El espacio de Minkowski. La Relatividad Especial

Silvia González Galindo

Trabajo Fin de Grado
Doble Grado en Física y Matemáticas

Universidad de Sevilla

Índice general

Resumen

En 1905, Einstein publicó la teoría de la Relatividad Especial, que describía satisfactoriamente el movimiento de partículas en sistemas de referencias inerciales. Para el posterior desarrollo de la teoría fue crucial que Minkowski unificara espacio y tiempo en una única entidad, el espacio-tiempo. Desde este punto de vista matemático, los sucesos físicos son representados por puntos en el espacio de Minkowski. El objetivo de este trabajo es describir el espacio de Minkowski como una variedad de Lorentz de cuatro dimensiones en la que se pueden deducir algunas consecuencias de la Relatividad Especial, como la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud. Para conseguir este objetivo, se definirán las transformaciones de Lorentz a partir de las cartas de Minkowski para dotar al espacio de Minkowski de estructura de espacio vectorial. Además, se estudiará la estructura causal del mismo, así como su orientabilidad. Por último, se definirán algunos conceptos físicos como los observadores y sus relojes.

Abstract

In 1905 Einstein published his theory about Special Relativity, which successfully explained the motion of particles in inertial reference frames. It was decisive for the further development of the theory that Minkowski unified space and time into one single entity, the spacetime. From this mathematical point of view, physical events are treated as points in Minkowski spacetime. The aim of this work is to describe Minkowski spacetime as a fourth-dimensional Lorentz manifold in which some consequences from Special Relativity can be developed, as time dilation and length contraction. In order to achieve this objetive, Lorentz transformations will be defined based on Minkowski charts to endow Minkowski space with a vector space structure. Indeed, its causal structure will be studied, as well as orientability. Finally, some physical notions will be defined, as observers and its clocks.

Introducción

En 1905, Albert Einstein publicó su trabajo "*Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*", en el que se desarrollaba la teoría de la Relatividad Especial. Ésta se basaba en dos suposiciones: el principio de la relatividad (independencia de las leyes con respecto a la elección del sistema inercial) y la constancia de la velocidad de la luz. Bajo estas condiciones, eran necesarias unas nuevas transformaciones que dejaran invariantes las ecuaciones de Maxwell ante un cambio de sistema de referencia inercial: las transformaciones de Lorentz. Uno de los grandes impactos que tuvo la teoría de la Relatividad Especial fue la pérdida del carácter absoluto del espacio y del tiempo.

Fue en 1908 cuando Hermann Minkowski dio la formulación de la Relatividad Especial en un espacio de cuatro dimensiones, tres espaciales y una temporal, conocido como espacio de Minkowski. Aunque Henri Poincaré, en 1906, fue el primero en dar una interpretación geométrica a las transformaciones de Lorentz como rotaciones en un espacio cuatridimensional, con el tiempo como cuarta componente, fue Minkowski quien consiguió explicar satisfactoriamente las consecuencias del postulado de la relatividad sobre la dimensión del espacio considerado. Las ideas de Minkowski tuvieron tal impacto en la física del siglo veinte que la física moderna no puede imaginarse sin la noción de espacio-tiempo. Minkowski se refería al espacio-tiempo como "el mundo". De esta forma, los eventos son puntos del mundo, un conjunto de eventos asociados a una partícula constituyen una línea de universo o de mundo y las leyes físicas de la interacción de las partículas se consideran como las relaciones geométricas entre sus líneas de universo.

El objetivo de este trabajo es describir matemáticamente el espacio de Minkowski para, posteriormente, poder estudiar el movimiento de partículas puntuales masivas en el contexto de la Relatividad Especial y obtener conclusiones de ello. En particular, se van a deducir los fenómenos de dilatación en el tiempo y contracción de la longitud. En primer lugar, se definirá en qué consiste un espacio-tiempo de Minkowski a partir de una serie de axiomas, viendo que se trata de un caso particular de variedad de Lorentz y se presentarán las cartas de Minkowski, así como las transformaciones de Lorentz, previo estudio de las matrices de Lorentz. Esto nos permitirá deducir que el espacio de Minkowski tiene estructura de espacio vectorial en sí mismo, por lo que en lugar de tomar como vectores los elementos del espacio tangente pueden considerarse los propios puntos del espacio de Minkowski. Este hecho, junto con la definición de un producto escalar, lo dota de estructura de espacio vectorial de Lorentz. Además, se estudiará la topología del espacio y su independencia respecto de la carta de Minkowski elegida dentro de un atlas de la variedad. La estructura de espacio vectorial de Lorentz nos permitirá hacer una clasificación de los vectores y determinar si tienen carácter causal y la estructura de variedad de Lorentz, probar la orientabilidad en el tiempo de un espacio de Minkowski y dar condiciones para determinar su orientabilidad a partir de los vectores de una base. Una vez hecha esta construcción matemática, definiremos los conceptos físicos necesarios, como pueden ser las líneas de universo, los observadores, sistemas de referencias y relojes, para medir tiempos y coordenadas espaciales respecto de un observador (los conceptos de tiempo y espacio no son absolutos en la Relatividad Especial, dependen del observador). Por último, veremos como cambia la velocidad Newtoniana de un observador a otro debido a la pérdida del carácter absoluto del espacio y el tiempo. En este punto, se obtendrán fácilmente los resultados buscados: la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud.

Preliminares

Para el desarrollo de este trabajo se suponen conocidos todos los antecedentes y resultados concernientes a un curso general de "Variedades Diferenciables", que pueden encontrarse en los libros [3, 6, 7]. En concreto, seguiremos las notaciones empleadas en [7]. Otros resultados que necesitaremos los listamos a continuación sin demostración.

0.1. Espacios vectoriales de Lorentz

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. Denotaremos por V^* a su espacio vectorial dual.

Definición 0.1.1. *Un* **producto escalar** *en V es una forma bilineal, simétrica y no degenerada, es decir, una aplicación bilineal $g : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que $g(u, v) = g(v, u)$, para todos $u, v \in V$ y tal que si $g(u, v) = 0$ para todo $v \in V$, entonces se implica que $u = 0$.*

Definición 0.1.2. *Una forma bilineal simétrica g sobre V se dice que es* **definida positiva** *si $g(v, v) > 0$ para todo $v \in V, v \neq 0$. En caso contrario, se denomina* **indefinida**.

