}^i \leq 1 \quad \forall i \quad (2.84)$$

$$\sum_i \sum_j r_{jk}^i \leq NY_k \quad \forall k \quad (2.85)$$

$$\sum_i r_{jj}^i \leq Y_j \quad \forall j \quad (2.86)$$

$$\sum_l x_{klm} = \sum_i \sum_j r_{jk}^i h_{jm} \quad \forall k, m \quad (2.87)$$

$$\sum_j \sum_k r_{jk}^i C_{jk} O_j \leq \sum_j \sum_k r_{jk}^{i+1} C_{jk} O_j \quad \forall i \quad (2.88)$$

$$x_{klm} \leq (1 - Y_m) \sum_j h_{jm} \quad \forall k, l, m; \quad l \neq m \quad (2.89)$$

$$\sum_l \sum_m x_{klm} \leq Y_k \sum_j O_j \quad \forall k \quad (2.90)$$

$$\sum_k \sum_m x_{klm} \leq Y_l \sum_j O_j \quad \forall l \quad (2.91)$$

$$\sum_k Y_k = p \quad (2.92)$$

$$x_{klm} \geq 0 \quad \forall k, l, m \quad (2.93)$$

$$Y_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \quad (2.94)$$

$$r_{jk}^i \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, k \quad (2.95)$$

Ec. (2.82) minimiza la expresión donde el primer término es el coste de transporte total desde los orígenes al primer concentrador escalado por el vector  $\lambda$  y el segundo término es el coste de transporte total entre concentradores y de concentradores al destino teniendo en cuenta los factores de descuento  $\alpha$  y  $\delta$ . Ec. (2.83) asegura que cada origen  $j$  tiene asignado una única posición en la secuencia de costes de transporte ordenados y tiene asociado exactamente un concentrador. Ec. (2.84) garantiza que cada posición en el vector de costes de transportes de los orígenes ordenados es asociado como máximo a un origen. Ec. (2.85) expresa que un origen es asociado a un concentrador  $k$  sólo si este último es un concentrador. Ec. (2.86) asegura que si un origen  $j$  es un concentrador, entonces está asignado así mismo como primer concentrador. Ec. (2.87) garantiza que el flujo de entrada como primer concentrador de un concentrador  $k$  con destino el nodo  $m$  es el mismo que el flujo de salida como primer concentrador de  $k$  con destino el nodo  $m$ . Ec. (2.88) impone que la asignación de posición a cada nodo se realice respetando el orden no decreciente. Ec. (2.89) representa que si el destino es un concentrador entonces se atraviesan como máximo un concentrador, sin contar con el destino. Ecs. (2.90) y (2.91) establecen que los nodos intermedios de un paso origen-destino tienen que ser concentradores. Finalmente, Ec. (2.92) expresan que el número de concentradores a localizar es  $p$  y el resto de restricciones simplemente definen las variables.

Este tipo de problemas es aplicable en casos similares a los de las empresas de paquetería donde las franquicias urbanas de primer nivel llevan los productos al centro de distribución asignado de la empresa de paquetería, y luego la empresa entrega el producto a su destino final.

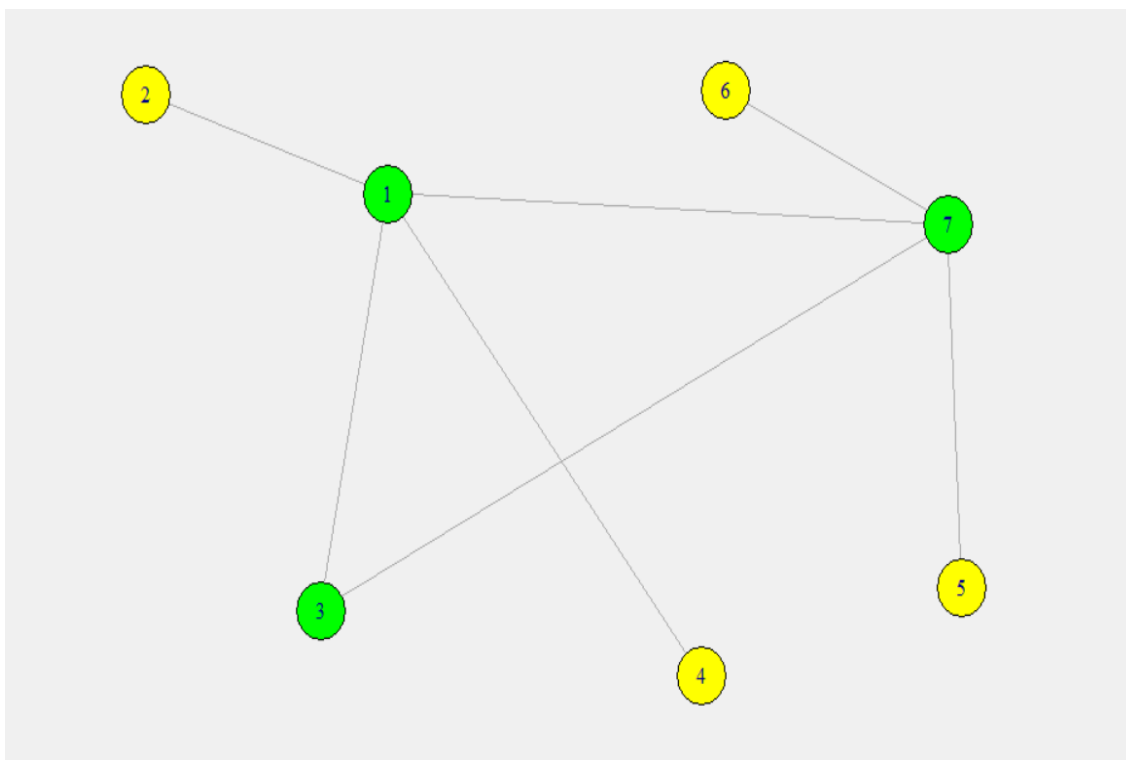


Figura 2.11: SA-OMHLP con los datos de la figura 2.1,  $p = 3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\delta = 1$  y  $\lambda = (0, 0, 0, 0, 0, 2, 6)$

*Puerto, Ramos y Rodríguez-Chía* (2011 [30]) propusieron el uso de la programación entera mixta (*Mixed Integer Programming*) como método de resolución para este problema. Además, lo aplicaron para casos con tamaños de 10, 15 y 20 nodos, y 3, 4, 5, 8 y 10 concentradores.

## 2.2 Arquitectura de árbol entre los concentradores

Este tipo de arquitecturas determina que los concentradores localizados deben estar conectados mediante un árbol. Luego se combinan tanto el problema de localizar concentradores y establecer la asignación entre nodos no concentradores y concentradores como el diseño de red árbol que conecta los concentradores. Estos problemas tienen una gran aplicación en sistemas de telecomunicaciones y transporte donde los costes de instalación de enlaces entre concentradores son muy elevados.

### 2.2.1 Problema de localización de árbol de concentradores

El problema de localización de árbol de concentradores o THLP (The Tree of Hubs Location Problem), propuesto por *Contreras, Fernández y Marín* (2010 [15]), es un problema de localización de concentradores de asignación individual y donde se deben localizar  $p$  concentradores, bajo la particularidad de que los concentradores están conectados mediante un árbol. Al igual que en el  $p$ -HLP el dominio de solución es del tipo red, el criterio usado es *Mini-sum*, cada nodo no concentrador es asignado a un único concentrador y también se va a considerar un factor de descuento  $\alpha$  para las transferencia entre concentradores ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ).

