



FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS NUMÉRICO

Trabajo Fin de Grado

**ESTUDIO TEÓRICO Y NUMÉRICO DE LAS
ECUACIONES DE BLACK-SCHOLES.
APLICACIONES AL CAMPO FINANCIERO.**

Daniel Trujillo Vargas

Dirigido por:

María Macarena Gómez Mármol

2020

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 3 |
| 2. Conceptos previos al modelado | 5 |
| 2.1. Definiciones básicas | 5 |
| 2.2. Interés libre de riesgo | 6 |
| 2.3. Activos. Procesos de Wiener | 6 |
| 2.3.1. La propiedad de Markov | 7 |
| 2.3.2. Procesos estocásticos en tiempo continuo. Procesos de Wiener | 7 |
| 2.3.3. Proceso de Wiener generalizado | 8 |
| 2.3.4. El proceso para el precio de un activo | 10 |
| 2.4. Lema de Itô | 11 |
| 2.4.1. El camino lognormal | 12 |
| 2.5. Opciones | 13 |
| 2.5.1. Opciones Europeas y Americanas | 13 |
| 2.5.2. Un ejemplo de opción de compra | 13 |
| 2.5.3. Especulación | 14 |
| 3. Modelización Matemática | 16 |
| 3.1. Arbitraje | 16 |
| 3.2. Valoración de las opciones Europeas | 17 |
| 3.3. Paridad compra-venta | 18 |
| 3.4. La ecuación de Black-Scholes | 18 |
| 3.4.1. Black-Scholes para un activo que paga dividendos | 20 |
| 3.5. Condiciones Finales | 20 |
| 3.6. Condiciones de Contorno | 21 |
| 4. Análisis Matemático del Problema | 23 |
| 4.1. Resultados Preliminares | 23 |
| 4.2. Planteamiento del problema | 25 |
| 4.3. Semidiscretización en tiempo | 26 |
| 4.4. Existencia y Unicidad de solución | 27 |
| 5. Discretización total del problema | 31 |
| 5.1. Resultados básicos de MEF | 31 |
| 5.2. Discretización en espacio | 33 |

| | |
|--|-----------|
| 6. Simulaciones numéricas | 40 |
| 6.1. Comparaciones | 41 |
| 6.2. Sensibilidad respecto de los parámetros | 44 |
| 6.2.1. Tasa de interés libre de riesgo y precio de ejercicio | 44 |
| 6.2.2. Vencimiento | 44 |
| 6.2.3. Volatilidad | 45 |
| 6.2.4. Precio de la acción en el instante actual | 45 |

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado es proporcionar una introducción a la valoración de derivados financieros (en concreto, a las opciones) mediante procesos de discretización y el método de elementos finitos.

El artículo publicado en 1973 en el *Chicago Journal* por Fischer Black y Myron Scholes ([1]) motiva esta teoría, que ha ido evolucionando desde entonces. Durante todo este tiempo, los procesos de transacción de derivados financieros también han sido objeto de cambio y mejora, e incluso se crearon mercados donde poder realizar las operaciones mencionadas.

Son varios los métodos numéricos y las técnicas de modelización matemática que se han utilizado a lo largo de los años para dar respuesta a estos problemas. Indagando un poco más, algunos tienen fórmulas cerradas que permiten obtener soluciones exactas, pero la mayoría de los casos no se corresponden con esta situación. Una de las técnicas que más se ha utilizado y se sigue utilizando es la modelización mediante ecuaciones en derivadas parciales, la cual será la que desarrollemos en este trabajo. Más concretamente, introduciremos los conceptos de opciones Europeas y Americanas de compra y venta y trataremos las primeras, siendo los casos de compra y venta análogos.

Las ecuaciones en derivadas parciales a tratar en este trabajo, y sobre las que se construye el problema del cálculo del precio de las opciones, son las llamadas ecuaciones de Black-Scholes. Desde el punto de vista matemático, cuando se complete el problema con unas condiciones finales y de contorno, tendremos un problema bien planteado. Concretamente, las ecuaciones de Black-Scholes corresponden a ecuaciones en derivadas parciales en un dominio no acotado, con la dificultad de que pueden llegar a ser degeneradas. Hay diversos trabajos que tratan estas ecuaciones directamente utilizando técnicas que envuelven sub y supersoluciones, las cuales nosotros no estudiaremos, pues el objetivo es poder simular el proceso y para ello es necesario tener un dominio acotado. Realizaremos un truncamiento del dominio que nos proporcionará un dominio de resolución acotado y, además, garantizará que la ecuación no degenera

Desarrollemos de forma breve los contenidos de cada uno de los capítulos que forman este trabajo:

El segundo capítulo se centra en la parte más puramente económica, pues sobre ella construiremos la teoría posterior. Se darán algunas definiciones que ayudarán a comprender los conceptos que aparecen más adelante, se hablará con cierto detalle de las opciones (qué son, qué tipos hay y se dará un ejemplo) y nos dedicaremos especialmente a construir el

camino que siguen los precios de los activos. Daremos, además, un lema crucial para llegar a la ecuación de Black-Scholes: el lema de Itô.

El proceso de modelado engloba el tercer capítulo, en que se ofrece previamente una introducción al concepto de arbitraje como motivación. Obtendremos la ecuación de Black-Scholes y sus condiciones finales y de contorno utilizando conceptos dados previamente, ya centrándonos en las opciones Europeas, cuyo tratamiento es ligeramente distinto al de las Americanas.

Para el problema obtenido para las opciones Europeas de compra (siendo, como ya comentamos, análogo el tratamiento cuando sean de venta), probaremos en el capítulo cuarto la existencia y unicidad de solución. Habrá previamente que dar unos resultados preliminares, realizar un truncamiento del dominio y semidiscretizar el problema en tiempo.

Tendremos que volver a discretizar el problema ya semidiscreto en tiempo. Lo haremos en el capítulo quinto, en el que reduciremos nuestro problema inicial a la resolución de una serie de sistemas de ecuaciones lineales. Utilizaremos el método de elementos finitos, que se desarrollará brevemente al inicio del capítulo.

Por último lugar, mediante un programa que se muestra en el apéndice y una función ya definida en Matlab, realizaremos las simulaciones necesarias para entender el comportamiento del precio de la opción en función a los diferentes parámetros que la componen y verificaremos que el método de elementos finitos constituye una buena aproximación para dicho precio.

En el curso de este trabajo se han seguido, esencialmente, el libro de Hull ([4]) para el capítulo 2, las transparencias de Vázquez Cendón ([5]) y el trabajo de Jiménez Terradillos ([7]) para el capítulo 3, la tesis de Suárez Taboada ([8]) para el capítulo 4 y los apuntes de Fernández ([9]) para el capítulo 6. También se han utilizado los apuntes de Casado Díaz ([6]) y el libro de Raviart y Thomas ([2]) para obtener algunos resultados teóricos de utilidad.

Capítulo 2

Conceptos previos al modelado

2.1. Definiciones básicas

En esta sección daremos una lista de definiciones (encontradas en [10]) que nos ayudarán a aclarar algunos conceptos que aparecerán en el desarrollo de este trabajo.

- **Activo:** Un activo es un recurso con valor que alguien posee con la intención de que genere un beneficio futuro. En contabilidad, representa todos los bienes y derechos de una empresa, adquiridos en el pasado y con los que esperan obtener beneficios futuros. Tienen el potencial de traer dinero a la empresa mediante su uso, su venta o su intercambio. Son ejemplos de activo un local, una furgoneta, las materias primas o los derechos de cobro.
- **Acción:** Una acción es un activo financiero que representa una parte alícuota del capital social de una sociedad anónima. Al propietario de una acción se le llama **accionista**.
- **Dividendo:** El dividendo es la proporción de ganancias o beneficios que una compañía reparte entre sus accionistas.
- **Derivado:** Un derivado financiero es un activo financiero cuyo valor se deriva de los cambios en otro activo, llamado activo subyacente.
- **Opción:** Una opción financiera es un derivado financiero que supone un contrato de compra o venta de un activo subyacente, el cual otorga el derecho al comprador de la opción de comprar (opción de compra - *call option*) o vender (opción de venta - *put option*) el activo subyacente acordado en un futuro acordado previamente. Cabe destacar que el comprador tiene el derecho de ejecutar lo dispuesto en el contrato. Al mismo tiempo, el vendedor está obligado a vender si el comprador ejercita su derecho.
- **Prima:** Se denomina prima a una cantidad de dinero dada a un individuo respondiendo a criterios de recompensa o incentivo para una acción en particular. En nuestro caso, al precio pagado para obtener el derecho de la opción.
- **Precio de ejercicio:** El precio de ejercicio (*strike*) es el precio al que se compra o vende un activo financiero (generalmente una opción financiera), y que ya viene definido por el emisor de esta opción.

- **Fecha de vencimiento:** La fecha de vencimiento (*expiring date*) es el año, mes, día y hora límite para cumplir una obligación contractual.
- **Volatilidad:** La volatilidad es el término que mide la variabilidad de las trayectorias o fluctuaciones de los precios de cualquier activo financiero en el mercado.
- **Tipo de interés:** El tipo de interés o tasa de interés es el precio del dinero, es decir, el precio a pagar por utilizar una cantidad de dinero durante un tiempo determinado.
- **Tendencia:** La tendencia es la trayectoria que siguen los precios.
- **Cartera:** Una cartera de inversión es aquella combinación de activos financieros en los que están depositados una cesta de activos financieros con la idea de generar una plusvalía. También se conoce como **portfolio**.

2.2. Interés libre de riesgo

El contenido de esta sección ha sido tomado de [11]. Toda inversión conlleva un riesgo, y la rentabilidad a obtener por dicha inversión debe estar ajustada a dicho riesgo. Cuanto mayor sea el riesgo de la inversión, mayor será la rentabilidad que los inversores exigirán en compensación. Para calcular que la rentabilidad obtenida se ajusta bien al riesgo asumido se utiliza el concepto de **prima de riesgo**.

La prima de riesgo es la rentabilidad extra que obtenemos para compensar el riesgo asumido. Pero para ello, debemos tomar como referencia un activo que se encuentre, o que sea considerado por la comunidad financiera, como **libre de riesgo**. La rentabilidad que nos ofrece este activo es la denominada **tasa libre de riesgo**. Sobre esta tasa se calcula la prima de riesgo.

Como su propio nombre nos indica, una tasa libre de riesgo es aquella rentabilidad obtenida por invertir en un activo que está considerado como libre de riesgo. Ahora bien, ¿qué activos están considerados libres de riesgo?

Esta valoración, en principio, es una valoración meramente teórica. Se supone que todas las inversiones tienen un componente de riesgo. Sin embargo, si invertimos en un activo que no cambie su rentabilidad durante toda su vida o duración (activo de renta fija), que tenga una mínima fluctuación de mercado y que sea de un emisor de reconocida solvencia (para que sea remota la probabilidad de que incumpla su promesa de pago), tenemos un activo que podríamos considerar como libre de riesgo.

Como norma general se utiliza el interés que pagan los Bonos del Estado, puesto que estos activos cumplen perfectamente las condiciones anteriormente descritas. El rendimiento que ofrecen los Bonos alemanes es lo que está considerado más cercano a la tasa libre de riesgo.

No obstante, esta no es la tasa libre de riesgo real, puesto que también tienen un mínimo componente de riesgo.

2.3. Activos. Procesos de Wiener

Cualquier variable cuyo valor cambie de un modo incierto a lo largo del tiempo se dice que sigue un *proceso estocástico*. Los procesos estocásticos se pueden clasificar en

procesos en tiempo discreto, si el valor de la variable cambia en momentos concretos, o en procesos en tiempo continuo, si esto ocurre en cualquier momento. También se distinguen los procesos de variable discreta, en los que la variable solo puede tomar determinados valores, o de variable continua, si puede tomar cualquier valor dentro de un determinado rango.

Vamos a desarrollar un proceso estocástico en tiempo y variable continuos para precios de activos. No obstante, se debe resaltar en primer lugar que, en la práctica, no se encuentran procesos de variable continua ya que los precios están restringidos a valores discretos (como los múltiplos del céntimo). Sin embargo, el modelo en variable continua es útil considerando la pequeña diferencia que hay entre estos valores.

2.3.1. La propiedad de Markov

Un *proceso de Markov* es un tipo particular de proceso estocástico en el que el valor presente es la única característica relevante para predecir el valor futuro. Se asume que los precios de los activos siguen procesos de Markov.

Estas predicciones futuras son inciertas y deben expresarse por medio de distribuciones de probabilidad. La propiedad de Markov implica que la distribución de probabilidad del precio del activo en cualquier tiempo futuro no depende del camino recorrido por el precio en el pasado.

La propiedad de Markov para precios de activos es consistente con las ineficiencias del mercado.

2.3.2. Procesos estocásticos en tiempo continuo. Procesos de Wiener

Consideremos una variable que sigue un proceso de Markov. Supongamos que las variaciones en su valor durante un año siguen una distribución $\Phi(0, 1)$, donde $\Phi(m, v)$ denota la distribución normal de media m y varianza v^2 . ¿Cuál es la distribución de probabilidad para un periodo de dos años? Para dar respuesta a esta pregunta utilizamos el siguiente resultado:

Teorema. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes que siguen distribuciones normales con medias μ_1, \dots, μ_n y varianzas $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$, respectivamente. Sea Y la variable aleatoria

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Entonces la media y la varianza de Y son, respectivamente,

$$\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2.$$

La demostración de este teorema puede ser consultada en [3] junto a otros resultados previos necesarios para la comprensión de la misma.

La variación del valor en dos años es una suma de dos distribuciones normales, cada una de media cero y varianza uno. Como la variable es de Markov, las dos distribuciones son independientes. Cuando sumamos dos distribuciones normales independientes, utilizando el teorema anterior, se obtiene una nueva distribución cuyas media y varianza son la suma de las medias y las varianzas de las distribuciones iniciales, respectivamente. Por tanto, en

un periodo de dos años seguirá una distribución $\Phi(0, \sqrt{2})$. Para un periodo de seis meses, tendremos una distribución $\Phi(0, \sqrt{0,5})$.

En general, los cambios en el valor durante un periodo de longitud T seguirán una distribución $\Phi(0, \sqrt{T})$. Para un periodo corto de tiempo Δt , tenemos la distribución normal $\Phi(0, \sqrt{\Delta t})$.

Los procesos que siguen este tipo de distribución se conocen como **procesos de Wiener**. Son un tipo particular de proceso de Markov con media cero y varianza uno por año y a veces se les llama *movimiento Browniano*.

Expresado formalmente, se dice que una variable z sigue un proceso de Wiener si cumple las siguientes dos propiedades:

- El cambio Δz durante un periodo corto de tiempo Δt es

$$\Delta z = \epsilon \sqrt{\Delta t},$$

donde ϵ sigue la distribución normal estándar, esto es, $\Phi(0, 1)$.

- Los valores de Δz en dos periodos de tiempo diferentes son independientes.