Definición 0.1.3. *Sea g una forma bilineal simétrica sobre V. Si existe una base de V,*

$$\{e_1, \ldots, e_n\},$$

tal que:

$$g(e_\alpha, e_\beta) = \sum_{j=1}^{n-1} \delta_{\alpha j}\delta_{\beta j} - \delta_{\alpha n}\delta_{\beta n}, \tag{0.1}$$

con $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$, entonces el par (V, g) se denomina **espacio vectorial de Lorentz**. *En ese caso, la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ se denomina base de Minkowski.*

Proposición 0.1.4. *Una forma bilineal g sobre V cumpliendo (0.1) es un producto escalar en V.*

Proposición 0.1.5. *Sean (V, g) un espacio vectorial de Lorentz y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de Minkowski. Sea $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ la correspondiente base dual de V^*. Entonces:*

$$g = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \eta_{\alpha\beta}\varepsilon^\alpha \otimes \varepsilon^\beta,$$

siendo $\eta = (\eta_{\alpha\beta})$ = diag(1,1,1,-1).

0.2. Variedades de Lorentz

Una versión más desarrollada de esta sección puede encontrarse en [7].

Notación 0.2.1. Sea M una C^k-variedad, con $k \geq 1$, de dimensión n y sea $p \in M$. El espacio tensorial formado por $q + r$ factores, de los cuales q son T_pM y r son T_pM^*, se representa por $T_p(q, r)$. Sea (U, φ) una carta local de la estructura de M, con coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ tal que $p \in U$. Entonces, cada elemento $S \in T_p(q, r)$ se puede escribir como:

$$S = \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_q,\beta_1,\cdots,\beta_r=1}^{n} S^{\alpha_1,\cdots,\alpha_q}_{\beta_1,\cdots,\beta_r} \partial_{x^{\alpha_1}} \otimes \cdots \otimes \partial_{x^{\alpha_q}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\beta_r}$$

y se dice que S es un (q, r)-tensor en p, donde ∂_{x^α} denota al vector tangente en p:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(p).$$

Definición 0.2.2. *Sea M una C^k-variedad, con $k \geq 1$, de dimensión n y sea $\mathcal{A}$ un atlas de M. Un (q, r)-campo tensorial en M es una aplicación F que a cada punto $p \in M$ le hace corresponder un (q, r)-tensor en p. Si para cada carta local $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, con coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$,*

$$F(p) = \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_q,\beta_1,\cdots,\beta_r=1}^{n} F^{\alpha_1,\cdots,\alpha_q}_{\beta_1,\cdots,\beta_r} \partial_{x^{\alpha_1}} \otimes \cdots \otimes \partial_{x^{\alpha_q}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\beta_r},$$

para todo $p \in U$, es decir, si

$$F = \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_q,\beta_1,\cdots,\beta_r=1}^{n} F^{\alpha_1,\cdots,\alpha_q}_{\beta_1,\cdots,\beta_r} \partial_{x^{\alpha_1}} \otimes \cdots \otimes \partial_{x^{\alpha_q}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\beta_r},$$

en U (donde, salvo que haya lugar a equívocos, de aquí en adelante utilizaremos la misma notación para funciones-valores, campos tensoriales-vectores tangentes y 1-formas-covectores, respectivamente), se dice entonces que F es un **C^j-campo tensorial***, con $j \leq k$, en M si $F^{\alpha_1,\cdots,\alpha_q}_{\beta_1,\cdots,\beta_r} \circ \varphi^{-1}$ está en C^j.*

Definición 0.2.3. *La* **signatura** *s de una matriz se define como $s = n - 2m$, donde n es la dimensión de la matriz y m el número de autovalores negativos.*

Definición 0.2.4. *Sea M una C^k-variedad, con $k \geq 1$, de dimensión n. Se dice que un (0,2)-campo tensorial g en M es una* **métrica** *si se verifica que:*

1. *g es un C^k-campo tensorial simétrico y no degenerado, es decir, dado $p \in M$, para todos $u, v \in T_pM$ se cumple que $g(p)(u, v) = g(p)(v, u)$ y dado $w \in T_pM$, si se verifica que $g(p)(w, v) = 0$ para todo $v \in T_pM$, entonces $w = 0$.*

2. *Dado $p \in M$ y $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ con $p \in U$ tal que:*

$$g(p) = \sum_{k,\lambda=1}^{n} g_{k\lambda}(p) dx^k_p \otimes dx^\lambda_p,$$

la matriz $(g_{k\lambda}(p))$ tiene la misma signatura para todo $p \in M$.

Definición 0.2.5. *Una variedad de dimensión n se dice* **Riemanniana** *si $s = n$ (esto es, que la matriz $(g_{k\lambda}(p))$ de la definición anterior no tenga autovalores negativos) y* **semi-Riemanniana** *en caso contrario.*

Definición 0.2.6. *Una variedad semi-Riemanniana de dimensión n se denomina* **variedad de Lorentz** *si tiene signatura $s = n - 2$, es decir, si el número de autovalores negativos es 1.*

0.3. Conexiones lineales

Las definiciones y resultados de esta sección, así como más detalles acerca de los mismos, pueden encontrarse en [1].

Definición 0.3.1. *Una* **conexión lineal** *en una variedad diferenciable M de dimensión n es una aplicación $v \to \nabla v$ que envía gérmenes de campos vectoriales diferenciables en X a gérmenes de campos tensoriales diferenciables de tipo (1, 1) en X tal que:*

$$\nabla(v + w) = \nabla v + \nabla w$$

y

$$\nabla(fv) = df \otimes v + f\nabla v,$$

donde f es un germen de función diferenciable en X. El tensor ∇v se llama **derivada covariante** *de v y se definen los* **coeficientes de conexión** *γ_{ki}^j mediante la relación:*

$$\nabla e_i = \sum_{k,j=1}^{n} \gamma_{ki}^j \theta^k \otimes e_j,$$

donde $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ y $\{\theta^i\}_{i=1,\ldots,n}$ son bases duales para el espacio de gérmenes de campos vectoriales y su espacio dual.

Localmente, si $(x^1, \ldots, x^n)$ son las coordenadas de una carta local de M, en términos de las bases naturales,

$$\nabla v = \sum_{i,l,k=1}^{n} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i v^l \right) dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i},$$

donde Γ_{kl}^i son los coeficientes de conexión de la base natural $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1,\ldots,n}$, denominados **símbolos de Christoffel**.