Las entradas del problema al igual que en el  $p$ -HLP son  $h_{ij}$  la cantidad de flujo transportada desde el nodo  $i$  al  $j$ ,  $C_{ij}$  el coste por unidad transferida del nodo  $i$  al  $j$  y  $\alpha$  el factor de descuento. Sin embargo, las salidas y variables de decisión son distintas y es necesario introducirlas. Las variables de decisión binarias son  $Y_{km}$  con  $k < m$ , que es igual a 1 si dos concentradores distintos  $k$  y  $m$  están conectados directamente y 0 en caso contrario, y  $Z_{ik}$ , que es 1 si el nodo no concentrador  $i$  es asignado al concentrador  $k$  y 0 en caso contrario. Además, el problema también tiene como variables de decisión a  $x_{ikm}$  que consiste en la cantidad de flujo que tiene como origen el nodo  $i$  y atraviesa el arco  $(k, m)$  con  $k$  y  $m$  concentradores distintos. Al igual que en casos anteriores si la variable  $Z_{kk}$  es igual a 1 consideramos que el nodo  $k$  es un concentrador. En la formulación del problema usamos el flujo total con origen en el nodo  $i$  ( $O_i = \sum_j h_{ij}$ ) y el flujo total con destino en el nodo  $i$  ( $D_i = \sum_j h_{ji}$ ).

De esta forma, el modelo resultante del problema es el siguiente:

$$\text{mín} \quad \sum_i \sum_k (C_{ik}O_i + C_{ki}D_i)Z_{ik} + \sum_i \sum_k \sum_{\substack{m \\ m \neq k}} \alpha C_{km}x_{ikm} \quad (2.96)$$

s. a

$$\sum_k Z_{ik} = 1 \quad \forall i \quad (2.97)$$

$$\sum_k Z_{kk} = p \quad (2.98)$$

$$Z_{km} + Y_{km} \leq Z_{mm} \quad \forall k, m; \quad m > k \quad (2.99)$$



$$Z_{mk} + Y_{km} \leq Z_{kk} \quad \forall k, m; \quad m > k \quad (2.100)$$

$$x_{ikm} + x_{imk} \leq O_i Y_{km} \quad \forall i, k, m; \quad m > k \quad (2.101)$$

$$O_i Z_{ik} + \sum_{\substack{m \\ m \neq k}} x_{imk} = \sum_{\substack{m \\ m \neq k}} x_{ikm} + \sum_m h_{im} Z_{mk} \quad \forall i, k; \quad k \neq i \quad (2.102)$$

$$\sum_k \sum_{\substack{m \\ m > k}} Y_{km} = p - 1 \quad (2.103)$$

$$x_{ikm} \geq 0 \quad \forall i, k, m \quad (2.104)$$

$$Z_{km} \in \{0, 1\} \quad \forall k, m \quad (2.105)$$

$$Y_{km} \in \{0, 1\} \quad \forall k, m; \quad k < m \quad (2.106)$$

Ec. (2.96) minimiza el coste total de transporte, donde el primer término es el coste total de transporte entre un nodo no concentrador y un concentrador, y el segundo término es el coste total de transporte entre dos concentradores. Ec. (2.97) impone que cada nodo no concentrador es asignado a un único concentrador y Ec. (2.98) expresa que el número de concentradores a localizar es  $p$ . Ecs. (2.99) y (2.100) representan que un nodo no concentrador es asignado a un nodo como concentrador sólo si este último es un concentrador y que dos nodos están conectados como concentradores sólo si ambos son concentradores. Ec. (2.101) impone que hay flujo de origen en el nodo  $i$  y que atraviesa el arco  $(k, m)$  sólo si los concentradores  $k$  y  $m$  están conectados. Las restricciones de Ec. (2.102) garantizan que se conserve el flujo con origen en el nodo  $i$  en el nodo  $k$ . En el término de la izquierda tenemos el flujo de entrada en el nodo  $k$  directamente desde el nodo  $i$  (si  $i$  no es un concentrador y es asignado al concentrador  $k$ ) más el flujo de entrada en el nodo  $k$  desde otro concentrador y con origen en el nodo  $i$ . En el término de la derecha tenemos el flujo con origen en el nodo  $i$  y que va del concentrador  $k$  a otro concentrador (si  $k$  es un concentrador) más el flujo con origen en  $i$  y destino otro nodo no concentrador asignado al concentrador  $k$ . Finalmente, Ec. (2.103) permite que los concentradores se conecten de forma que generen un árbol ya que impone que haya  $p - 1$  conexiones entre concentradores y junto a (2.101) y (2.102) imponen ese diseño de red. El resto de restricciones definen las variables de decisión.

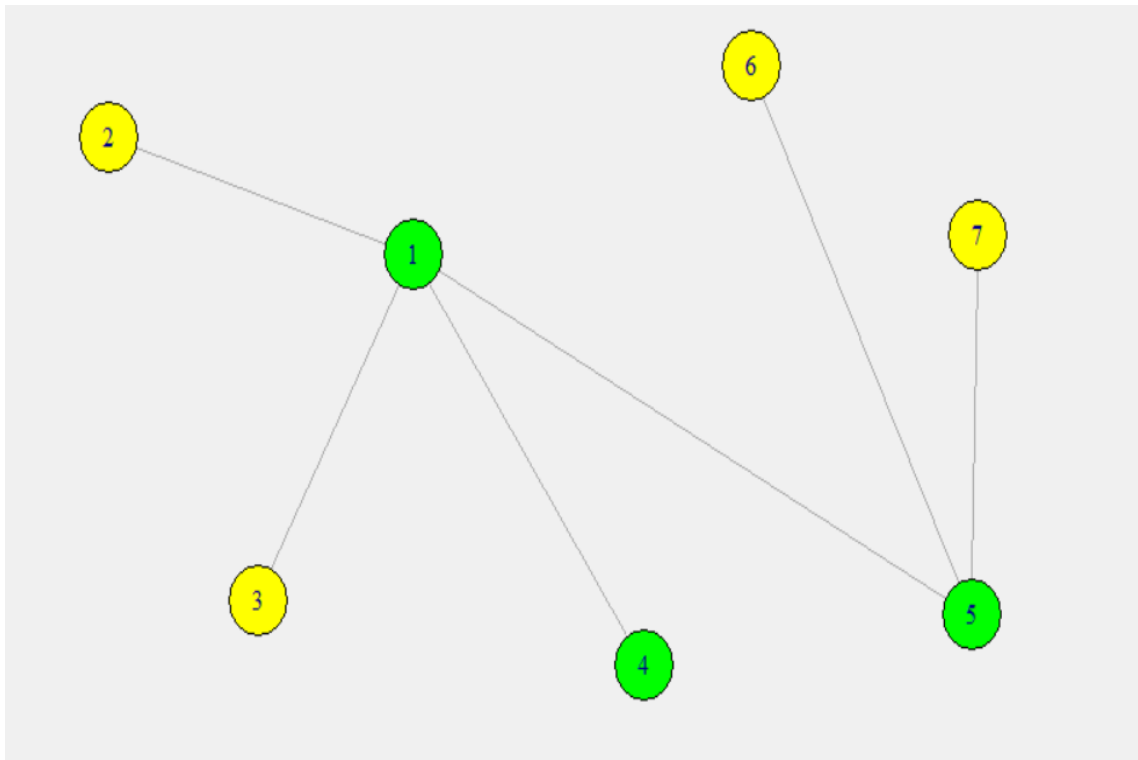


Figura 2.12: THLP con los datos de la figura 2.1,  $p = 3$  y  $\alpha = 1$

*Contreras, Fernández y Marín* (2010 [15]) realizaron un estudio computacional de este problema donde compararon la resolución de éste mediante programación lineal (LP) con la resolución mediante cortes generados automáticamente por el solver de *Xpress*. Aplicaron estos métodos sobre casos con tamaños de 10 y 20 nodos, y 3, 5 y 8 concentradores, además, fueron alternando los valores del factor de descuento entre los valores 0.2, 0.5 y 0.8.