Se sigue de la primera propiedad que Δz sigue una distribución normal de media cero y desviación típica $\sqrt{\Delta t}$. La segunda propiedad implica que z es un proceso de Markov.

Usaremos la notación $dx = a dt$ cuando tomemos en $\Delta x = a \Delta t$ el límite $\Delta t \rightarrow 0$. Así, cuando se hace referencia a dz como un proceso de Wiener, estamos diciendo que Δz tiene las propiedades necesarias en el límite $\Delta t \rightarrow 0$.

2.3.3. Proceso de Wiener generalizado

Un proceso de Wiener generalizado para una variable x puede ser definido en términos de z como

$$dx = a dt + b dz,$$

con a y b constantes.

En la ecuación anterior, el término $a dt$ implica que el cambio medio de x por unidad de tiempo (*drift*) es a . Sin el término $b dz$, la ecuación queda como $dx = a dt$, lo cual implica

$$\frac{dx}{dt} = a$$

Integrando respecto a la variable temporal, tenemos

$$x = x_0 + at,$$

donde x_0 es el valor de x en el instante inicial. En un periodo de tiempo T , la variable x aumenta una cantidad aT .

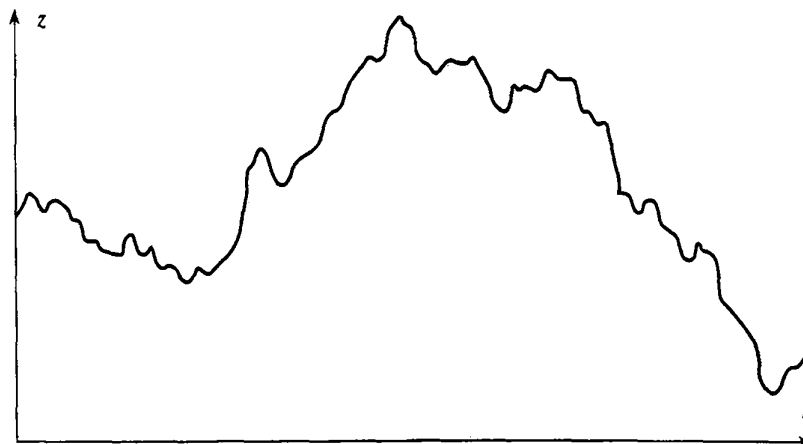
El término $b dz$ expresa el “ruido” o variabilidad del camino seguido por x , cuya cantidad es b veces un proceso de Wiener. En un intervalo de tiempo Δt , el cambio Δx del valor de x viene dado por

$$\Delta x = a \Delta t + b \epsilon \sqrt{\Delta t},$$

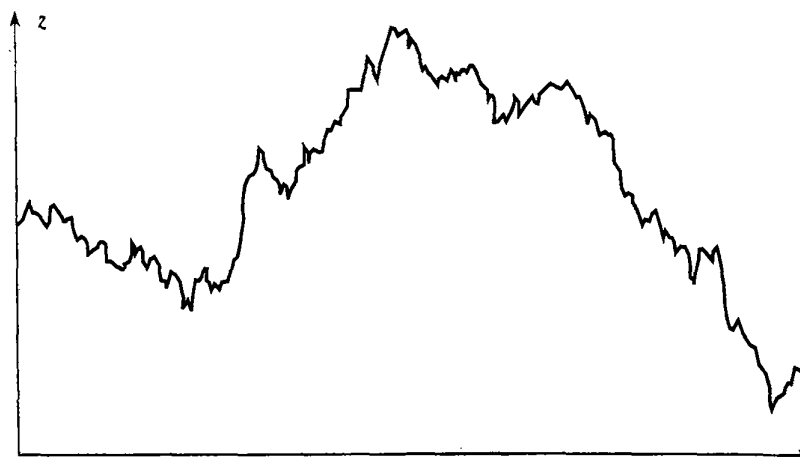
donde ϵ sigue la distribución normal estándar. Por tanto, Δx sigue una distribución normal de media $a \Delta t$ y desviación típica $b \sqrt{\Delta t}$.



Relatively large value of Δt



Smaller value of Δt



The true process obtained as $\Delta t \rightarrow 0$

Figura 2.1: Obtención de un proceso de Wiener (imagen extraída de [4])

Así, el proceso de Wiener generalizado $dx = adt + bdz$ sigue una distribución normal con un drift a y una tasa de varianza media anual b^2 .

Por último, vamos a considerar los **procesos de Itô**, que son procesos de Wiener generalizados en los que los parámetros a y b son funciones que dependen del activo subyacente x y del tiempo t . Es decir, son procesos de la forma

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$$

Tanto el drift como la tasa de varianza media anual son susceptibles a cambiar con el tiempo. En un intervalo pequeño de tiempo Δt , la variable experimenta un cambio

$$\Delta x = a(x, t)\Delta t + b(x, t)\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

2.3.4. El proceso para el precio de un activo

Veamos ahora el proceso estocástico usualmente utilizado por el precio de un activo que no paga dividendos.

Es tentador decir que el precio de dicho activo sigue un proceso de Wiener generalizado. Sin embargo, este modelo falla al no plasmar un aspecto fundamental del precio de los activos, que es el siguiente: el porcentaje de retorno esperado por el inversor para un activo es independiente del precio del mismo. Si un inversor pretende obtener un retorno del 14% anual cuando el precio del activo es de \$10, también pretenderá obtener un retorno del 14% cuando el precio del mismo activo sea de \$50.

Por tanto, asumir que el drift es constante es inapropiado y en su lugar asumimos que el retorno es constante. Si el precio del activo en un tiempo t es S , para un intervalo de tiempo Δt tenemos

$$\Delta S = \mu S \Delta t,$$

donde μ es la tasa de retorno esperado, y es constante por lo anterior.

En el límite, cuando $\Delta t \rightarrow 0$,

$$dS = \mu S dt$$

o

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

Integrando en el intervalo temporal $[0, T]$:

$$S_T = S_0 e^{\mu T},$$

donde S_0 y S_T son el precio del activo en los instantes inicial y final, respectivamente.

La ecuación anterior correspondería a un activo libre de riesgo, pues el retorno es siempre el mismo y viene dado por dicha fórmula. Sin embargo, ya hemos visto que en la práctica no existe ningún activo libre de riesgo, sino que presentan una determinada volatilidad. Una afirmación razonable es que la variabilidad del porcentaje de retorno en un periodo corto de tiempo Δt no está influida por el precio del activo. En otras palabras, un inversor tiene la misma incertidumbre en cuanto al retorno de un activo cuyo precio es \$10 que a otro de precio \$50.

De esta forma, el proceso estocástico que seguiría el precio del activo es

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz,$$

donde σ representa la volatilidad del activo. Esta ecuación es claramente la más usada para representar el comportamiento del precio de un activo.

2.4. Lema de Itô

Veremos posteriormente que el precio de una opción es una función del tiempo y del activo subyacente. Un resultado importante en este área fue demostrado por el matemático K. Itô en 1951 y es conocido como el *lema de Itô*.

Lema de Itô. Sea x una variable aleatoria que sigue un proceso de Itô de la forma

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$$

donde dz es un proceso de Wiener y a y b son funciones de x y t . Sea G una función continua y suficientemente regular, entonces

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz$$

donde dz es el mismo proceso de Wiener que se tenía anteriormente.

Demostración. Como G es regular, utilizando el polinomio de Taylor:

$$\begin{aligned} G(x_1, y_1) = & G(x_0, y_0) + \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)(y_1 - y_0) + \\ & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x_1 - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x_1 - x_0)(y_1 - y_0) + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y_1 - y_0)^2 \right] + \\ & o(\Delta x^3, \Delta y^3, \dots) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right] + o(\Delta x^3, \Delta y^3, \dots)$$

Por hipótesis, la variable x sigue un proceso estocástico de la forma $dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$ donde $dz = \epsilon \sqrt{dt}$. Esto nos permite reescribir la ecuación anterior como

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} \Delta x \Delta t + \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} (\Delta t)^2 \right] + o(\Delta x^3, \Delta y^3)$$

Se puede discretizar el proceso a

$$\Delta x = a(x, t)\Delta t + b(x, t)\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

o, simplificando los argumentos,

$$\Delta x = a\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

Por tanto

$$(\Delta x)^2 = a^2(\Delta t)^2 + b^2\epsilon^2\Delta t + 2ab\epsilon\sqrt{\Delta t}\Delta t$$

donde solo consideramos el segundo término y descartamos los otros dos por ser de orden mayor que uno en Δt .

Esto muestra que el término que contiene $(\Delta x)^2$ en la ecuación para ΔG no puede ser ignorado.

Como ϵ sigue una distribución normal estándar, su varianza es uno. Esto implica

$$E(\epsilon^2) - [E(\epsilon)]^2 = 1,$$

donde E denota el valor esperado. Como $E(\epsilon) = 0$, entonces $E(\epsilon^2) = 1$. El valor esperado de $\epsilon^2 \Delta t$, por tanto, es Δt . Se puede ver que la varianza de $\epsilon^2 \Delta t$ es de orden $(\Delta t)^2$ y, en consecuencia, podemos tratar $\epsilon^2 \Delta t$ como no estocástica e igual a su valor esperado, Δt , cuando Δt tiende a cero. De aquí concluimos que $(\Delta x)^2$ también se convierte en no estocástica e igual a $b^2 dt$ cuando Δt tiende a cero. Tomando límite se obtiene

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 dt$$

Sustituyendo dx por la expresión estocástica, se tiene

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz,$$

como se quería.

2.4.1. El camino lognormal

Si X es una variable aleatoria con distribución normal, entonces se dice que e^X sigue una distribución lognormal.

Vamos a utilizar ahora el lema de Itô aplicado a la función $G = \log(S)$. La función G verifica

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

Por tanto, mediante el lema de Itô se obtiene

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz$$

Como μ y σ son constantes, esta ecuación muestra que $G = \log(S)$ sigue un proceso de Wiener generalizado con drift $\mu - \sigma^2/2$ y tasa de varianza media anual σ^2 . El cambio en $\log(S)$ entre un tiempo inicial y un tiempo futuro T sigue, por tanto, una distribución normal de media $(\mu - \sigma^2/2)T$ y varianza $\sigma^2 T$.

$$\log(S_T) - \log(S_0) \sim \Phi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right]$$

$$\log(S_T) \sim \Phi \left[\log(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right]$$

$\log(S_T)$ sigue una distribución normal. Por tanto,

$$S_T = e^{\log(S_T)}$$

sigue una distribución lognormal.

El modelo que simula el comportamiento del precio de un activo que se desarrolla en este trabajo sigue un camino aleatorio lognormal.

2.5. Opciones

Como ya hemos comentado, una opción es un derivado financiero que supone un contrato de compra o venta de un activo subyacente. Las transacciones con opciones se realizan tanto en intercambios como en el mercados *over-the-counter* (extrabursátiles). Una *call option* otorga al comprador el derecho de comprar el activo subyacente por un cierto precio (*strike* o *exercise price*) en una determinada fecha (vencimiento, *maturity* o *expiration date*), mientras que una *put option* otorga el derecho a vender dicho activo subyacente.

Actualmente, el mayor mercado del mundo para intercambiar opciones es el *Chicago Board Options Exchange* (CBOE), creado en 1973, cuando la negociación se comenzó a realizar en un mercado oficial. Existen, además, muchos otros mercados en el mundo donde se negocian diferentes productos. Anteriormente a la creación del CBOE, todos los contratos se negociaban *over-the-counter*.

Debe enfatizarse que una opción da el derecho al poseedor (*holder*) a hacer algo. El poseedor no tiene la obligación de ejercer este derecho, y esto es lo que distingue a las opciones de otros productos financieros como los *forwards* o los *futures*. La otra parte del contrato, el *writer*, sí está obligada a vender o comprar el activo si el poseedor decide ejecutar la opción. También debe ser destacado que para la adquisición del derecho que otorga una opción hay que pagar una prima.

Se dice que el inversor que ha comprado la opción ha tomado una posición a largo plazo (*long position*), mientras que al otro lado está el *writer*, quien ha tomado una posición a corto plazo (*short position*). El *writer* recibe dinero en un principio, pero tiene potenciales obligaciones posteriormente. Su beneficio o pérdida es el opuesto al del comprador de la opción.

2.5.1. Opciones Europeas y Americanas

Las opciones que trataremos son las opciones Europeas, aunque estas no se intercambian tanto como las opciones Americanas, que constituyen la gran mayoría de inversiones. Esta clasificación no tiene nada que ver con los nombres atribuidos a las mismas.

La característica diferenciadora es que las opciones Europeas solo pueden ser ejecutadas en la fecha de vencimiento, mientras que las Americanas permiten hacerlo en cualquier momento entre la compra de la opción y el propio vencimiento. Las opciones Europeas son generalmente más fáciles de analizar, y algunas de las propiedades de las opciones Americanas se deducen frecuentemente de las propiedades de las Europeas.

Existen, además, las llamadas *opciones Bermudeas*, que permiten ser ejercidas en varios momentos concretos del tiempo comprendido entre la compra y el vencimiento, por lo que para la práctica son consideradas Americanas.

2.5.2. Un ejemplo de opción de compra

Supongamos que un inversor encarga a un *broker* adquirir una opción de compra de un producto X (póngase un contrato de abril de Intel) con un precio de ejercicio de \$20.00. El *broker* transmitirá estas instrucciones a un tradeador en el CBOE, quien encontrará a otro tradeador que quiera vender una opción de compra de un contrato de abril de Intel por el precio de ejercicio de \$20.00, y se acordará el precio.

| Strike (\$) | Calls | | | Puts | | |
|----------------|-----------------|---------------|---------------|-----------------|---------------|---------------|
| | Octubre 2006 | Enero 2007 | Abril 2007 | Octubre 2006 | Enero 2007 | Abril 2007 |
| 15.00 | 4.650 | 4.950 | 5.150 | 0.025 | 0.150 | 0.275 |
| 17.50 | 2.300 | 2.775 | 3.150 | 0.125 | 0.475 | 0.725 |
| 20.00 | 0.575 | 1.175 | 1.650 | 0.875 | 1.375 | 1.700 |
| 22.50 | 0.075 | 0.375 | 0.725 | 2.950 | 3.100 | 3.300 |
| 25.00 | 0.025 | 0.125 | 0.275 | 5.450 | 5.450 | 5.450 |

Cuadro 2.1: Precio de opciones de Intel, 12 de Septiembre de 2006 (Fuente CBOE)

Asumimos que la prima que pagamos para adquirir la opción es \$1.65, tal y como refleja la tabla. En los Estados Unidos, una opción es un contrato para comprar 100 participaciones, por lo que el inversor debe remitir \$165 al *broker*, y el acuerdo se alcanzará cuando esta cantidad pase de una parte a la otra.