Definición 0.3.2. *Se dice que v es* **paralelo** *si verifica que $\nabla v = 0$.*

Definición 0.3.3. *La derivada covariante de v en la dirección u se define como $\nabla_u v = (\nabla v)(u)$.*

Definición 0.3.4. *Un vector v se dice* **paralelo a lo largo de una curva**

$$C : I \to M : t \mapsto C(t),$$

si, para todo punto de C, $\nabla_u v = 0$, con $u = \dfrac{dC}{dt}$.

Definición 0.3.5. *Se dice que una curva* $C : I \to M : t \mapsto C(t)$*, es una* **geodésica afín** *en* X *si existe una función* λ *en* $\mathbb{R}$ *tal que* $\nabla_u u = \lambda(t)u$*, con* $u = dC/dt$*. Si* $\nabla_u u = 0$*, entonces* ***C*** *se llama* **geodésica** *y a su parámetro se le denomina* **parámetro afín***. En este caso, se suele decir que* C *es una geodésica con parámetro afín.*

Capítulo 1

Matrices de Lorentz

En este capítulo se va a introducir un concepto que es fundamental para el desarrollo de la Teoría de la Relatividad Especial, en concreto, para definir las transformaciones de Lorentz en el Capítulo 2: las matrices de Lorentz. Estas matrices forman un grupo denominado Grupo (homogéneo) de Lorentz, que constituye el grupo de simetrías del espacio-tiempo de Minkowski. Entre las simetrías que conforman dicho grupo se encuentran, por ejemplo las rotaciones, las inversiones y las aceleraciones ('boost') en una dirección. En general, se pueden definir sin necesidad de ninguna estructura de espacio previa. De su caracterización se pueden deducir una serie de propiedades que permitirá clasificarlas en subgrupos de particular interés, como el de las matrices especiales (que son las matrices que comunmente representan las transformaciones de Lorentz de unas coordenadas a otras en Relatividad Especial) o el Grupo Propio de Lorentz.

1.1. Definición y Primeras Propiedades

En esta primera sección se va a introducir la definición de matriz de Lorentz. Para ello, se utiliza la matriz η = diag(1,1,1,-1), que en el contexto de la Relatividad Especial se conoce como tensor métrico. Posteriormente, se van a deducir una serie de propiedades que van a permitir definir el Grupo de Lorentz.

Definición 1.1.1. *Sean $L = (L_\alpha^\beta)$ una matriz 4x4 y $\eta = (\eta_{\alpha\beta})$ = diag(1,1,1,-1) cumpliendo*

$$\eta_{\kappa\lambda} L_\alpha^\kappa L_\beta^\lambda = \eta_{\alpha\beta},$$

o, en notación matricial,

$$L^T \cdot \eta \cdot L = \eta. \tag{1.1}$$

Entonces se dice que L es una **matriz de Lorentz***, que se abreviará como ML.*

Proposición 1.1.2. *Sea L una ML. Se verifican las siguientes propiedades:*

1. *L es no singular y, por tanto, existe su inversa.*
2. *La traspuesta de L es una ML.*
3. *La inversa es también una ML.*

4. *La identidad,* $\mathbf{1}_4$*, y* η *son ML.*

5. *Si* L_1 *y* L_2 *son ML, entonces el producto* $L_1 \cdot L_2$ *lo es.*

Demostración.

1. Tomando determinante en la Ecuación (1.1) y, sabiendo que det η = -1 y det L^T = det L, queda que (det L)^2 = 1, luego det L = $\pm$ 1. Como es distinto de cero, la matriz es regular y, por tanto, existe la inversa.

2. Si tomamos inversa en la Ecuación (1.1) se obtiene:
$$L^{-1} \cdot \eta \cdot (L^T)^{-1} = \eta,$$
donde se ha usado que $\eta^{-1} = \eta$. Multiplicando a izquierda por L y a derecha por L^T y, sabiendo que $(L^T)^T = L$, queda:
$$\eta = L \cdot \eta \cdot (L^T).$$

3. Multiplicando en la Ecuación (1.1) a izquierda por $(L^T)^{-1}$ y a derecha por L^{-1}, se deduce:
$$\eta = (L^T)^{-1} \cdot \eta \cdot L^{-1}$$
y, sabiendo que $(L^T)^{-1} = (L^{-1})^T$, queda demostrado que L^{-1} es una ML.

4. La identidad es una ML trivialmente y sabiendo que $\eta^2 = \eta$, queda probado que ésta también lo es.

5. Sabiendo que L_1 y L_2 cumplen (1.1) se llega a:
$$(L_1 \cdot L_2)^T \cdot \eta \cdot L_1 \cdot L_2 = L_2^T \cdot L_1^T \cdot \eta \cdot L_1 \cdot L_2 = L_2^T \cdot \eta \cdot L_2 = \eta,$$
es decir, $L_1 \cdot L_2$ también cumple (1.1).

□

Definición 1.1.3. *Se define* $\mathcal{L}$ *como el conjunto de todas las matrices de Lorentz.*

Proposición 1.1.4. *El conjunto* $\mathcal{L}$*, con el producto de matrices como operación, es un grupo.*

Demostración. Es bien sabido que el producto de matrices es asociativo. Por otra parte, de las propiedades de las ML de la Proposición 1.1.2, se deduce que es una operación interna en $\mathcal{L}$. Además, también por dichas propiedades, tenemos que toda ML tiene inversa que, también, es ML y que la matriz identidad $\mathbf{1}_4$ es una ML, con lo que es el elemento neutro de $\mathcal{L}$. □

Nota 1.1.5. El grupo $\mathcal{L}$ es un grupo infinito, ya que contiene un subgrupo, que se definirá posteriormente en este capítulo, llamado el grupo de las matrices de Lorentz especiales, $\mathcal{L}_s$, que es infinito.