## 2.3 HLP con estructura de red estrella

En este problema, suponemos que tenemos un conjunto de nodos con un concentrador central, y tratamos de seleccionar  $p$  concentradores los cuales están conectados al concentrador central con enlaces directos. Cada nodo no concentrador debe estar conectado a un único concentrador generando así una estructura de red estrella. *Yaman* (2008 [34]) propuso nuevas formulaciones para el problema de localización mediana de

$p$  concentradores estrella en donde se minimiza el coste total por selección de enlaces capacitados.

En la formulación que propuso *Yaman* (2008 [34]), supone un nodo 0 que hace de concentrador central y los valores de entrada son  $h_{ij}$  el flujo del nodo  $i$  al  $j$ ,  $d_{ij}$  la distancia entre el nodo  $i$  y el  $j$ ,  $Q_1$  la capacidad de los enlaces entre un nodo no concentrador y un concentrador,  $Q_2$  la capacidad de los enlaces entre un concentrador y el concentrador central,  $c_1$  el coste por unidad de distancia en un enlace entre un nodo no concentrador y un concentrador,  $c_2$  el coste por unidad de distancia en un enlace entre un concentrador y el concentrador central, el clásico factor de descuento  $\alpha$  ( $c_2 = \alpha c_1$ ) y  $C_{ij}$  el coste de asignación de un nodo no concentrador  $i$  a un concentrador  $j$ , que es igual a  $c_1 d_{ij} \lceil \sum_m h_{im} / Q_1 \rceil + c_2 d_{ji} \lceil \sum_m h_{mi} / Q_2 \rceil$ . Las variables de decisión en este caso son  $Y_{ij}$  que es igual a 1 si un nodo no concentrador  $i$  es asignado a un concentrador  $j$  y 0 en caso contrario. Suponemos que  $Y_{ii}$  es igual a 1 si el nodo  $i$  es un concentrador. A partir de esto, la formulación del modelo es la siguiente:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_i \sum_j C_{ij} Y_{ij} \\ & + c_2 \sum_j \left( d_{j0} \left[ \sum_i \sum_m \frac{h_{im}}{Q_2} Y_{ij} (1 - Y_{mj}) \right] + d_{0j} \left[ \sum_i \sum_m \frac{h_{mi}}{Q_2} Y_{ij} (1 - Y_{mj}) \right] \right) \end{aligned} \quad (2.107)$$

s. a

$$\sum_j Y_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (2.108)$$

$$\sum_j Y_{jj} = p \quad (2.109)$$

$$Y_{ij} \leq Y_{jj} \quad \forall i, j \quad (2.110)$$

$$Y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (2.111)$$

Ecs. (2.108-2.110) imponen que cada nodo no concentrador es asignado a un único concentrador, que hay que localizar  $p$  concentradores y que un nodo  $i$  es asignado a un nodo  $j$  como concentrador si el nodo  $j$  es un concentrador y Ec. (2.111) define las variables.

En este caso la capacidad de cada enlace no impone restricciones, sino que tiene influencia en la función objetivo que vamos a minimizar. Por ejemplo, al transportar una carga los camiones que la llevan tienen un límite, si ese límite es sobrepasado tenemos que usar más de un camión. De esta forma, para calcular el coste de un enlace calculamos la distancia recorrida total a través de ese enlace y la multiplicamos por su coste por unidad de distancia. A su vez para calcular la distancia total multiplicamos la distancia del enlace por el número de viajes. Ec. (2.107) minimiza esa expresión donde el primer término es el coste total de transporte entre nodos no concentradores y concentradores y el segundo término es el coste total de viajes entre concentradores y el concentrador central.

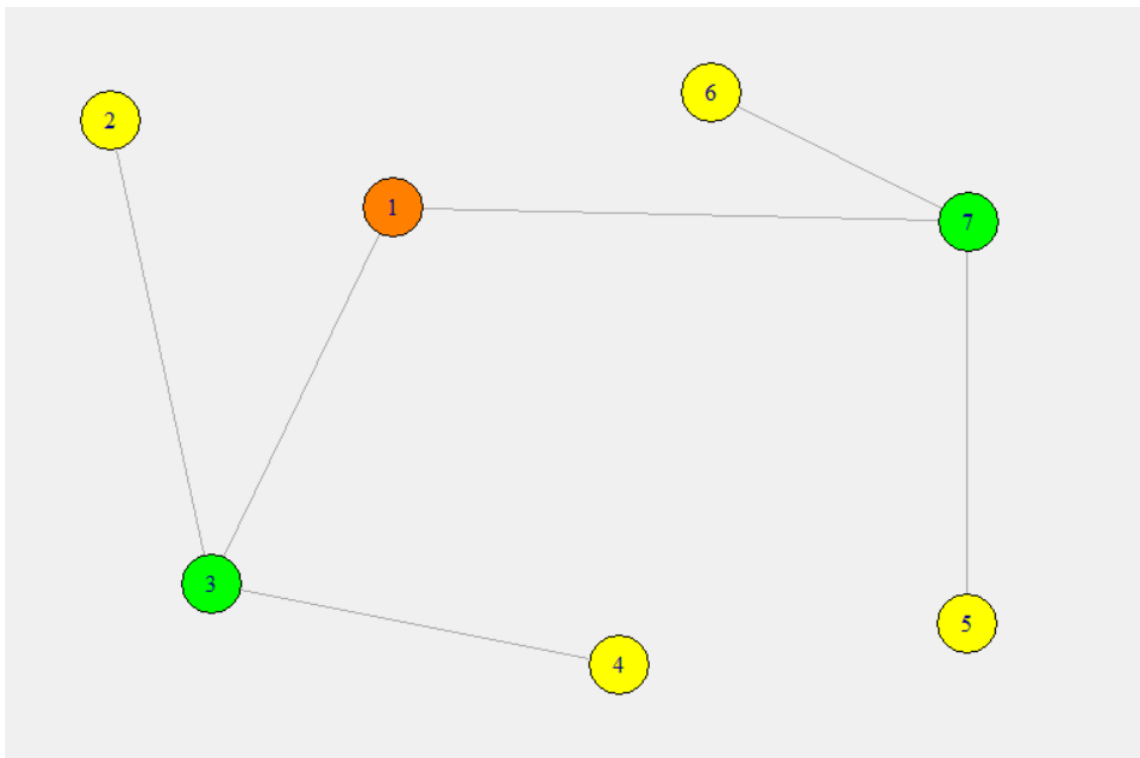


Figura 2.13: HLP con estructura estrella con los datos de la figura 2.1,  $p = 2$ , suponemos que el nodo 1 es el central,  $c_1 = 6$ ,  $c_2 = 2$ ,  $Q_1 = 5$  y  $Q_2 = 11$

Yaman (2008 [34]) propuso un algoritmo heurístico basado en la relajación lagrangiana y búsqueda local (*Lagrangian relaxation and local search*) como método de resolución del  $p$ -HLP con estructura de estrella. Aplicó este método sobre un dominio con un tamaño de 81 nodos y 25 concentradores para realizar un estudio computacional del problema.