Por tanto, nuestro inversor ha obtenido por \$165 el derecho a comprar 100 participaciones de Intel por el precio de \$20.00 cada una, es decir, por un precio total de \$2000. Si el precio de las participaciones de Intel no supera los \$20.00 antes del 21 de abril, no tiene sentido ejecutar la opción y el inversor perdería \$165. Por otro lado, en el caso en el que sí superaran los \$20.00, el inversor ejecutaría su derecho para luego conseguir un beneficio. Supongamos que el precio de una participación es \$30. Entonces el inversor obtendría un beneficio de \$10 por cada participación, \$1000 en total. El beneficio neto sería de $\$1000 - \$165 = \$865$.

Mediante un proceso análogo, se evalúa el beneficio neto que produce la adquisición de una opción de venta.

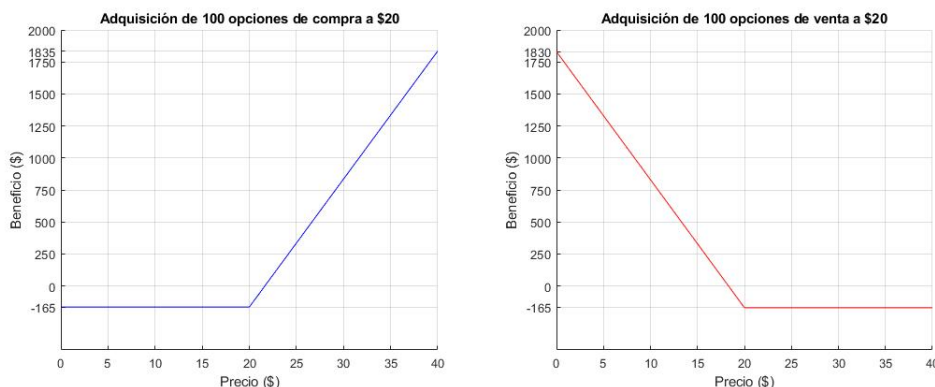


Figura 2.2: Beneficio neto obtenido por la adquisición de un paquete de 100 opciones de compra (izquierda) o de venta (derecha) de Intel a \$20 para abril del 2007 según la tabla anterior

2.5.3. Especulación

Una de las principales utilidades de las opciones es la especulación. Cuando un inversor piensa que el precio de un activo aumentará, adquiere participaciones pensando en un beneficio futuro. Sin embargo, existe la posibilidad de que el activo baje de precio y el

inversor pierda dinero. Por tanto, el inversor está especulando.

Veamos un ejemplo de especulación con opciones, que son el objeto de estudio de este trabajo.

Volvamos a suponer que trabajamos con participaciones de contrato de Intel. Supongamos que actualmente el precio de una participación es de \$20 y que se encuentran a la venta por un precio unidad \$1 opciones de compra con precio de ejercicio \$22.50 y vencimiento en dos meses.

Un especulador posee \$2000 que está dispuesto a invertir, por lo que decide comprar 20 paquetes de 100 participaciones. Si se diera el caso de que la intuición del especulador es correcta y el precio de cada participación aumentase a \$27 al cabo de esos dos meses, la inversión del especulador resultaría en un beneficio de

$$2000 * (\$27 - \$20) = \$14000,$$

que restado a los \$2000 gastados en la compra de las opciones, resulta en un beneficio neto de

$$\$14000 - \$2000 = \$12000.$$

Si, por el contrario, el precio de la participación bajara, el especulador no ejecutaría su opción de compra y perdería los \$2000 de la compra de las opciones.

Capítulo 3

Modelización Matemática

Una vez dados todos los conceptos económicos y financieros necesarios para comprender el curso del trabajo, pasamos a introducir una serie de conceptos y posteriores resultados que nos permitirán llegar a la ecuación de Black-Scholes, a partir de la cual construiremos nuestro problema. Vamos a tratar el caso particular de las opciones Europeas, en las que nos centraremos de aquí en adelante.

3.1. Arbitraje

Empezamos por introducir el concepto financiero de arbitraje, fundamental para entender la motivación que nos lleva a realizar todo el proceso de modelado posterior en busca de un beneficio económico.

El arbitraje es una estrategia financiera que consiste en aprovechar la diferencia de precio entre diferentes mercados sobre un mismo activo financiero para obtener un beneficio económico, normalmente sin riesgo.

Para realizar arbitraje se realizan operaciones complementarias de compra y venta al mismo tiempo, aprovechando la divergencia de precios. Primordialmente, consiste en posicionarse en corto (vender) en el mercado en el que el activo tiene mayor precio y en largo (comprar) en el que tiene menor precio. El beneficio vendría dado por la diferencia entre ambos mercados. Por tanto:

- Para poder realizar arbitraje es necesario acudir a, al menos, dos mercados situados en diferentes lugares (como el de Chicago y el de Frankfurt) o de distinto tipo (como mercados de derivados o mercados al contado).
- El arbitraje es posible debido a ineficiencias en los mercados. Cuanto más eficiente sea un mercado, más difícil será realizar el arbitraje.
- Habrá casos en los que no se pueda realizar arbitraje, en los cuales diremos que se cumple la condición de no arbitraje.

Las operaciones de arbitraje tienden a regular el precio de los mercados: en el mercado en el que se vende el precio del activo baja pues aumenta la oferta y en el mercado en el que se compra el precio del activo sube pues aumenta la demanda. Aquí se ha utilizado una ley fundamental de economía: la ley de la oferta y la demanda.

3.2. Valoración de las opciones Europeas

En primer lugar, introducimos la notación que se utilizará de aquí en adelante:

- Por V denotaremos al valor de una opción. En función de si la opción es de compra o de venta, cuando haya que especificar, las denotaremos por C y P , respectivamente.
- Por S denotaremos al precio del activo.
- Por σ denotaremos a la volatilidad del activo.
- Por E denotaremos al precio de ejercicio.
- Por T denotaremos al tiempo de vencimiento.
- Por r denotaremos a la tasa de interés libre de riesgo.

Una opción de compra tanto Europea como Americana otorga al comprador el derecho de comprar el producto en el tiempo de vencimiento. Ocurra lo que ocurra, la opción nunca puede valer más que el precio actual del activo, esto es, $C_0 \leq S_0$, siendo S_0 el valor del activo en el momento actual. Análogamente ocurre con las opciones de venta.

Si hemos adquirido una opción Europea de compra cuyo precio de ejercicio es E , una vez llegados al vencimiento T , debemos decidir si ejecutarla o no. Llamamos S_T al precio del activo en el vencimiento. Podemos encontrarnos dos casos:

- Si $S_T > E$, tiene sentido ejercer la opción. Si posteriormente vendemos el activo, recibiremos una cantidad S_T habiendo pagado una cantidad menor E por él. Por tanto, se obtiene un beneficio $S_T - E$.
- Si $S_T \leq E$, no se ejercería la opción, pues supondría una pérdida. La opción expira y no obtenemos beneficio.

Por tanto, en el vencimiento, el valor de la opción de compra viene dado por la siguiente expresión:

$$C(T, S) = \max(S - E, 0)$$

Si, por otro lado, hemos adquirido una opción Europea de venta cuyo precio de ejercicio es E , una vez llegados al vencimiento T , debemos decidir si ejecutarla o no. Podemos encontrarnos dos casos:

- Si $S_T < E$, tiene sentido ejercer la opción. Podemos vender el activo por una cantidad E cuando en el mercado se vende a S_T . Por tanto, se obtiene un beneficio $E - S_T$.
- Si $S_T \geq E$, no se ejercería la opción, pues supondría una pérdida. La opción expira y no obtenemos beneficio.

Por tanto, en el vencimiento, el valor de la opción de compra viene dado por la siguiente expresión:

$$P(T, S) = \max(E - S, 0)$$

3.3. Paridad compra-venta

La paridad de compra-venta es una relación entre las opciones de compra y de venta de un activo que consiste en tomar una posición larga (comprar) una opción de compra de venta de un activo y una posición corta (vender) una opción de compra con igual vencimiento T y precio de ejercicio E para ambas opciones.

Denotando el valor de esta cartera en el tiempo t por Π_t , tenemos

$$\Pi_t = S_t + P_t - C_t,$$

donde P_t y C_t son los valores de las opciones de venta y compra, respectivamente, en el tiempo t . En el vencimiento, el valor de la cartera es

$$\Pi_T = S_T + P_T - C_T = S_T + \max(E - S_T, 0) - \max(S_T - E, 0).$$

Por tanto:

$$\Pi_T = \begin{cases} S_T + (E - S_T) - 0 = E & \text{si } S_T \leq E \\ S_T + 0 - (S_T - E) = E & \text{si } S_T \geq E \end{cases}$$

Se observa que el payoff del portfolio siempre es el mismo, E , siendo indiferente al valor de S_T . Ahora, ¿cuánto debemos pagar por dicho portfolio, sabiendo que garantiza una cantidad E en $t = T$? Por ser r la tasa de interés libre de riesgo,

$$\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} = r dt.$$

Resolviendo esta ecuación diferencial ordinaria de variables separables en el intervalo $[t, T]$ y utilizando $\Pi_T = E$, se obtiene

$$\Pi_t = Ee^{-r(T-t)},$$

esto es,

$$S_t + P_t - C_t = Ee^{-r(T-t)}$$

y, por tanto,

$$S + P(t, S) - C(t, S) = Ee^{-r(T-t)}, \quad \forall S \geq 0.$$

En el caso en el que haya cobro de dividendos, razonamos de forma análoga, incluyendo estos y partiendo de otros principios de tipo económico para definir el portfolio.

La paridad de compra-venta es un ejemplo de un proceso de eliminación del riesgo.

3.4. La ecuación de Black-Scholes

Vamos a considerar ciertas las siguientes hipótesis:

- El precio del activo sigue un camino lognormal.
- El tipo de interés libre de riesgo, r , y la volatilidad del activo, σ , son funciones conocidas del tiempo.
- No se consideran los costes de transacción (mercado sin fricciones) ni fiscales.

- Ausencia de arbitraje: todas las carteras libres de riesgo tienen el mismo tipo de interés r .
- Se puede comprar y vender una cantidad no necesariamente entera de activos financieros en tiempo continuo (mercado continuo).
- En principio, supondremos que el activo no paga dividendos.
- Mercado con posiciones a corto y largo plazo: se pueden vender activos que no se poseen garantizando su reintegro a vencimiento.

Como el valor del activo, S , sigue el camino aleatorio lognormal:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (3.1)$$

El valor de la opción, V , depende de los valores de S y del tiempo, t . Aplicamos el lema de Itô a la función $V(t,S)$:

$$dV = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dz \quad (3.2)$$

Construimos una nueva cartera combinando una opción V y un número Δ de activos S . Esta cartera tiene valor

$$\pi = V - \Delta S. \quad (3.3)$$

Utilizando el cálculo estocástico, y aplicando (3.1) y (3.2) a la igualdad (3.3) tenemos:

$$\begin{aligned} \pi = V - \Delta S &\Rightarrow d\pi = dV - \Delta dS \Rightarrow \\ d\pi &= \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta S \right) dt + \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dz \end{aligned}$$

La cartera es libre de riesgo si y sólo si eliminamos la componente aleatoria, esto es, si elegimos $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$. En este caso:

$$d\pi = \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt$$

Como π es libre de riesgo y no existe el arbitraje, invertir una cantidad π nos proporciona un crecimiento de $r\pi t$ en un tiempo dt . Tenemos:

$$d\pi = r\pi dt = r(V - \Delta S) dt = r \left(V - S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt$$

Igualando las expresiones anteriores:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} = r \left(V - S \frac{\partial V}{\partial S} \right)$$

Despejando, se obtienen las llamadas **ecuaciones de Black-Scholes**:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (3.4)$$

Podemos observar que la tendencia del activo, μ , no influye en el valor de la opción, y que este viene dado por una ecuación en derivadas parciales de tipo parabólico.

3.4.1. Black-Scholes para un activo que paga dividendos

Hemos visto qué forma tiene la ecuación de Black-Scholes cuando el activo no paga dividendos. Veamos ahora el caso en el que sí lo hace. Asumimos que la cantidad y el tiempo en el que se pagan los dividendos pueden ser predecidos, lo cual no es nada irrazonable para opciones que tengan un periodo corto de vida (mientras que para las que tienen un vencimiento mayor se da por supuesto). En la fecha en la que se paga el dividendo el precio del activo debe reducirse en una cantidad igual al valor del mismo.

Por tanto, si el valor del dividendo es constante, la ecuación de Black-Scholes queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D_0)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

donde D_0 representa el valor del dividendo.

Para que el problema matemático asociado a esta ecuación esté bien planteado, debe complementarse con condiciones de contorno y, en este caso, con condiciones finales. Estas condiciones finales son distintas en función del tipo de opción que se quiera utilizar. En las secciones siguientes vamos a detallar estas condiciones en función del tipo de opción.

Desde el punto de vista matemático, las opciones Europeas y Americanas son distintas ya que corresponden a la resolución de ecuaciones e inecuaciones, respectivamente. En este estudio nos centramos en la resolución matemática de opciones Europeas.

3.5. Condiciones Finales

Opciones Europeas

Recordemos que las opciones Europeas son aquellas que únicamente pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento. Las condiciones finales que completan el problema son distintas dependiendo si estamos hablando de opciones de compra o de venta.

Opciones de compra

Como ya vimos en la sección (3.2), el valor de una opción Europea de compra en el tiempo T viene dado por $C(T, S) = \max(S - E, 0)$. Por tanto, el problema a resolver será el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 & \text{en } D = [0, T] \times [0, \infty) \\ C(T, S) = \max(S - E, 0) & \text{si } S > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Si, además, añadimos dividendos, el problema queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - D_0)S \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 & \text{en } D = [0, T] \times [0, \infty) \\ C(T, S) = \max(S - E, 0) & \text{si } S > 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Se puede observar que (3.5) es el caso particular de (3.6) en el que $D_0 = 0$.

Opciones de venta

En este caso, el valor de la opción en el vencimiento T viene dado por $P(T, S) = \max(E - S, 0)$. Así, el problema a resolver sería:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0 & \text{en } D = [0, T] \times [0, \infty) \\ P(T, S) = \max(E - S, 0) & \text{si } S > 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Y considerando que hay dividendos tendríamos:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + (r - D_0)S \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0 & \text{en } D = [0, T] \times [0, \infty) \\ P(T, S) = \max(E - S, 0) & \text{si } S > 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Opciones Americanas

Cuando tratamos con opciones Americanas, recordemos que la opción puede ser ejercida antes de la fecha de vencimiento. Por poner un ejemplo, para opciones Americanas de venta, la condición final se escribe como por $P(T, S) \geq \max(E - S, 0)$. En este trabajo no contemplamos este tipo de opciones, debido a que el tratamiento matemático es distinto. Concretamente, para resolver este tipo de problemas, tenemos que utilizar técnicas específicas de resolución tanto teóricas como numéricas para inecuaciones variacionales.

