



# **Introducción a la Mecánica analítica**

**Adrián Gutiérrez Camacho**





## **Introducción a la Mecánica analítica**

Adrián Gutiérrez Camacho

Trabajo de fin de grado que forma parte de los requisitos para la obtención del título de Doble Grado en Matemáticas y Estadística por la Universidad de Sevilla.

Tutorizado por

Pablo Maynar Blanco



*Dedicado a mis padres,*

*por obligarme a hacer los deberes antes de salir a jugar.*



## **Abstract**

For long time physics problems were resolved using the classical newtonian Mechanics, i.e., using the theory and equations which Newton had developed. In this formulation, we get a system of differential equations from knowledge about forces behaviour in our system of particles. Given the initial position and speed of our system's particles, the solution to the previous system gives the temporal evolution of the system of particles.

The main goal in this paper is to study another formulations of mechanics that, of course, are equivalent to Newton's one. Specifically, we will study the basic concepts of lagrangian Mechanics and the use of variational principles like the Hamilton's Principle (from this point of view, the trajectory followed by the system is such that it minimizes a given functional).



## Resumen

Durante mucho tiempo los problemas de la Mecánica se estudiaron desde el punto de vista newtoniano, esto es, utilizando los resultados y ecuaciones desarrollados por Newton para el estudio del movimiento de los sistemas de partículas. En esta formulación, a partir del conocimiento de las fuerzas entre las partículas constituyentes del sistema, es posible escribir un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de segundo orden. Dadas las posiciones y velocidades iniciales la solución de este sistema proporciona la evolución temporal del sistema de partículas.

El objetivo de este trabajo es estudiar otras formulaciones de la Mecánica que, por supuesto, son equivalentes a la formulación newtoniana. Concretamente, se estudiarán los conceptos básicos de Mecánica lagrangiana y el uso de principios variacionales como el de Hamilton (desde este último punto de vista, la trayectoria seguida por el sistema es la que minimiza cierta funcional).



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Mecánica lagrangiana. Ligaduras y ecuaciones del movimiento</b>	<b>3</b>
2.1. Resultados previos . . . . .	3
2.1.1. Mecánica de una partícula . . . . .	3
2.1.2. Mecánica de un sistema de partículas . . . . .	7
2.2. Ligaduras . . . . .	13
2.3. Ecuaciones de Lagrange . . . . .	17
2.4. Aplicaciones . . . . .	25
2.4.1. Partícula única en el espacio y en el plano . . . . .	26
2.4.2. Máquina de Atwood . . . . .	29
2.4.3. Ligadura dependiente del tiempo . . . . .	31
2.4.4. Anilla ensartada en una estructura parabólica . . . . .	32
2.4.5. Otros ejemplos . . . . .	34
<b>3. Principios variacionales</b>	<b>37</b>
3.1. Cálculo variacional y principios variacionales . . . . .	37
3.1.1. Principio de Hamilton . . . . .	37

**II** INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA ANALÍTICA

3.1.2. Cálculos variacionales . . . . .	39
3.2. Ecuaciones de Lagrange a partir del Principio de Hamilton . . . . .	45
3.3. Teoremas de conservación y propiedades de simetría . . . . .	47
<b>4. Conclusiones del trabajo</b>	<b>55</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>57</b>
A.1. Resultados matemáticos . . . . .	57
A.2. Principio de Hamilton en sistemas no holónomos . . . . .	58

# 1 | Introducción

Cuando hablamos de Mecánica clásica nos estamos refiriendo a la rama de la Física que estudia los movimientos de los cuerpos macroscópicos y las fuerzas que los originan. Durante mucho tiempo, los problemas de la Mecánica clásica solo podían abordarse utilizando la teoría desarrollada por Newton, esto es, la Mecánica newtoniana. El desarrollo de esta teoría fue de suma importancia para la matemática desde un punto de vista fundamental, ya que generó la necesidad de encontrar nuevas herramientas: el cálculo infinitesimal, las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones en derivadas parciales se desarrollaron porque aparecían de forma natural al formular los problemas de Mecánica.

La Mecánica newtoniana se caracteriza por expresar la dinámica de forma vectorial. Con ella podemos resolver cualquier problema de Mecánica. Y sin embargo, esta teoría presenta una serie de desventajas:

- Involucra fuerzas desconocidas a priori, como las tensiones y reacciones.
- Las ecuaciones que involucra son vectoriales en su mayoría. Esto hace que se suele trabajar en coordenadas cartesianas, por ser la base ortonormal más intuitiva, aunque no por ello es siempre la opción que más facilita los cálculos.
- Depende del sistema de coordenadas escogido.

La Mecánica lagrangiana, desarrollada por J.L Lagrange en 1788, evita en general todas las anteriores desventajas. Aunque los principios en los que se basa son distintos, la formulación es equivalente a la newtoniana y simplifica en muchos casos la formulación del problema: por ejemplo, las ecuaciones del movimiento no dependen del sistema de coordenadas elegido y además son ecuaciones escalares, y no vectoriales como en el caso de la newtoniana.

Considérese por ejemplo, el caso de una cuenta en un aro. Si quisiéramos calcular el movimiento usando la Mecánica newtoniana, obtendríamos un complejo sistema

que consideraría las fuerzas que el aro ejerce en la cuenta en cada instante. Si ahora aplicamos la Mecánica lagrangiana, solo tenemos en cuenta los movimientos posibles que la cuenta podría realizar en el aro y nos quedaremos con aquel que reduce al mínimo la acción.

Además, la formulación lagrangiana admite dos posibles acercamientos los cuáles se describirán en este documento. En primer lugar veremos como deducir las ecuaciones de Euler-Lagrange a partir del principio de D'Alembert, un principio diferencial basado en las ecuaciones del movimiento de Newton. En segundo, obtendremos estas mismas ecuaciones, esta vez partiendo de un principio variacional, el principio de Hamilton o principio de mínima acción.

El documento contiene 4 capítulos incluyendo la presente introducción. El Capítulo 2 presenta algunos conceptos previos y un breve repaso de la formulación newtoniana para luego introducir, entre otros, las ligaduras (con sus diferentes tipos) y los desplazamientos virtuales, además de formular el principio de los trabajos virtuales y el principio de D'Alembert. Con estas nuevas herramientas, se deducen las ecuaciones generales de Lagrange y las ecuaciones de Euler-Lagrange, para terminar dando algunos ejemplos de aplicación. En el Capítulo 3 se comienza dando el principio de Hamilton para luego introducir el problema del cálculo variacional en su forma unidimensional y en su forma general, y de nuevo deducir las ecuaciones de Euler-Lagrange. Por último, se llega al teorema de conservación de la cantidad de movimiento generalizada, que es una generalización de los teoremas de conservación clásicos. También se verá bajo qué condiciones se obtienen dichos teoremas a partir de esta nueva regla. Para terminar, se incluyen las conclusiones del trabajo en el Capítulo 4. Además de los cuatro capítulos principales, al final del documento se ha añadido un apéndice con resultados matemáticos y la generalización del principio de Hamilton a sistemas no holónomos.

Durante todo el trabajo, la referencia más utilizada ha sido [1] *H. Goldstein, Mecánica clásica*, la cual se ha complementado con diferentes documentos, sobre todo en la inclusión de ejemplos. Cuando proceda un fragmento basado en alguna referencia distinta de la básica se indicará al comienzo número y página utilizada para su posible identificación.

## 2 | Mecánica lagrangiana. Ligaduras y ecuaciones del movimiento

### 2.1 Resultados previos

Para comenzar, vamos a recordar algunas definiciones y resultados básicos de Mecánica, como pueden ser *la Mecánica de una partícula o de un sistema de partículas, ecuaciones de Newton, cantidad de movimiento y momento cinético.*

#### 2.1.1 Mecánica de una partícula

Sea  $\vec{OP} = \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  el vector de posición de la partícula  $P$  expresado mediante un cierto sistema de referencia con origen  $O$ , sea  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  su vector velocidad (ver Figura 2.1).

**Definición 2.1.** Se define la **cantidad de movimiento** de la partícula  $P$  de masa  $m$  como

$$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

**Definición 2.2.** Se dice que un sistema de referencia es **inercial** si se verifica que cualquier partícula sometida a una fuerza neta nula se mueve con velocidad constante (o se mantiene en reposo si la velocidad también es nula). Precisamente, la Segunda Ley de Newton (SLN) establece que existen sistemas de referencia en los cuáles el movimiento de la partícula viene descrito por la siguiente ecuación diferencial:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}},$$

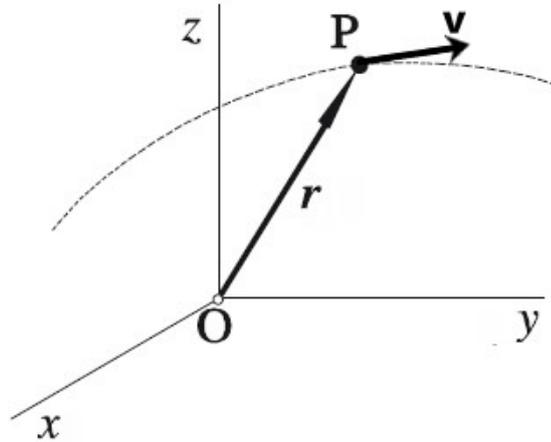


Figura 2.1: Representación de un sistema con una partícula

donde  $\mathbf{F}$  es la resultante de todas las fuerzas actuando sobre  $P$ , que asumimos es de la forma  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . Estos sistemas de referencia donde es válida la anterior ecuación son los sistemas de Galileo o inerciales.

**Observación 2.1.** La ecuación de la Definición 2.2 se simplifica cuando la masa  $m$  de la partícula es constante:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\mathbf{a},$$

donde  $\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ . Esta es la conocida ecuación de la *Segunda Ley de Newton*, que se enseña en cursos previos al grado. Es en general un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, dada la suposición que hemos hecho sobre  $\mathbf{F}$ .

La noción de sistema de referencia inercial es una idealización. Sin embargo, en la práctica suele ser posible establecer un sistema de referencia que sea aproximadamente inercial.

Los teoremas de conservación indican en qué condiciones se mantienen constantes en el tiempo diversas magnitudes mecánicas. Por ejemplo,

**| Teorema 2.1. de conservación de la cantidad de movimiento de una partícula:** si la fuerza resultante es nula,  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ , entonces por la Segunda Ley de Newton,  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$  en todo sistema de referencia inercial, es decir, la cantidad de movimiento  $\mathbf{p}$  se conserva.

**| Definición 2.3.** Se define el **momento cinético** de la partícula  $P$  respecto a un

punto  $O$  como

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

**| Definición 2.4.** Se define el **momento de una fuerza** actuando sobre una partícula  $P$  respecto a un punto  $O$  como

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

donde  $\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$  por la SLN.

**Observación 2.2.** Aplicando la identidad vectorial

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}),$$

donde evidentemente el primer término del segundo miembro se anula por ser el producto vectorial de dos vectores paralelos, podemos reducir la expresión de la Definición 2.4:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}\mathbf{L}.$$

Notamos que tanto  $\mathbf{L}$  como  $\mathbf{N}$  dependen del punto  $O$  respecto al cual se toman los momentos.

Aquí también surge un teorema de conservación:

**| Teorema 2.2.** *de conservación del momento cinético de una partícula:* si el momento resultante  $\mathbf{N}$  es nulo, entonces  $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$ , es decir, el momento cinético  $\mathbf{L}$  se conserva.

**| Definición 2.5.** Se define el **trabajo** efectuado por la fuerza exterior  $\mathbf{F}$  sobre la partícula  $P$  cuando se desplaza del punto 1 al punto 2 como

$$W_{1,2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

**Observación 2.3.** Si la masa es constante en el tiempo, como supondremos a partir de ahora a menos que se diga lo contrario, entonces podemos reescribir la expresión anterior. Para ello usaremos que  $\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$  y que  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \rightarrow d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ .

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = (*),$$

siendo  $t_1 = t(1)$ ,  $t_2 = t(2)$ . Ahora, aplicando que  $\frac{dv^2}{dt} = 2\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}$ , se obtiene:

$$(*) = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dv^2}{dt} dt = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2).$$

A la magnitud  $mv_2^2/2$  se la denomina energía cinética de la partícula en el punto 2 y se representa por  $T_2$ . Luego, el trabajo es igual a la variación de la energía cinética:

$$W_{1,2} = T_2 - T_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

**Definición 2.6.** Si  $W_{1,2}$  no depende del camino elegido para llegar de 1 a 2, o de forma equivalente, si  $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ , entonces diremos que la fuerza (y el sistema) es conservativa.

**Observación 2.4.** Si en el sistema existen rozamiento u otras fuerzas disipativas, entonces no será conservativo pues el producto  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  debido al rozamiento es  $< 0$  siempre y entonces la integral no puede anularse.

**Teorema 2.3.** Condición necesaria y suficiente de sistema conservativo:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \iff \mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}),$$

donde  $-\nabla V(\mathbf{r})$  es el gradiente de una función potencial escalar de la posición (potencial o energía potencial) cambiado de signo.

**Observación 2.5.** La existencia de  $V$  puede inferirse mediante el siguiente razonamiento: si  $W_{1,2}$  es independiente del camino tomado, entonces  $W_{1,2}$  puede considerarse la variación de una magnitud que depende solamente de la posición de los puntos extremos, representada por  $-V$ . Luego, para un elemento diferencial del camino se tendrá la relación

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dV \longrightarrow \mathbf{F}_r = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}},$$

lo cual es equivalente a la ecuación derecha del resultado anterior.

Entonces, hemos visto que en un sistema conservativo,

$$W_{1,2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} = V_1 - V_2.$$

Pero también vimos que  $W_{1,2} = T_2 - T_1$ . Encontrando ambas ecuaciones, se obtiene el siguiente resultado:

**| Teorema 2.4.** *de conservación de la energía mecánica de una partícula:* dado un sistema conservativo de una partícula, la cual se desplaza del punto arbitrario 1 al punto arbitrario 2,

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2.$$

Es decir, si las fuerzas que actúan sobre una partícula son conservativas, se conservará la energía total  $T + V$  (energía mecánica) de la partícula.

**Observación 2.6.** Supongamos que la fuerza aplicada a una partícula viene dada por el gradiente de una función escalar que depende tanto de la posición como del tiempo de forma explícita. Entonces, el trabajo efectuado sobre dicha partícula al recorrer una distancia  $dr$  ya no será la variación total de  $-V$  durante el recorrido, ya que  $V$  varía también con el tiempo al moverse la partícula. En situaciones como la anterior, la energía total  $T + V$  del sistema *NO* se conserva.