Definición 1.1.6. *Al grupo* $(\mathcal{L}, \cdot)$ *se le denomina* **Grupo de Lorentz***.*

Proposición 1.1.7. *Sea L una ML. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

1.
$$L^{-1} = \eta \cdot L^T \cdot \eta. \tag{1.2}$$

2.
$$(L^{-1})^{\alpha}_{\lambda} L^{\lambda}_{\beta} = \delta_{\alpha\beta}.$$

3.
$$|L^4_4| \geq 1. \tag{1.3}$$

Demostración. 1. De (1.1) se deduce:

$$\eta \cdot L^T \cdot \eta \cdot L = \eta \cdot \eta = \mathbf{1}_4.$$

Multiplicando por la inversa de L:

$$L^{-1} = \eta \cdot L^T \cdot \eta \cdot L \cdot L^{-1} = \eta \cdot L^T \cdot \eta.$$

2. De la Ecuación (1.2) se deduce la expresión de los elementos de L^{-1},

$$(L^{-1})^{\alpha}_{\beta} = \sum_{\kappa,\lambda=1}^{4} \eta_{\alpha\kappa} L^{\lambda}_{\kappa} \eta_{\lambda\beta} = \eta_{\alpha\alpha} L^{\beta}_{\alpha} \eta_{\beta\beta}, \tag{1.4}$$

de donde:

$$\begin{array}{ll} (L^{-1})^{\alpha}_{\beta} = L^{\beta}_{\alpha} & \text{si} \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad o \quad \alpha, \beta = 4, \\ (L^{-1})^{\alpha}_{\beta} = -L^{\beta}_{\alpha} & \text{en otro caso.} \end{array}$$

Por tanto, se cumple:

$$(L^{-1})^{\alpha}_{\lambda} L^{\lambda}_{\beta} = \sum_{\lambda=1}^{4} \eta_{\alpha\alpha} L^{\lambda}_{\alpha} \eta_{\lambda\lambda} L^{\lambda}_{\beta} = \eta_{\alpha\alpha} \eta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}.$$

3. De la Ecuación (1.1), para $\alpha = \beta = 4$ se deduce:

$$-1 = L^{\alpha}_4 \eta_{\alpha\beta} L^{\beta}_4 = \sum_{i=1}^{3} (L^i_4)^2 - (L^4_4)^2.$$

Despejando:

$$(L^4_4)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (L^i_4)^2 \geq 1. \tag{1.5}$$

□

1.2. Matrices de Lorentz ortogonales

Como se ha visto en la Proposición 1.1.7(3), el elemento (4,4) de las matrices de Lorentz cumple que su valor absoluto es mayor o igual que 1. Este hecho es de particular interés para la noción física del tiempo en la teoría especial de la relatividad, ya que tiene un comportamiento distinto al de la parte espacial. Un tipo concreto de matrices Lorentz son aquellas que cumplen $|L_4^4| = 1$, cuyas propiedades se detallan a continuación.

Proposición 1.2.1. *Sea L una ML con $|L_4^4| = 1$. Entonces, L es de la forma:*

$$L = \begin{pmatrix} Q & 0_3^T \\ 0_3 & \pm 1 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

donde Q es una matriz 3x3 ortogonal y $0_3 = (0, 0, 0)$.

Demostración. De la Ecuación (1.5) y la hipótesis del enunciado se deduce que $L_4^i = 0$ para $i = 1, 2, 3$. Por tanto, escribiendo L por bloques resulta:

$$L = \begin{pmatrix} Q & 0_3^T \\ q & \pm 1 \end{pmatrix},$$

donde Q es una matriz 3x3 y q un vector fila de 3 componentes. Si consideramos su traspuesta:

$$L^T = \begin{pmatrix} Q^T & q^T \\ 0_3 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

como ésta es también una ML, con $(L^T)_4^4 = L_4^4 = \pm 1$, se deduce que $q^T = 0$. Por último, utilizando la caracterización de ML dada por (1.1) para L y para su traspuesta, se tiene que $Q^T Q = QQ^T = \mathbf{1}_3$, por lo que Q es ortogonal. □

Corolario 1.2.2. *Si L es una ML de la forma:*

$$L = \begin{pmatrix} Q & 0_3^T \\ q & L_4^4 \end{pmatrix},$$

entonces $|L_4^4| = 1$, $q = 0$ y Q es ortogonal. Recíprocamente, si L es de la forma:

$$L = \begin{pmatrix} Q & 0_3^T \\ 0_3 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

con Q ortogonal, entonces L es una ML.

Demostración. De (1.5) se deduce que $L_4^4 = \pm 1$ y, por la Proposición 1.2.1, se tiene el resultado. Veamos ahora el recíproco. Basta comprobar que L cumple (1.1), teniendo en cuenta que Q es ortogonal. En efecto:

$$L^T \cdot \eta \cdot L = \begin{pmatrix} Q^T & 0_3^T \\ 0_3 & \pm 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0_3^T \\ 0_3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q & 0_3^T \\ 0_3 & \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^T Q & 0_3^T \\ 0_3 & -1 \end{pmatrix} = \eta.$$

□

Observación 1.2.3. Las matrices de la forma (1.6) tienen las siguientes propiedades:

1. El producto de dos matrices de la forma (1.6) tiene también esta forma ya que el producto de dos matrices ortogonales es ortogonal.
2. Como $L \cdot L^T = \mathbf{1}_4$, se deduce que $L^{-1} = L^T$ y, por tanto, L^{-1} es también de la forma (1.6).

Las matrices de la forma (1.6) se denominan **matrices rotacionales**.

Observación 1.2.4. Sea L una matriz generérica 4x4 escrita de la siguiente forma

$$L = \begin{pmatrix} K & q \\ p & r \end{pmatrix},$$

donde K es una matriz 3x3, p y q vectores fila y columna respectivamente y r un número real. Para que L sea una ML se tiene que cumplir (1.1). En forma matricial:

$$L^T \eta L = \begin{pmatrix} K^T \cdot K - p^T \cdot p & K^T \cdot q - r \cdot p^T \\ q^T \cdot K - r \cdot p & -q^T \cdot q - r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_3 & 0_3^T \\ 0_3 & -1 \end{pmatrix},$$

es decir, se tienen que dar las igualdades:

$$K^T \cdot K - p^T \cdot p = \mathbf{1}_3, \quad K^T \cdot q - r \cdot p^T = 0_3^T, \quad q^T \cdot q + r^2 = 1. \tag{1.7}$$

1.3. Matrices de Lorentz propias y ortócronas

El grupo de las matrices de Lorentz, $\mathcal{L}$, se puede clasificar en cuatro subgrupos disjuntos y cuya unión conforman el grupo total. Para ello, definimos los siguientes conceptos:

Definición 1.3.1. *Sea L una ML. Entonces:*

1. *L se dice propia si y sólo si det L = 1. En caso contrario (det L = -1), L se dice impropia.*
2. *L se dice ortócrona si y sólo si* $L_4^4 \geq 1$*. Por (1.3), esta condición es equivalente a que* $L_4^4 > 0$*. Por el contrario, si* $L_4^4 \leq 1$ *(o, equivalentemente,* $L_4^4 < 0$*), L se dice no ortócrona.*

Proposición 1.3.2. *Sea* L *una ML. Se tiene que:*

1. *Si L es propia o impropia,* L^T *y* L^{-1} *heredan esta propiedad.*
2. *Si L es ortócrona o no ortócrona,* L^T *y* L^{-1} *lo son.*

Demostración.