3.6. Condiciones de Contorno

En primer lugar, veamos cuáles son las condiciones de contorno en el caso en el que el activo no paga dividendos. Si $S = 0$, la ecuación de Black-Scholes se simplifica a

$$\frac{dV}{dt}(t, 0) = rV(t, 0).$$

Tenemos, por tanto, una ecuación diferencial ordinaria de tipo lineal. Resolviendo en $[t, T]$, se obtiene

$$V(t, 0) = V(T, 0)e^{-r(T-t)}.$$

Como $C(T, 0) = \max(-E, 0) = 0$, concluimos $C(t, 0) = 0$. Además,

$$P(t, 0) = P(T, 0)e^{-r(T-t)} = \max(E, 0)e^{-r(T-t)} = Ee^{-r(T-t)}.$$

Por otra parte, cuanto mayor sea el valor que toma S , menor es la probabilidad de que una venta llegue a ejercerse. Así,

$$P(t, S) \rightarrow 0 \text{ cuando } S \rightarrow +\infty$$

y utilizando la paridad de compra-venta nos lleva también a que

$$C(t, S) - (S - Ee^{-r(T-t)}) \rightarrow 0 \text{ cuando } S \rightarrow +\infty,$$

o lo que es lo mismo,

$$C(t, S) \approx S - Ee^{-r(T-t)} \text{ cuando } S \rightarrow +\infty.$$

En el caso en el que se paguen dividendos, la ecuación de Black-Scholes al tomar $S = 0$ sigue siendo

$$\frac{dV}{dt}(t, 0) = rV(t, 0)$$

y se sigue que la función debe verificar

$$V(t, 0) = V(T, 0)e^{-r(T-t)}.$$

De aquí vuelven a salir las condiciones

$$C(t, 0) = 0$$

$$P(t, 0) = Ee^{-r(T-t)}.$$

Podemos volver a realizar la misma interpretación para afirmar

$$P(t, S) \rightarrow 0 \text{ cuando } S \rightarrow +\infty$$

y, utilizando la paridad de compra-venta, en este caso se obtiene

$$C(t, S) \approx Se^{D_0(T-t)} - Ee^{-r(T-t)} \text{ cuando } S \rightarrow +\infty.$$

Capítulo 4

Análisis Matemático del Problema

En este capítulo vamos a estudiar, desde el punto de vista matemático, el problema completo.

Vamos a centrarnos en el caso de que tengamos opciones Europeas de compra. El caso de opciones de venta es completamente análogo, dado que se trata de la misma ecuación (solo cambia la condición final, pero es del mismo tipo). Cuando la opción no pague dividendos, bastará tomar $D_0 = 0$ en todos los razonamientos posteriores.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - D_0)S \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \quad \text{en } D = [0, T] \times [0, \infty) \\ C(T, S) = \max(S - E, 0) \quad \text{si } S > 0 \\ C(t, S) \simeq Se^{-D_0(T-t)} - Ee^{-r(T-t)}, \quad t \in [0, T], S \rightarrow \infty \\ C(t, 0) = 0, \quad t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Desde el punto de vista matemático, tratamos de resolver una ecuación en derivadas parciales de tipo parabólico.

En la primera sección nos ocupamos de recordar algunos resultados preliminares que han sido estudiados en las asignaturas de Análisis Funcional y Ecuaciones en Derivadas Parciales y Análisis Numérico de las Ecuaciones Diferenciales en el grado, que nos serán útiles para el estudio del problema objeto del trabajo. Posteriormente, plantearemos el problema y realizaremos un truncamiento del dominio y una semidiscretización en tiempo para transformar nuestro problema en otro equivalente en el que podamos probar la existencia y unicidad de solución.

4.1. Resultados Preliminares

Espacios de Sobolev. Teorema de Lax-Milgram

En esta sección vamos a ver una serie de definiciones y resultados que nos serán útiles para probar que los problemas planteados tienen una única solución. Estos conceptos, así como las demostraciones de los resultados están extraídos de los conceptos estudiados en las asignaturas antes citadas ([6], [2]).

Definición. Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, se definen los espacios $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$ como

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medibles} : \int_{\Omega} |u|^2 dS < \infty \right\}$$

$$H^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) : \partial_i u \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, N \} = \{ u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in (L^2(\Omega))^N \}$$

Al espacio $H^1(\Omega)$ se le conoce como espacio de Sobolev y se le dota de la siguiente norma:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N}^2},$$

donde

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 dS \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema. El espacio $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con la norma anteriormente definida.

Teorema de trazas. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado con frontera regular que denotamos por $\partial\Omega$. Entonces existe un operador lineal y continuo (traza) $T : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ tal que $Tu = u|_{\partial\Omega} \forall u \in H^1(\Omega)$.

Definición. Definimos el espacio $H_0^1(\Omega)$ como el $Ker(T)$, es decir,

$$H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) : Tu = 0 \}.$$

Por abuso de notación, normalmente se define

$$H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ en } \partial\Omega \},$$

entendiendo que quiere decir que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ en el sentido de la traza.

Nota. La aplicación traza es inyectiva pero no sobreyectiva, es decir, la imagen de T no rellena todo $L^2(\partial\Omega)$. A su imagen se le denota por $H^{1/2}(\partial\Omega)$, de manera que, si tenemos una función g que está en $L^2(\partial\Omega)$, no hay garantías de que exista una función en $H^1(\Omega)$ tal que su traza sea la función g . Para que este resultado sea cierto la función g debe pertenecer a $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Teorema. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio con frontera regular, se define la norma $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ en $H_0^1(\Omega)$ como

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N}.$$

Entonces, esta norma es equivalente a la norma de $H^1(\Omega)$ sobre $H_0^1(\Omega)$.

Observemos que esta norma es una seminorma en $H^1(\Omega)$, ya que no satisface la primera propiedad, es decir, si la norma es cero la función es cero.

En último lugar, vamos a dar una serie de definiciones previas al teorema de Lax-Milgram, que será la herramienta que usaremos para probar la existencia y unicidad de solución de los problemas que nos encontraremos una vez realizada una semidiscretización en tiempo.

Definición. Sea H un espacio de Hilbert con una norma $\|\cdot\|$, y consideramos las formas $l : H \rightarrow \mathbb{R}$ y $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, entonces:

- Se dice que l es lineal si $l(\alpha u + \beta v) = \alpha l(u) + \beta l(v)$, $\forall u, v \in H$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Se dice que l es continua si $\exists C > 0 : l(u) \leq C\|u\|$, $\forall u \in H$.
- Se dice que a es bilineal si $a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v)$ y $a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha a(u, v_1) + \beta a(u, v_2)$, $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in H$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Se dice que a es continua si $\exists M > 0 : a(u, v) \leq M\|u\|\|v\|$, $\forall u, v \in H$.
- Se dice que a es coercitiva si $\exists \alpha > 0 : a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$, $\forall u \in H$.

Teorema de Lax-Milgram. Sean H un espacio de Hilbert, $l : H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal y continua y $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y coercitiva, entonces existe un único elemento $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H.$$

4.2. Planteamiento del problema

Consideramos el problema (4.1) de opciones europeas de compra que pagan dividendos. Nuestro objetivo en primer lugar es probar que el problema para C posee una única solución en algún sentido.

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - D_0)S \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 & \text{en } D = [0, T] \times [0, \infty) \\ C(T, S) = \max(S - E, 0) & \text{si } S > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

En este caso añadimos las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{cases} C(t, S) \simeq S e^{-D_0(T-t)} - E e^{-r(T-t)}, & t \in [0, T], S \rightarrow \infty \\ C(t, 0) = 0, & t \in [0, T] \end{cases} \quad (4.3)$$

Hemos visto anteriormente que toda inversión conlleva un riesgo, por lo que vamos a descartar el caso $\sigma = 0$, en el que tenemos una ecuación en derivadas parciales de tipo hiperbólico, ya que no vamos a tratar con activos sin riesgo.

El caso $\sigma \neq 0$, que es el que se tratará, corresponde a una ecuación en derivadas parciales de tipo parabólico, ecuaciones que sabemos que tienen una única solución en el sentido clásico. Este resultado puede encontrarse en [8], (página 23).

En primer lugar vamos a hacer un cambio de variable en la variable tiempo, para pasar de condiciones finales a condiciones iniciales. Elegimos $t^* = T - t$, que implica $\partial t^* = -\partial t$. Si llamamos

$$C^*(S, t^*) := C(S, T - t),$$

se tiene

$$\frac{\partial C^*}{\partial t} = \frac{\partial C^*}{\partial t^*} \frac{\partial t^*}{\partial t} = -\frac{\partial C^*}{\partial t^*}$$

Así, (4.2) y (4.3) se transforman en

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - (r - D_0)S \frac{\partial C}{\partial S} + rC = 0 & \text{en } D = [0, T] \times [0, \infty) \\ C(0, S) = \max(S - E, 0) & \text{si } S > 0 \\ C(t, S) \simeq Se^{-D_0 t} - Ee^{-rt} & \text{si } t \in [0, T], S \rightarrow \infty \\ C(t, 0) = 0 & \text{si } t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (4.4)$$

donde por simplificar la notación hemos omitido los superíndices *.

Antes de discretizar el problema, observamos que el dominio de resolución de la ecuación parabólica es no acotado. Es por ello que lo primero que vamos a hacer es realizar un truncamiento del dominio para tener un dominio acotado.

Truncamiento del dominio

Realizaremos un truncamiento del dominio por dos motivos:

- El dominio de resolución no es acotado.
- La ecuación se degenera cuando nos acercamos a cero, ya que el término de disipación tiende a cero.

Como $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k}, k \right) = (0, +\infty)$, elegimos un k lo suficientemente grande y estudiamos el problema en el intervalo $(\frac{1}{k}, k)$. Las ecuaciones a resolver entonces son:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - (r - D_0)S \frac{\partial C}{\partial S} + rC = 0 & \text{en } D = [0, T] \times \left(\frac{1}{k}, k \right) \\ C(0, S) = \max(S - E, 0) & \text{si } S \in \left(\frac{1}{k}, k \right) \\ C(t, k) = ke^{-D_0 t} - Ee^{-rt} & \text{si } t \in [0, T] \\ C(t, 0) = 0 & \text{si } t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (4.5)$$

4.3. Semidiscretización en tiempo

Consideramos una partición de $[0, T]$ con $N+1$ puntos uniformemente repartidos con paso $h = \frac{T}{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, y aproximamos la derivada en tiempo mediante el método de Euler:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t}$$

El problema semidiscreto consiste en resolver N ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } C^0 = \max(S - E, 0) \quad \forall S \in \left(\frac{1}{k}, k \right) \\ \text{Conocido } C^n, \text{ calcular } C^{n+1} \text{ tal que} \\ -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C^{n+1}}{\partial S^2} - (r - D_0)S \frac{\partial C^{n+1}}{\partial S} + \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) C^{n+1} = \frac{C^n}{\Delta t} \\ C^{n+1}(0) = 0 \\ C^{n+1}(k) = ke^{-D_0 t_{n+1}} - Ee^{-rt_{n+1}} =: g(t_{n+1}) \end{array} \right.$$

Para cada etapa de tiempo, por tanto, tenemos que resolver una ecuación en derivadas parciales de tipo elíptico, con condiciones de contorno de tipo Dirichlet. Para poder aplicar el teorema de Lax-Milgram (que nos proporcionará la existencia de solución) tenemos que hacer un levantamiento de los datos en la frontera. Si llamamos Γ a la frontera de $[\frac{1}{k}, k]$ y definimos la función

$$\tilde{g}(t_{n+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } S = \frac{1}{k} \\ g(t_{n+1}) & \text{si } S = k. \end{cases}$$

La función $\tilde{g} \in H^{1/2}(\frac{1}{k}, k)$. Por el teorema de traza, existe $G^{n+1} \in H^1(\frac{1}{k}, k)$ tal que $G^{n+1}|_{\Gamma} = \tilde{g}$. Busco $C^{n+1} = w^{n+1} + G^{n+1}$ y así

$$C^{n+1}|_{\Gamma} = w^{n+1}|_{\Gamma} + G^{n+1}|_{\Gamma} = w^{n+1}|_{\Gamma} + \tilde{g} = w^{n+1}|_{\Gamma} + C^{n+1}|_{\Gamma} \Rightarrow w^{n+1}|_{\Gamma} = 0.$$

Veamos cuál es el problema que satisface la función w^{n+1} :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 w^{n+1}}{\partial S^2} - (r - D_0)S \frac{\partial w^{n+1}}{\partial S} + \left(r + \frac{1}{\Delta t}\right) w^{n+1} = F(w^n, G^n, G^{n+1}) \\ w^{n+1}\left(\frac{1}{k}\right) = w^{n+1}(k) = 0, \end{cases}$$

donde

$$F(w^n, G^n, G^{n+1}) = \frac{w^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 G^{n+1}}{\partial S^2} + (r - D_0)S \frac{\partial G^{n+1}}{\partial S} - rG^{n+1} - \frac{G^{n+1} - G^n}{\Delta t}$$

en el que w^n , G^n y G^{n+1} son datos conocidos.

4.4. Existencia y Unicidad de solución

Vamos a construir la formulación variacional de este problema con el objetivo de probar su existencia y unicidad de solución mediante el teorema de Lax-Milgram. Para ello, tomamos $v \in H_0^1(\frac{1}{k}, k)$, multiplicamos la ecuación por v e integramos en $(\frac{1}{k}, k)$. Aplicamos la fórmula de integración por partes al primer término:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{k}}^k S^2 \frac{\partial^2 w^{n+1}}{\partial S^2} v \, dS &= \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{\partial^2 w^{n+1}}{\partial S^2} (S^2 v) \, dS = \left\{ \begin{array}{l} u = S^2 v \Rightarrow du = (2Sv + S^2 \frac{\partial v}{\partial S}) dS \\ dv = \frac{\partial^2 w^{n+1}}{\partial S^2} dS \Rightarrow v = \frac{\partial w^{n+1}}{\partial S} \end{array} \right\} \\ &= S^2 v \frac{\partial w^{n+1}}{\partial S} \Big|_{\frac{1}{k}}^k - \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{\partial w^{n+1}}{\partial S} (2Sv + S^2 \frac{\partial v}{\partial S}) \, dS \\ &= - \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{\partial w^{n+1}}{\partial S} \left(2Sv + S^2 \frac{\partial v}{\partial S} \right) \, dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{k}}^k -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 w^{n+1}}{\partial S^2} v \, dS &= \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial w^{n+1}}{\partial S} 2Sv \, dS + \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial w^{n+1}}{\partial S} \frac{\partial v}{\partial S} \, dS = \\ &= \int_{\frac{1}{k}}^k \sigma^2 \frac{\partial w^{n+1}}{\partial S} Sv \, dS + \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial w^{n+1}}{\partial S} \frac{\partial v}{\partial S} \, dS \end{aligned}$$

Entonces, la formulación variacional asociada al problema es:

$$(FV) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } w^{n+1} \in H_0^1\left(\frac{1}{k}, k\right) \text{ tal que} \\ \int_{\frac{1}{k}}^k (\sigma^2 - r + D_0) S \frac{\partial w^{n+1}}{\partial S} v dS + \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial w^{n+1}}{\partial S} \frac{\partial v}{\partial S} dS + \\ \int_{\frac{1}{k}}^k \left(r + \frac{1}{\Delta t}\right) w^{n+1} v dS = \int_{\frac{1}{k}}^k F(w^n, G^n, G^{n+1}) v dS \quad \forall v \in H_0^1\left(\frac{1}{k}, k\right) \end{array} \right.$$

Teorema. Supongamos que $\Delta t < \frac{2}{\sigma^2 + D_0 - 3r}$ si $\sigma^2 + D_0 - 3r > 0$ y Δt cualquiera en otro caso. Entonces el problema (FV) tiene una única solución.