### 2.1.2 Mecánica de un sistema de partículas

A continuación vamos a proceder a extender los conceptos vistos en la *Mecánica de una partícula* al caso de un **sistema de N partículas** de masa  $\{m_i\}_{i=1}^N$  (ver Figura 2.1.2).

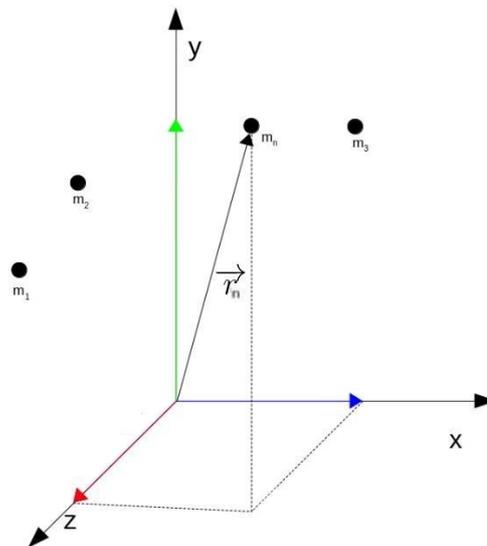


Figura 2.2: Representación de un sistema de partículas

**| Definición 2.7.** Consideremos un sistema de  $N$  partículas, dada la partícula  $i$ -ésima con vector de posición  $r_i$ , haremos la siguiente distinción sobre las fuerzas que actúan

sobre ella:

- *Fuerzas exteriores:* son las que provienen de fuentes fuera del sistema.
- *Fuerzas interiores:* son las fuerzas que cada partícula  $j$ -ésima ejerce sobre la  $i$ -ésima partícula,  $\forall j = 1, \dots, N$ , siendo obviamente  $\mathbf{F}_{ii} = \mathbf{0}$ .

De esta forma, la ecuación del movimiento (SLN) para la partícula  $i$ -ésima viene dada por:

$$\sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)} = \dot{\mathbf{p}}_i, \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{F}_i^{(e)}$  representa la fuerza exterior que actúa sobre la partícula  $i$ -ésima y  $\mathbf{F}_{ji}$  es la fuerza interior que la partícula  $j$ -ésima ejerce sobre la partícula  $i$ -ésima (con  $\mathbf{F}_{ii} = \mathbf{0}$ ). También supondremos que ambos tipos de fuerza cumplen la *Tercera Ley de Newton* (TLN) del movimiento en su forma *original*: que las fuerzas que se ejercen entre sí dos partículas son iguales y de sentido opuesto. Esta hipótesis también se denomina *ley débil de acción y reacción*. Si ahora sumamos las ecuaciones del movimiento de todas las partículas:

$$\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ji} + \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \frac{d^2}{dt^2} m_i \mathbf{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i.$$

Utilizando que  $\mathbf{F}_{ii} = \mathbf{0}$ , y que, bajo la hipótesis de que las fuerzas cumplen *ley débil de acción y reacción*,  $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ , resulta sencillo comprobar que  $\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ji} = \mathbf{0}$ . Luego,

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)}. \quad (2.2)$$

**Definición 2.8.** Sea  $\mathbf{R}$  un vector definido como la media de los vectores de posición de las partículas de un sistema dado ponderada según las masas de dichas partículas,

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}.$$

A  $\mathbf{R}$  se le conoce como el vector de posición del **centro de masa** del sistema de partículas.

Usando esta definición, podemos reescribir la Ecuación (2.2):

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)}. \quad (2.3)$$

**Definición 2.9.** Se define la **cantidad de movimiento total del sistema** como

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt}.$$

Es decir, la cantidad de movimiento total es igual al producto de la masa total del sistema por la velocidad de su centro de masa.

**Teorema 2.5. de conservación de la cantidad de movimiento de un sistema de partículas:** cuando la resultante de las fuerzas exteriores es nula, se conserva la cantidad de movimiento total.

**Demostración.** Es sencillo teniendo en cuenta la Ecuación (2.3) y la Definición 2.9:

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{0} = \dot{\mathbf{F}}^{(e)} = \dot{\mathbf{P}} \Rightarrow \mathbf{P} = \text{cte.}$$

**Definición 2.10.** Se define el **momento cinético resultante** como

$$\mathbf{L} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i).$$

Aplicando la identidad vectorial de la Observación 2.2 y utilizando la Ecuación (2.1) obtenemos que

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \sum_i \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i) = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}. \quad (2.4)$$

**Observación 2.7.** El último sumatorio de la Ecuación (2.4) puede verse como una suma de pares de la forma  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij}$ , y como estamos bajo el supuesto de la TLN,  $\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}$ , luego los términos de la suma de pares quedan en la forma  $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji} =: \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ji}$ , siendo  $\mathbf{r}_{ij}$  el vector que va de  $j$  a  $i$ .

La *ley fuerte de acción y reacción* nos dice que si los pares de fuerzas interiores entre las partículas, además de estar compuestos por elementos iguales y opuestos, están sobre la recta que une a cada par de partículas asociado, entonces se anularán todos los productos vectoriales,  $\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ji} = \mathbf{0}$  (trivial, pues es producto vectorial de vectores paralelos). Es decir, bajo la hipótesis de la *ley fuerte de acción y reacción*:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)}. \quad (2.5)$$

De esta forma podemos enunciar el siguiente

**| Teorema 2.6.** *de conservación del momento cinético resultante: el momento cinético resultante  $\mathbf{L}$  será constante en el tiempo si el momento resultante aplicado (de las fuerzas exteriores)  $\mathbf{N}^{(e)} = \mathbf{0}$ .*

Cabe destacar que existen fuerzas que incumplen la *ley fuerte de acción y reacción*. En esas situaciones no se pueden aplicar algunas de las ecuaciones anteriores directamente. Sin embargo, sí podemos hallar usualmente alguna generalización de  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{L}$  que se conserve.

**Observación 2.8.** Sea  $O$  el origen de un sistema de partículas dado, sean  $\mathbf{R}$  el vector de posición del centro de masa respecto a  $O$  y  $\mathbf{r}'_i$  el vector que va de  $\mathbf{R}$  a la partícula  $i$ -ésima, de forma que  $\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i$  y por tanto  $\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_i$  con  $\mathbf{V} = \frac{d}{dt}\mathbf{R}$  la velocidad del centro de masa relativa a  $O$  y  $\mathbf{v}'_i = \frac{d}{dt}\mathbf{r}'_i$  la velocidad de la partícula  $i$ -ésima relativa al centro de masa del sistema. De esta forma, el momento cinético resultante queda:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i) \\ &= \sum_i \mathbf{R} \times m_i \mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ahora, observemos que  $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}$  ya que define el centro de masa precisamente en el sistema de referencia cuyo origen es el centro de masa. Aplicando esto último,

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{R} \times m_i \mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \mathbf{L}',$$

donde hemos definido  $\mathbf{L}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i$  como el momento angular total respecto del centro de masa. Es decir, el momento cinético resultante respecto de  $O$  es igual al momento cinético del sistema concentrado en su centro de masa más el momento cinético resultante respecto del centro de masa. Si el centro de masa está en reposo ( $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ ) entonces  $\mathbf{L} = \mathbf{L}'$  y no depende de  $O$ .

Ahora vamos a proceder a generalizar el concepto de trabajo realizado por una partícula que se desplaza del punto 1 al punto 2 para el caso de un sistema de partículas:

**| Definición 2.11.** *Dado un sistema de partículas, se define el **trabajo efectuado por todas las fuerzas al desplazarse dicho sistema** de una configuración inicial 1*

a una configuración final 2 como

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_{i,j} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_i. \quad (2.7)$$

**Observación 2.9.** Utilizando las ecuaciones del movimiento,

$$\begin{aligned} W_{12} &= \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_i \int_1^2 m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_i \int_1^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right) dt \\ &= \sum_i \left[ \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2(2) - \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2(1) \right] = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2(2) - \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2(1) \\ &= T_2 - T_1, \end{aligned} \quad (2.8)$$

definiendo la energía cinética total como  $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2$ . Si aplicamos aquí la descomposición  $\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i$ ,  $T$  es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i)^2 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i V^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (v'_i)^2 + \mathbf{V} \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i V^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (v'_i)^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (v'_i)^2, \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde hemos aplicado, de nuevo, que  $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}$ . Es decir, la energía cinética del sistema es igual a la suma de la energía cinética considerando toda la masa concentrada en el centro de masa y la suma de las energías cinéticas de las partículas relativas al centro de masa.

Por otro lado, si suponemos que las fuerzas son conservativas podemos llegar a dos conclusiones:

1. Si las fuerzas exteriores derivan de un potencial,  $\mathbf{F}^{(e)} = -\nabla V(\mathbf{r})$ , entonces podemos reducir el primer término del segundo miembro de la Ecuación (2.7):

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_i = - \sum_i \int_1^2 \nabla_i V_i \cdot d\mathbf{r}_i = - \sum_i V_i \Big|_1^2, \quad (2.10)$$

donde el subíndice  $i$  en el operador  $\nabla$  indica que las derivadas se calculan respecto a las componentes de  $\mathbf{r}_i$ .

2. Si las fuerzas interiores son también conservativas, las fuerzas  $\mathbf{F}_{ji}$  y  $\mathbf{F}_{ij}$  entre las partículas  $j$ -ésima e  $i$ -ésima se podrán derivar de una función potencial  $V_{ij}$ . Para que no se viole la *ley fuerte de acción y reacción*, necesariamente  $V_{ij}$  debe ser función de la distancia entre las partículas exclusivamente, es decir,  $V_{ij} = V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ . Luego, tendremos que

$$\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ij} = \nabla_j V_{ij} = -\mathbf{F}_{ij},$$

y además están soportadas sobre la recta que une las dos partículas,

$$\nabla V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)f,$$

siendo  $f$  una cierta función escalar. Por tanto, en este caso podremos reducir el *segundo término del segundo miembro* de la Ecuación (2.7) en suma de pares de partículas, donde los términos de cada par son de la forma:

$$- \int_1^2 (\nabla_i V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i + \nabla_j V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_j). \quad (2.11)$$

Si ahora representamos  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  por  $\mathbf{r}_{ij}$  y su gradiente asociado como  $\nabla_{ij}$ , tendremos que:

$$\begin{aligned} \nabla_i V_{ij} &= \nabla_{ij} V_{ij} = -\nabla_j V_{ij}, \\ d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j &= d\mathbf{r}_{ij}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Luego el término del par  $i, j$  queda

$$- \int_1^2 \nabla_{ij} V_{ij} \cdot (d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j) = - \int_1^2 \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}.$$

Aplicando esto último,

$$\sum_{i,j} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_i = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_1^2 \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}|_1^2. \quad (2.13)$$

donde el  $\frac{1}{2}$  se debe a que al sumar en  $i, j$  cada término está duplicado: aparece una vez al sumar en  $i$  y otra al sumar en  $j$ .

Por lo anterior, el trabajo del sistema también se expresa como

$$W_{12} = \sum_i V_i|_2^1 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}|_2^1.$$

Luego, si las fuerzas interiores y exteriores derivan de un potencial, tenemos que

**| Definición 2.12.** Se define la **energía potencial total del sistema** como:

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij},$$

es decir, la suma de la energía potencial externa e interna del sistema, respectivamente.

Bajo estas suposiciones, podemos enunciar el siguiente resultado:

**| Teorema 2.7. de conservación de la energía total de un sistema de partículas:** dado un sistema de  $N$  partículas donde las fuerzas son conservativas, la energía total de dicho sistema,  $T + V$ , se conserva. Es decir, si las partículas se desplazan de una configuración inicial 1 a una configuración final 2,

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2.$$

**Demostración.** Se sigue de la Observación 2.9. Hemos visto que el trabajo es igual a la diferencia  $T_2 - T_1$  y que si las fuerzas son conservativas, también es igual a la diferencia  $V_1 - V_2$ , despejando obtenemos el resultado. **|**

## 2.2 Ligaduras

Se puede llegar a la conclusión, después de las secciones anteriores, de que toda la Mecánica se reduce a obtener una solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{ji}. \quad (2.14)$$

Sin embargo, si queremos ser fieles a los fenómenos físicos reales, en la mayoría de los casos habrá que considerar restricciones o *ligaduras* en nuestro sistema.

**Ejemplo 2.1.** A continuación se enumeran algunos ejemplos sencillos de ligaduras:

1. Las cuentas de un ábaco están sujetas a un movimiento unidireccional por las varillas que las contienen.
2. Una partícula situada sobre la superficie de una esfera está sometida a la condición de que sólo puede moverse sobre la superficie esférica o por su exterior.
3. Las bolas de billar no pueden atravesar la superficie de la mesa del juego.

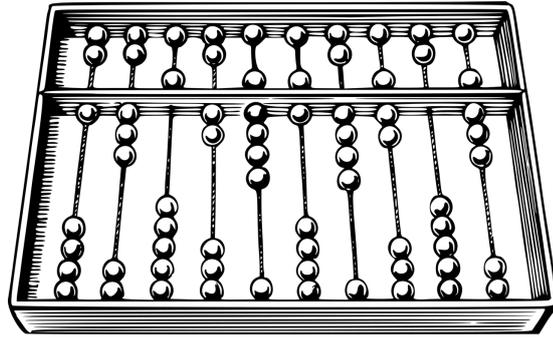


Figura 2.3: Ábacó ilustrativo del ejemplo 1

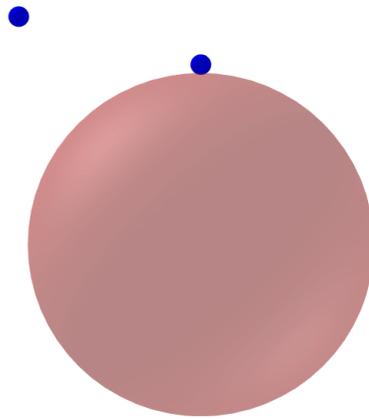


Figura 2.4: Partículas con la ligadura del ejemplo 2



Figura 2.5: Mesa de billar del ejemplo 3

De todas las maneras de clasificar las ligaduras, a nosotros nos interesará la siguiente:

**| Definición 2.13.** Diremos que una ligadura es **holónoma** si se expresa mediante ecuaciones de la forma:

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, t) = 0,$$

que sólo dependen de la posición de las coordenadas de las partículas y, posiblemente, del tiempo.

Cuando la ligadura no pueda ser expresada en función de ecuaciones como la anterior, diremos que es **no holónoma**.