1. De (1.2) se deduce que det L^{-1} = det L^T. Además, es conocido que det L^T = det L. Por tanto, si el determinante de L es 1 (o -1), el de L^T y L^{-1} también.

2. Trivialmente se tiene que $(L^T)^4_4 = L^4_4$. Por otra parte, de (1.4) se deduce que $(L^{-1})^4_4 = L^4_4$. Como la cuarta componente de estas matrices coinciden, si la de L es 1 (o -1), la de L^T y L^{-1} también lo serán.

□

Proposición 1.3.3. *Sea L una ML. Se verifica que:*

1. *Si L_1 y L_2 son propias, entonces su producto también lo es.*
2. *Si L_1 y L_2 son ortócronas, entonces su producto también lo es.*
3. *Si L_1 y L_2 son no ortócronas, entonces su producto es ortócrono.*
4. *Si L_1 es ortócrona y L_2 es no ortócrona, entonces su producto es no ortócrono.*

Demostración.

1. Se tiene que det $(L_1 \cdot L_2)$ = det $L_1 \cdot$ det $L_2 = 1$.
2. Sea $L = L_1 \cdot L_2$. Hay que probar que $L^4_4 = (L_1)^4_\kappa (L_2)^\kappa_4 > 0$. Desarrollando la suma en κ se tiene:
$$(L_1)^4_\kappa (L_2)^\kappa_4 = (L_1)^4_4 (L_2)^4_4 + \sum_{i=1}^{3} (L_1)^4_i (L_2)^i_4. \tag{1.8}$$
Por otro lado, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, tenemos que:
$$|\sum_{i=1}^{3} (L_1)^4_i (L_2)^i_4|^2 \leq \sum_{i=1}^{3} [(L_1)^4_i]^2 \sum_{i=1}^{3} [(L_2)^i_4]^2 = ([(L_1)^4_4]^2 - 1)([(L_2)^4_4]^2 - 1). \tag{1.9}$$
Por tanto, como L_1 y L_2 son ortócronas, se cumple:
$$|\sum_{i=1}^{3} (L_1)^4_i (L_2)^i_4| < (L_1)^4_4 (L_2)^4_4. \tag{1.10}$$
Sustituyendo en (1.8), se obtiene:
$$(L_1)^4_\kappa (L_2)^\kappa_4 \geq (L_1)^4_4 (L_2)^4_4 - |\sum_{i=1}^{3} (L_1)^4_i (L_2)^i_4| > 0. \tag{1.11}$$
3. Si L_1 y L_2 son no ortócronas, se sigue cumpliendo (1.10) y, por tanto, (1.11).
4. Ahora, si una de ellas es ortócrona y la otra no ortócrona, de (1.9) se deduce:
$$|\sum_{i=1}^{3} (L_1)^4_i (L_2)^i_4| < |(L_1)^4_4 (L_2)^4_4| = -(L_1)^4_4 (L_2)^4_4.$$

Sustituyendo esta desigualdad en (1.8), se obtiene:

$$(L_1)^4_\kappa (L_2)^\kappa_4 \leq (L_1)^4_4 (L_2)^4_4 + |\sum_{i=1}^{3} (L_1)^4_i (L_2)^i_4| < 0.$$

□

Observación 1.3.4. Observemos que cambiar el signo de L^4_4 convierte una ML ortócrona en una no ortócrona y recíprocamente.

Consideramos ahora una ML, L, y una matriz L' definida de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} L'^\alpha_\beta = L^\alpha_\beta & si & (\alpha, \beta) \neq (4,4), \\ L'^\alpha_\beta = -L^\alpha_\beta & si & (\alpha, \beta) = (4,4). \end{array}$$

De esta definición se deducen los siguientes resultados:

Proposición 1.3.5. *L' es una ML si y sólo si L es de la forma (1.6).*

Demostración. Si L es de la forma (1.6), entonces L' también lo es, ya que L' sólo se diferencia de L en el signo de la componente (4,4) y, por el Corolario 1.2.2, es una ML. Veamos el recíproco.

Si L' es una ML, entonces se cumple (1.7) para L y L', siendo $r = L^4_4$ para L y $r' = L'^4_4 = -r$ para L'. De la condición:

$$K^T \cdot q - r \cdot p^T = \mathbf{0}^T_3 = K^T \cdot q + r \cdot p^T,$$

se deduce que $r \cdot p^T = \mathbf{0}^T_3$. Como L' es una ML, $|r| > 1$, luego $p = \mathbf{0}_3$. Por tanto, $K^T \cdot K = \mathbf{1}_3$ y, al cumplirse también para la traspuesta, se obtiene que K es ortogonal. Por último, como $r^2 > 1$ y $q^T \cdot q \geq 0$, de la condición $q^T \cdot q + r^2 = 1$ se deduce que $q = \mathbf{0}^T_3$ y $r = \pm 1$. □

Proposición 1.3.6. *Sean L, L' dos ML de la forma (1.6) con componente (4,4) igual a 1. Entonces:*

1. *L y L^{-1} son propias y ortócronas si det Q = 1.*
2. *$L \cdot L'$ es de la forma (1.6) y es propia y ortócrona si det L = det L' = ± 1.*

Demostración. Por las hipótesis del enunciado, la matriz L es de la forma:

$$L = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y, por tanto, L^{-1} es igual pero con Q^T en lugar de Q. Entonces, det L^{-1} = det L = det Q = det Q^T = 1. Como tanto L como L^{-1} tienen componente (4,4) igual a 1 y determinante 1, ambas son propias y ortócronas. Para la segunda parte de la prueba, consideramos el producto de L con L'

$$L \cdot L' = \begin{pmatrix} Q \cdot Q' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que efectivamente es de la forma (1.6) y ortócrona. Por último, falta ver que det $(L \cdot L')$ = 1. Como la cuarta componente de L, L' y $L \cdot L'$ es 1, det $(L \cdot L')$ = det $(Q \cdot Q')$ = det Q · det Q' = det L · det L' = 1. □

1.4. Matrices de Lorentz especiales.

En esta sección vamos a considerar matrices de la forma:

$$S_\nu = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & -\nu k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\nu k & 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

donde $\nu \in (-1, 1)$ y $k = (1 - \nu^2)^{-1/2} > 0$.