Nota. La condición sobre Δt nos indica que, cuanto mayores sean la volatilidad y el valor del dividendo, más precisos debemos ser al discretizar en tiempo (se tendrá que tomar más puntos). Por el contrario, al aumentar el valor de la tasa de interés libre de riesgo, siempre y cuando el valor de la expresión se mantenga positivo, también aumenta el rango de valores que podemos darle a Δt .

Demostración del teorema. Probemos que se cumplen las condiciones necesarias para aplicar el teorema de Lax-Milgram. En primer lugar, sabemos que $H_0^1\left(\frac{1}{k}, k\right)$ es un espacio de Hilbert con la norma de $H^1\left(\frac{1}{k}, k\right)$. Definimos las formas:

$$a(w, v) = \int_{\frac{1}{k}}^k (\sigma^2 - r + D_0) S \frac{\partial w}{\partial S} v dS + \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial w}{\partial S} \frac{\partial v}{\partial S} dS + \int_{\frac{1}{k}}^k \left(r + \frac{1}{\Delta t}\right) w v dS$$

$$l(v) = \int_{\frac{1}{k}}^k F(w^n, G^n, G^{n+1}) v dS$$

Ambas formas son lineales por la linealidad de la derivada y de la integral. Para estudiar la continuidad, acotamos cada término:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{1}{k}}^k (\sigma^2 - r + D_0) S \frac{\partial w}{\partial S} v dS \right| &\leq k |\sigma^2 - r + D_0| \int_{\frac{1}{k}}^k \left| \frac{\partial w}{\partial S} v \right| dS \\ &\leq k |\sigma^2 - r + D_0| \left(\int_{\frac{1}{k}}^k \left(\frac{\partial w}{\partial S} \right)^2 dS \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{1}{k}}^k v^2 dS \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= k |\sigma^2 - r + D_0| \left\| \frac{\partial w}{\partial S} \right\|_{L^2\left(\frac{1}{k}, k\right)} \|v\|_{L^2\left(\frac{1}{k}, k\right)} \\ &\leq k |\sigma^2 - r + D_0| \|w\|_{H^1\left(\frac{1}{k}, k\right)} \|v\|_{H^1\left(\frac{1}{k}, k\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial w}{\partial S} \frac{\partial v}{\partial S} dS \right| &\leq \frac{\sigma^2 k^2}{2} \left(\int_{\frac{1}{k}}^k \left(\frac{\partial w}{\partial S} \right)^2 dS \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{1}{k}}^k \left(\frac{\partial v}{\partial S} \right)^2 dS \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sigma^2 k^2}{2} \left\| \frac{\partial w}{\partial S} \right\|_{L^2\left(\frac{1}{k}, k\right)} \left\| \frac{\partial v}{\partial S} \right\|_{L^2\left(\frac{1}{k}, k\right)} \\ &\leq \frac{\sigma^2 k^2}{2} \|w\|_{H^1\left(\frac{1}{k}, k\right)} \|v\|_{H^1\left(\frac{1}{k}, k\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\frac{1}{k}}^k \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) wv \, dS \right| &\leq \left| r + \frac{1}{\Delta t} \right| \left(\int_{\frac{1}{k}}^k (w)^2 \, dS \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{1}{k}}^k v^2 \, dS \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left| r + \frac{1}{\Delta t} \right| \|w\|_{L^2(\frac{1}{k},k)} \|v\|_{L^2(\frac{1}{k},k)} \\
&\leq \left| r + \frac{1}{\Delta t} \right| \|w\|_{H^1(\frac{1}{k},k)} \|v\|_{H^1(\frac{1}{k},k)}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$|a(w, v)| \leq C \|w\|_{H^1(\frac{1}{k},k)} \|v\|_{H^1(\frac{1}{k},k)}$$

Luego, a es continua. Probamos ahora la continuidad de l :

$$|l(v)| = \left| \int_{\frac{1}{k}}^k F(w^n, G^n, G^{n+1}) v \, dS \right| \leq C(w^n, G^n, G^{n+1}) \|v\|_{H^1(\frac{1}{k},k)}$$

La constante $C(w^n, G^n, G^{n+1})$ es una constante que depende de datos conocidos en cada etapa. En consecuencia, l es continua.

En último lugar, comprobamos que a es coercitiva:

$$a(w, w) = \int_{\frac{1}{k}}^k (\sigma^2 - r + D_0) S \frac{\partial w}{\partial S} w \, dS + \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial w}{\partial S} \frac{\partial w}{\partial S} \, dS + \int_{\frac{1}{k}}^k \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) w^2 \, dS$$

Estudiamos cada sumando:

$$\int_{\frac{1}{k}}^k (\sigma^2 - r + D_0) S \frac{\partial w}{\partial S} w \, dS = -\frac{1}{2} (\sigma^2 - r + D_0) \|w\|_{L^2(\frac{1}{k},k)}^2$$

Para obtener esta igualdad hemos integrado por partes y hemos utilizado que $\frac{\partial w}{\partial S} w = \frac{1}{2} \frac{\partial w^2}{\partial S}$.

$$\int_{\frac{1}{k}}^k \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial w}{\partial S} \frac{\partial w}{\partial S} \, dS \geq \frac{1}{2k^2} \sigma^2 \|w\|_{H^1(\frac{1}{k},k)}^2.$$

En esta desigualdad hemos acotado la función S^2 por $\frac{1}{k^2}$.

$$\int_{\frac{1}{k}}^k \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) w^2 \, dS = \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) \|w\|_{L^2(\frac{1}{k},k)}^2$$

Luego tenemos,

$$a(w, w) \geq \left(r + \frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{2} (\sigma^2 - r + D_0) \right) \|w\|_{L^2(\frac{1}{k},k)}^2 + \frac{1}{2k^2} \sigma^2 \|w\|_{H^1(\frac{1}{k},k)}^2$$

La hipótesis del Teorema sobre Δt nos asegura que $(r + \frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{2} (\sigma^2 - r + D_0)) > 0$ y en consecuencia podemos asegurar que existe $\alpha > 0$ tal que $a(w, w) \geq \alpha \|w\|_{H^1(\frac{1}{k},k)}^2$ y

por tanto a es coercitiva. Luego estamos en la hipótesis del Teorema de Lax-Milgram y podemos concluir que (FV) posee una única solución.

Este resultado de existencia y unicidad de solución débil de cada uno de los N problemas elípticos nos conduce a deducir que el problema semidiscreto en tiempo posee una única solución débil. En el siguiente capítulo nos ocuparemos de discretizar estos problemas en espacio para tener un problema completamente discreto.

Capítulo 5

Discretización total del problema

En este capítulo se procederá a la discretización en espacio de los problemas elípticos planteados anteriormente, de los que ya sabemos que tienen una única solución. Para ello, vamos a utilizar el método de Elementos Finitos, desarrollado en la asignatura Análisis Numérico de las Ecuaciones Diferenciales. En la primera sección recordaremos algunos conceptos básicos del MEF, para los que se ha consultado el libro de Raviart y Thomas ([2]). Posteriormente, discretizaremos el problema obtenido en cada etapa de tiempo y, finalmente, veremos el sistema de ecuaciones que caracteriza la solución aproximada del problema.

5.1. Resultados básicos de MEF

Definición. Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n , con frontera poligonal si $n = 2$ y poliédrica si $n = 3$. Una malla es la unión de un número finito N_{el} de elementos compactos, conexos y de frontera lipschitziana con interior no vacío, $\{K_m\}_{1 \leq m \leq N_{el}}$, tales que:

- $\bar{\Omega} = \bigcup_{m=1}^{N_{el}} K_m$
- $int(K_m) \cap int(K_l) = \emptyset \quad \forall m \neq l$

Los subconjuntos K_m se llaman celdas o elementos de la malla y el conjunto $\{K_m\}_{1 \leq m \leq N_{el}}$ se denota por τ_h , donde el subíndice h se refiere al nivel de refinamiento de la malla:

$$\forall K \in \tau_h, \text{ sea } h_K = diam(K), \text{ entonces } h = \max_{K \in \tau_h} h_K.$$

Cuando tengamos una sucesión de mallas lo denotaremos por $\{\tau_h\}_{h>0}$.

Definición. En dimensión uno, decimos que una malla es conforme si $\forall K_m, K_l$ elementos distintos de la malla, se tiene que su intersección o bien es vacía o bien un solo punto.

Nota. En nuestro problema trabajaremos en dimensión uno, por lo que consideraremos una malla conforme cuyos elementos I serán subintervalos que no se solapan y que constituirán una partición de $(\frac{1}{k}, k)$ y h_I representará la longitud del intervalo I . Tomaremos una partición uniforme por simplicidad, esto es, $h = h_I \forall I \in \tau_h$.

Construcción del problema discreto

Supongamos que tenemos un espacio de Hilbert H , una forma $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ bilineal, continua y coercitiva y una forma $l : H \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua. Por el teorema de Lax-Milgram, sabemos que existe un único $u \in H$ tal que $a(u, v) = l(v)$, $\forall v \in H$.

Sea $V_N = \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, con $\varphi_1, \dots, \varphi_N$, N funciones linealmente independientes en H , entonces $(V_N, \|\cdot\|_H)$ es un subespacio cerrado de H y, por ser H espacio de Hilbert, entonces $(V_N, \|\cdot\|_H)$ es también espacio de Hilbert. Además:

- $a : V_N \times V_N \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal, continua y coercitiva sobre V_N .
- $l : V_N \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma lineal y continua sobre V_N .

Si planteamos el problema el problema discreto

$$\begin{cases} \text{Hallar } u_N \in V_N & \text{tal que} \\ a(u_N, v_N) = l(v_N) & \forall v_N \in V_N, \end{cases}$$

podemos asegurar, por el Teorema de Lax-Milgram, que este problema posee una única solución.

Veamos que la solución de este problema discreto viene caracterizada como la única solución de un sistema de N ecuaciones con N incógnitas.

Buscamos $u_N \in V_N$, por tanto u_N se escribe de la forma

$$u_N = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i.$$

Como a es bilineal y $u_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \dots, N$, el problema discreto equivale a

$$\text{Hallar } u_i, i = 1, \dots, N, \text{ tales que } \sum_{i=1}^N u_i a(\varphi_i, v_N) = l(v_N), \forall v_N \in V_N.$$

Si la igualdad debe ser cierta para todo $v_N \in V_N$, utilizando la linealidad, es suficiente con que sea cierta para todas las funciones φ_j que generan el espacio V_N . Por tanto, el problema discreto es equivalente al problema

$$\text{Hallar } u_i, i = 1, \dots, N, \text{ tales que } \sum_{i=1}^N u_i a(\varphi_i, \varphi_j) = l(\varphi_j) \quad \forall j = 1, \dots, N,$$

que es un sistema lineal de ecuaciones $Au = b$, donde $A_{ji} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ y $b_j = l(\varphi_j)$.

Este desarrollo nos permite calcular de manera más o menos sencilla la solución de los problemas discretos, pero no nos garantiza que la solución aproximada obtenida converja a la solución continua. Para ello, es necesario que V_N cumpla algunas condiciones que veremos a continuación.

Definición. Se dice que $\{V_h\}_{h>0} \subset H$, subespacios de dimensión finita, constituyen una aproximación interna de H si V_h es denso en H , $\forall h > 0$.

Lema de Cea. Bajo las condiciones del teorema de Lax-Milgram, y si $\{V_h\}_{h>0} \subset H$ es una aproximación interna de H . Entonces

$$\|u - u_h\|_H \leq \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_H,$$

donde u es la única solución de

$$\text{Hallar } u \in H \text{ tal que } a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H,$$

y u_h es la única solución de

$$\text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que } a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

El lema de Cea nos proporciona la convergencia del problema discreto al problema continuo, luego nuestro objetivo debe ser elegir espacios discretos que constituyan aproximaciones internas del espacio de Hilbert donde se está resolviendo el problema.

Concretamente, el método de Elementos Finitos consiste en elegir estos espacios como espacios de polinomios, de la forma

$$\mathbb{P}_r = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_K \in \mathbb{P}_r(K)\},$$

donde $\{\tau_h\}_{h \geq 0}$ es una triangulación formada por $\{K_m\}$

Como los polinomios son densos, los espacios \mathbb{P}_r constituyen una aproximación finita de $H^1(\Omega)$.

En general, las funciones de base φ_i del MEF se definen como aquellas que valen uno en el grado de libertad i y cero en el resto.

5.2. Discretización en espacio

Recordemos que la formulación variacional asociada al problema objeto de este estudio, una vez realizada una semidiscretización en tiempo, era

$$(FV) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } w^{n+1} \in H_0^1\left(\frac{1}{k}, k\right) \text{ tal que} \\ \int_{\frac{1}{k}}^k (\sigma^2 - r + D_0) S \frac{\partial w^{n+1}}{\partial S} v \, dS + \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial w^{n+1}}{\partial S} \frac{\partial v}{\partial S} \, dS + \\ \int_{\frac{1}{k}}^k \left(r + \frac{1}{\Delta t}\right) w^{n+1} v \, dS = \int_{\frac{1}{k}}^k F(w^n, G^n, G^{n+1}) v \, dS \quad \forall v \in H_0^1\left(\frac{1}{k}, k\right) \end{array} \right.$$

Consideramos el espacio de elementos finitos \mathbb{P}_1 , es decir:

$$V_h = \mathbb{P}_1 = \left\{ v \in C^0\left(\frac{1}{k}, k\right) : v|_{I_m} \in \mathbb{P}_1(I_m) \quad \forall I_m \in \tau_h, \quad v\left(\frac{1}{k}\right) = 0, \quad v(k) = 0 \right\},$$

donde $\{\tau_h\}_{h \geq 0}$ es una familia de particiones del intervalo $(\frac{1}{k}, k)$ compuesta por $\{I_m\}_{m=1}^{l+1}$. El espacio V_h es de dimensión finita l , siendo l el número el número de puntos interiores.

La discretización de (FV) se escribe como:

$$(FV)_h \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } w_h^{n+1} \in V_h \text{ tal que} \\ \int_{\frac{1}{k}}^k (\sigma^2 - r + D_0) S \frac{\partial w_h^{n+1}}{\partial S} v_h \, dS + \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial w_h^{n+1}}{\partial S} \frac{\partial v_h}{\partial S} \, dS + \\ \int_{\frac{1}{k}}^k \left(r + \frac{1}{\Delta t}\right) w_h^{n+1} v_h \, dS = \int_{\frac{1}{k}}^k F(w^n, G^n, G^{n+1}) v_h \, dS, \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right.$$

Sabemos que $(FV)_h$ tiene una única solución y, por el lema de Cea, que hay convergencia de la aproximación discreta a la solución continua. Además, la solución aproximada, como hemos visto anteriormente, viene caracterizada por ser la única solución de un sistema lineal de ecuaciones. Vamos a detallar a continuación este sistema de ecuaciones en el caso particular de dimensión uno utilizando elementos finitos \mathbb{P}_1 .