**Ejemplo 2.2.** Volviendo a los ejemplos anteriores:

1. La ligadura asociada a las partículas en el ábaco es holónoma pues podemos expresar la condición de que estén en las varillas como un sistema de ecuaciones implícitas ( $\{f_i = 0\}_{i=1}^n$ ) que definan las posibles posiciones de cada bolita (partícula) sobre cada varilla (recta) que dependa sólo de las coordenadas de cada partícula y del tiempo.
2. La condición de ligadura del segundo ejemplo puede expresarse como:

$$r^2 - a \geq 0,$$

es decir, el módulo en coordenadas polares de la partícula es mayor que  $a$ , el radio de la esfera. Esta ecuación no es como las de la Definición 2.13 y por tanto es una ligadura no holónoma.

3. Por la misma razón, la condición de ligadura en las bolas de billar no es holónoma, pues se puede ver cómo  $z \geq h$ , donde  $z$  es la tercera coordenada de nuestras partículas y  $h$  es la altura a la que está la mesa.

**| Definición 2.14.** Las ligaduras también se pueden clasificar según contengan el tiempo como variable explícita (ligaduras **reónomas**) o no (ligaduras **esclerónomas**).

**Ejemplo 2.3.** Para clarificar un poco la definición anterior:

1.  $f(x, y, z, t) = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$  es ligadura reónoma.
2.  $f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  es ligadura esclerónoma.

Las ligaduras generan una serie de nuevas condiciones sobre nuestro sistema de partículas.

Primeramente, las coordenadas  $\mathbf{r}_i$  quedan ahora relacionadas mediante las ecuaciones de ligadura, y por tanto, ya no forman un sistema de coordenadas independientes. Esto tiene como consecuencia que las ecuaciones del movimiento ya no sean todas independientes.

Por otro lado, las fuerzas de ligadura (por ejemplo, la fuerza que ejerce la mesa sobre las bolas de billar) no se dan a priori. De hecho, se obtienen de la solución que buscamos. De nuevo, imponer ligaduras al sistema no es más que otro método de establecer que hay fuerzas presentes en el problema que no pueden especificarse directamente sino que se conocen en función de su efecto sobre el movimiento del sistema. En el ejemplo de la mesa de billar, si tuviéramos que estudiar la presencia de fuerzas desde el punto de vista de la Física elemental, diríamos que sobre una bola en reposo estaría actuando la fuerza de la gravedad y una fuerza contraria en sentido pero de igual dirección y módulo, la *fuerza normal*.

En el caso de que las ligaduras sean holónomas, el problema de no independencia entre las coordenadas  $\mathbf{r}_i$  se resuelve utilizando *coordenadas generalizadas*.

**| Definición 2.15.** *Un sistema de  $N$  partículas libres tiene  $3N$  grados de libertad o coordenadas independientes. Además, si le sometemos a  $k$  ecuaciones de ligadura holónomas, entonces el sistema resultante tendrá  $3N - k$  grados de libertad (g.l).*

De esta forma, podemos expresar las coordenadas originales en función de unas  $3N - k$  nuevas coordenadas, denotadas  $q_i$ :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Las coordenadas generalizadas no suelen dividirse en ternas como las cartesianas, en su lugar, se hace un enfoque más práctico:

**Ejemplo 2.4.**

1. En el caso de una partícula obligada a moverse sobre una superficie esférica ( $f(\mathbf{r}) = r^2 - a^2 = 0$ , donde  $a$  es el radio de la esfera), bastarán como coordenadas los ángulos de *latitud* y *longitud* que expresan la posición sobre la esfera.
2. Para el péndulo doble formado por dos partículas unidas mediante una varilla rígida e inextensible, estando una de las partículas sujeta a otra varilla análoga suspendida por el otro extremo, pueden tomarse como coordenadas el ángulo que forma la varilla suspendida con una cierta dirección fija y el ángulo que forman entre sí las dos varillas.

Cualquier tipo de magnitud que sirva como coordenada generalizada se puede fijar como tal, lo cual es una gran ventaja en la práctica. Sin embargo, cuando las ligaduras no sean holónomas, no se podrán usar las ecuaciones de ligadura para reducir las coordenadas a un sistema independiente.

Nuestro siguiente objetivo es formular la Mecánica de manera que desaparezcan las fuerzas de ligadura, las cuales no conocemos a priori, y tratar solo con fuerzas aplicadas conocidas, simplificando el proceso de hallar las soluciones de las ecuaciones del movimiento de nuestro sistema de  $N$  partículas dado.

## 2.3 Ecuaciones de Lagrange

Empezaremos la sección con algunas definiciones importantes:

**Definición 2.16.** Se define el **desplazamiento virtual** (infinitesimal) de un sistema como el cambio de configuración de este a consecuencia de una variación infinitesimal arbitraria de las coordenadas,  $\delta \mathbf{r}_i$ , que es compatible con las fuerzas y ligaduras impuestas, en el instante dado  $t$ .

Por el contrario, el **desplazamiento real** del sistema tiene lugar en un intervalo de tiempo  $dt$ , durante el cual pueden variar las fuerzas y ligaduras.

Además, se define el **trabajo virtual** de la partícula  $i$ -ésima como

$$\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i,$$

el producto escalar de la fuerza resultante actuando sobre dicha partícula por el desplazamiento virtual efectuado.

Supongamos ahora un sistema en equilibrio, es decir, la resultante de las fuerzas que actúan sobre cada partícula es nula  $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ . Entonces, el trabajo virtual de la partícula también se anula. Si sumamos los trabajos de todas las partículas, se tiene:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Descomponiendo ahora la fuerza resultante en fuerza aplicada  $\mathbf{F}_i^{(a)}$  y fuerza de ligadura  $\mathbf{f}_i$ , la ecuación anterior queda de la siguiente forma:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Limitémonos ahora a sistemas para los cuales el trabajo virtual total de las fuerzas de ligadura sea nulo,  $\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$ . Esta condición es válida para muchos tipos de ligadura, por ejemplo los cuerpos rígidos. Otro ejemplo donde se cumple es el caso de un sistema de partículas con la condición de moverse sobre una superficie, lo cual genera una fuerza de ligadura perpendicular a dicha superficie, mientras que el desplazamiento virtual debe ser tangente, y por tanto su producto escalar será nulo.

Tenemos pues, como condición de equilibrio de un sistema que el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas sea nulo.

**Principio de los Trabajos Virtuales:** Sea un sistema de  $N$  partículas donde el trabajo virtual total de las fuerzas de ligadura es nulo, entonces el sistema *está en equilibrio* si el trabajo virtual total de las fuerzas aplicadas también es nulo:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (2.15)$$

A la Ecuación (2.15) se la conoce como *Principio de los Trabajos Virtuales*.

**Ejemplo 2.5.** ([2, pág.4]) Vamos a aplicar ahora este principio al cálculo de la posición de equilibrio de una partícula de masa  $m$  sobre una hélice circular de eje vertical  $z$  y paso  $H$ , sobre un cilindro infinito de radio  $R$ , unida elásticamente al origen  $O$  (colocado en el eje longitudinal del cilindro) en un campo gravitatorio  $g$ . El punto  $O$  está en el eje del cilindro y la fuerza elástica es  $-k\mathbf{r}$ .

El vector de posición  $\mathbf{r}$  vendrá dado, según la Figura 2.6 por la ecuación de la hélice:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \\ -\frac{H}{2\pi} \phi \end{bmatrix},$$

es decir,  $\mathbf{r} = R \cos \phi \mathbf{i} + R \sin \phi \mathbf{j} - \frac{H}{2\pi} \phi \mathbf{k}$ . Ahora hallamos  $\delta \mathbf{r}$  y la fuerza aplicada:

$$\delta \mathbf{r} = \left( -R \sin \phi \mathbf{i} + R \cos \phi \mathbf{j} - \frac{H}{2\pi} \mathbf{k} \right) \delta \phi,$$

$$\mathbf{F}^{(a)} = -k\mathbf{r} - m\mathbf{g} = -kR \cos \phi \mathbf{i} - kR \sin \phi \mathbf{j} + \left( k \frac{H}{2\pi} \phi - mg \right) \mathbf{k}.$$

Luego, aplicando el principio de los trabajos virtuales para la única partícula del sistema:

$$\mathbf{F}^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r} = - \left( \frac{kH\phi}{2\pi} - mg \right) \frac{H}{2\pi} \delta \phi = 0 \Rightarrow \frac{kH\phi}{2\pi} - mg = 0.$$

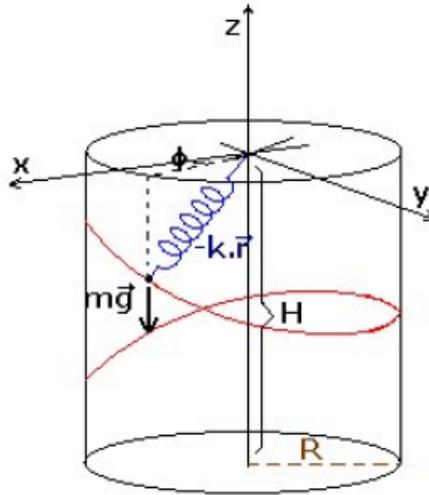


Figura 2.6: Esquema del ejemplo de aplicación del principio de los trabajos virtuales

Y llegamos a que el sistema está en equilibrio cuando

$$\phi = 2\pi \frac{mg}{kH}.$$

La posición de la partícula en el equilibrio sería:

$$x = R \cos 2\pi \frac{mg}{kH}, \quad y = R \sin 2\pi \frac{mg}{kH}, \quad z = -\frac{mg}{k}.$$

En el ejemplo anterior, hemos podido deducir el equilibrio porque solo contábamos con una coordenada a encontrar, es decir, el sumatorio de los productos escalares de las fuerzas aplicadas y los desplazamientos virtuales contenía un solo término. En general, sin embargo, los desplazamientos virtuales  $\delta r_i$  no son independientes, están relacionados por las ligaduras y no podemos hacer separadamente cero sus coeficientes en la Ecuación (2.15).

Además, necesitaremos un principio que además de no incluir las fuerzas de ligadura, entrañe el movimiento general del sistema: no nos interesa únicamente saber los puntos de equilibrio, también queremos conocer la *dinámica* del sistema dado. Para obtenerlo, utilizaremos un recurso pensado por Jacques Bernoulli y desarrollado por D'Alembert. La ecuación del movimiento,

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i,$$

puede escribirse

$$\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0},$$

que dice que las partículas estarán en equilibrio bajo una fuerza igual a la real más una fuerza efectiva invertida. Entonces, por el principio de los trabajos virtuales,

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0,$$

y haciendo la descomposición de antes

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Como nos limitamos a sistemas donde el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura se anula, obtendremos lo que se conoce como *principio D'Alembert*:

**Principio D'Alembert:** dado un sistema de partículas donde el trabajo virtual efectuado por las fuerzas de ligadura es nulo, entonces se tiene

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (2.16)$$

Nos interesaría que los términos del sumatorio fueran independientes entre sí para poder hacer igual a  $\mathbf{0}$  los coeficientes de cada  $\delta \mathbf{r}_i$ . Esto no ocurre en general, por lo que debemos deshacernos de las coordenadas originales y sustituirlas por las coordenadas generalizadas, las cuáles sabemos que sí son independientes (para ligaduras holónomas). Con estas coordenadas sí podremos hacer separadamente iguales a cero los coeficientes de las  $\delta q_i$ .

Si tenemos que  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_n, t)$  (con  $q_i$   $n$  coordenadas generalizadas independientes), podremos expresar  $\mathbf{v}_i$  en función de las  $\dot{q}_k$  (velocidades generalizadas):

$$\mathbf{v}_i \equiv \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}.$$

Análogamente, podemos relacionar desplazamientos virtuales entre coordenadas:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k.$$

**Ejemplo 2.6.** ([2, pág.3]) Vamos a ver un pequeño ejemplo de determinación de los desplazamientos virtuales:

Sea una estructura en forma parabólica que gira alrededor de su eje de simetría con velocidad angular constante  $\omega$ , y una anilla de masa  $m$  que se desliza por ella. Las ligaduras que afectan a la anilla son 2: la orientación de la parábola está dada por el ángulo  $\phi = \omega t$  (ligadura *reónoma*) y la coordenada  $z$  de la partícula depende de la forma parabólica de la estructura. El sistema tiene 1 g.l, escogemos como coordenada generalizada  $\rho$  el módulo del vector que va del origen del sistema a la proyección de la anilla sobre el plano  $z = 0$ .

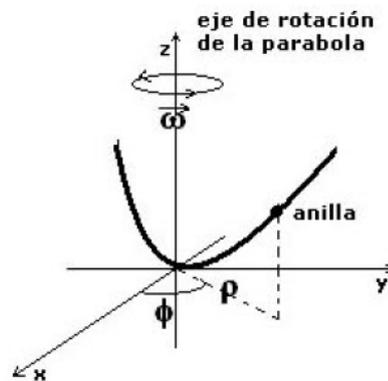


Figura 2.7: Esquema del ejemplo de determinación de desplazamientos virtuales generalizados

Observando la Figura 2.7, el vector de posición  $\mathbf{r}$  de la anilla vendrá dado por

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \rho \cos \omega t \\ \rho \sin \omega t \\ \rho^2 \end{bmatrix},$$

y por tanto, el desplazamiento virtual en coordenadas generalizadas (en este caso,  $\rho$ ), será

$$\delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \delta \rho = \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 2\rho \end{bmatrix} \delta \rho.$$

Por otro lado, las velocidades generalizadas pueden hallarse también siguiendo las

expresiones antes descritas:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 2\rho \end{bmatrix} \dot{\rho} + \begin{bmatrix} -\rho\omega \sin \omega t \\ \rho\omega \cos \omega t \\ 0 \end{bmatrix},$$

y terminamos el ejemplo.

Ahora vamos a aplicar las expresiones de velocidad generalizada y desplazamiento virtual generalizado al sumatorio de los trabajos virtuales de todas las partículas de un sistema cualquiera:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i,j} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j =: \sum_j Q_j \delta q_j,$$

donde las  $Q_j$  son las **componentes de la fuerza generalizada**, que se definen en la forma:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

Pasando ahora al otro término de la Ecuación (2.16), que puede escribirse

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i,j} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Consideremos ahora la siguiente relación, fijado  $j = 1, \dots, n$ ,

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\}. \quad (2.17)$$

En el último término de esta ecuación anterior, se pueden permutar las derivaciones como sigue,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j},$$

donde hemos aplicado la expresión de  $\mathbf{v}_i$  en coordenadas generalizadas. Además, si recordamos la definición de velocidad generalizada, es sencillo comprobar que:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

Sustituimos en la Ecuación (2.17) y nos queda:

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right\}.$$

Con esto, tenemos que:

$$\sum_{i,j} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \delta q_j.$$

Identificando ahora la cantidad  $\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$  con la energía cinética  $T$  del sistema, el **principio D'Alembert** queda:

$$\sum_{j=1}^n \left[ \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \quad (2.18)$$

**Observación 2.10.** En un sistema de coordenadas cartesianas, la derivada parcial de  $T$  respecto a  $q_j$  es nula. Así pues, este término se debe a la curvatura de las coordenadas  $q_j$ . Por ejemplo, en coordenadas polares la aceleración centrípeta aparece al calcular la derivada parcial de  $T$  respecto a una coordenada angular.