Definición 1.4.1. *Las matrices de la forma (1.12) se denominan* **matrices de Lorentz especiales**.

Proposición 1.4.2. *Se verifica que S_ν es una ML propia y ortócrona, para cualquier $\nu \in (-1, 1)$.*

Demostración. Se observa que $S_\nu = S_\nu^T$. Veamos que se verifica la condición (1.1.1):

$$S_\nu \cdot \eta \cdot S_\nu = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & -\nu k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\nu k & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & -\nu k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\nu k & 0 & 0 & k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k^2 - \nu^2 k^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu^2 k^2 - k^2 \end{pmatrix} = \eta.$$

La última igualdad se deduce de que $k^2 - \nu^2 k^2 = k^2(1 - \nu^2) = 1$, teniendo en cuenta la definición de k. Además, det S_ν = $k^2 - \nu^2 k^2$ = 1, luego S_ν es propia y, como $(S_\nu)_4^4 = k > 0$, es ortócrona. □

Proposición 1.4.3. *Si S_{ν_1} y S_{ν_2} son ML especiales, de la forma (1.12), entonces su producto también lo es.*

Demostración. El producto $S_{\nu_1} \cdot S_{\nu_2}$ queda:

$$S_{\nu_1} \cdot S_{\nu_2} = \begin{pmatrix} k_1 k_2 (1 + \nu_1 \nu_2) & 0 & 0 & -k_1 k_2 (\nu_1 + \nu_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k_1 k_2 (\nu_1 + \nu_2) & 0 & 0 & k_1 k_2 (1 + \nu_1 \nu_2) \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Por analogía con (1.12) definimos los elementos (1,1) y (1,4) como:

$$k = k_1k_2(1+\nu_1\nu_2),$$
$$\nu k = k_1k_2(\nu_1+\nu_2).$$

Entonces:

$$\nu = \frac{\nu_1+\nu_2}{1+\nu_1\nu_2}.$$

Basta comprobar que $\nu \in (-1,1)$ y que $k = (1-\nu^2)^{-1/2}$. Para ver que $\nu \in (-1,1)$, consideramos la función

$$f(\nu_1,\nu_2) = \frac{\nu_1+\nu_2}{1+\nu_1\nu_2},$$

con $\nu_1, \nu_2 \in (-1,1)$. Estudiando la derivada parcial respecto de ν_1 para cada ν_2 fijo,

$$\frac{\partial f}{\partial \nu_1} = \frac{1-\nu_2^2}{(1+\nu_1\nu_2)^2} > 0,$$

se obtiene que ésta es positiva, y por tanto f es creciente en ν_1, para ν_2 fijo. Como

$$f(-1,\nu_2) = \frac{-1+\nu_2}{1-\nu_2} = -1$$

y

$$f(1,\nu_2) = \frac{1+\nu_2}{1+\nu_2} = 1,$$

deducimos que $f(\nu_1,\nu_2) \in (-1,1)$. Puesto que las variables ν_1 y ν_2 son intercambiables, se obtiene lo mismo para ν_2 y, por tanto, $\nu \in (-1,1)$.

Por otro lado,

$$1-\nu^2 = \frac{(1+\nu_1\nu_2)^2-(\nu_1+\nu_2)^2}{(1+\nu_1\nu_2)^2} = \frac{1+\nu_1^2\nu_2^2-\nu_1^2-\nu_2^2}{(1+\nu_1\nu_2)^2}$$

y

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k_1^2k_2^2(1+\nu_1\nu_2)^2} = \frac{(1-\nu_1^2)(1-\nu_2^2)}{(1+\nu_1\nu_2)^2} = \frac{1-\nu_1^2-\nu_2^2+\nu_1^2\nu_2^2}{(1+\nu_1\nu_2)^2},$$

luego, efectivamente, $1/k^2 = 1-\nu^2$, es decir, $k = (1-\nu^2)^{-1/2}$. □

Observación 1.4.4. De (1.13) se deduce que $S_{\nu_1}\cdot S_{\nu_2} = S_{\nu_2}\cdot S_{\nu_1}$, para cualesquiera ν_1 y ν_2.

Observación 1.4.5. De (1.12) se deduce que $S_0 = \mathbf{1}_4$, y, haciendo $\nu_2 = -\nu_1 = -\nu$ en (1.13), se tiene que $S_{-\nu} = S_\nu^{-1}$.

1.5. Subgrupos de $\mathcal{L}$

Dentro del grupo de Lorentz, $\mathcal{L}$, hay ciertos subgrupos de especial interés cuyas propiedades hemos analizado a lo largo de este capítulo. Estos subgrupos son:

$$\begin{array}{ll} \textit{Propio}: & \mathcal{L}_p = \{L \in \mathcal{L} : \det L = 1\} \\ \textit{Ortócrono}: & \mathcal{L}_{oc} = \{L \in \mathcal{L} : L_4^4 > 0\} \\ \textit{Especial}: & \mathcal{L}_s = \{L \in \mathcal{L} : L = S_\nu, \nu \in (-1,1)\} \\ \textit{Ortogonal}: & \mathcal{L}_{og} = \{L \in \mathcal{L} : L \text{ es de la forma (1.6)}\} \end{array} \tag{1.14}$$

Estos conjuntos son grupos por las siguientes propiedades ya estudiadas (en todos los casos la asociatividad se hereda de $\mathcal{L}$ y la identidad pertenece a todos ellos trivialmente):

1. $\mathcal{L}_p$ por las Proposiciones 1.3.2 (1) y 1.3.3 (1).
2. $\mathcal{L}_{oc}$ por las Proposiciones 1.3.2 (2) y 1.3.3 (2).
3. $\mathcal{L}_s$ por la Proposición 1.4.3 y la Observación 1.4.5.
4. $\mathcal{L}_{og}$ por la Observación 1.2.3.

Observación 1.5.1.

1. $\mathcal{L}_s$ es un grupo Abeliano por la Observación 1.4.4.
2. $\mathcal{L}_s \subset \mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_{oc}$.
3. Todos los grupos de (1.14) son infinitos. $\mathcal{L}_s$ lo es porque ν toma valores de forma continua entre -1 y 1, $\mathcal{L}_p$ y $\mathcal{L}_{oc}$ porque contienen a $\mathcal{L}_s$, y $\mathcal{L}_{og}$ porque existen infinitas matrices ortogonales 3x3.