## 2.4 Otras arquitecturas

A los modelos donde los concentradores no tienen una conexión total entre ellos se los denomina problemas de localización de arco de concentradores o HALPs (*Hub Arc Location Problems*) entre los que hemos presentado ya los THLPs y los HLPs estrella. Aparte de estos, podemos destacar el HLP en anillo y el HLP en línea, los cuales explicamos más detalladamente a continuación. Aparte de estos dos, *Yaman* (2009 [33]) propuso un HLP de 3 capas donde la primera es una red de concentradores centrales con conexión completa, y la segunda y la tercera son la unión de las redes conectando el resto de concentradores a los concentradores centrales y los nodos origen-destino a los concentradores, respectivamente. También es interesante destacar que *Alumur et al.* (2009 [1]) y *Calik et al.* (2009 [8]) presentaron un diseño de redes de concentradores incompleta con asignación individual, en el que no se le impone ninguna estructura salvo la conectividad de los concentradores. De esta forma, el diseño de la red de concentradores se genera dependiendo del criterio de nuestro problema.

### 2.4.1 HLP en anillo

*Lee et al.* (1993 [22]) y *Contreras et al.* (2013 [16]) se enfocaron en un diseño de anillo para la red de concentradores. En principio, fue pensado para asignación individual y con los concentradores formando un ciclo, es decir, un grafo conexo donde todos los concentradores tienen grado igual a 2 creando un camino cerrado que no repite ningún nodo salvo el primero que aparece al principio y al final.

Las entradas, salidas y variables de decisión del modelo son similares a las del THLP, sustituyendo las variable  $x_{ikm}$  por otras  $x_{ij}^{km}$  binarias que son igual a 1 si la demanda desde  $i$  a  $j$  atraviesa el arco de concentradores  $(k, m)$ . Al igual que en los THLPs, usamos los parámetros  $O_i$ , que es el flujo total con origen en el nodo  $i$ , y  $D_i$ , que es el flujo total con destino en el nodo  $i$ . De esta forma, obtenemos el siguiente modelo para el HLP en anillo:

$$\text{mín} \quad \sum_i \sum_k (C_{ik}O_i + C_{ki}D_i)Z_{ik} + \sum_i \sum_j \sum_k \sum_{\substack{m \\ m \neq k}} \alpha h_{ij} C_{km} x_{ij}^{km} \quad (2.112)$$

s. a

$$\sum_k Z_{ik} = 1 \quad \forall i \quad (2.113)$$

$$\sum_k Z_{kk} = p \quad (2.114)$$

$$\sum_{\substack{m \\ m \neq k}} x_{ij}^{km} + Z_{jk} - \sum_{\substack{m \\ m \neq k}} x_{ij}^{mk} - Z_{ik} = 0 \quad \forall i, j, k; \quad i \neq j, k \neq j \quad (2.115)$$

$$x_{ij}^{km} + x_{ij}^{mk} \leq Y_{km} \quad \forall i, j, k, m; \quad k < m \quad (2.116)$$

$$\sum_{\substack{m \\ k < m}} Y_{km} + \sum_{\substack{m \\ m < k}} Y_{mk} = 2Z_{kk} \quad \forall k \quad (2.117)$$

$$\sum_k \sum_{\substack{m \\ m > k}} Y_{km} = p \quad (2.118)$$

$$x_{ij}^{km} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, k, m; \quad k \neq m \quad (2.119)$$

$$Y_{km} \in \{0, 1\} \quad \forall k, m; \quad k < m \quad (2.120)$$

$$Z_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i, k \quad (2.121)$$

Ec. (2.112) minimiza el coste total de transporte donde el primer término es el coste de transporte total entre un nodo no concentrador y un concentrador y el segundo término el coste entre concentradores. Ec. (2.115) permite la conservación del flujo con origen en  $i$  y destino en  $j$  en el concentrador  $k$ . Ec. (2.116) impone que el flujo entre dos nodos atraviesa el arco de concentradores  $(k, m)$  o  $(m, k)$  sólo si ambos concentradores están conectados y, además, sólo puede atravesar como máximo uno de los dos arcos. Ec. (2.117) expresa que cada concentrador está conectado a otros dos concentradores. Ec. (2.118) impone que el número de aristas es  $p$ , generando así la estructura en anillo. El resto de restricciones definen las variables o aparecen en el modelo del THLP y conocemos sus funciones.

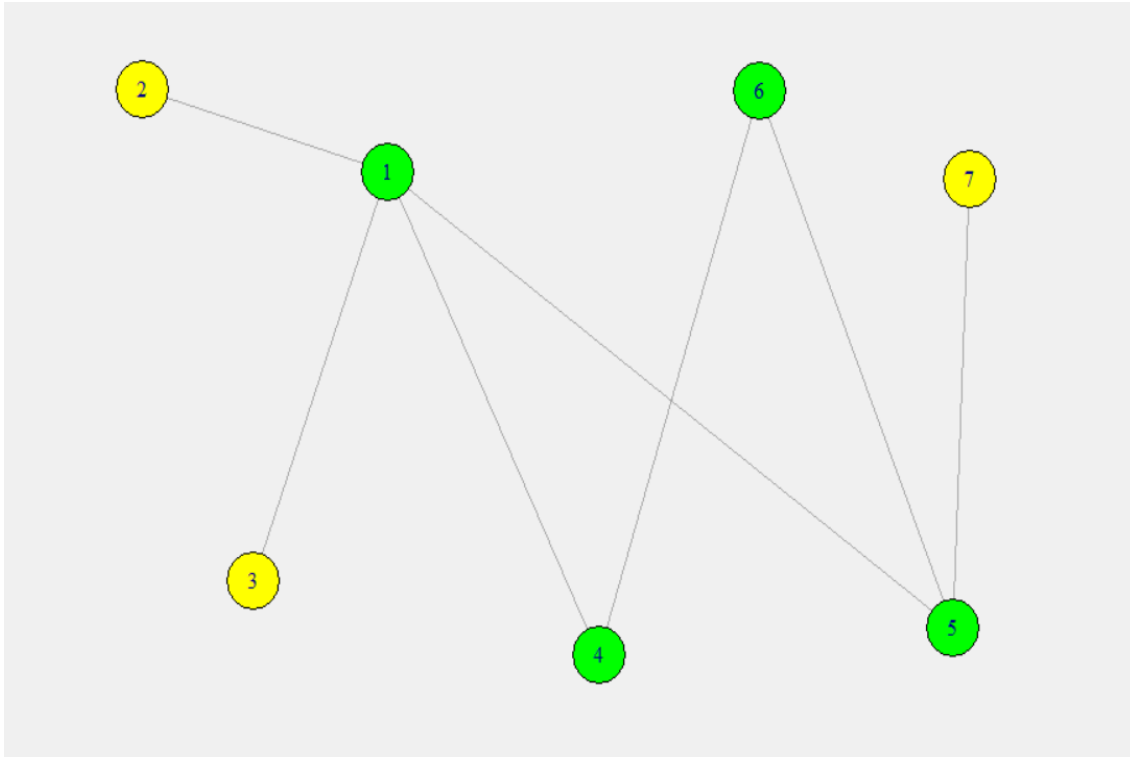


Figura 2.14: HLP en anillo con los datos de la figura 2.1,  $p = 4$  y  $\alpha = 1$

## 2.4.2 HLP en línea

*Martins de Sá et al.* (2015 [24]) propusieron un problema con un diseño de concentradores en línea. En un principio se propuso como un modelo de asignación individual, es decir, cada nodo no concentrador es asignado a un sólo concentrador, y los concentradores están conectados de forma que crean una línea, es decir, un árbol donde todos los concentradores están conectados a otros dos, salvo dos que están conectados sólo a uno.

*Martins de Sá et al.* (2014 [23]) presentó una extensión de este problema para el caso en el que se deben localizar múltiples líneas de concentradores.

Tomando como ejemplo el THLP, ya que una línea de nodos es un árbol, añadimos la siguiente restricción al THLP para crear el modelo de este problema:

$$\sum_{\substack{m \\ k < m}} Y_{km} + \sum_{\substack{m \\ m < k}} Y_{mk} \leq 2Z_{kk} \quad \forall k \quad (2.122)$$

Añadiendo la Ec. (2.122) imponemos que cada concentrador está conectado como máximo a otros dos, generando así una línea de concentradores.