Hasta ahora solo hemos impuesto que las ligaduras realicen un trabajo nulo en todo el desplazamiento virtual y que las variables  $q_i$  sean independientes (ligaduras holónomas). Por lo último, todo desplazamiento virtual  $\delta q_j$  será independiente de los  $\delta q_k$  restantes. Bajo este supuesto, la única forma de tener la Ecuación (2.18) es que los coeficientes se anulen por separado:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2.19)$$

A las Ecuaciones (2.19) se las denomina **Ecuaciones (Generales) de Lagrange**.

Nos vamos a restringir ahora al caso de sistemas conservativos, sistemas donde las fuerzas derivan de un potencial escalar. Supongamos pues que las fuerzas de nuestro sistema derivan de un potencial escalar  $V$ ,  $\mathbf{F}_i = -\nabla_i V$ . En este caso, las fuerzas generalizadas se podrán escribir como sigue:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m, t)}{\partial q_j}.$$

Con esto, la Ecuación (2.19) se puede escribir también:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_j} = 0.$$

Y como  $V$  no depende de  $\dot{q}_j$  entonces podemos incluir un término  $V$  en la derivada parcial respecto a  $\dot{q}_j$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_j} = 0.$$

Definiendo la función *lagrangiana* como  $L = T - V$ , tenemos que, para  $j = 1, \dots, n$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \quad (2.20)$$

Estas son las llamadas **Ecuaciones de Euler-Lagrange** para sistemas sometidos a fuerzas conservativas y forman la herramienta principal de la *Mecánica lagrangiana*. Como vemos, se expresan de igual forma en cualquier sistema de coordenadas, es decir, estas no juegan ningún papel prefijado.

Así, resolver un problema mecánico desde el punto de vista lagrangiano va a consistir en hallar  $T$  y  $V$  para nuestro sistema e introducirlas en las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada una de las coordenadas generalizadas  $q_j$  consideradas. De dichas ecuaciones deduciríamos el movimiento del sistema.

**Observación 2.11.** Es importante también hacerse la siguiente pregunta: ¿Qué pasa si el sistema no tiene un potencial escalar  $V$ ?

En realidad, nos basta con que exista una función  $U(q_j, \dot{q}_j)$  tal que

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right).$$

En tal caso, a  $U$  se le llama *potencial generalizado* y las ecuaciones de Lagrange se deducen de la misma manera considerando  $L = T - U$ .

También podríamos preguntarnos qué ocurre si en el sistema de partículas hay fuerzas no conservativas. Veamos qué ocurre con las componentes de la fuerza generalizada:

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_i (\mathbf{F}_i^c + \mathbf{F}_i^{nc}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \sum_i \mathbf{F}_i^{nc} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \\ &= -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \sum_i \mathbf{F}_i^{nc} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} =: -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q'_j. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Es decir, descomponemos las fuerzas generalizadas en la parte conservativa que podemos escribir en función del potencial y la parte no conservativa o fuerzas generalizadas no conservativas.

De esta forma, las ecuaciones de Lagrange en su **forma general** vendrán dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q'_j, \quad (2.22)$$

donde  $Q'_j = \sum_i \mathbf{F}^{nc} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j}$  representa la  $j$ -ésima fuerza generalizada no conservativa.

**| Definición 2.17.** Diremos que una coordenada generalizada  $q_j$  es cíclica si se tiene que

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

es decir, si  $q_j$  no aparece en la expresión de la lagrangiana.

De las ecuaciones de Euler-Lagrange (Ecuaciones (2.20)) es fácil ver que en todo sistema de partículas *sometido exclusivamente a fuerzas conservativas* la variación de la lagrangiana con respecto a la velocidad generalizada  $\dot{q}_j$  es constante si y solo si la coordenada generalizada  $q_j$  es cíclica. Es decir,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = cte \iff \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \iff q_j \text{ es cíclica.}$$

## 2.4 Aplicaciones

En esta sección nos vamos a dedicar a ver ciertas aplicaciones sencillas de la formulación lagrangiana, con el objetivo de ver la utilidad de esta nueva herramienta. Los sistemas donde podemos definir una lagrangiana, según lo que hemos visto, son sistemas holónomos con fuerzas aplicadas que deriven de un potencial ordinario o generalizado y con ligaduras que no realizan trabajo. Por otro lado, hemos obtenido una interesante ventaja: en las ecuaciones del movimiento originales necesitábamos trabajar con muchos vectores de fuerza y aceleración, ahora solo hemos de trabajar con dos funciones escalares,  $T$  y  $V$ . Lo único a tener en cuenta es que habrá que expresarlas en función de las coordenadas generalizadas, utilizando las ecuaciones de transformación.

**Observación 2.12.** En coordenadas generalizadas  $T$  viene dada por

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left( \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2.$$

Desarrollando el cuadrado de la anterior expresión,

$$T = T_0 + T_1 + T_2,$$

donde  $T_0$  es independiente de las velocidades generalizadas  $\dot{q}_j$ ,  $T_1$  es lineal en las velocidades generalizadas y  $T_2$  es cuadrática en las velocidades generalizadas. Si las ligaduras, además de ser holónomas, son esclerónomas (no dependen explícitamente del tiempo), entonces  $T_0 = T_1 = 0$  y por tanto  $T$  será siempre función cuadrática de las velocidades generalizadas.

Como ejemplos sencillos de aplicación veremos los siguientes ([1, págs. 32-35]):

1. Una partícula en el espacio en coordenadas cartesianas y una partícula en el plano en coordenadas polares, ambas en presencia de una fuerza  $\mathbf{F}$ .
2. Máquina de Atwood: se trata de un sistema básico de una polea.
3. Ligadura dependiente del tiempo: una cuenta que se desliza por un alambre en rotación.

### 2.4.1 Partícula única en el espacio y en el plano

Consideremos un sistema formado por una única partícula en el espacio sobre la que actúa una fuerza  $\mathbf{F}$ . Como solamente tenemos una partícula y no estamos considerando ninguna restricción, nuestro sistema cuenta con 3 g.l (este es quizás el problema más simple de la Mecánica).

#### Coordenadas cartesianas

Las componentes de la fuerza generalizada, necesarias en la Ecuación (2.19), son en este caso  $F_x, F_y, F_z$ . Por otro lado,

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

donde  $m$  es la masa y  $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  es el vector de posición de dicha partícula. Por tanto, tendremos que  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ ,  $q_3 = z$  y entonces:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

y las ecuaciones del movimiento quedan:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z.$$

Como podemos observar, claramente estamos recuperando las ecuaciones de Newton del movimiento:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ .

### Coordenadas polares planas

Ahora vamos a examinar el ejemplo previo, esta vez admitiendo que el movimiento se da en un plano y utilizando coordenadas polares. El vector de posición  $\mathbf{r}$  de la partícula vendrá dado por

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \end{bmatrix},$$

donde  $\rho$  es el módulo del vector de posición y  $\theta$  el ángulo que forma con una cierta dirección de referencia (por ejemplo, el eje de abscisas). Hemos aplicado las ecuaciones de transformación entre distintos sistemas de coordenadas, uno cartesiano y el otro formado por el par  $(\rho, \theta)$ .

Nuestro objetivo en primer lugar es hallar  $T$ . En coordenadas cartesianas sabemos que  $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ , tan solo nos queda ver qué ocurre en polares:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Aplicando la Ecuación (2.23), tenemos que

$$T = \frac{1}{2}m \left[ \dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\theta})^2 \right]. \quad (2.24)$$

Por otro lado, las componentes de la fuerza generalizada pueden hallarse a partir de su definición:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

Como solo tenemos una partícula, podemos obviar el sumatorio y además solo con-

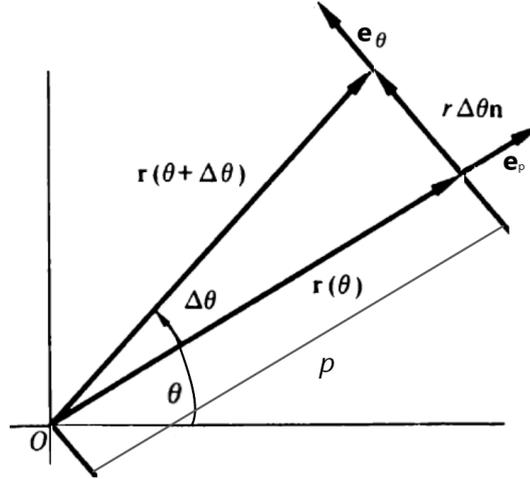


Figura 2.8: Coordenadas polares y derivada de  $\mathbf{r}$  respecto a  $\theta$

taremos con una fuerza  $\mathbf{F}$ . Entonces, tendremos que:

$$\begin{aligned} Q_\rho &= \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}}{\rho} = F_\rho, \\ Q_\theta &= \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \mathbf{F} \cdot \rho \mathbf{n} = \rho F_\theta, \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde  $F_\rho$  no es más que la componente de la fuerza  $\mathbf{F}$  actuando en la dirección  $\mathbf{e}_\rho = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$ , es decir, la que va del origen del sistema a la posición de la partícula, y  $F_\theta$  la componente actuando en la dirección  $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$ , es decir,

la perpendicular a la anterior. Como estamos usando 2 coordenadas generalizadas, tendremos 2 ecuaciones de Lagrange, que en general se calculan:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \quad (2.26)$$

Utilizando la Ecuación (2.24), para el caso de  $\rho$  tendremos que calcular las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = m\rho\dot{\theta}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} \right) = m\ddot{\rho}.$$

Para  $\theta$ , tendremos a su vez:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = m\rho^2\ddot{\theta} + 2m\rho\dot{\rho}\dot{\theta}.$$

Finalmente, llegamos a las siguientes *ecuaciones del movimiento* formuladas mediante la **Mecánica lagrangiana**:

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\theta}^2 &= F_\rho, \\ m\rho^2\ddot{\theta} + 2m\rho\dot{\rho}\dot{\theta} &= \rho F_\theta, \end{aligned} \quad (2.27)$$

obteniendo el mismo resultado que al aplicar la SLN para obtener la ecuación del movimiento de una partícula en coordenadas polares planas.

### 2.4.2 Máquina de Atwood

Se trata de un ejemplo claro de sistema conservativo con ligaduras holónomas y esclerónomas, suponiendo una polea sin rozamiento y sin masa. Podemos describir la posición de una de las dos partículas en la Figura 2.9 utilizando solamente la coordenada independiente  $x$ , estando la posición de la otra determinada por la longitud de la cuerda  $l$  (tenemos  $2-1=1$  g.l.).

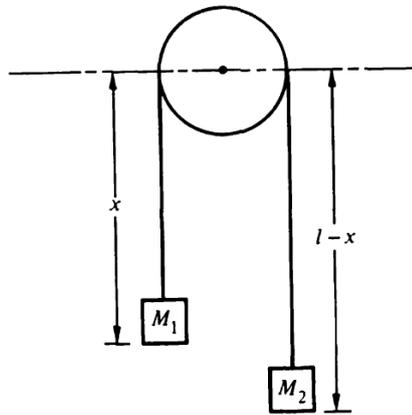


Figura 2.9: Máquina de Atwood

La energía potencial de las dos partículas será la que se debe a la fuerza gravitatoria, es decir,

$$V = -M_1gx - M_2g(l - x),$$

mientras que la cinética viene dada por

$$T = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} M_i v_i^2 = \frac{1}{2} (M_1 \dot{x}^2) + \frac{1}{2} (M_2 \dot{x}^2) = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) \dot{x}^2.$$

Por tanto, la función lagrangiana tiene la forma

$$L = T - V = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) \dot{x}^2 + M_1 g x + M_2 g (l - x).$$

Hallando ahora las derivadas:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (M_1 - M_2)g, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_1 + M_2)\dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = (M_1 + M_2)\ddot{x}.$$

Tenemos que:

$$(M_1 + M_2)\ddot{x} - (M_1 - M_2)g = 0.$$

Despejando  $\ddot{x}$ , llegamos al conocido resultado

$$\ddot{x} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} g.$$

Si nos fijamos, aunque sabemos que existen unas fuerzas internas llamadas *tensiones* y que clásicamente aparecen en este problema, aquí no se han mencionado en ningún momento. Lo que ocurre es que las fuerzas de tensión se identifican como fuerzas de ligadura, que no aparecen en la formulación lagrangiana. Es decir, no podemos hallar la tensión de la cuerda por el método de Lagrange.

Vamos ahora a resolver este mismo problema pero desde el punto de vista de la Mecánica newtoniana. Empezamos por el esquema (ver Figura 2.10):

Ahora sí aparecen las tensiones de la cuerda actuando sobre cada partícula  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ , pero es que además sabemos que son iguales,  $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 = \mathbf{T} = -T\mathbf{e}_x$ . Por otro lado, si al vector de posición de  $M_1$  la denotamos por  $\mathbf{x}_1$  y a la de  $M_2$ , por  $\mathbf{x}_2$ , tendremos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= x\mathbf{e}_x \Rightarrow \ddot{\mathbf{x}}_1 = \ddot{x}\mathbf{e}_x, \\ \mathbf{x}_2 &= (l - x)\mathbf{e}_x \Rightarrow \ddot{\mathbf{x}}_2 = -\ddot{x}\mathbf{e}_x, \\ \ddot{x}_1 &= \ddot{x}, \quad \ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1 = -\ddot{x}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Ahora, aplicando la SLN y las relaciones anteriores, tendremos que el sumatorio de las fuerzas aplicadas sobre cada partícula es igual a su masa por su aceleración:

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{x}_1 \mathbf{e}_x &= M_1 g \mathbf{e}_x - T \mathbf{e}_x \Rightarrow M_1 \ddot{x} = M_1 g - T, \\ M_2 \ddot{x}_2 \mathbf{e}_x &= M_2 g \mathbf{e}_x - T \mathbf{e}_x \Rightarrow -M_2 \ddot{x} = M_2 g - T. \end{aligned} \tag{2.29}$$

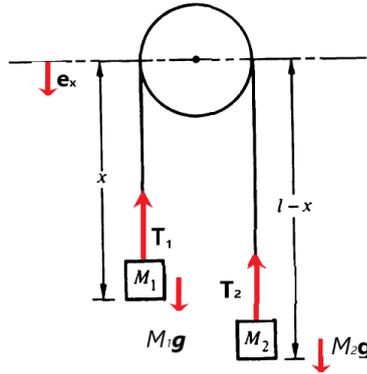


Figura 2.10: Esquema newtoniano de la máquina de Atwood

Si a la primera ecuación le restamos la segunda, en primer lugar desaparecen las tensiones cuyo valor desconocemos, y en segundo, despejando  $\ddot{x}$ , llegamos a:

$$\ddot{x} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} g.$$

Que es la misma ecuación del movimiento a la que habíamos llegado mediante la formulación lagrangiana. Una vez hallado  $\ddot{x}$ , podríamos encontrar  $T$  mediante alguna de las ecuaciones anteriores:

$$T = M_1 g \left( 1 - \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right) = \frac{2M_1 M_2}{M_1 + M_2} g.$$

### 2.4.3 Ligadura dependiente del tiempo

Ahora vamos a estudiar un ejemplo típico de la formulación lagrangiana, se trata de la cuenta que desliza por un alambre, en rotación uniforme, en el plano  $xy$  exento de fuerzas.