Capítulo 2

Propiedades básicas de la Relatividad Especial

En este capítulo se van a introducir los espacio-tiempo de Minkowski, que es el objeto de estudio de este trabajo. En particular, se van a definir las cartas y coordenadas de Minkowski, herramienta imprescindible para el posterior desarrollo de otros conceptos. En el espacio de Minkowski se van a definir las transformaciones de Lorentz, para lo que previamente se han desarrollado en el Capítulo 1 las matrices de Lorentz, y se va a establecer la relación que existe entre ellas.

2.1. Espacio de Minkowski

La definición de un espacio de Minkowski consta de cinco axiomas que se presentan a continuación. Los dos últimos se entenderán más fácilmente consultando la sección 0.3 de los Preliminares.

Definición 2.1.1. *Un* **espacio-tiempo de Minkowski** *es un triplete $\mathcal{M} = (M, \mathcal{A}, g)$ tal que:*

1. *M es una variedad diferenciable de dimensión 4.*
2. *$\mathcal{A}$ es un C^k-atlas de M con $k \geq 3$.*
3. *Existe una carta global (M, φ) en $\mathcal{A}$, es decir, existe una aplicación $\varphi : M \to \mathbb{R}^4$ biyectiva tal que $\varphi(M)(= \mathbb{R}^4)$ es un abierto de $\mathbb{R}^4$.*
4. *g es un (0,2)-campo tensorial en M, C^k diferenciable, llamado* **métrica de Minkowski**.
5. *En las coordenadas $(x_1, \ldots, x_4)$ de φ, la métrica toma la forma:*

$$g = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3 - dx^4 \otimes dx^4. \tag{2.1}$$

Observación 2.1.2. Un espacio de Minkowski es una variedad de dimensión 4 cuya métrica tiene un autovalor negativo. Por tanto, es una variedad semi-Riemanniana (puesto que el número de autovalores negativos es no nulo) y, en particular, una variedad de Lorentz (en concreto tiene un sólo autovalor negativo).

Definición 2.1.3. *Sea $\mathcal{M}$ un espacio de Minkowski. Se llama* **carta de Minkowski** *en $\mathcal{M}$ a cualquier carta global (M, φ'). A las funciones coordenadas de dicha carta se le llaman* **coordenadas de Minkowski**.

Nota 2.1.4. La propia carta global (M, φ) de la Definición 2.1.1 es una carta de Minkowski. Por tanto, siempre existe una carta de Minkowski. De hecho, más adelante se verá que existe más de una.

Observación 2.1.5. Las cartas y coordenadas de Minkowski pueden existir también en variedades que no sean espacio-tiempos de Minkowski. En una variedad Semi-Riemannniana $\mathcal{M} = (M, \mathcal{A}, g)$ de dimensión 4 con métrica g y signatura 2, si existe una carta (U, φ) con $U \subset M$ y coordenadas (x^1, x^2, x^3, x^4) en U tal que

$$g = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3 - dx^4 \otimes dx^4,$$

dicha carta se denomina carta de Minkowski en M.

2.2. Transformaciones de Lorentz

Las transformaciones de Lorentz son las relaciones que cumplen uno de los dos principios básicos de la relatividad especial: la velocidad de la luz es constante en cualquier sistema de referencia inercial, algo que no verificaban las transformaciones de Galileo. Estas transformaciones también se conocen como transformaciones de Lorentz-Einstein ya que, aunque Lorentz fue el primero en formularlas, fue Einstein quien las interpretó correctamente.

En este apartado, se va a trabajar en un espacio-tiempo de Minkowski, $\mathcal{M}$, con una carta global, (M, φ). Cuando aparezca la función φ, nos estaremos refiriendo a dicha carta.

Definición 2.2.1. *Sean $\mathcal{M}$ un espacio de Minkowski y φ' una carta de Minkowski. Sea $\phi = \varphi' \circ \varphi^{-1}$. Entonces, $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es biyectiva y de clase C^k. La función ϕ se denomina* **transformación de Lorentz (TL)** *en M.*

Lema 2.2.2. *Sea $\mathcal{M} = (M, \mathcal{A}, g)$ una C^k-variedad de dimensión 4 con $k \geq 2$.*

1. *Consideramos dos cartas de Minkowski (V,ψ) y (V',ψ') de $\mathcal{A}$ tales que $U := V \cap V' \neq \emptyset$, es decir, tales que $\psi(U)$ y $\psi'(U)$ son abiertos y*

$$\phi = \psi' \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to \psi'(U)$$

es C^k diferenciable. Entonces, existe una única ML L y un único escalar $a \in \mathbb{R}^4$ tales que para todo $x \in \psi(U)$ se tiene:

$$x' = \phi(x) = L \cdot x + a, \tag{2.2}$$

mientras que para todo $x' \in \psi'(U)$ se cumple:

$$x = \phi^{-1}(x') = L^{-1} \cdot x' - L^{-1} \cdot a. \tag{2.3}$$

2. *Sea* (W, φ) *una carta de Minkowski de* $\mathcal{A}$*,* L *una ML y* $b \in \mathbb{R}^4$*. Sea* φ*' definida de forma que:*

$$\varphi'(p) = L \cdot \varphi(p) + b, \tag{2.4}$$

para todo $p \in W$*. Entonces,* (W, φ') *es una carta de Minkowski de* $\mathcal{A}$*.*

Demostración. En primer lugar, sea $\phi = \psi' \circ \psi^{-1}$ la aplicación considerada en el enunciado. A partir de la expresión de transformación de vectores cotangentes se obtiene que:

$$dx'^{\lambda} = \sum_{\rho=1}^{4} \frac{\partial \phi^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} dx^{\rho},$$

para $\lambda = 1, 2, 3, 4$. Como la métrica es la misma en ambos casos, dada por (2.1), sustituyendo la expresión anterior en la expresión de la métrica asociada a ψ' queda la igualdad:

$$\sum_{\lambda,\mu,\rho,\sigma=1}^{4} \eta_{\lambda\mu} \frac{\partial \phi^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial \phi^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} dx^{\rho} \otimes dx^{\sigma} = \sum_{\rho,\sigma=1}^{4} \eta_{\rho\sigma} dx^{\rho} \otimes dx^{\sigma}.$$