Elegida una base $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l\}$ de V_h , la función solución aproximada se escribe como

$$w_h^{n+1} = \sum_{i=1}^l w_i^{n+1} \varphi_i.$$

Introduciendo esta notación de w_h^{n+1} en el problema $(FV)_h$, dicho problema es equivalente a la resolución del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^l \int_{\frac{1}{k}}^k (\sigma^2 - r + D_0) w_i^{n+1} S \frac{\partial \varphi_i}{\partial S} \varphi_j dS + \sum_{i=1}^l \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{1}{2} \sigma^2 w_i^{n+1} S^2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial S} \frac{\partial \varphi_j}{\partial S} dS + \\ & + \sum_{i=1}^l \int_{\frac{1}{k}}^k \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) w_i^{n+1} \varphi_i \varphi_j dS = \int_{\frac{1}{k}}^k F(w^n, G^n, G^{n+1}) \varphi_j dS \quad \forall j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

Como los polinomios en cada uno de los intervalos $[S_{i-1}, S_i]$ son de grado uno, las funciones de base son las llamadas *funciones sombrero*, es decir, funciones tales que

$$\varphi_i(S_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

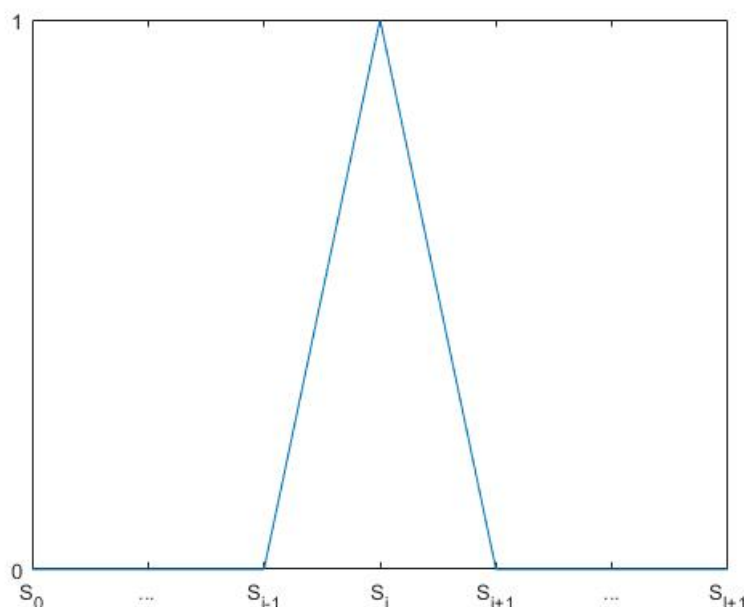


Figura 5.1: Función sombrero φ_i

En particular, φ_i es simétrica respecto de S_i , de forma que

$$\varphi_i(S) = \begin{cases} \frac{S - S_{i-1}}{h} & \text{si } S \in (S_{i-1}, S_i) \\ \frac{S_{i+1} - S}{h} & \text{si } S \in (S_i, S_{i+1}) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por tanto, se tiene

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial S}(S) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{si } S \in (S_{i-1}, S_i) \\ -\frac{1}{h} & \text{si } S \in (S_i, S_{i+1}) \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y podemos concluir $\varphi_i \varphi_j = \frac{\partial \varphi_i}{\partial S} \frac{\partial \varphi_j}{\partial S} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial S} \varphi_j = 0$ cuando $|i - j| > 1$.

Entonces, $(FV)_h$ es equivalente a resolver el sistema $Mw^{n+1} = b$, donde

$$\begin{aligned} M_{ji} &= \int_{\frac{1}{k}}^k (\sigma^2 - r + D_0) S \frac{\partial \varphi_i}{\partial S} \varphi_j dS + \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial S} \frac{\partial \varphi_j}{\partial S} dS + \\ &+ \int_{\frac{1}{k}}^k \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) \varphi_i \varphi_j dS \quad \forall i, j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

$$b_j = \int_{\frac{1}{k}}^k F(w^n, G^n, G^{n+1}) \varphi_j dS \quad \forall j = 1, \dots, l.$$

Presentamos a continuación con detalle los cálculos integrales que nos permiten calcular la matriz y el segundo miembro del sistema. Como hemos visto anteriormente, $M_{ij} = M_{ji} = 0$ cuando $|i - j| > 1$. En particular, la matriz M es una matriz tridiagonal, que es suma de tres matrices tridiagonales que corresponden a cada uno de los términos que componen la forma bilineal a . Denotaremos a estas tres matrices por A , B y C respectivamente.

$$\begin{aligned} A_{ji} = A_{ij} &= \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial S} \frac{\partial \varphi_j}{\partial S} dS & B_{ji} &= \int_{\frac{1}{k}}^k (\sigma^2 - r + D_0) S \frac{\partial \varphi_i}{\partial S} \varphi_j dS \\ C_{ji} = C_{ij} &= \int_{\frac{1}{k}}^k \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) \varphi_i \varphi_j dS \end{aligned}$$

Observamos que las matrices A y C son simétricas, mientras que B no lo es. Por tanto, la matriz global M es no simétrica. Para el cálculo de estas integrales vamos a utilizar la fórmula de Simpson, ya que sabemos que es exacta para polinomios de grado 2 y, por tanto, nos permite calcular las integrales de manera exacta.

$$\int_a^b f(s) dS = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Necesitaremos los puntos medios, a los que notaremos

$$\frac{S_i + S_{i+1}}{2} = S_{i+1/2} \quad \frac{S_{i-1} + S_i}{2} = S_{i-1/2}$$

Procedemos a desarrollar los cálculos:

$$\begin{aligned} A_{ii} &= \frac{1}{2}\sigma^2 \int_{\frac{1}{k}}^k S^2 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial S} \right)^2 dS = \frac{1}{2}\sigma^2 \int_{S_{i-1}}^{S_{i+1}} S^2 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial S} \right)^2 dS \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \left[\int_{S_{i-1}}^{S_i} S^2 \left(\frac{1}{h} \right)^2 dS + \int_{S_i}^{S_{i+1}} S^2 \left(\frac{-1}{h} \right)^2 dS \right] = \frac{\sigma^2}{2h^2} \int_{S_{i-1}}^{S_{i+1}} S^2 dS \\ &= \frac{\sigma^2}{2h^2} \frac{2h}{6} (S_{i-1}^2 + 4S_i^2 + S_{i+1}^2) = \frac{\sigma^2}{6h} (S_{i-1}^2 + 4S_i^2 + S_{i+1}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{i,i+1} &= \frac{1}{2}\sigma^2 \int_{\frac{1}{k}}^k S^2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial S} \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial S} dS = \frac{\sigma^2}{2} \int_{S_i}^{S_{i+1}} S^2 \left(\frac{-1}{h} \right) \left(\frac{1}{h} \right) dS = \frac{-\sigma^2}{2h^2} \int_{S_i}^{S_{i+1}} S^2 dS \\ &= \frac{-\sigma^2}{2h^2} \frac{h}{6} (S_i^2 + 4S_{i+1/2}^2 + S_{i+1}^2) = \frac{-\sigma^2}{12h} (S_i^2 + 4S_{i+1/2}^2 + S_{i+1}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{i,i-1} &= \frac{1}{2}\sigma^2 \int_{\frac{1}{k}}^k S^2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial S} \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial S} dS = \frac{\sigma^2}{2} \int_{S_{i-1}}^{S_i} S^2 \left(\frac{1}{h} \right) \left(\frac{-1}{h} \right) dS = \frac{-\sigma^2}{2h^2} \int_{S_{i-1}}^{S_i} S^2 dS \\ &= \frac{-\sigma^2}{2h^2} \frac{h}{6} (S_{i-1}^2 + 4S_{i-1/2}^2 + S_i^2) = \frac{-\sigma^2}{12h} (S_{i-1}^2 + 4S_{i-1/2}^2 + S_i^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{ii} &= (\sigma^2 - r + D_0) \int_{\frac{1}{k}}^k S \frac{\partial \varphi_i}{\partial S} \varphi_i dS = (\sigma^2 - r + D_0) \int_{S_{i-1}}^{S_{i+1}} S \frac{\partial \varphi_i}{\partial S} \varphi_i dS \\ &= (\sigma^2 - r + D_0) \left[\frac{1}{h} \int_{S_{i-1}}^{S_i} S \frac{S - S_{i-1}}{h} dS - \frac{1}{h} \int_{S_i}^{S_{i+1}} S \frac{S_{i+1} - S}{h} dS \right] \\ &= \frac{\sigma^2 - r + D_0}{h^2} \left[\int_{S_{i-1}}^{S_i} S(S - S_{i-1}) dS - \int_{S_i}^{S_{i+1}} S(S_{i+1} - S) dS \right] \\ &= \frac{(\sigma^2 - r + D_0)h}{h^2} \left[4S_{i-1/2} \frac{h}{2} + S_i h - 4S_{i+1/2} \frac{h}{2} - S_i h \right] \\ &= \frac{\sigma^2 - r + D_0}{3} (S_{i-1/2} - S_{i+1/2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{i-1,i} &= (\sigma^2 - r + D_0) \int_{\frac{1}{k}}^k S \frac{\partial \varphi_i}{\partial S} \varphi_{i-1} dS = (\sigma^2 - r + D_0) \int_{S_{i-1}}^{S_i} S \frac{\partial \varphi_i}{\partial S} \varphi_{i-1} dS \\ &= (\sigma^2 - r + D_0) \int_{S_{i-1}}^{S_i} S \frac{1}{h} \frac{S_i - S}{h} dS = \frac{\sigma^2 - r + D_0}{h^2} \int_{S_{i-1}}^{S_i} S(S_i - S) dS \\ &= \frac{(\sigma^2 - r + D_0)h}{h^2} \left(S_{i-1} h + 4S_{i-1/2} \frac{h}{2} \right) = \frac{\sigma^2 - r + D_0}{6} (S_{i-1} + 2S_{i-1/2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{i+1,i} &= (\sigma^2 - r + D_0) \int_{\frac{1}{k}}^k S \frac{\partial \varphi_i}{\partial S} \varphi_{i+1} dS = (\sigma^2 - r + D_0) \int_{S_i}^{S_{i+1}} S \frac{\partial \varphi_i}{\partial S} \varphi_{i+1} dS \\
&= (\sigma^2 - r + D_0) \int_{S_i}^{S_{i+1}} S \frac{-1}{h} \frac{S - S_i}{h} dS = -\frac{\sigma^2 - r + D_0}{h^2} \int_{S_i}^{S_{i+1}} S(S - S_i) dS \\
&= -\frac{(\sigma^2 - r + D_0) h}{h^2} \left(S_{i+1} h + 4S_{i+1/2} \frac{h}{2} \right) = -\frac{\sigma^2 - r + D_0}{6} (S_{i+1} + 2S_{i+1/2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{ii} &= \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) \int_{S_{i-1}}^{S_{i+1}} \varphi_i^2 dS \\
&= \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) \left[\int_{S_{i-1}}^{S_i} \left(\frac{S - S_{i-1}}{h} \right)^2 dS + \int_{S_i}^{S_{i+1}} \left(\frac{S_{i+1} - S}{h} \right)^2 dS \right] \\
&= \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) \frac{1}{h^2} \left[\int_{S_{i-1}}^{S_i} (S - S_{i-1})^2 dS + \int_{S_i}^{S_{i+1}} (S_{i+1} - S)^2 dS \right] \\
&= \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) \frac{1}{h^2} \frac{h}{6} \left[h^2 + 4 \left(\frac{h}{2} \right)^2 + h^2 + 4 \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right] = \frac{2}{3} \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{i,i+1} &= \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) \int_{S_i}^{S_{i+1}} \varphi_i \varphi_{i+1} dS = \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) \int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{(S_{i+1} - S)(S - S_i)}{h} dS \\
&= \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) \frac{1}{h^2} \frac{4h}{6} (S_{i+1} - S_{i+1/2})(S_{i+1/2} - S_i) \\
&= \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) \frac{1}{h^2} \frac{2h}{3} \frac{h}{2} \frac{h}{2} = \frac{1}{6} \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{i,i-1} &= \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) \int_{S_{i-1}}^{S_i} \varphi_i \varphi_{i-1} dS = \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{(S - S_{i-1})(S_i - S)}{h} dS \\
&= \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) \frac{1}{h^2} \frac{4h}{6} (S_{i-1/2} - S_{i-1})(S_i - S_{i-1/2}) \\
&= \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) \frac{1}{h^2} \frac{2h}{3} \frac{h}{2} \frac{h}{2} = \frac{1}{6} \left(r + \frac{1}{\Delta t} \right) h
\end{aligned}$$

Para calcular

$$b_j = \int_{\frac{1}{k}}^k \left(\frac{w^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 G^{n+1}}{\partial S^2} + (r - D_0) S \frac{\partial G^{n+1}}{\partial S} - r G^{n+1} - \frac{G^{n+1} - G^n}{\Delta t} \right) \varphi_j dS$$

necesito construir un levantamiento G^i que sabemos que debe cumplir

$$G^i \left(\frac{1}{k} \right) = 0, \quad G^i(t_i) = g(t_i) = ke^{-D_0 t_i} - Ee^{-rt_i}$$

Tomamos la función lineal que pasa por los puntos anteriores, esto es,

$$G^i(t) = g(t_i) \frac{S - \frac{1}{k}}{k - \frac{1}{k}}$$

En particular,

$$\frac{\partial G^i}{\partial S}(t) = \frac{g(t_i)}{k - \frac{1}{k}}, \quad \frac{\partial^2 G^i}{\partial S^2}(t) = 0$$