El alambre es recto y gira uniformemente alrededor de un eje fijo perpendicular al alambre. Este es un ejemplo donde las ligaduras dependen del tiempo (son reónomas), con lo que las ecuaciones de transformación lo contienen explícitamente:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \end{bmatrix},$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular de rotación y  $\mathbf{r}$  el vector de posición de la cuenta, que es la partícula de nuestro sistema.

Como el espacio está exento de fuerzas,  $L = T - V = T$ , luego basta con encontrar  $T$ . Si bien podemos utilizar la Observación 2.12 para hallarla, en este caso es más sencillo utilizar la ligadura de movimiento uniforme,  $\dot{\theta} = \omega$ , para llegar a:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2).$$

Aquí observamos que  $T$  no es función cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas pues hay un término adicional que no contiene a  $\dot{r}$  (ya sabíamos que no iba a serlo por la Observación 2.12, ya que las ligaduras son reónomas). La ecuación del movimiento será:

$$m\ddot{r} - mr\omega^2 = 0 \Rightarrow \ddot{r} = r\omega^2,$$

que lo que nos dice es que la cuenta se mueve hacia afuera a causa de la aceleración centrípeta (ver Figura 2.11). De nuevo, las fuerzas de ligadura quedan ocultas con este método y no podemos hallar, en concreto, la fuerza de ligadura que mantiene la cuenta en el alambre.

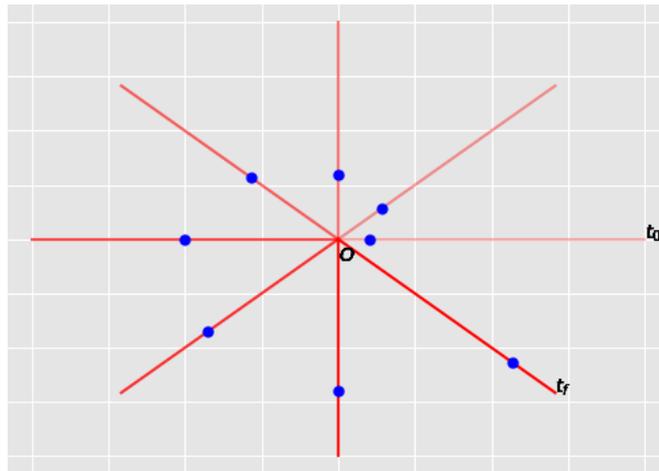


Figura 2.11: Representación del movimiento de la cuenta al girar el alambre respecto al origen  $O$  de manera uniforme entre un tiempo inicial  $t_0$  y un tiempo final  $t_f$

#### 2.4.4 Anilla ensartada en una estructura parabólica

([2, pág.4]) A continuación vamos a retomar un ejemplo que habíamos visto previamente. Se trata del sistema formado por una partícula (anilla) de masa  $m$  que se desplaza sobre una estructura parabólica rígida que a su vez rota entorno a un eje

de simetría con velocidad angular constante  $\omega$  (ver Figura 2.12). El sistema tiene por tanto 1 g.l, como coordenada generalizada podemos escoger la distancia  $\rho$  del origen a la proyección de la anilla en el plano  $z = 0$ .

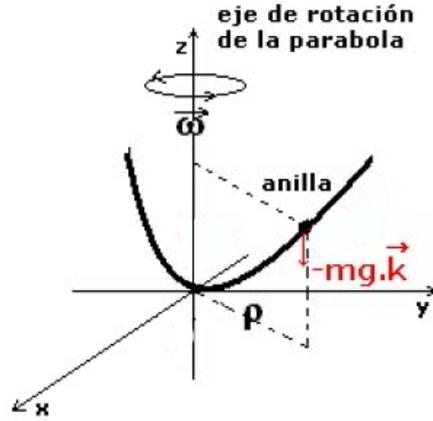


Figura 2.12: Esquema del ejemplo

El vector de posición y la velocidad serán:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \rho \cos \omega t \\ \rho \sin \omega t \\ \rho^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\rho} \cos \omega t - \rho \omega \sin \omega t \\ \dot{\rho} \sin \omega t + \rho \omega \cos \omega t \\ 2\rho \dot{\rho} \end{bmatrix},$$

y el cuadrado de la velocidad,  $v^2$ :

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \omega^2 + 4\rho^2 \dot{\rho}^2.$$

El potencial, a su vez, es:

$$V(\mathbf{r}) = mgh = mg\rho^2,$$

donde  $h$  es la altura a la que se encuentra la partícula, y que en vista de la expresión del vector de posición, se identifica con  $\rho^2$ .

Veamos ahora la forma de la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \omega^2 + 4\rho^2 \dot{\rho}^2).$$

Con lo cual ya podemos expresar la lagrangiana de nuestro sistema:

$$L(\rho, \dot{\rho}) = T(\rho, \dot{\rho}) - V(\rho) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \omega^2 + 4\rho^2 \dot{\rho}^2) - mg\rho^2.$$

Tendremos ahora que hallar, para la coordenada generalizada  $\rho$ , las derivadas que aparecen en las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \rho} &= m(\rho\omega^2 + 4\rho\dot{\rho}^2) - 2mg\rho, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} &= m(\dot{\rho} + 4\rho^2\dot{\rho}) \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m(\ddot{\rho} + 8\rho\dot{\rho}^2 + 4\rho^2\ddot{\rho}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Si ahora sustituimos en la expresión,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0,$$

llegamos a la ecuación del movimiento de la anilla:

$$(1 + 4\rho^2)\ddot{\rho} + 4\rho\dot{\rho}^2 + (2g - \omega^2)\rho = 0.$$

### 2.4.5 Otros ejemplos

([3, pág.11,18,20]) Para finalizar, vamos a describir algunos ejemplos cortos de aplicación de las ecuaciones de Lagrange.

**Ejemplo 2.7. Ecuación del movimiento de un cuerpo que es lanzado en el campo gravitatorio terrestre en 2D:** podemos utilizar las ecuaciones de Lagrange para conocer el movimiento que describe un cuerpo en tal situación.

Claramente, las coordenadas escogidas serán las cartesianas  $x, y$  y tendremos que  $L(x, y; t) = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$ . Luego:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) \Rightarrow \ddot{x} = 0, \\ 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) + mg \Rightarrow \ddot{y} = -g. \end{aligned}$$

Y por tanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{x0}t, \\ y(t) &= y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

siendo  $x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0}$  constantes de integración dadas por las condiciones iniciales.

**Ejemplo 2.8. Ecuación del movimiento del péndulo simple en 2D:** consideremos un péndulo simple formado por una partícula de masa  $m$  unida a una varilla rígida e inextensible de longitud  $l$ . El sistema tiene 1 g.l (tenemos la ligadura  $\rho = l = \sqrt{x^2 + y^2}$ ), luego podemos tomar como coordenada generalizada el ángulo  $\theta$  que forma la varilla con el eje vertical.

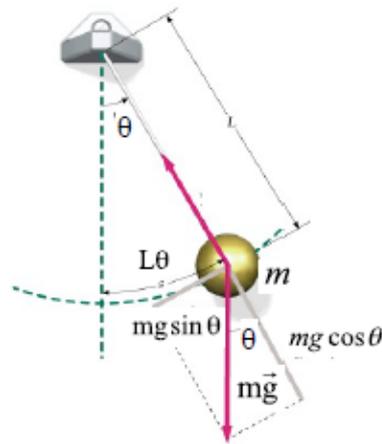


Figura 2.13: Esquema del ejemplo del péndulo simple

Las ecuaciones de transformación que se utilizan para pasar de coordenadas planas cartesianas a coordenadas planas polares son:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \end{bmatrix}.$$

La lagrangiana  $T - V$  vendrá dada por

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) - (-mg\rho \cos \theta),$$

que teniendo en cuenta que  $\rho = l$  es constante, quedará:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta,$$

y será entonces:

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

que es la conocida ecuación del péndulo simple.

**Ejemplo 2.9. Ecuación del movimiento de una partícula que desliza por un plano inclinado:** sea una partícula de masa  $m$  que desciende por una pendiente de inclinación  $\alpha$  y máxima altura  $h$  (ver Figura 2.14).

Está claro, por las relaciones trigonométricas, que hay una ligadura afectando a nuestro cuerpo y viene dada por la ecuación  $y = h - x \tan \alpha$ . Podríamos entonces

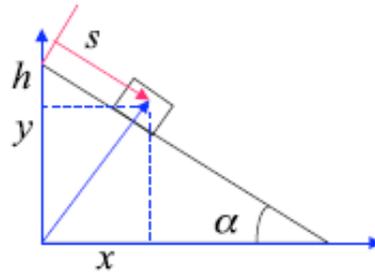


Figura 2.14: Esquema del ejemplo

escoger una única coordenada que exprese la posición de la partícula en función de la distancia desde el punto más alto del plano inclinado,  $s = s(t) = s(x(t), y(t))$ . Si nos fijamos en el dibujo,  $s$  será la hipotenusa del triángulo rectángulo de base  $x$  y altura  $h - y$ :

$$s = s(t) = \sqrt{x^2 + (h - y)^2} = \sqrt{x^2(1 + \tan^2(\alpha))} = \frac{x}{\cos \alpha}.$$

Nos olvidamos ahora de las coordenadas cartesianas y nos quedamos con nuestra coordenada generalizada  $s$ , procedemos a hallar la función lagrangiana:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - mg(h - s \sin \alpha),$$

donde  $g$  es la gravedad actuando sobre la partícula. Luego, hallando las derivadas correspondientes,

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = m\ddot{s} - mg \sin \alpha \Rightarrow \ddot{s} = g \sin \alpha.$$

Aplicando las condiciones iniciales  $s(0) = 0, v(0) = 0$  e integrando:

$$s(t) = g \sin \alpha \frac{t^2}{2},$$

y hemos terminado.

## 3 | Principios variacionales

### 3.1 Cálculo variacional y principios variacionales

Anteriormente, se han deducido las ecuaciones de Lagrange partiendo desde un principio *diferencial*, el principio de D'Alembert, equivalente a las leyes de Newton. Ahora, buscamos un principio de tipo *variacional*, esto significa que para deducir la trayectoria real seguida por el sistema entre dos puntos extremos, consideraremos todos los posibles caminos entre dichos extremos como *variaciones* del camino real y dicho camino real será de entre todos aquel que minimice una cierta funcional.

Se define la **configuración instantánea** del sistema como los valores de las  $n$  coordenadas generalizadas  $q = (q_1, \dots, q_n)$ , fijado un instante  $t$ . Dado  $t$ , estos valores definen un punto en un espacio de  $n$  dimensiones denominado **espacio de configuración**. Si variamos  $t$  entre  $t_1$  y  $t_2$ , se describe una trayectoria denominada **camino** que no es más que una curva en el espacio de configuración.

#### 3.1.1 Principio de Hamilton

El principio de Hamilton es un principio variacional que describe el movimiento de los sistemas mecánicos donde las fuerzas (salvo las de ligadura) pueden derivarse de un único potencial escalar generalizado  $V = V(q, \dot{q}, t)$ , llamados **sistemas monógenos**, debido a que todas las fuerzas se generan a partir de una sola función. Cuando el potencial sea función explícita únicamente de la posición,  $V = V(q)$ , el sistema monógeno será además **conservativo**.

**Principio de Hamilton o de mínima acción:** Dado un sistema de  $N$  partículas monógeno, entonces el movimiento del sistema entre los instantes  $t_1$  y  $t_2$  verifica que

la integral curvilínea

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L[q(t), \dot{q}(t), t] dt,$$

donde  $L = T - V$ ,  $q = (q_1, \dots, q_n)$ , tiene un **valor estacionario** para el camino del movimiento correcto, y de hecho es mínimo. De entre todos los caminos posibles, el correcto es aquel que minimiza el valor de la integral  $I$ , también llamada *acción* o *integral de acción*. Dicho de otra forma, el principio afirma que el movimiento del sistema es aquel que hace nula la variación de la integral curvilínea  $I$  entre  $t_1$  y  $t_2$ , siendo estos fijos:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0.$$

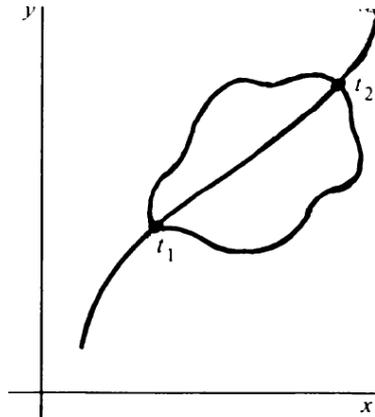


Figura 3.1: Representación de caminos posibles en el espacio de configuraciones

Vamos a ver que si el sistema de ligaduras además es holónomo, el principio de Hamilton será equivalente a las ecuaciones de Lagrange. Utilizaremos este resultado para deducir las ecuaciones de Lagrange y construir la Mecánica de sistemas monógenos tomando como base el principio de Hamilton en lugar de las leyes del movimiento de Newton.