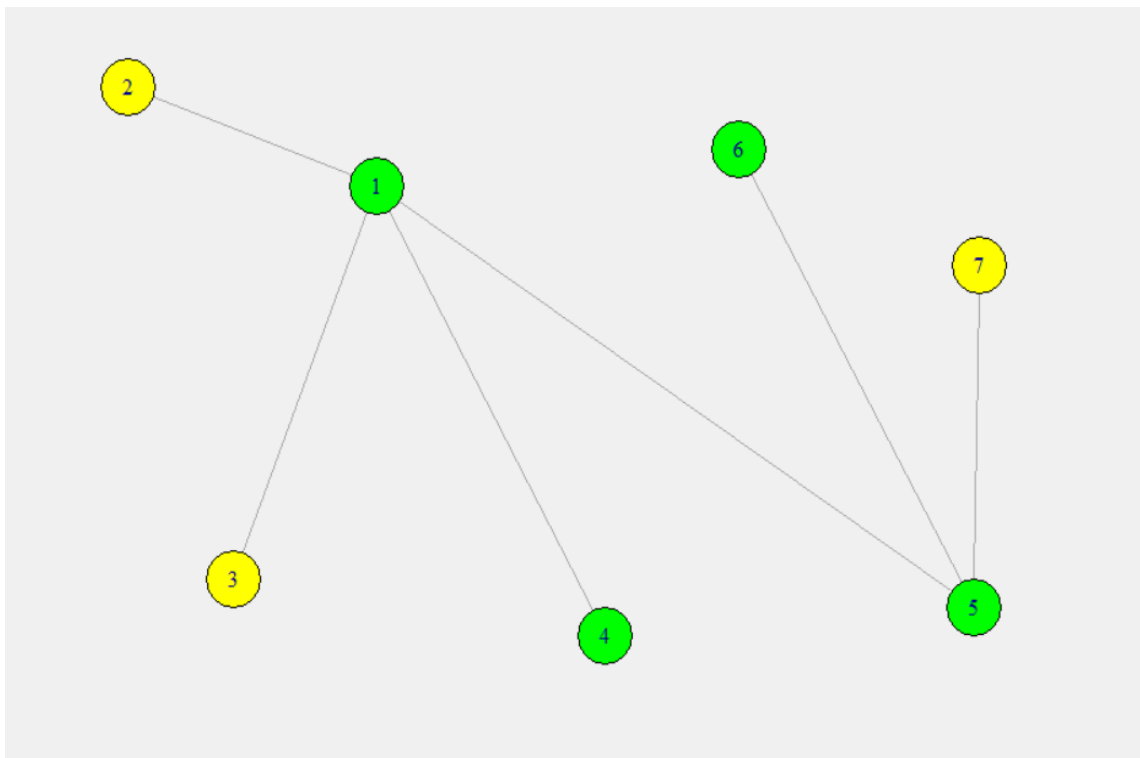


Figura 2.15: HLP en línea con los datos de la figura 2.1,  $p = 4$  y  $\alpha = 1$

## 2.5 Conclusiones

En este capítulo hemos introducido una gran variedad de tipos de HLPs, lo que nos permite aplicarlos en muchos ámbitos de la vida real. Dependiendo de nuestro objetivo, restricciones y también de la información de la que disponemos seleccionamos nuestro modelo a utilizar o incluso combinamos varios.



La gran mayoría de los modelos presentados han sido implementados en el lenguaje *AMPL*, obteniendo así los resultados de cada problema para los datos de la figura 2.1. Cada uno de estos modelos ha sido ilustrado y a continuación analizamos y comentamos las características de los resultados obtenidos.

Como podemos observar en la figura 2.1 el nodo 1 es el nodo que se encuentra a menor distancia del resto y, además, el que acumula la mayor cantidad de flujo, tanto de salida como de entrada. Esto provoca que tenga bastante sentido que en mucho de los problemas presentados el nodo 1 sea uno de los concentradores seleccionados. Además, las diferencias en el conjunto de concentradores y estructura de red entre el  $p$ -HLP y el  $p$ -HLMP (figuras 2.3 y 2.4) muestran la influencia del tipo de asignación (individual o múltiple).

Otro tipo de parámetro como el coste por enlace puede alterar nuestro modelo. Al considerar únicamente los costes por los enlaces entre un nodo no concentrador y un concentrador en el nodo 1, éste no es seleccionado como concentrador, lo que provoca grandes cambios en el conjunto de concentradores simplemente por cambiar uno de ellos (figura 2.5).

Suponer un límite de capacidad en los concentradores provoca un cambio en el conjunto de concentradores, sin embargo no afecta a la estructura de la red, que tendrá una conexión total entre los nodos no concentradores y los concentradores (figura 2.7). Por otro lado, imponer un valor mínimo de flujo en los enlaces entre nodos no concentradores y concentradores provocan una asignación mixta en el modelo resultante (figura 2.6). Aunque no aparezca en las figuras, ya que sólo se muestran los nodos y las conexiones entre ellos, ambos conceptos alteran la distribución del flujo dentro de la red.

En problemas como los HLPs de centro en los que nuestro objetivo es minimizar el máximo coste de transporte el conjunto de concentradores también se ve influenciado aunque la conexión sigue siendo total en nuestro modelo (figura 2.8).

En el  $p$ -HSCLP buscamos el conjunto de concentradores que minimece los costes de instalación y cubran la demanda total del modelo y en el  $p$ -HMCLP buscamos aquel que cubre la máxima cantidad de demanda posible para un número de concentradores determinado. Como podemos observar en las figuras 2.9 y 2.10 dependiendo del objetivo de nuestro HLP de cobertura podemos obtener grandes diferencias en los resultados obtenidos.

En uno de los problemas más interesantes, el SA-OMHLP, obtenemos un conjunto de concentradores y una asignación entre estos y los nodos no concentradores bastante

diferente a los vistos anteriormente. Esto se debe a los pesos del modelo donde le hemos dado un gran peso al origen con mayor coste de transporte al primer concentrador, un peso menor al origen con el segundo mayor y ninguno al resto. Esto provoca que los costes a los que se le otorga dichos pesos sean disminuidos, en función de los pesos asignados (figura 2.11).

En el resto de problemas podemos ver las distintas arquitecturas que imponemos entre los concentradores (árbol, estrella, línea y anillo) obteniendo para cada uno un diseño distinto influenciado por la estructura que nos interese que tengan los concentradores de nuestro modelo (figuras 2.12, 2.13, 2.14 y 2.15).

## 3 | **Métodos de solución y algoritmos para los HLPs. Aplicaciones**

A lo largo de las últimas dos décadas se han propuesto una gran variedad de algoritmos de resolución para los diferentes tipos de HLPs. La gran mayoría de estos problemas son modelados como problemas de localización de red, aunque algunos estudios lo han hecho en dominios discretos y continuos. En este capítulo nos centramos en estos métodos, en los dos grandes tipos en los que podemos clasificarlos y en la gran variedad de aplicaciones que tienen los HLPs en la vida real.

### **3.1 Aplicación de algoritmos exactos en HLPs**

En el capítulo anterior se han presentado métodos de resolución exactos propuestos para muchos de los tipos de problemas. La mayoría de artículos sobre HLPs que tratan métodos exactos consideran los casos de los concentradores sin capacidad. Sin embargo, se han publicado en los últimos años artículos donde se considera que la capacidad de los concentradores es limitada. Esto muestra que la resolución de HLPs con capacidad limitada mediante estos algoritmos ha conseguido mayor atención en las investigaciones recientes.