Se tienen los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{w^n}{\Delta t} \varphi_j dS &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^{l+1} w_i^n \int_{\frac{1}{k}}^k \varphi_i \varphi_j dS \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(w_{j-1}^n \int_{\frac{1}{k}}^k \varphi_{j-1} \varphi_j dS + w_j^n \int_{\frac{1}{k}}^k \varphi_j \varphi_j dS + w_{j+1}^n \int_{\frac{1}{k}}^k \varphi_{j+1} \varphi_j dS \right) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{6} h (w_{j-1}^n + w_{j+1}^n) + \frac{2}{3} h w_j^n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{k}}^k (r - D_0) S \frac{\partial G^{n+1}}{\partial S} \varphi_j dS &= \int_{\frac{1}{k}}^k (r - D_0) S \frac{g(t_{n+1})}{k - \frac{1}{k}} \varphi_j dS = (r - D_0) \frac{g(t_{n+1})}{k - \frac{1}{k}} \int_{\frac{1}{k}}^k S \varphi_j dS \\ &= (r - D_0) \frac{g(t_{n+1})}{k - \frac{1}{k}} \left[\int_{S_{j-1}}^{S_j} S \frac{S - S_{j-1}}{h} dS + \int_{S_j}^{S_{j+1}} S \frac{S_{j+1} - S}{h} dS \right] \\ &= \frac{(r - D_0) g(t_{n+1})}{6} \frac{1}{k - \frac{1}{k}} \left[h S_j + 4 \frac{h}{2} S_{j-1/2} + h S_j + 4 \frac{h}{2} S_{j+1/2} \right] \\ &= \frac{(r - D_0) g(t_{n+1})}{3} \frac{1}{k - \frac{1}{k}} h [S_j + S_{j-1/2} + S_{j+1/2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{k}}^k r G^{n+1} \varphi_j dS &= \int_{\frac{1}{k}}^k r g(t_{n+1}) \frac{S - \frac{1}{k}}{k - \frac{1}{k}} \varphi_j dS = \frac{r g(t_{n+1})}{k - \frac{1}{k}} \left[\int_{\frac{1}{k}}^k S \varphi_j dS - \frac{1}{k} \int_{\frac{1}{k}}^k \varphi_j dS \right] \\ &= \frac{r g(t_{n+1})}{k - \frac{1}{k}} h \left[\frac{1}{3} (S_j + S_{j-1/2} + S_{j+1/2}) - \frac{1}{k} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{G^{n+1} - G^n}{\Delta t} \varphi_j dS &= \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{(g(t_{n+1}) - g(t_n))}{\Delta t} \frac{(S - \frac{1}{k})}{k - \frac{1}{k}} \varphi_j dS \\ &= \frac{g(t_{n+1}) - g(t_n)}{\Delta t (k - \frac{1}{k})} \left[\int_{\frac{1}{k}}^k S \varphi_j dS - \frac{1}{k} \int_{\frac{1}{k}}^k \varphi_j dS \right] \\ &= \frac{g(t_{n+1}) - g(t_n)}{\Delta t (k - \frac{1}{k})} h \left[\frac{1}{3} (S_j + S_{j-1/2} + S_{j+1/2}) - \frac{1}{k} \right] \end{aligned}$$

Concluimos

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{6} h (w_{j-1}^n + w_{j+1}^n) + \frac{2}{3} h w_j^n \right) + \frac{r - D_0}{3} \frac{g^{n+1}(t_{n+1})}{k - \frac{1}{k}} h [S_j + S_{j-1/2} + S_{j+1/2}] \\ &\quad - \frac{r g^{n+1}(t_{n+1})}{k - \frac{1}{k}} h \left[\frac{1}{3} (S_j + S_{j-1/2} + S_{j+1/2}) - \frac{1}{k} \right] \\ &\quad - \frac{g^{n+1}(t_{n+1}) - g^n(t_n)}{\Delta t (k - \frac{1}{k})} h \left[\frac{1}{3} (S_j + S_{j-1/2} + S_{j+1/2}) - \frac{1}{k} \right] \end{aligned}$$

Por tanto, el sistema a resolver es

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_{32} & M_{33} & M_{34} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & M_{43} & M_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & M_{ll} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^{n+1} \\ w_2^{n+1} \\ \vdots \\ w_l^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix},$$

donde los b_j siguen las expresiones dadas anteriormente y la matriz M está formada por los siguientes elementos:

- Diagonal principal:

$$M_{ii} = \frac{\sigma^2}{6h}(S_{i-1}^2 + 4S_i^2 + S_{i+1}^2) + \frac{\sigma^2 - r + D_0}{3}(S_{i-1/2} - S_{i+1/2}) + \frac{2}{3}\left(r + \frac{1}{\Delta t}\right)h$$

- Diagonal superior:

$$M_{i,i+1} = \frac{-\sigma^2}{12h}(S_i^2 + 4S_{i+1/2}^2 + S_{i+1}^2) + \frac{\sigma^2 - r + D_0}{6}(S_i + 2S_{i+1/2}) + \frac{1}{6}\left(r + \frac{1}{\Delta t}\right)h$$

- Diagonal inferior:

$$M_{i,i-1} = \frac{-\sigma^2}{12h}(S_{i-1}^2 + 4S_{i-1/2}^2 + S_i^2) - \frac{\sigma^2 - r + D_0}{6}(S_i + 2S_{i-1/2}) + \frac{1}{6}\left(r + \frac{1}{\Delta t}\right)h$$

Capítulo 6

Simulaciones numéricas

En primer lugar, antes de realizar las simulaciones, cabe destacar que se conoce una solución exacta para el problema (4.1), que es

$$C(t, S) = S e^{-D_0(T-t)} N(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2),$$

donde

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - D_0 + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - D_0 - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

Esta expresión incluye el cálculo de la integral de $e^{-y^2/2}$, función cuya primitiva es desconocida, lo cual complica el cálculo y lleva a Matlab a utilizar métodos de aproximación. Por ello, en lugar de comparar el método estudiado con la solución exacta, en este capítulo mediremos la precisión de este comparándolo con la función `blsprice`. Esta función viene incorporada en Matlab y calcula, dado el valor actual del activo subyacente y todos los parámetros incluidos en los razonamientos anteriores, el precio de la acción en el instante actual.

Nótese que al utilizar `blsprice` no podemos controlar los parámetros del método, como puede ser Δt . En este trabajo hemos desarrollado el método de elementos finitos P_1 para la resolución del problema utilizando Matlab. Como vimos en el capítulo 5, resolver el problema es equivalente a resolver un sistema lineal de ecuaciones que, computacionalmente, no necesita de la función levantamiento, ya que este es simplemente una herramienta teórica para demostrar la existencia de solución. Además, se ha utilizado la técnica de bloqueo de las condiciones de contorno estándar para el método de elementos finitos, que permite mejorar el condicionamiento de la matriz.

Además, posteriormente a la comparación de ambos métodos, vamos a valorar la opción en diferentes casos para estudiar el comportamiento del valor de la opción sujeto a los cambios en sus parámetros, habiendo seguido el modelo expuesto en [9].

6.1. Comparaciones

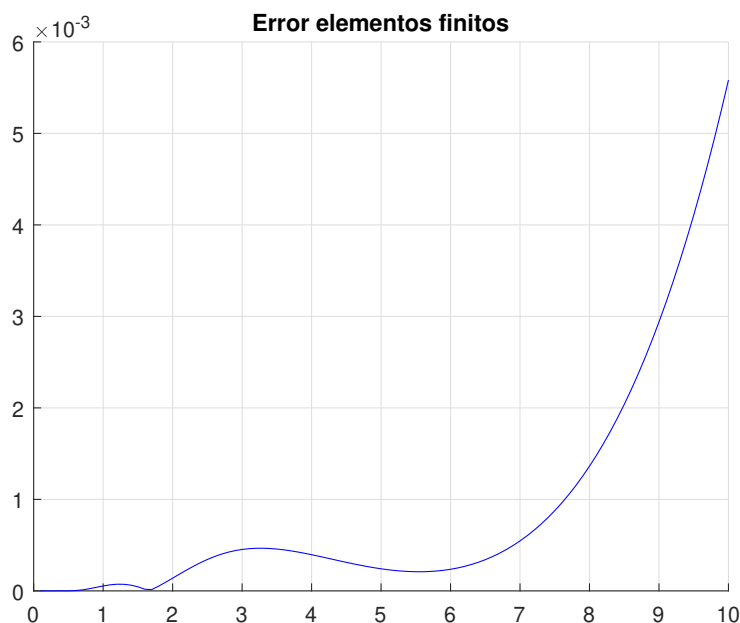
Vamos a comprobar que el método de elementos finitos constituye una buena aproximación del precio de la opción de compra, y para ello vamos a utilizar, como ya se ha comentado, la función `blsprice`.

Para reflejar la similitud del método con la función `blsprice`, vamos a tomar unos valores de interés libre de riesgo del 5 % ($r = 0,05$), volatilidad del 30 % ($\sigma = 0,3$), precio de ejercicio de tres euros ($E = 3$) y un vencimiento de tres años ($T = 3$).

La función `blsprice` permite, además, añadir una variable de entrada extra correspondiente al dividendo anual. Por tanto, vamos a mostrar la diferencia entre ambos métodos en dos casos;

- Cuando el activo no paga dividendos.
- Cuando el activo paga un dividendo anual del 2,5 % ($D_0 = 0,025$).

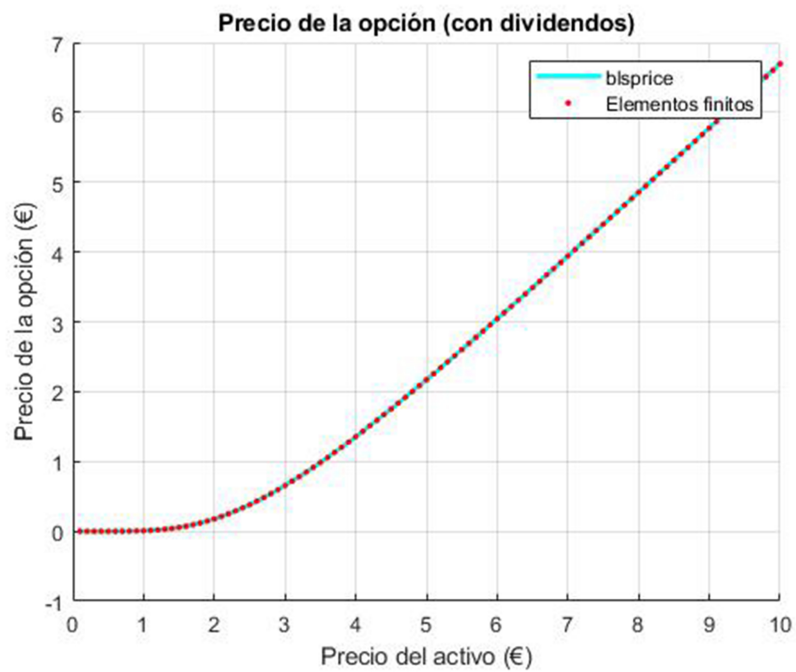
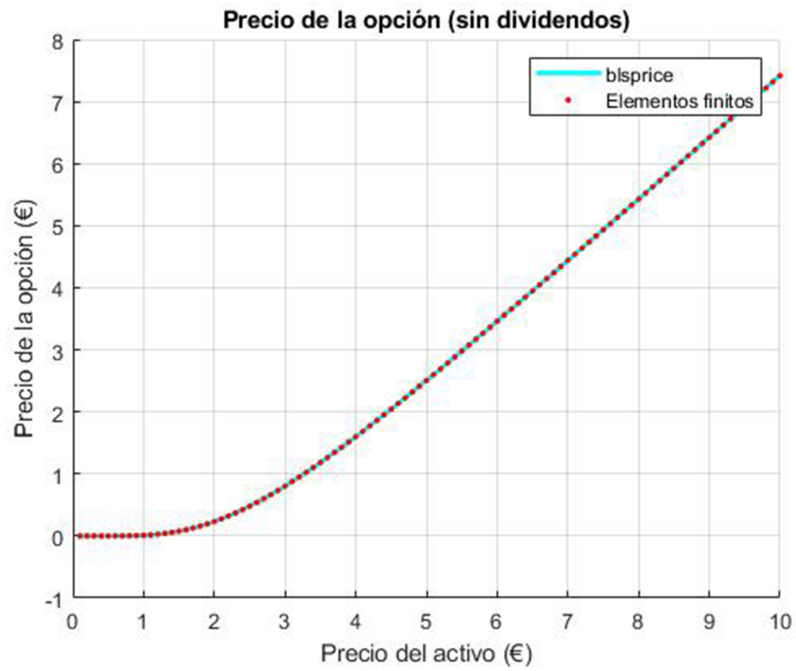
Vamos a reflejar gráficamente el error entre nuestro método y `blsprice`. Como es análogo para ambos casos, vamos a verlo cuando se pagan dividendos:



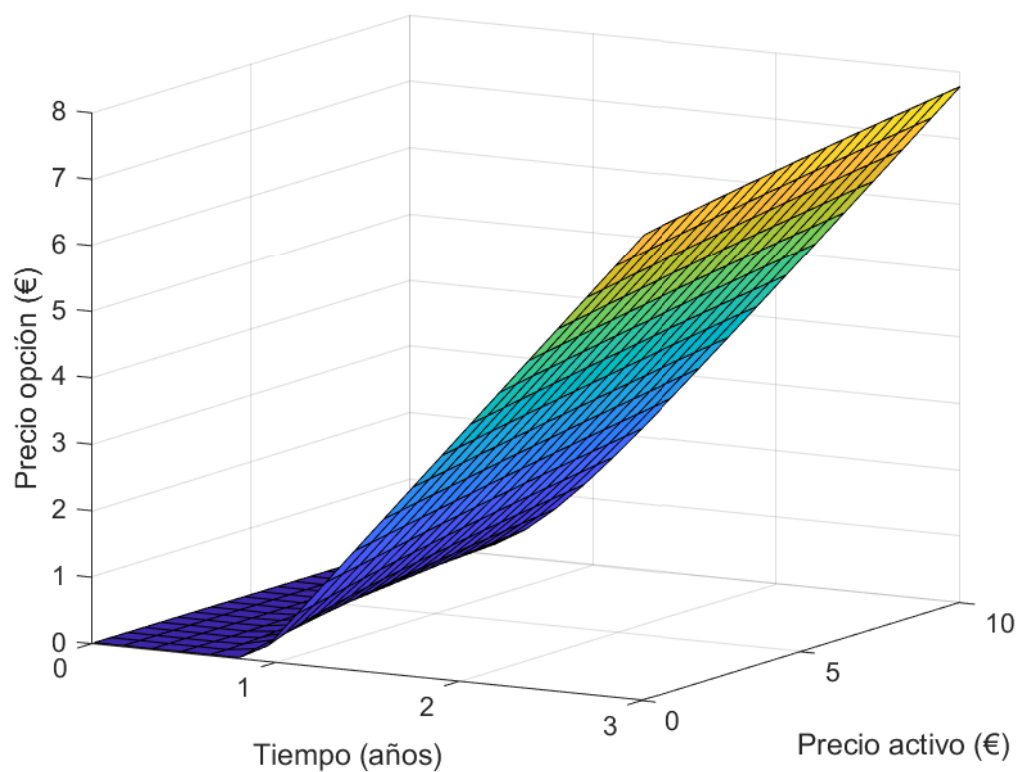
El mayor error que se comete es del orden de 10^{-3} , lo que nos permite concluir que el método de elementos finitos constituye una buena aproximación del precio de la opción.

A continuación, vamos a comparar el método de elementos finitos con la función `blsprice` (tanto en el caso sin dividendos como con dividendo anual del 2,5 %), y podremos observar como los resultados son prácticamente idénticos.

Además, estas gráficas nos muestran que la presencia de dividendos reduce el precio de la acción. Esto tiene completo sentido, ya que el pago de los mismos hará que el valor en el futuro sea menor del que tendríamos si no hubiera que pagarlos.