### 3.1.2 Cálculos variacionales

El problema principal del cálculo variacional en el que nos vamos a centrar es hallar la curva para la cual una integral curvilínea dada tiene un valor estacionario (mínimo). Para empezar vamos a resolver el problema en su forma unidimensional: tenemos una función  $f(y, \dot{y}, x)$  definida sobre un camino  $y = y(x)$  entre dos valores  $x_1$  y  $x_2$ , donde  $\dot{y}$  es la derivada de  $y$  respecto a  $x$ . En este caso nuestro objetivo será encontrar un camino  $y(x)$  tal que

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) dx,$$

tenga un valor estacionario respecto a otros caminos que difieran infinitesimalmente.

Vamos a reescribir el problema de una forma que nos permita utilizar los métodos conocidos de cálculo diferencial para hallar los puntos estacionarios de una función. Vamos a denotar por  $y(x, \alpha)$  al conjunto de caminos vecinos entre  $y_1 = y(x_1)$  y  $y_2 = y(x_2)$ , donde  $\alpha$  es un parámetro infinitesimal que nos permite distinguir entre los caminos vecinos en el conjunto. Si ahora tomamos una función cualquiera  $\eta(x)$  que se anule en  $x_1, x_2$ , un **conjunto posible de caminos** sería:

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x), \quad (3.1)$$

donde  $y(x, 0)$  sería el **camino correcto**. Por sencillez, supondremos  $y(x), \eta(x) \in \mathcal{C}^2(x_1, x_2)$ , funciones continuas y sin singularidades entre  $x_1$  y  $x_2$ , con primera y segunda derivada continuas en dicho intervalo. De esta forma, para cualquiera de tales familias de curvas paramétricas, tenemos que la integral  $J$  es función también de  $\alpha$ :

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x] dx,$$

y la condición de obtención de un punto estacionario queda

$$\left( \frac{dJ}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = 0.$$

Observamos que

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right\} dx. \quad (3.2)$$

Tomando la segunda de estas integrales,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx.$$

Integrando por partes, llegamos a que

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx. \quad (3.3)$$

Como imponemos que todas las posibles curvas pasen por los puntos  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , la variación en esos puntos respecto de  $\alpha$  es nula y tendremos que en  $x_1, x_2$  se anulará la derivada parcial de  $y$  respecto a  $\alpha$ ,

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x), \text{ con } \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0,$$

y por tanto el primer término del segundo miembro de la Ecuación (3.3) desaparece. Luego, sustituyendo en la Ecuación (3.2),

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx,$$

y la condición de valor estacionario es equivalente a la ecuación

$$\left( \frac{dJ}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} dx = 0. \quad (3.4)$$

En la Ecuación (3.4), la derivada parcial de  $y$  respecto de  $\alpha$  es una función de  $x$  arbitraria salvo en lo que respecta a la continuidad y condiciones en los puntos extremos. Antes, en la Ecuación (3.1), donde representábamos una familia paramétrica de caminos variados, esta función era  $\eta(x)$ . Apoyándonos en *Lema fundamental del Cálculo Variacional* (ver en el apéndice del trabajo), deducimos de la Ecuación (3.4) que  $J$  solo puede tener un valor estacionario si

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0. \quad (3.5)$$

Por otro lado, la cantidad diferencial

$$\left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha \equiv \delta y,$$

representa el desplazamiento infinitesimal del camino variado respecto al correcto en el punto  $x$ , es decir, es un *desplazamiento virtual* como el introducido en el Capítulo 2 (de aquí la notación  $\delta y$ ). Análogamente, la variación infinitesimal de  $J$  respecto al camino correcto puede representarse como:

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha \equiv \delta J.$$

De esta forma, multiplicando por  $d\alpha$  ambos miembros de la Ecuación (3.4), se deduce

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right\} \delta y dx = 0,$$

lo cual exige que  $y(x)$  cumpla la Ecuación (3.5). La notación  $\delta$  es conveniente como abreviación para tratar la variación de integrales, pero no hay que olvidar que representa la manipulación de familias paramétricas de caminos variados como en la Ecuación (3.1).

Vamos a presentar ahora algunos ejemplos sencillos de la aplicación de la Ecuación (3.5) (que tiene una forma muy parecida a la de las ecuaciones de Lagrange).

**Ejemplo 3.1.** *Distancia más corta entre dos puntos de un plano.* En un plano, el elemento de longitud de un arco es

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

y la longitud total de toda curva que vaya del punto 1 al punto 2 es

$$I = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

La condición de que la curva constituya el camino más corto es que  $I$  sea mínima. Si ahora identificamos  $f = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$ , sustituyendo en la Ecuación (3.5)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}},$$

tenemos entonces

$$\frac{d}{dx} \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = 0.$$

Es decir,

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = c,$$

con  $c$  una constante. Despejando  $\dot{y}$  llegamos a que:

$$\dot{y} = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} =: a.$$

Entonces,

$$y = ax + b,$$

para unas ciertas constantes  $a, b$  ( $a$  relacionada con  $c$  por la anterior expresión). Es decir, la recta entre los dos puntos supone un camino extremo, si bien en este problema es evidente que es un mínimo. Las constantes de integración  $a, b$  se hallan imponiendo que la curva pase por los puntos terminales  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ . En general, a las curvas que dan la distancia mínima entre dos puntos de una superficie se denominan *geodésicas* de dicha superficie.

**Ejemplo 3.2.** *Superficie de revolución mínima.* Supongamos que formamos una superficie de revolución tomando una curva que pase por dos puntos fijos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  y haciéndola girar alrededor del eje  $y$  (ver Figura 3.2). El problema consiste en hallar la curva para la cual es mínima el área de la superficie engendrada. El área de una franja de la superficie es  $2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$  y el área total es

$$2\pi \int_1^2 x \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx.$$

El extremo de esta integral viene dado de nuevo por la Ecuación (3.5) donde

$$f = x \sqrt{1 + \dot{y}^2} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}.$$

Luego tendremos que,

$$\frac{d}{dx} \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = 0 \longrightarrow \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = a,$$

donde  $a$  es una cierta constante de integración. De la anterior expresión podemos despejar  $\dot{y}$  y obtener que

$$y = a \operatorname{arc} \cos h \frac{x}{a} + b,$$

o lo que es lo mismo,

$$x = a \operatorname{cosh} \frac{y - b}{a},$$

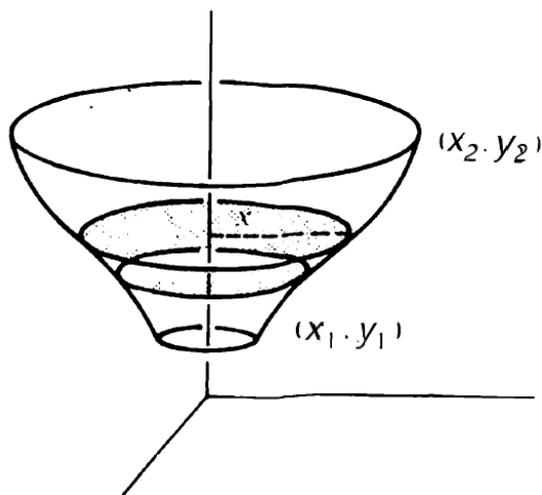


Figura 3.2: Superficie de revolución de área mínima

que es la ecuación de la *catenaria*. De nuevo, las constantes  $a, b$  se obtienen imponiendo que la curva pase por los puntos extremos dados.

Sin embargo, al examinar en detalle la solución obtenida, resulta ser más complicado de lo que puede parecer: para ciertos pares de puntos extremos se encuentran constantes de integración unívocas  $a, b$ , mientras, en otros pares de puntos extremos aparecen dos *catenarias* como solución, e incluso, hay regiones donde no pueden hallarse valores  $a, b$  posibles. Además, la Ecuación (3.5) nos devuelve un valor estacionario, pero este no tiene por qué ser un *mínimo*. Más aún, para ciertos  $x_1, x_2$  la solución viene dada por la unión de segmentos rectilíneos que *no* tienen derivada continua, por lo que es una solución no considerada por el método dado. Este ejemplo manifiesta que hay veces que existen soluciones que no se pueden hallar por este método y que no siempre las soluciones a las que llegamos aplicando la Ecuación (3.5) son válidas.

**Ejemplo 3.3.** *El problema de la braquistócrona.* Este conocido problema consiste en hallar la curva que une dos puntos, a lo largo de la cual una partícula que parte del reposo bajo la influencia de la gravedad pasa del punto más alto al más bajo en un tiempo mínimo. Si  $v = \frac{ds}{dt}$  es la velocidad a lo largo de la curva, el tiempo que se tarda en caer un arco de longitud  $ds$  será  $\frac{ds}{v} = dt$  y el problema se reduce a hallar un

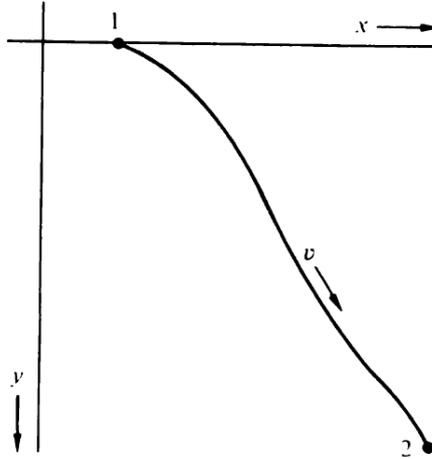


Figura 3.3: Braquistócrona

mínimo de la integral

$$t_{1,2} = \int_1^2 \frac{1}{v} ds. \quad (3.6)$$

Si se mide  $y$  hacia abajo, como en la Figura 3.3, y aplicamos el teorema de conservación de la energía de la partícula, llegamos a que

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy,$$

es decir,

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Entonces, de la Ecuación (3.6) se deduce que

$$t_{1,2} = \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}} dx,$$

y  $f$  se identifica por

$$f = \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}}.$$

De nuevo, aplicando la Ecuación (3.5) y algún cambio de variable adecuado, se puede obtener la ecuación de la *braquistócrona*. La ecuación diferencial asociada sería:

$$\frac{-\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{2y\sqrt{2gy}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\ddot{y}yg - \dot{y}^2g}{(yg)^2} \frac{\sqrt{2gy}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} + \frac{\dot{y}}{yg} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}} \frac{2g\dot{y}(1 + \dot{y}^2) - (2gy)2\dot{y}\ddot{y}}{(1 + \dot{y}^2)^2} \right) = 0.$$

Este problema es famoso por ser el que llevó a J. Bernoulli a formular los fundamentos del cálculo de variaciones.

## 3.2 Ecuaciones de Lagrange a partir del Principio de Hamilton

El problema fundamental del cálculo de variaciones se generaliza fácilmente al caso de que  $f$  sea una función de varias variables independientes  $y_i$  y de sus derivadas  $\dot{y}_i$  con todas esas cantidades funciones de  $x$ . Entonces, una variación de la integral  $J$  viene dada por:

$$\delta J = \delta \int_1^2 f[y_1(x), y_2(x), \dots, \dot{y}_1(x), \dot{y}_2(x), \dots, x] dx, \quad (3.7)$$

como antes, si consideramos  $J = J(\alpha)$  con  $\alpha$  parámetro que define un posible conjunto de curvas  $\{y_i(x, \alpha)\}$ :

$$\begin{aligned} y_1(x, \alpha) &= y_1(x, 0) + \alpha \eta_1(x) \\ y_2(x, \alpha) &= y_2(x, 0) + \alpha \eta_2(x) \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde  $y_i(x, 0)$  son las soluciones a obtener del problema de extremo y las  $\eta_i(x)$  son tales que  $\eta_i \in C^2(x_1, x_2)$  con  $\eta_i(x_1) = \eta_i(x_2) = 0$ , pero arbitrarias en todo lo demás. Luego,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} d\alpha \right) dx. \quad (3.9)$$

Si integramos ahora por partes los términos de la integral del segundo sumatorio,

$$\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} d\alpha dx = \int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial^2 y_i}{\partial \alpha \partial x} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right|_1^2 - \int_1^2 \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) dx,$$

donde evidentemente el primer término del último miembro se anula como ocurría en el caso unidimensional, ya que todas las curvas pasan por los puntos terminales

fijos. Sustituyendo en la Ecuación (3.9),

$$\delta J = \int_1^2 \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta y_i dx, \quad (3.10)$$

donde  $\delta y_i = \left( \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha$ ,  $\delta J = \left( \frac{dJ}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha$ . Como suponemos que las  $y_i$  son independientes, también lo serán los desplazamientos virtuales  $\delta y_i$ . Luego, por **ampliación del lema fundamental del cálculo de variaciones**, la condición de que  $\delta J$  sea 0 exige que se anulen por separado los coeficientes de las  $\delta y_i$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Las Ecuaciones (3.11) son una clara generalización de la Ecuación (3.5), y se conocen por **Ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange**. Sus soluciones representan conjuntos de curvas  $y_i$  donde  $\delta J$  se anula, lo cual indica que el valor de la integral  $J$  es estacionario aunque en principio no dice si es mínimo.

**Observación 3.1.** Otras generalizaciones del problema fundamental del cálculo variacional también son posibles: podemos tomar  $f$  como función de derivadas de  $y_i$  de orden mayor que 1, o que las  $y_i$  dependan a su vez de varios parámetros  $x_j$  (lo que llevaría a integrales múltiples), incluso podemos considerar que los puntos extremos no son fijos.

Sin embargo, para deducir las ecuaciones de Lagrange nos basta con lo que hemos desarrollado, pues la integral del principio de Hamilton es

$$I = \int_1^2 L(q_i, \dot{q}_i, t) dt, \quad (3.12)$$

cuya forma podemos identificar con la de la Ecuación (3.7). Al deducir las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange se supuso que las  $y_i$  eran independientes. Esto equivale a que las  $n$  coordenadas generalizadas  $q_i$  lo sean: las ligaduras deben ser holónomas. En ese caso, aplicando (3.11), las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange correspondientes a la integral  $I$  se convierten en las ecuaciones de Lagrange del movimiento:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Así, hemos deducido las ecuaciones de Lagrange a partir del Principio de Hamilton para sistemas monógenos con ligaduras holónomas. Los conceptos aquí pueden extenderse al caso de sistemas no holónomos (ver en el apéndice del trabajo).

### 3.3 Teoremas de conservación y propiedades de simetría

Hasta ahora nos hemos ocupado de cómo obtener las ecuaciones del movimiento pero no hemos hablado de cómo resolverlas en un problema particular. Es en general una cuestión matemática: un sistema con  $n$  g.l. tendrá  $n$  ecuaciones diferenciales que son de segundo orden en el tiempo. Por ello cada solución requerirá de 2 integraciones con sus respectivas constantes de integración, que en total serán  $2n$  y se determinarán a partir de las condiciones iniciales (valores iniciales de las coordenadas generalizadas y las velocidades generalizadas).