Entre los métodos presentados en el capítulo anterior podemos destacar el uso de Programación Entera, de Programación Entera Mixta (MIP) y de Programación Lineal (LP).

## 3.2 Aplicación de algoritmos heurísticos y meta-heurísticos en HLPs

Al igual que en los métodos exactos, en el capítulo anterior se han presentado algunos métodos de resolución heurísticos propuestos para muchos de los tipos de problemas. Mientras que los HLPs de pequeño tamaño son resueltos con métodos exactos especializados, aquellos de gran tamaño necesitan ser tratados con procesos heurísticos o meta-heurísticos. Esto se debe a que el desarrollo de la meta-heurística ha ayudado en muchas aplicaciones en el mundo real, en las cuales la solución óptima o una aproximación de ésta puede obtenerse en un tiempo computacional menor.

Al igual que los algoritmos exactos, la gran mayoría de artículos sobre algoritmos heurísticos y meta-heurísticos en HLPs son de casos de concentradores sin capacidad pero en los últimos años los casos con capacidad limitada han obtenido más atención. Además, los problemas de localización mediana de concentradores son más atractivos que los problemas de localización de cobertura de concentradores y los de localización central de concentradores, de hecho la mayoría de estudios sobre estos dos últimos son muy recientes. Finalmente, en los últimos años los HLPs continuos con concentradores sin capacidad y asignación individual han captado una gran atención.

Entre los métodos presentados con anterioridad podemos destacar algoritmos heurísticos basados en las distancia más cercanas, en heurísticas de localización-asignación y en la relajación lagrangiana y búsqueda local.

## 3.3 Aplicaciones de casos en la vida real

Los problemas de localización de concentradores tienen una gran aplicación en casos reales, en el sentido de localizar un conjunto de instalaciones concentradoras que minimicen los costes que nos interese tener en cuenta o maximicen beneficios. De esta forma, en casi cualquier campo y área vamos a poder aplicar alguno de los HLPs que más nos interese, lo que resultará en un gran avance en todos los sentidos. A continuación, señalamos las áreas y estudios más comunes en las aplicaciones de los HLPs en casos reales.

La gran mayoría de las áreas de aplicación estudiadas son las industrias de aerolíneas y aeropuertos y sistemas de transporte. La diferencia principal entre estas dos áreas es que la primera se ha utilizado principalmente en la literatura previa y la segunda ha captado

más atención en los últimos 5 años. También otras áreas de aplicación como la logística o la gestión de la cadena de suministros han tomado gran fuerza en los HLPs considerados en los últimos años. Finalmente, podemos concluir que la mayoría de estudios de aplicaciones reales se han realizado en los últimos 10 años.

Destacamos a continuación algunos estudios y las áreas y lugares donde fueron aplicados los HLPs:

- En el área de las aerolíneas y aeropuertos *Campbell, Ernst y Krishnamoorthy* (2005 [12]) realizaron un estudio sobre el tráfico aéreo de pasajeros en Estados Unidos y *Yang* (2009 [35]) aplicó estos problemas sobre el plan de rutas aéreas en China y Taiwán.
- *Cetiner et al.* (2010 [13]) realizaron un estudio de los servicios de envíos postales en Turquía.
- En los sistemas de cadena de suministros y logística, *Wang y Cheng* (2010 [32]) realizaron estudios sobre el transporte de mercancías de Hong Kong y *Ishfaq y Sox* (2010 [19]) sobre el flujo de mercancías de Estados Unidos.
- En el área de sistemas de transporte, *Aversa, Botter, Haralambides y Yoshizaki* (2005 [2]) aplicaron estos problemas sobre puertos concentradores de transporte en la costa este de Sudamérica, *Campbell* (2009 [11]) desarrolló la aplicación sobre el camionaje de Norteamérica y *Chou* (2010 [14]) sobre la localización de instalaciones contenedoras de transbordo al sureste de Asia.



## 4 | Tendencias futuras

En este apartado, nos centramos en las deficiencias de los HLPs que se pueden mejorar y las tendencias futuras de estos problemas que pueden tomar fuerza en los próximos años.

Existe una gran variedad de aspectos que no se tienen en cuenta al formular estos tipos de problemas, que si fueran desarrollados provocarían avances en los HLPs aplicados a casos reales. Podemos destacar los siguientes:

- Al instalar un concentrador, induce una influencia sobre el tráfico que genera, que se conoce como efecto del concentrador. Por ejemplo, en las redes de aerolíneas el efecto de los concentradores en el bienestar de los pasajeros es un objetivo importante sobre la toma de decisiones. Al no haber investigaciones sobre esto podría ser una línea de desarrollo para el futuro.
- La gran mayoría de investigaciones sólo consideran factor de descuento para viajes entre concentradores. Por eso el estudio del factor de descuento entre nodos no concentrados y concentradores podría ser importante, por el hecho de que no está garantizado que un enlace entre un nodo no concentrador y un concentrador no tenga más tráfico que un enlace entre concentradores.
- Otro aspecto a desarrollar sobre este tipo de problemas, es que la gran mayoría de artículos se enfocan en problemas del tipo red, obviando las aplicaciones de los HLPs en casos continuos y espacios discretos. Por tanto, se podrían explotar y desarrollar más los casos que no sean del tipo red, que tienen grandes aplicaciones en industrias marítimas, distritos políticos y sistemas militares.
- Además, de las variables de decisión de localización y asignación que ya conocemos, hay otras decisiones que pueden ser consideradas en esta fase de diseño de la red de concentradores para obtener un problema más realista. Por ejemplo, cuando empresas de transporte marítimo tratan de localizar sus puertos concentradores, es necesario tener

en cuenta la competitividad con el resto de puertos concentradores de la región, siendo interesante considerar la competitividad como un nivel de decisión.

A continuación, destacamos algunas tendencias futuras y campos en los que se podrían aplicar los HLPs que no se han estudiado todavía:

- Se pueden considerar problemas de localización de instalaciones con fiabilidad, de forma que puedan resistir desastres imprevistos como los desastres naturales. Esto se puede aplicar en un HLP considerando posibles desastres e interrupciones en los concentradores.
- Modelar la sostenibilidad y prestar especial atención a los impactos sociales y medioambientales junto a los aspectos económicos de los HLPs puede ser una importante área de investigación. La aplicación de estos problemas en manejo de materiales peligrosos y en la contaminación dentro de los sistemas logísticos es evidente.
- Muchas de las formulaciones y técnicas de resolución de la literatura no son aplicables en casos reales. En ocasiones la localización dinámica de concentradores es un área potencial mucho más realista como han mostrado algunos estudios en los últimos años.
- Otra área poco desarrollada son los HLPs multimodales en los que no solo se consideran las decisiones de localización-asignación, sino que también se analizan otros aspectos como el diseño de la red de concentradores o el número de concentradores a localizar.
- En la gran mayoría de modelos que aparecen en la literatura de los HLPs se trabajan con parámetros determinísticos, mientras que los casos estocásticos e inciertos son mucho más realistas. Parámetros como la demanda entre nodos tienen una incertidumbre inherente al aplicarse al mundo real ya que en la mayoría de casos no se les puede asignar un valor fijo.
- Incluso si los métodos exactos o heurísticos de optimización no resuelven correctamente problemas de gran tamaño, algunas técnicas de descomposición pueden ser usadas para analizar mejor estos métodos. El desarrollo en métodos de relajación sobre la programación entera, como la relajación Lagrangiana, en HLPs pueden tener interés.



## 5 | Aplicación en un diseño de red de metro en árbol en la ciudad de Sevilla

Para concluir con el trabajo, hemos aplicado alguno de los modelos de HLPs vistos anteriormente en un diseño de red de metro de la ciudad de Sevilla. En primer lugar, planteamos el problema, después lo programamos en lenguaje *AMPL* para resolverlo con el solver *CPLEX* y finalmente comentamos los resultados obtenidos.