En último lugar, mostremos cómo evoluciona el precio de la opción en función de sus dos variables: el tiempo y el precio del activo subyacente:



Se observa como, cuanto mayor es el precio del activo, tarda más en acercarse asintóticamente a cero y, como veremos posteriormente, que un aumento en el precio del activo subyacente provoca un aumento también en el precio de la opción.

6.2. Sensibilidad respecto de los parámetros

6.2.1. Tasa de interés libre de riesgo y precio de ejercicio

En esta sección, vamos a trabajar siempre con activos que no pagan dividendos, ya que hemos visto en las gráficas anteriores cómo afectan estos al precio de la opción. Tomemos un activo cuyo valor en el instante actual es de 3 euros, un vencimiento de 3 meses y una volatilidad del 30 %.

Cuanto mayor sea la tasa de interés libre de riesgo, menor será el valor actual del precio de ejercicio y, por tanto, la intuición nos dice que el precio de la opción debe ser también mayor. Del mismo modo, el valor de la opción deberá disminuir cuanto mayor sea el precio de ejercicio. Obsérvese la siguiente tabla:

| E | r | | | | | | | | | |
|-------------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|
| | 0,03 | | 0,05 | | 0,10 | | 0,15 | | 0,20 | |
| | blsprice | MEF | blsprice | MEF | blsprice | MEF | blsprice | MEF | blsprice | MEF |
| 1,80 | 1,2135 | 1,2135 | 1,2224 | 1,2224 | 1,2445 | 1,2445 | 1,2663 | 1,2663 | 1,2878 | 1,2878 |
| 2,40 | 0,6287 | 0,6288 | 0,6397 | 0,6398 | 0,6674 | 0,6674 | 0,6949 | 0,6949 | 0,7224 | 0,7224 |
| 3,00 | 0,1901 | 0,1904 | 0,1975 | 0,1977 | 0,2166 | 0,2169 | 0,2367 | 0,2370 | 0,2577 | 0,2580 |
| 3,60 | 0,0295 | 0,0296 | 0,0315 | 0,0316 | 0,0369 | 0,0370 | 0,0430 | 0,0432 | 0,0498 | 0,0501 |
| 4,20 | 0,0026 | 0,0027 | 0,0029 | 0,0029 | 0,0036 | 0,0037 | 0,0045 | 0,0046 | 0,0056 | 0,0057 |

Cuadro 6.1: Valores de la opción de compra mediante el método de elementos finitos y con blsprice en función de r y E , con $S = 3$, $\sigma = 0,3$ y $T = 0,25$.

Efectivamente, mediante los datos obtenidos, podemos concluir que el precio de la opción aumenta si r crece y que disminuye cuando el valor que crece es el de E .

6.2.2. Vencimiento

Una fecha de vencimiento más distante en el tiempo implica un posible aumento en el precio del activo en el futuro, ya que existe un intervalo temporal mayor en el que este puede crecer (o, del mismo modo, mayores pérdidas). La intuición nos dice, por tanto, que el precio de la opción debe ser mayor cuanto mayor sea el tiempo de vencimiento.

Manteniendo los supuestos anteriores de $\sigma = 0,3$ y $S = 3$, vamos ahora a comparar la tabla (6.1) con la tabla siguiente, en la que el vencimiento es de seis meses:

| E | r | | | | | | | | | |
|-------------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|
| | 0,03 | | 0,05 | | 0,10 | | 0,15 | | 0,20 | |
| | blsprice | MEF | blsprice | MEF | blsprice | MEF | blsprice | MEF | blsprice | MEF |
| 1,80 | 1,2278 | 1,2279 | 1,2453 | 1,2454 | 1,2884 | 1,2884 | 1,3305 | 1,3305 | 1,3716 | 1,3715 |
| 2,40 | 0,6727 | 0,6728 | 0,6927 | 0,6928 | 0,7429 | 0,7429 | 0,7932 | 0,7932 | 0,8434 | 0,8433 |
| 3,00 | 0,2745 | 0,2746 | 0,2890 | 0,2891 | 0,3272 | 0,3273 | 0,3677 | 0,3677 | 0,4103 | 0,4103 |
| 3,60 | 0,0846 | 0,0847 | 0,0913 | 0,0914 | 0,1100 | 0,1101 | 0,1312 | 0,1314 | 0,1551 | 0,1554 |
| 4,20 | 0,0211 | 0,0212 | 0,0233 | 0,0235 | 0,0299 | 0,0301 | 0,0379 | 0,0382 | 0,0476 | 0,0479 |

Cuadro 6.2: Valores de la opción de compra mediante el método de elementos finitos y con blsprice en función de r y E , con $S = 3$, $\sigma = 0,3$ y $T = 0,5$.

Se observa como el incremento del tiempo hasta la fecha de vencimiento, cuando el resto de características se mantienen constantes, ha provocado un aumento en el precio de la opción. Este resultado es acorde la intuición de que el valor de la opción debe ser mayor cuanto mayor sea el tiempo de vigencia de la misma.

6.2.3. Volatilidad

Un aumento en la volatilidad equivale a asumir un mayor riesgo al adquirir la opción. Así, el poseedor de la opción se beneficiará de mayor probabilidad de tener valores más altos o se verá perjudicado por la mayor probabilidad de que los valores sean más bajos. Por tanto, se intuye que el precio de la opción aumentará cuando la volatilidad aumente.

Para comprobarlo, mantenemos constantes los valores de S y T en la tabla (6.1) y cambiamos $\sigma = 0,3$ por $\sigma = 0,5$. De este modo, la tabla resultante es la siguiente:

| E | r | | | | | | | | | |
|-------------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|
| | 0,03 | | 0,05 | | 0,10 | | 0,15 | | 0,20 | |
| | blsprice | MEF | blsprice | MEF | blsprice | MEF | blsprice | MEF | blsprice | MEF |
| 1,80 | 1,2175 | 1,2175 | 1,2261 | 1,2262 | 1,2477 | 1,2478 | 1,2691 | 1,2691 | 1,2902 | 1,2902 |
| 2,40 | 0,6820 | 0,6821 | 0,6914 | 0,3915 | 0,7150 | 0,7150 | 0,7386 | 0,7387 | 0,7624 | 0,7624 |
| 3,00 | 0,3087 | 0,3087 | 0,3156 | 0,3156 | 0,3332 | 0,3333 | 0,3514 | 0,3514 | 0,3701 | 0,3701 |
| 3,60 | 0,1166 | 0,1166 | 0,1203 | 0,1203 | 0,1299 | 0,1300 | 0,1401 | 0,1401 | 0,1508 | 0,1509 |
| 4,20 | 0,0387 | 0,0388 | 0,0403 | 0,0404 | 0,0445 | 0,0446 | 0,0490 | 0,0492 | 0,0509 | 0,0541 |

Cuadro 6.3: Valores de la opción de compra mediante el método de elementos finitos y con blsprice en función de r y E , con $S = 3$, $\sigma = 0,5$ y $T = 0,25$.

Se puede ver que, al dejar todos los parámetros constantes e incrementar el valor de la volatilidad, el valor de la opción de compra también se ve incrementado.

6.2.4. Precio de la acción en el instante actual

Por último, y pese a que el valor del activo subyacente no es un parámetro de nuestra función sino una variable dependiente, puede resultar útil estudiar cómo varía el precio de la opción en función al precio del activo en el instante actual.

Comparamos nuevamente la tabla (6.1) con la tabla expuesta a continuación, en la que se ha reemplazado $S = 3$ por $S=3,6$:

| E | r | | | | | | | | | |
|-------------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|
| | 0,03 | | 0,05 | | 0,10 | | 0,15 | | 0,20 | |
| | blsprice | MEF | blsprice | MEF | blsprice | MEF | blsprice | MEF | blsprice | MEF |
| 1,80 | 1,8134 | 1,8134 | 1,8224 | 1,8224 | 1,8444 | 1,8444 | 1,8663 | 1,8662 | 1,8878 | 1,8878 |
| 2,40 | 1,2183 | 1,2183 | 1,2302 | 1,2302 | 1,2595 | 1,2595 | 1,2885 | 1,2885 | 1,3172 | 1,3172 |
| 3,00 | 0,6464 | 0,6466 | 0,6596 | 0,6597 | 0,6926 | 0,6927 | 0,7257 | 0,7258 | 0,7589 | 0,7589 |
| 3,60 | 0,2281 | 0,2283 | 0,2370 | 0,2372 | 0,2600 | 0,2601 | 0,2841 | 0,2843 | 0,3093 | 0,3095 |
| 4,20 | 0,0504 | 0,0506 | 0,0535 | 0,0537 | 0,0620 | 0,0622 | 0,0714 | 0,0717 | 0,0819 | 0,0822 |

Cuadro 6.4: Valores de la opción de compra mediante el método de elementos finitos y con blsprice en función de r y E , con $S = 3,6$, $\sigma = 0,3$ y $T = 0,25$.

Vimos en el capítulo 3 que el precio de la opción siempre debe ser menor que el del activo. Por tanto, cuando el precio del activo tienda a cero, el de la opción debe hacer lo mismo. Más en general, cuanto mayor sea el precio del activo hoy, mayor es la probabilidad de que lo sea también en el futuro. Esto lleva a pensar que un crecimiento en el precio del activo conlleva también un crecimiento en el precio de la opción. La tabla anterior corrobora esta intuición.

Vamos a ver este fenómeno más detalladamente en la siguiente tabla:

| S | T | | | | | | | | | | |
|-------------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|--------|
| | 1 mes | | 3 meses | | 6 meses | | 1 año | | 2 años | | |
| | blsprice | MEF | blsprice | MEF | blsprice | MEF | blsprice | MEF | blsprice | MEF | |
| 0,50 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 1,00 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0040 | 0,0041 | |
| 1,50 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0054 | 0,0055 | 0,0486 | 0,0488 | |
| 2,00 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0098 | 0,0099 | 0,0558 | 0,0560 | 0,1884 | 0,1886 | |
| 2,50 | 0,0020 | 0,0020 | 0,0307 | 0,0309 | 0,0916 | 0,0918 | 0,2152 | 0,2152 | 0,4386 | 0,4384 | |
| 3,00 | 0,1161 | 0,1166 | 0,2166 | 0,2169 | 0,3272 | 0,3273 | 0,5020 | 0,5019 | 0,7793 | 0,7789 | |
| 3,50 | 0,5282 | 0,5282 | 0,6013 | 0,6014 | 0,7061 | 0,7061 | 0,8870 | 0,8869 | 1,1825 | 1,1821 | |
| 4,00 | 1,0249 | 1,0249 | 1,0775 | 0,0776 | 1,1632 | 1,1633 | 1,3309 | 1,3308 | 1,6253 | 1,6249 | |
| 4,50 | 1,5249 | 1,5249 | 1,5744 | 1,5744 | 1,6506 | 1,6506 | 1,8052 | 1,8052 | 2,0917 | 2,0914 | |
| 5,00 | 2,0249 | 2,0249 | 2,0741 | 2,0741 | 2,1473 | 2,1473 | 2,2939 | 2,2939 | 2,5722 | 2,5719 | |

Cuadro 6.5: Valores de la opción de compra mediante el método de elementos finitos y con blsprice en función de S y T , con $r = 0,1$, $\sigma = 0,3$ y $E = 3$.

Apéndice

Se muestra a continuación el código del script de Matlab que se ha utilizado en el apartado anterior y con el que se ha resuelto el método de elementos finitos.

```
function blackscholes(T, sigma, r, E, D0)
k=10;
invk=1/k;
N=200;
M=200;
x=linspace(invk, k, N);
h=x(2)-x(1);
t=linspace(0, T, M);
dt=t(2)-t(1);

c(1,:) = max(x-E, 0);

c1=sigma^2/(6*h);
c2=(sigma^2-r+D0)/3;
c3=(2/3)*(r+(1/dt))*h;
B1=1.e+30;
A(1,1)=B1;
A(N,N)=B1;
for i=2:N-1
    xime=(x(i)+x(i-1))/2;
    xima=(x(i)+x(i+1))/2;
    A(i,i)=c1*(x(i-1)^2+4*x(i)^2+x(i+1)^2)+c2*(xime-xima)+c3;
    A(i,i-1)=(-c1/2)*(x(i-1)^2+4*xime^2+x(i)^2)-...
        (c2/2)*(x(i)+xime*2)+c3/4;
    A(i,i+1)=(-c1/2)*(x(i)^2+4*xima^2+x(i+1)^2)+...
        (c2/2)*(x(i)+xima*2)+c3/4;
end

for j=2:M
    b(1)=B1*0;
    for i=2:N-1
        b(i)=(c(j-1,i-1)+c(j-1,i+1))*h/(6*dt)+...
            c(j-1,i)*2*h/(3*dt);
    end
    b(N)=B1*(k*exp(-D0*t(j))-E*exp(-r*t(j)));
    c(j,:) = A\b';
end
```

```

csol = @(S) interp1(x,c(M,:),S);
ss = linspace(invk,k);
[Call,~] = blsprice(ss,E,r,T,sigma,D0);
call = @(S) interp1(ss,Call,S);

close all
figure(1)
hold on
grid on
plot(ss,call(ss),'c','LineWidth',2)
plot(ss,csol(ss),'r.','MarkerSize',8)
legend('blsprice','Elementos finitos')
title('Precio de la opcion')
xlabel('Precio del activo (euros)')
ylabel('Precio de la opcion (euros)')
hold off
shg

figure(2)
hold on
grid on
plot(ss,abs(call(ss)-csol(ss)),'b')
title('Error elementos finitos')
hold off
shg

figure(3)
hold on
grid on
[tt,xx] = meshgrid(t,x);
surf(tt,xx,c)
xlabel('Tiempo (anos)')
ylabel('Precio activo (euros)')
zlabel('Precio opcion (euros)')
hold off
shg

end

```

Bibliografía

- [1] Fischer Black, Myron Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Chicago Journals, 1973.
- [2] P.A. Raviart, J.M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, 1988.
- [3] Morris H. DeGroot, Mark J. Schervish, *Probability and Statistics*, Carnegie Mellon University, 4th Edition, octubre 2010. Pearson
- [4] John C. Hull, *Options, Futures and other Derivatives*, Maple Financial Group Professor of Derivates and Risk Management, University of Toronto, 7th edition, 2009.
- [5] Carlos Vázquez Cendón, *Métodos numéricos para las finanzas*, Departamento de Matemáticas, Universidade da Coruña, 2010.
- [6] Juan Casado Díaz, *Apuntes de Análisis Funcional y Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla, Curso 2017/2018.
- [7] Vanessa Jiménez Terradillos, *Métodos Numéricos para la Valoración de Opciones*, Universidad de Valladolid.
- [8] María Suárez Taboada, *Numerical methods to price interest rate derivatives based on LIBOR Market Model for forward rates*, Departamento de Matemáticas, Universidade da Coruña, 2012.
- [9] Pablo Fernández, *Utilización de la fórmula de Black y Scholes para valorar opciones*, Universidad de Navarra, 1997.
- [10] <http://www.economipedia.com>
- [11] <http://www.fondos.com/blog>