Sin embargo, en la mayoría de problemas no podemos integrar totalmente las ecuaciones. Aún así, sí es posible obtener bastante información de la naturaleza física del movimiento del sistema mediante una solución incompleta. En lo que sigue supondremos que el movimiento de los sistemas viene descrito totalmente por el principio de Hamilton en su forma

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0,$$

donde  $t_1, t_2$  son fijos y  $q = (q_1, \dots, q_n)$ . Se pueden encontrar integrales primeras de las ecuaciones del movimiento, es decir, relaciones del tipo:

$$f(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = 0,$$

que son ecuaciones diferenciales de primer orden. Estas ecuaciones son de interés pues incluyen los principios de conservación que veíamos al comienzo del Capítulo 2, como pronto veremos.

Así, consideremos por ejemplo el caso de un sistema de puntos materiales sometidos a fuerzas que derivan de potenciales que *solo dependen de la posición* ( $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0$ ). Entonces,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = m_i \dot{x}_i =: p_{ix},$$

que es la componente  $x$  de la *cantidad de movimiento generalizada* asociada a la  $i$ -ésima partícula.

**Definición 3.1.** Se define la **cantidad de movimiento generalizada** asociada a la coordenada generalizada  $q_j$  como

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j},$$

que no es más que la derivada parcial de la lagrangiana respecto a la velocidad generalizada  $j$ -ésima. También se la denomina cantidad de movimiento **conjugada o canónica**. En general no tiene por qué respetar las dimensiones de cantidad de movimiento y tampoco tiene por qué coincidir con la cantidad de movimiento clásica  $p$ .

Recordemos que una coordenada cíclica era aquella coordenada  $q_j$  que verificaba  $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ . La ecuación del movimiento asociada a  $q_j$  cuando esta es cíclica queda entonces como sigue:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0.$$

Aplicando la Definición 3.1, tenemos que

$$\frac{d}{dt} p_j = 0 \longrightarrow p_j = \text{cte.}$$

**Teorema 3.1.** (**de conservación de la cantidad de movimiento generalizada**). Si en un sistema de  $N$  partículas dado, la coordenada generalizada  $q_j$  resulta ser cíclica, entonces la cantidad de movimiento generalizada  $p_j$  asociada a  $q_j$  se conserva, es decir,  $\dot{p}_j = 0$ .

**Demostración.** Es sencillo, pues si  $q_j$  es cíclica, entonces

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} p_j - 0 \longrightarrow \frac{d}{dt} p_j = 0.$$

Este teorema es mucho más general que los de conservación de la cantidad de movimiento clásica y el momento cinético. Es válido, por ejemplo, aún cuando se vulnera la ley de acción y reacción. Además, los teoremas de conservación originales están contenidos en esta nueva regla general para coordenadas cíclicas: solo debemos aplicar las restricciones adecuadas para reducir el teorema de conservación de  $p_j$  a los del Capítulo 2.

Sea en primer lugar  $q_j$  una coordenada generalizada, para la cual un cambio  $dq_j$  representa una **traslación** del sistema en conjunto en una dirección dada. Un ejemplo

podría ser una traslación en la dirección del eje  $z$  para un cierto sistema donde las coordenadas escogidas son las cartesianas. Es claro que  $q_j$  no puede aparecer en  $T$ , ya que las velocidades son invariantes por traslaciones y por tanto la derivada parcial de  $T$  respecto de  $q_j$  se anula. Además suponemos sistemas conservativos donde  $V = V(q)$  solo depende de la posición. La ecuación (general) de Lagrange queda entonces de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = Q_j \longrightarrow \dot{p}_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

Vamos a demostrar que la anterior expresión es la ecuación del movimiento para la cantidad de movimiento total,  $\mathbf{P}$ . Es decir, para  $q_j$  coordenada de traslación:

1.  $Q_j$  es la componente de la fuerza total,  $\mathbf{F}$ , según la dirección de traslación  $dq_j$ ,
2.  $p_j$  es la componente de la cantidad de movimiento total,  $\mathbf{P}$ , según la dirección de traslación  $dq_j$ .

En general,

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

Como  $dq_j$  es una traslación a lo largo de un eje, los vectores  $\mathbf{r}_i(q_j)$  y  $\mathbf{r}_i(q_j + dq_j)$  estarán relacionados como en la Figura 3.4.

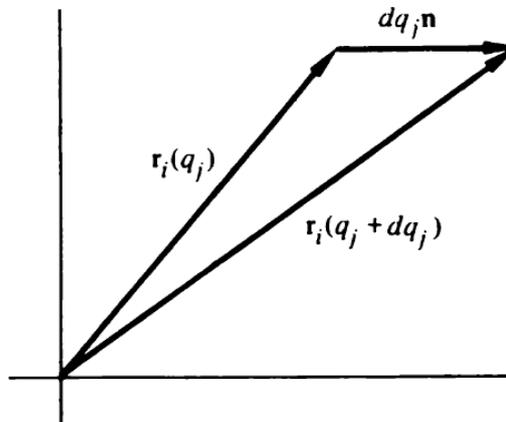


Figura 3.4: Cambio de un vector de posición ante una traslación del sistema

Por definición de derivada,

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \lim_{dq_j \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_i(q_j + dq_j) - \mathbf{r}_i(q_j)}{dq_j} = \frac{dq_j}{dq_j} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n},$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario en la dirección de la traslación. Por tanto,

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n},$$

que es la componente de la fuerza resultante en la dirección de  $\mathbf{n}$ , como queríamos probar. Nos falta ver la segunda parte de lo enunciado, que  $p_j$  es la cantidad de movimiento total según la dirección de traslación. Notemos que podemos escribir la energía cinética,

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2,$$

y la cantidad de movimiento conjugada es entonces,

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j},$$

donde hemos aplicado que

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

De esta forma,

$$p_j = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n},$$

es decir,  $p_j$  es la componente de la cantidad de movimiento total del sistema en la dirección de traslación dada por  $\mathbf{n}$ . Por todo lo anterior,

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = Q_j = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \longrightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \quad (3.13)$$

Supongamos ahora que la coordenada de traslación,  $q_j$ , es cíclica. Entonces  $V$  no depende de  $q_j$  y se tiene que la componente de la fuerza generalizada se anula:

$$-\frac{\partial V}{\partial q_j} \equiv Q_j = 0 \xrightarrow{(3.13)} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = cte.$$

Pero esto no es más que el *teorema de conservación de la cantidad de movimiento total*  $\mathbf{P}$  del Capítulo 2: si se anula una componente de la fuerza aplicada resultante  $\mathbf{F}$ , entonces se conserva la correspondiente componente de la cantidad de movimiento total  $\mathbf{P}$ .

De manera análoga, podemos demostrar que si una coordenada cíclica  $q_j$  es tal que  $dq_j$  corresponde a una **rotación** del sistema de partículas alrededor de un eje,

la conservación de su cantidad de movimiento conjugada  $p_j$  corresponde a la conservación de un momento cinético. Por el mismo razonamiento de antes, al ser las velocidades invariantes por rotación del sistema de coordenadas, se tiene que  $T$  no depende de  $q_j$  y entonces su derivada parcial respecto de esta coordenada es nula. Por otro lado,  $V$  solamente depende de la posición, por lo que su derivada parcial respecto a la velocidad generalizada  $\dot{q}_j$  se anula. Por tanto de nuevo llegamos a que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \longrightarrow \dot{p}_j = Q_j.$$

Vamos a demostrar que, siendo  $q_j$  coordenada de rotación,

1.  $Q_j$  es la componente según el eje de rotación del momento resultante aplicado  $\mathbf{N}$ ,
2.  $p_j$  es la componente del momento cinético resultante,  $\mathbf{L}$ , respecto a dicho eje.

La derivada ahora tiene un significado diferente, como podemos apreciar en la Figura 3.5. Ahora, el cambio en  $q_j$  corresponde a una rotación infinitesimal del vector de posición  $\mathbf{r}_i$ , manteniendo su módulo constante. Es decir, el módulo de la diferencial es:

$$|d\mathbf{r}_i| = r_i \sin \theta dq_j \longrightarrow \left| \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right| = r_i \sin \theta.$$

La dirección debe ser perpendicular a  $\mathbf{r}_i$  y a  $\mathbf{n}$ , por tanto:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i.$$

Sustituyendo en la expresión general de la fuerza generalizada:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{n} \cdot \sum_i \mathbf{N}_i = \mathbf{N} \cdot \mathbf{n},$$

donde  $\mathbf{N}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$  y  $\sum_i \mathbf{N}_i = \mathbf{N}$ . Por otro lado, para  $p_j$  tenemos:

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{n} \cdot \sum_i \mathbf{L}_i = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n},$$

donde  $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$  y  $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i$ . Por tanto, hemos llegado a que

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{n}.$$

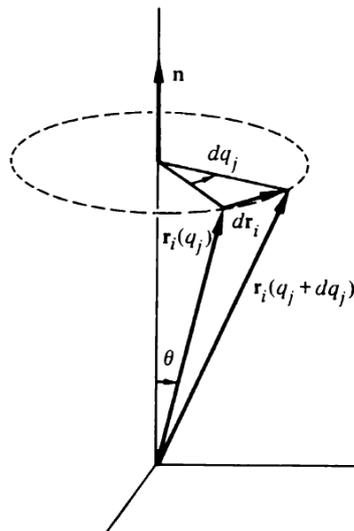


Figura 3.5: Cambio de un vector de posición ante una rotación del sistema

Si suponemos que la coordenada de rotación  $q_j$  es cíclica, entonces se anula  $Q_j$ , o lo que es lo mismo, se anula la componente del momento resultante aplicado  $\mathbf{N}$  en la dirección de rotación. Por la anterior ecuación, esto será equivalente a que la componente del momento cinético  $\mathbf{L}$  se conserve. Es decir, hemos vuelto a recuperar un teorema de conservación del Capítulo 2, el *teorema de conservación del momento cinético*.

Resumiendo lo que hemos visto: si una coordenada correspondiente a un desplazamiento es cíclica, es decir, el sistema es invariante ante una traslación en una dirección dada, entonces se conserva la cantidad de movimiento correspondiente. Por otro lado, si la coordenada cíclica es de rotación, lo que nos dice que el sistema es invariante ante una rotación en torno al eje dado, entonces se conserva el momento cinético correspondiente. En general, los teoremas de conservación están relacionados con las **propiedades de simetría** del sistema.

Otro teorema de conservación que se puede esperar obtener en la formulación lagrangiana es el de conservación de la energía total en sistemas conservativos. Sea una función lagrangiana genérica  $L = L(q, \dot{q}, t)$ , la derivada total respecto al tiempo de  $L$  es

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Por las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j},$$

luego

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_j \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Y se deduce que

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (3.14)$$

A lo que está entre paréntesis se le suele denominar **función energía** y se representa por  $h$ :

$$h(q, \dot{q}, t) = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L.$$

Luego, de la Ecuación (3.14), se obtiene la relación:

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.15)$$

**Observación 3.2.** La función energía tiene igual valor que la función hamiltoniana  $H$  utilizada en la rama de la Mecánica con el mismo nombre, y sin embargo no son la misma función. Esto se debe a que  $h$  es función de  $n$  variables independientes  $q_j$  y sus derivadas respecto al tiempo, además del tiempo:  $h = h(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ . Mientras, la función hamiltoniana  $H$  se trata como función de  $2n$  variables independientes  $q_j, p_j$  junto con el tiempo:  $H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ . La relación entre ambas funciones viene dada por la Definición 3.1.

Volviendo a la Ecuación (3.15), si la lagrangiana  $L$  no depende explícitamente del tiempo, tendremos que  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  y entonces se conserva la función energía  $h$ . Lo interesante es que, bajo ciertas condiciones, la función  $h$  es la energía total del sistema.

En primer lugar, recordemos que la energía cinética de un sistema puede descomponerse en  $T = T_0 + T_1 + T_2$  donde cada componente dependía característicamente de las coordenadas y velocidades generalizadas. En muchos casos podremos hacer algo similar con  $L$  y descomponerla en  $L = L_0 + L_1 + L_2$ , donde  $L_2$  es función homogénea

de segundo grado de las velocidades mientras que  $L_1$  es homogénea de primer grado de las velocidades. Cuando las fuerzas derivan de un potencial que no depende de las velocidades la lagrangiana tiene esta forma. Ahora bien, el teorema de Euler nos dice que si  $f$  es homogénea de grado  $n$  en las variables  $x_i$ , entonces

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f.$$

Aplicando a la función  $h$  el teorema de Euler para la descomposición de la lagrangiana, tenemos que

$$h = 2L_2 + L_1 - L = L_2 - L_0$$

Si ahora las ecuaciones de transformación que definen las coordenadas generalizadas no contienen explícitamente el tiempo, entonces  $T = T_2$ . Si además, suponemos que las fuerzas derivan de un potencial, tendremos  $L_2 = T$  y  $L_0 = -V$ , con lo cual, sustituyendo en la anterior relación,

$$h = T + V = E.$$

Luego, en estas condiciones, la función energía coincide con la energía total. Por la Ecuación (3.15), la energía total  $h$  se conservará si la lagrangiana  $L$  no depende explícitamente del tiempo. Habremos llegado al *teorema de conservación de la energía total en sistemas donde las fuerzas derivan de potenciales que dependen solo de la posición*.

## 4 | Conclusiones del trabajo

En el presente trabajo de fin de grado se ha introducido una herramienta fundamental para resolver los problemas de Mecánica: la formulación lagrangiana. Esta misma ha sido deducida partiendo de dos principios diferentes (*diferencial* y *variacional*), y también se han visto resaltadas algunas de sus cualidades como, por ejemplo, que las ecuaciones que definen el movimiento son ecuaciones escalares y no vectoriales, más sencillas de tratar.

Las diferencias con la Mecánica newtoniana se hacen visibles sobre todo en los ejemplos de aplicación de la formulación descrita. En el de la *Máquina de Atwood* veíamos en concreto cómo variaba la resolución del problema de hallar las ecuaciones del movimiento desde el punto de vista lagrangiano y después desde el punto de vista clásico, el newtoniano. Se observó como las tensiones, fuerzas desconocidas a priori, desaparecían en la formulación lagrangiana del problema (aunque sabemos que podemos introducirlas a conciencia si utilizamos el método de los multiplicadores de Lagrange) mientras que en la formulación newtoniana nos vemos *obligados* a considerarlas si queremos obtener el movimiento realizado por las poleas.