La ciudad de Sevilla se divide en 11 distritos, *Casco Antiguo, Macarena, Nervión, Cerro-Amate, Sur, Triana, Norte, San Pablo-Santa Justa, Este, Bellavista-La Palmera* y *Los Remedios*, que a su vez se dividen en barrios, obteniendo 108 barrios distintos. En este caso, agrupamos los barrios generando distintas zonas dentro de cada distrito para finalmente dividir Sevilla en 39 zonas distintas, de forma que cada una pertenezca a un único distrito. Estas nuevas zonas son los orígenes y destinos candidatos a ser concentradores dentro de nuestro problema, de forma que si una zona es seleccionada como concentrador entonces contendrá una estación de metro.

Suponemos que los flujos entre las distintas zonas son directamente proporcionales a sus poblaciones e inversamente proporcionales a la distancia entre ellas. Para esto utilizamos la aproximación propuesta por *Puerto, Blanco y Ramos* (2011 [5]):

$$h_{ij} = \frac{m_i m_j^{1+\lambda}}{d_{ij}^\gamma} \quad (5.1)$$

Siendo  $h_{ij}$  el flujo desde la zona  $i$  a la  $j$ ,  $m_i$  la población de la zona  $i$ ,  $d_{ij}$  la distancia entre la zona  $i$  y la  $j$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  y  $\gamma \in [1, 2]$ .

Los datos de población de cada de zona se han obtenido de la pagina web oficial del ayuntamiento de Sevilla ([www.sevilla.org](http://www.sevilla.org)), mientras que la distancia entre las distintas

zonas las hemos calculado aproximadamente mediante las herramientas de *Google maps* para medir distancias en línea recta, al no encontrar estos datos en ninguna fuente.

Una vez recopilados los datos, aplicamos el modelo de los THLP obteniendo una red en árbol de las estaciones de metro. Suponemos que cada zona tiene asignada una estación de metro, es decir, asignación individual, que el coste por unidad de flujo transportada del nodo  $i$  al  $j$  es la distancia entre ellos y que hay un número fijo de 7 estaciones. Podríamos tener en cuenta otros aspectos como el coste de instalación, zonas que acumulan un gran flujo por contener centros universitarios, hospitales o lugares socio-culturales, y la capacidad en las estaciones y enlaces, pero es una información que desconocemos y complicaría en gran medida nuestro modelo.

El criterio usado es el mismo que en el THLP, y por tanto nuestro objetivo es minimizar el coste total de transporte de nuestra red. El factor de descuento es clave en este ejemplo, de forma que si le damos un valor muy pequeño nuestro objetivo principal sería reducir la distancia de los nodos no concentradores a su concentrador asignado, es decir, la distancia a recorrer de los habitantes a su estación de metro más cercana.

A partir de estas características ya podemos plantear y programar nuestro modelo similar al THLP, aunque primero debemos decidir los valores de los parámetros  $\alpha$ ,  $\lambda$  y  $\gamma$ . Para este caso suponemos que  $\lambda = 0$  y  $\gamma = 2$ , dándole mayor importancia a la distancia recorrida al generar los flujos, y un  $\alpha = 0.2$  de forma que buscamos reducir principalmente las distancias fuera de la red de metro más que las de los enlaces que forman parte de ella.

Finalmente, el resultado obtenido para nuestro problema es una red de estaciones localizadas en las siguientes zonas:

- Zona 4, formada por los barrios *Feria y San Julián*, en el distrito *Casco Antiguo*.
- Zona 8, formada por los barrios *Villegas, Santa Justa y Rufina-Parque Miraflores, Begoña-Santa Catalina, Pino Flores y Los Príncipes-La Fontanilla*, en el distrito *Macarena*.
- Zona 15, formada por los barrios *Los Pájaros y Santa Aurelia-Cantábrico-Atlántico-La Romería*, en el distrito *Cerro-Amate*.
- Zona 20, formada por los barrios *El Plantinar, Felipe II-Los Diez Mandamientos, Tiro de Línea-Santa Genoveva y El Juncal. Hispalis*, en el distrito *Sur*.
- Zona 24, formada por los barrios *Triana Este y Triana Casco Antiguo*, en el distrito *Triana*.

- Zona 29, formada por los barrios *San José Obrero, El Fontanal-María Auxiliadora-Carretera Carmona y Huerta de Santa Teresa*, en el distrito *San Pablo-Santa Justa*.
- Zona 32, formada por los barrios *Palacio de Congresos, Urbadiez, Entrepuentes y Parque Alcosa-Jardines del Edén*, en el distrito *Este*.

En la siguiente imagen ilustramos la conexión de las estaciones de metro formando una red de árbol:

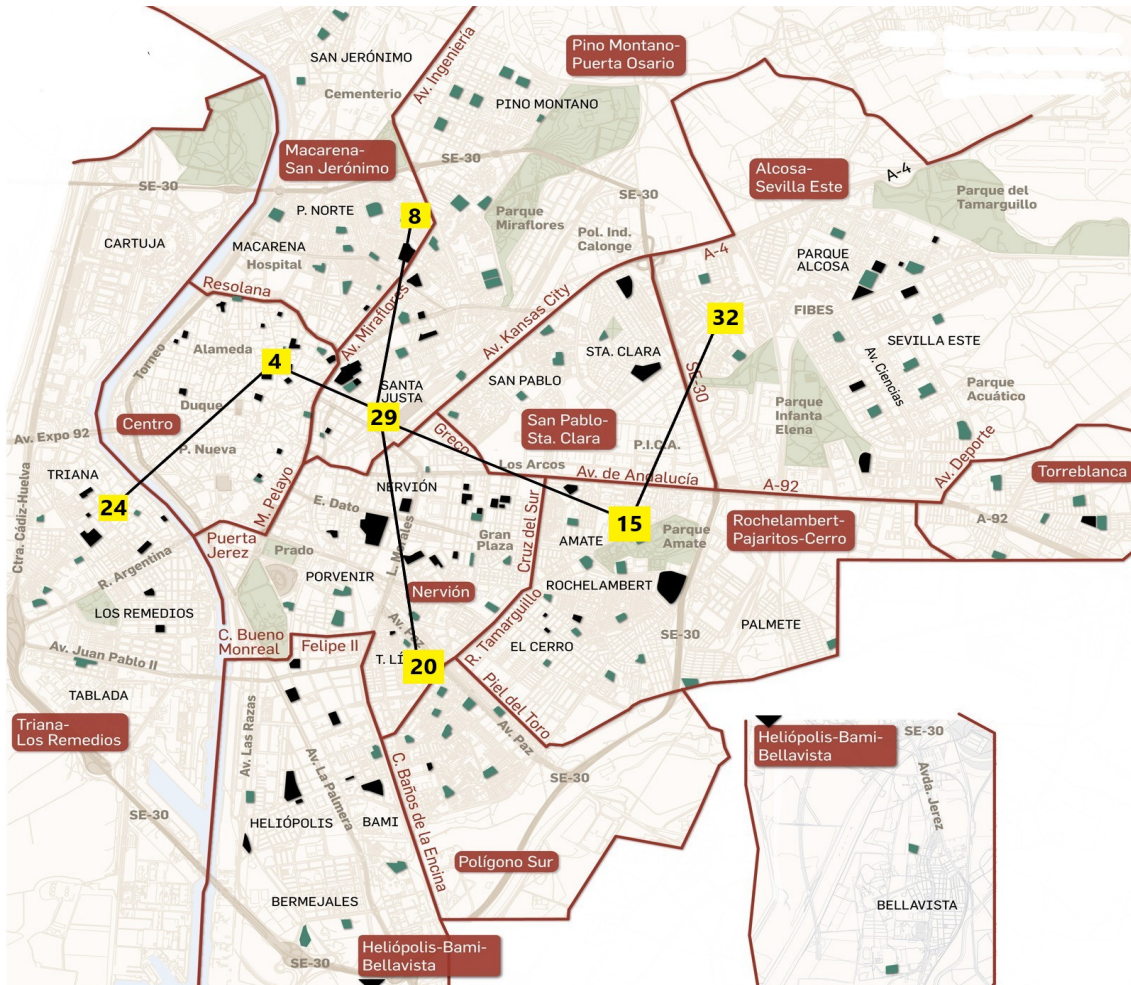


Figura 5.1: Red de estaciones de metro de Sevilla

Como podemos observar en la figura 5.1, las estaciones de metro están dispersas por el mapa de Sevilla de forma que se reducen las distancias de las distintas zonas de Sevilla a la estación de metro más cercana. Además, resulta interesante que cada una de las