Tenemos pues una nueva manera de afrontar los problemas de la Mecánica de una forma equivalente a la forma clásica newtoniana y que además en muchos casos nos permitirá deducir de manera más sencilla y rápida las ecuaciones del movimiento de un sistema dado. Esta formulación permite generalizar el concepto de cantidad de movimiento (cantidad de movimiento canónica o conjugada), y obtener, a su vez, un teorema de conservación de dicha cantidad de movimiento canónica. De este teorema se pueden derivar, bajo ciertas condiciones, los teoremas de conservación clásicos de la Mecánica newtoniana y es algo que también hemos visto cómo hacer. Finalizamos hablando de la función energía y del teorema de conservación de la energía total para sistemas donde las fuerzas derivan de potenciales que dependen solo de la posición, es decir, sistemas conservativos.

Por último, la Observación 3.2 nos habla de una función,  $H$ , que se denomina *hamiltoniana*, y que es de igual valor que la función energía,  $h$ , pero depende de cantidades diferentes (aunque estas están relacionadas). Esta función juega un papel parecido al de la lagrangiana  $L$  en lo que se denomina *Mecánica hamiltoniana*, que *no* hemos tratado en este trabajo. La Mecánica hamiltoniana, como la lagrangiana, es una formulación alternativa a la de Newton que se utiliza para hallar las ecuaciones del movimiento de sistemas dados, pero lo más importante es que las 3 son totalmente equivalentes entre sí: podemos resolver cada problema de hallar las ecuaciones del movimiento de un sistema dado con la formulación que lo haga más sencillo.

*La verdad siempre se halla en la simplicidad y no en la multiplicidad y confusión de las cosas. -Isaac Newton.*

# A | Apéndice

## A.1 Resultados matemáticos

**Lema A.1.** (fundamental del Cálculo Variacional, [4, pág.3]) sea  $M \in \mathcal{C}^0(x_1, x_2)$ , si para toda  $\eta \in \mathcal{C}^2(x_1, x_2)$  tal que  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ , se tiene que

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)dx = 0,$$

entonces  $M(x)$  deberá ser **idénticamente nula** en el intervalo  $(x_1, x_2)$ .

**Demostración.** Por reducción al absurdo: existe  $\xi \in (x_1, x_2)$  tal que  $M(\xi) \neq 0$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $M(\xi) > 0$ . Puesto que  $M$  es continua, entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que si  $|x - \xi| < 2\epsilon$ , entonces  $0 < \frac{1}{2}M(\xi) \leq M(x)$ . Sea  $\eta(x)$  una función con derivada continua y no negativa tal que  $\eta(x) = 0$  para todo  $x \in (x_1, x_2) \setminus (\xi - 2\epsilon, \xi + 2\epsilon)$ . Podemos suponer también que  $\eta(x) = 1$  para cada  $x \in (\xi - \epsilon, \xi + \epsilon)$ . Entonces tenemos:

$$0 \stackrel{\text{Hip}}{=} \int_{x_1}^{x_2} \eta(x)M(x)dx \geq \int_{\xi - \epsilon}^{\xi + \epsilon} M(x)dx \geq \epsilon M(\xi) > 0,$$

lo cual es una contradicción. |

## A.2 Principio de Hamilton en sistemas no holónomos

Podemos extender el principio de Hamilton, de manera formal, para cubrir ciertos tipos de *sistemas no holónomos*. Al deducir las ecuaciones de Lagrange de dicho principio o del principio de D'Alembert, la hipótesis de que las ligaduras sean holónomas es principalmente necesaria para probar que los desplazamientos virtuales  $\delta q_i$  son independientes entre sí. En el caso de sistemas no holónomos, las  $q_i$  no son todas independientes entre sí, y no podemos reducirlas más por medio de ecuaciones de ligadura holónomas de la forma  $f(q_1, \dots, q_n, t) = 0$ . Además, ahora importa si el camino variado está construido por desplazamientos que verifican las ecuaciones de ligadura.

Consideremos un sistema de  $N$  partículas *no holónomo*. El caso más sencillo es cuando las ecuaciones de ligadura pueden ponerse en la forma

$$\sum_k a_{lk} dq_k + a_{lt} dt = 0, \quad (\text{A.1})$$

es decir, cuando expresen una relación lineal entre las diferenciales  $dq_1, \dots, dq_n, dt$ . El índice  $l$  indica que puede haber más de una de estas ecuaciones,  $l = 1, \dots, m$ . Los  $a_{lk}, a_{lt}$  pueden ser funciones de las  $q_i$  y del tiempo.

Sin embargo, no es posible encontrar un camino variado cuyos desplazamientos verifiquen las Ecuaciones (A.1), a menos que estas sean integrables, lo cual las convertiría directamente en holónomas. De todas formas, sí podremos obtener un principio variacional válido para sistemas no holónomos cuando los caminos variados se construyan mediante desplazamientos virtuales compatibles con las ligaduras. Tales ecuaciones de ligaduras serán de la forma:

$$\sum_k a_{lk} \delta q_k = 0, \quad \forall l = 1, \dots, m. \quad (\text{A.2})$$

Podemos utilizar las Ecuaciones (A.2) para quedarnos solo con los desplazamientos virtuales independientes. Eliminaremos a los desplazamientos sobrantes mediante el método de los **multiplicadores indeterminados de Lagrange**: si se cumplen las Ecuaciones (A.2), entonces también se cumple

$$\lambda_l \sum_k a_{lk} \delta q_k = 0, \quad (\text{A.3})$$

donde las  $\lambda_l, l = 1, 2, \dots, m$  son cantidades indeterminadas, funciones de las coordenadas y el tiempo. Además, supondremos válido el principio de Hamilton para sistemas no holónomos:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0,$$

lo cual implica, por un desarrollo similar al del Capítulo 3, que

$$\int_1^2 \sum_k \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt = 0. \quad (\text{A.4})$$

Si ahora sumamos la Ecuación (A.3) en  $l = 1, \dots, m$ , e integramos entre 1 y 2:

$$\int_1^2 \sum_{l,k} \lambda_l a_{lk} \delta q_k dt = 0.$$

Sumando esta expresión a la Ecuación (A.4),

$$\int_1^2 \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k dt = 0. \quad (\text{A.5})$$

Los desplazamientos virtuales  $\delta q_k$  siguen sin ser todos independientes (están relacionados por las  $m$  Ecuaciones (A.2)) pero podemos elegir los primeros  $n - m$  de ellos de forma que sí lo sean, quedando solo los  $m$  últimos fijados por dichas ecuaciones. Por otro lado, quedan a nuestra elección los valores de  $\lambda_l$ . Supongamos que los elegimos de forma que verifican:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = 0, \quad k = n - m + 1, \dots, n. \quad (\text{A.6})$$

Las Ecuaciones (A.6) corresponden a las ecuaciones del movimiento de las  $m$  últimas coordenadas  $q_k$ . Aplicando esto último, podemos reescribir (A.5):

$$\int_1^2 \sum_{k=1}^{n-m} \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k dt = 0. \quad (\text{A.7})$$

Ahora las únicas variables que intervienen son las  $n - m$  que son independientes, y así lo serán por tanto sus desplazamientos virtuales  $\delta q_k$ . Luego se deduce que

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n - m. \quad (\text{A.8})$$

Si combinamos (A.6) y (A.8), obtenemos que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A.9})$$

Ahora tenemos  $n + m$  incógnitas:  $n$  de las coordenadas generalizadas y  $m$  de los multiplicadores de Lagrange. Sin embargo, las Ecuaciones (A.9) son solo  $n$ , por lo que necesitaremos  $m$  condiciones extra. Estas  $m$  condiciones son las  $m$  ecuaciones de ligadura que relacionaban las  $q_k$  (Ecuaciones (A.1)) pero consideradas como ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\sum_k a_{lk} \dot{q}_k + a_{lt} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Las Ecuaciones (A.9) y (A.10) constituyen  $n + m$  ecuaciones con  $n + m$  incógnitas.

Podemos preguntarnos acerca del significado físico de estas cantidades indeterminadas que han aparecido con el método de los multiplicadores de Lagrange. Supongamos que eliminamos las ligaduras del sistema y en su lugar aplicamos fuerzas exteriores  $Q'_k$  de manera que el movimiento del sistema no varíe. Las ecuaciones del movimiento quedan:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k.$$

Es evidente que estas fuerzas exteriores deben ser iguales a las de ligadura pues estas ecuaciones deben coincidir con las Ecuaciones (A.9), luego  $Q'_k = \sum_l \lambda_l a_{lk}$ . Es decir, las fuerzas de ligadura no desaparecen de la formulación en este tipo de sistema no holónimo, sino que se dan como parte de la solución.

Para terminar, notemos que la Ecuación (A.1) no incluye ni siquiera el caso de ligadura no holónoma más sencillo: las inecuaciones. Podríamos preguntarnos por la forma de tratar este tipo de ligaduras. Por ejemplo ([5]), en el caso de un péndulo en el que la masa pende de un hilo flexible e inextensible de longitud  $l$ , la ligadura viene dada por la inecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2.$$

En general, la forma de tratar estas ligaduras es dividir el movimiento en intervalos: en aquellos en los que la ligadura no está actuando se supone que la partícula no está sometida a ella mientras que en los que sí actúa se considera como una ligadura del tipo  $f(q_1, \dots, q_n, t) = 0$ . En el ejemplo del péndulo anterior de hilo flexible imaginemos que la masa se suelta desde una cierta altura, con el hilo destensado. Inicialmente la masa cae verticalmente y durante ese tiempo la ligadura no está actuando sobre

ella. Una vez la distancia al origen coincide con la longitud del hilo, este se tensa y la masa pasa a oscilar como lo haría un péndulo rígido, actuando la ligadura como una igualdad (ver Figura A.1).

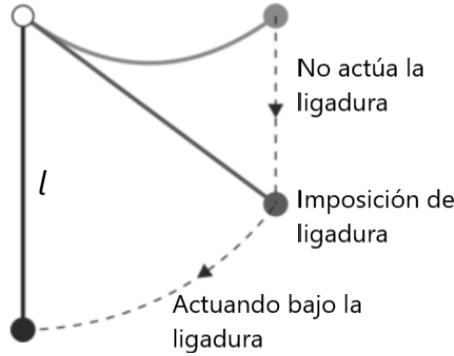


Figura A.1: Péndulo flexible

Sin embargo, la Ecuación (A.1) sí incluye a las ligaduras holónomas: en efecto, si consideramos una ligadura holónoma dada por

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0,$$

entonces equivale a la ecuación diferencial

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0,$$

que es similar a la Ecuación (A.1) con

$$a_{lk} = \frac{\partial f}{\partial q_k}, \quad a_{lt} = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Por tanto, el método de los multiplicadores de Lagrange se puede utilizar en sistemas holónomos también. Podemos utilizarlo para reducir todas las  $q_k$  a coordenadas independientes o para obtener las fuerzas de ligadura.

**Ejemplo A.1.** Vamos a aplicar el método al caso de un aro que rueda sin deslizar hacia la parte baja de un plano de inclinación  $\phi$  constante y longitud  $l$ . Como coordenadas generalizadas escogemos  $x$  la distancia recorrida por el aro desde el origen del plano inclinado y  $\theta$  el ángulo de rodamiento del aro (ver Figura A.2).

La ecuación de ligadura de la rodadura es

$$rd\theta - dx = 0 \longrightarrow a_\theta = r, \quad a_x = -1,$$

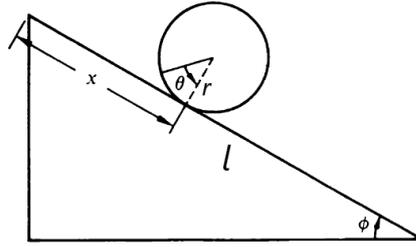


Figura A.2: Aro que rueda por un plano inclinado

donde  $a_\theta$ ,  $a_x$  son los coeficientes que aparecen en la ecuación de ligadura. La energía cinética se puede descomponer en energía cinética del movimiento del centro de masa más la del movimiento relativo al centro de masa:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2.$$

A su vez, la energía potencial,

$$V = Mg(l - x) \sin \phi.$$

Por tanto, la lagrangiana queda,

$$L = T - V = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{Mr^2\dot{\theta}^2}{2} - Mg(l - x) \sin \phi.$$

Hay una sola ligadura, así que solo necesitamos un multiplicador de Lagrange,  $\lambda$ . Las dos ecuaciones de Lagrange serán,

$$\begin{aligned} M\ddot{x} - Mg \sin \phi &= a_x \lambda = -\lambda, \\ Mr^2\ddot{\theta} &= a_\theta \lambda = r\lambda, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

que junto con la ecuación de ligadura, esta vez como ecuación diferencial de primer orden,

$$r\dot{\theta} = \dot{x},$$

constituyen 3 ecuaciones para las 3 incógnitas a obtener:  $x$ ,  $\theta$ ,  $\lambda$ . Derivando esta última respecto al tiempo, tenemos que

$$r\ddot{\theta} = \ddot{x}.$$

Sustituyendo en la segunda ecuación de (A.11), llegamos a que

$$M\ddot{x} = \lambda$$

y de la primera se deduce

$$\ddot{x} = \frac{g \sin \phi}{2} \longrightarrow \lambda = \frac{Mg \sin \phi}{2} \longrightarrow \ddot{\theta} = \frac{g \sin \phi}{2r}.$$

Así hemos obtenido ecuaciones del movimiento para las coordenadas  $x, \theta$  además de la fuerza de ligadura  $\lambda$ .



# Bibliografía

- [1] H. GOLDSTEIN, *Mecánica clásica*, 1994.
- [2] C. S. CHINEA, *Aplicando el principio de los trabajos virtuales*, 2005.
- [3] FERRER, C., BARENBOIM, G., PELLICER, J., PEÑARROCHA, J. A., *Material de clase - Tema 5: Introducción a la formulación lagrangiana y hamiltoniana*, Universitat de Valencia (Web site: <http://ocw.uv.es/ciencias/2/1-2/material-de-clase>), 2009.
- [4] E. BALANZARIO GUTIÉRREZ, *Control Óptimo - Cálculo en Variaciones* (Web site: <http://matmor.unam.mx/~euba/>).
- [5] WIKI DPTO. FÍSICA APLICADA III - UNIVERSIDAD DE SEVILLA, *Dinámica de la partícula y los sistemas vinculados* (Web site: [http://laplace.us.es/wiki/index.php/Dinámica\\_de\\_la\\_partícula\\_y\\_los\\_sistemas\\_vinculados\\_\(CMR\)](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Dinámica_de_la_partícula_y_los_sistemas_vinculados_(CMR))).