estaciones de metro está localizada en un distrito diferente, provocado por lo comentado anteriormente. Al tener un factor de descuento de 0.2 también se ha tratado de reducir los costes entre las estaciones de metro, obteniendo así la estructura de estaciones óptima. Grandes poblaciones de zonas como *Sevilla Este* tienen influencia en la red resultante, sin embargo aquellas que se encuentran muy alejadas pierden influencia debido a que  $\gamma = 2$ , como *Torreblanca* o *Bellavista*.

Por último, si quisieramos descomponer nuestra red de metro en varias líneas, se puede observar una clara división en dos líneas con la estación en la zona 29 en común.

# Bibliografía

- [1] ALUMUR, S. A., KARA, B. Y., AND KARASAN, O. E. The design of single allocation incomplete hub networks. *Transportation Research Part B*, 43 (2009), 936–951.
- [2] AVERSA, R., BOTTER, R. C., HARALAMBIDES, H. E., AND YOSHIZAKI, H. T. Y. A mixed integer programming model on the location of a hub port in the east coast of south america. *Maritime Economics and Logistics*, 7 (2005), 1–18.
- [3] AYKIN, T., AND BROWN, G. F. Interacting new facilities and location–allocation problem. *Transportation Science*, 26(3) (1992), 212–222.
- [4] BLANCO, V., PUERTO, J., AND BEN-ALI, S. E.-H. Continuous multifacility ordered median location problems. *European Journal of Operation Research*, 250 (2016), 56–64.
- [5] BLANCO, V., PUERTO, J., AND RAMOS, A. Expanding the spanish high-speed railway network. *Omega*, 39(2) (2011), 138–150.
- [6] BRYAN, D. L. Extension to the hub location problem: Formulations and numerical examples. *Geographical Analysis*, 30(4) (1998), 315–330.
- [7] BRYAN, D. L., AND O’KELLY, M. E. Hub and spoke networks in air transportation: An analytical review. *Journal of Regional Sciences*, 39(2) (1999), 275–295.
- [8] CALIK, H., ALUMUR, S. A., KARA, B. Y., AND KARASAN, O. E. A tabu-search based heuristic for the hub covering problem over incomplete hub networks. *Computers and Operations Research*, 36 (2009), 3088–3096.
- [9] CAMPBELL, J. F. Hub location problems and the p-hub median problem. *Center for Business and Industrial Studies, University of Missouri - St. Louis, St. Louis, MO* (1991).

- [10] CAMPBELL, J. F. Integer programming formulations of discrete hub location problems. *European Journal of Operational Research*, 72 (1994), 387–405.
- [11] CAMPBELL, J. F. Hub location for time definite transportation. *Computers and Operations Research*, 36 (2009), 3107–3116.
- [12] CAMPBELL, J. F., ERNST, A. T., AND KRISHNAMOORTHY, M. Hub arc location problems: Part i - introduction and results. *Management Science*, 51 (2005), 1540–1555.
- [13] CETINER, S., SEPIL, C., AND SURAL, H. Hubbing and routing in postal delivery systems. *Annals of Operations Research*, 181 (2010), 109–124.
- [14] CHOU, C. C. Application of fmcdm model to selecting the hub location in the marine transportation: A case study in southerastern asia. *Mathematical and Computer Modelling*, 51 (2010), 791–801.
- [15] CONTRERAS, I., FERNÁNDEZ, E., AND MARÍN, A. The tree of hubs location problem. *European Journal of Operation Research*, 202 (2010), 390–400.
- [16] CONTRERAS, I., TANASH, M., AND VIDYARTHI, N. The cycle hub location problem. *Technical Report CIRRELT*, 59 (2013).
- [17] COSTA, M. G., CAPTIVO, M. E., AND CLIMACO, J. Capacitated single allocation hub location problem – a bi-criteria approach. *Computers and Operations Research*, 35(11) (2008), 3671–3695.
- [18] DASKIN, M. S. Network and discrete location. *Northwestern University* (1995).
- [19] ISHFAQ, R., AND SOX, C. R. Intermodal logistics: The interplay of finalcial, operational and service issues. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 46(6) (2010), 926–949 (Original Research Article).
- [20] KARIMI, H., AND BASHIRI, M. Hub covering location problems with different coverage types. *Scientia Iranica*, 18(6) (2011), 1571–1578.
- [21] KLINCEWICZ, J. G. Hub location in backbone tributary network design: A review. *Location Science*, 6 (1998), 307–335.
- [22] LEE, C. H., RO, H. B., AND TCHA, D. W. Topological design of a two-level network with ring-star configuration. *Computers and Operations Research*, 20 (1993), 625–637.

- [23] MARTINS DE SÁ, E., CONTRERAS, I., AND CORDEAU, J. F. Exact and heuristic algorithms for the design of hub networks with multiple lines. *European Journal of Operation Research* (2014).
- [24] MARTINS DE SÁ, E., CONTRERAS, I., CORDEAU, J. F., DE CAMARGO, R. S., AND DE MIRANDA, R. The hub line location problem. *Transportation Science*, forthcoming (2015).
- [25] O'KELLY, M. E. The location of interacting hub facilities. *Transportation Science*, 20 (1986a), 92–106.
- [26] O'KELLY, M. E. Activity levels at hub facilities in interacting networks. *Geographical Analysis*, 18(4) (1986b), 343–356.
- [27] O'KELLY, M. E. A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research*, 32 (1987), 393–404.
- [28] O'KELLY, M. E. Hub facility location with fixed costs. *Papers in Regional Science*, 71 (1992), 292–306.
- [29] O'KELLY, M. E., AND MILLER, H. The hub network design problem: A review and synthesis. *Journal of Transport Geographys*, 2(1) (1994), 31–40.
- [30] PUERTO, J., RAMOS, A. B., AND RODRÍGUEZ, A. M. Single-allocation ordered median hub location problems. *Computers and Operations Research*, 38 (2011), 559–570.
- [31] QU, B., AND WENG, K. Path relinking approach for multiple allocation hub maximal covering problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 57 (2009), 1890–1894.
- [32] WANG, J. J., AND CHENG, M. C. From a hub port city to a global supply chain management center: A case study of hong kong. *Journal of Transport Geography*, 18 (2010), 104–115.
- [33] YAMAN, H. The hierarchical hub median problem with single assignment. *Transportation Research Part B*, 43 (2008), 643–658.
- [34] YAMAN, H. Star p-hub median problem with modular arc capacities. *Computers and Operations Research*, 35(9) (2008), 3009–3019.
- [35] YANG, T. H. Stochastic air freight hub location and flight routes planning. *Applied Mathematical Modeling*, 33 (2009), 4424–4430.