Como los tensores $dx^{\rho} \otimes dx^{\sigma}$ son linealmente independientes, para todo $\rho, \sigma = 1, 2, 3, 4$, la igualdad anterior se reduce a:

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{4} \eta_{\lambda\mu} \frac{\partial \phi^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial \phi^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} = \eta_{\rho\sigma}, \tag{2.5}$$

para todo $\rho, \sigma = 1, 2, 3, 4$. La matriz definida por:

$$L = \left(\frac{\partial \phi^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \right)$$

cumple la relación (1.1) y, por tanto, es una matriz de Lorentz. Veamos que esta matriz es independiente de x. Diferenciando la Ecuación (2.5), resulta:

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{4} \eta_{\lambda\mu} \left(\frac{\partial^2 \phi^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{k}} \frac{\partial \phi^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial \phi^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 \phi^{\mu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{k}} \right) = 0.$$

A continuación introducimos las abreviaciones:

$$A_{\rho k \sigma} = \sum_{\lambda,\mu=1}^{4} \eta_{\lambda\mu} \frac{\partial^2 \phi^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{k}} \frac{\partial \phi^{\mu}}{\partial x^{\sigma}},$$
$$B_{\rho\sigma k} = A_{\rho k \sigma} + A_{\sigma k \rho}.$$

Como η = diag(1,1,1,-1), se cumple que $A_{\rho k \sigma} = A_{\sigma k \rho}$. La ecuación que se obtiene de diferenciar (2.5) con esta nueva notación resulta $B_{\rho\sigma k} = 0$. Una permutación cíclica de los índices ρ, σ, k no cambia la Ecuación (2.5), luego:

$$B_{\rho\sigma k} + B_{k\rho\sigma} - B_{\sigma k\rho} = 0,$$

ya que cada término es 0. Esto implica:

$$0 = A_{\rho k\sigma} + A_{\sigma k\rho} + A_{k\sigma\rho} + A_{\rho\sigma k} - A_{\sigma\rho k} - A_{k\rho\sigma} = 2A_{\sigma k\rho},$$

es decir, que:

$$A_{\sigma k\rho} = \sum_{\lambda,\mu=1}^{4} \eta_{\lambda\mu} \frac{\partial^2 \phi^\lambda}{\partial x^\sigma \partial x^k} \frac{\partial \phi^\mu}{\partial x^\rho} = 0.$$

Usando que $\sum_{\rho=1}^{4} \frac{\partial \phi^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \phi^{-1\rho}}{\partial x'^\nu} = \delta^\mu_\nu$, se deduce la expresión:

$$\sum_{\rho=1}^{4} A_{\sigma k\rho} \frac{\partial \phi^{-1\rho}}{\partial x'^\nu} = \sum_{\lambda=1}^{4} \eta_{\lambda\nu} \frac{\partial^2 \phi^\lambda}{\partial x^\sigma \partial x^k} = 0.$$

Como η no es singular, entonces lo que debe ser 0 es:

$$\frac{\partial L^\lambda_k}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial^2 \phi^\lambda}{\partial x^\sigma \partial x^k} = 0,$$

para todo $k, \lambda, \sigma = 1, 2, 3, 4$ y todo $x \in \phi^{-1}(U)$. De esta forma hemos deducido que la matriz L no depende de x y que ϕ es lineal respecto de x, es decir, que $x' = \phi(x) = L \cdot x + a$.

Ahora, para ver que (W, φ') es una carta de Minkowski, hay que probar que la métrica tiene la forma (2.1). Sean $x' = \varphi'(p)$ y $x = \varphi(p)$. Por hipótesis, $x' = \phi(x) = L \cdot x + b$ para todo $x \in \varphi(W)$, siendo ϕ la transformación de Lorentz $\varphi' \circ \varphi^{-1}$. De esta expresión se sigue que:

$$\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^k} = L^\alpha_k.$$

Como, además, (W, φ) es una carta de Minkowski, que cumple (2.1), $g_{\alpha\rho} = \eta_\alpha \rho$. Esto implica que en las coordenadas x':

$$g^j_{k\lambda} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^\lambda} \eta_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} L^\alpha_k L^\beta_\lambda \eta_{\alpha\beta} = \eta_{k\lambda},$$

es decir, que (W, φ') es una carta de Minkowski. □

Teorema 2.2.3. *Toda transformación de Lorentz ϕ está definida por una matriz de Lorentz L y un escalar $a \in \mathbb{R}^4$ de la siguiente forma:*

$$\phi(x) = L \cdot x + a. \tag{2.6}$$

Además, para toda ML L y todo $a \in \mathbb{R}^4$, la función ϕ definida como en (2.6) es una transformación de Lorentz para toda carta de Minkowski (M, φ). Esto implica, por tanto, que existe otra carta de Minkowski (M, φ') tal que $\phi = \varphi' \circ \varphi^{-1}$.

Demostración. Para probar este teorema, haremos uso del Lema 2.2.2, aplicándolo a un espacio de Minkowski.

En primer lugar, si consideramos dos cartas de Minkowski como en la primera parte del Lema, pero esta vez en un espacio de Minkowski, por la Definición 2.2.1, la función $\phi = \psi' \circ \psi^{-1}$ es una transformación de Lorentz. Por tanto, para toda transformación de Lorentz, existen una única matriz de Lorentz y un único vector en $\mathbb{R}^4$ tales que se cumpla (2.6).

Ahora, sea L una matriz de Lorentz y $a \in \mathbb{R}^4$. Dada una carta de Minkowski (M, φ), definimos φ' tal que cumpla (2.4) o, al pasarlo a coordenadas:

$$x' = L \cdot x + a.$$

Por la segunda parte del Lema 2.2.2, (M, φ') sería una carta de Minkowski. Así, la función $\phi = \varphi' \circ \varphi^{-1}$ sería una transformación de Lorentz, que cumple que $\phi(x) = x'$. Por tanto, ϕ verifica (2.6). □

Notación 2.2.4. En virtud del Teorema anterior, existe una correspondencia unívoca entre transformaciones de Lorentz y pares (L, a), donde L es una ML y a un vector de $\mathbb{R}^4$. Por tanto, se va a notar ϕ por su correspondiente par:

$$\phi = (L, a)\,, \tag{2.7}$$

y por tanto:

$$\phi(x) = (L, a)\,(x) = L \cdot x + a.$$

Nota 2.2.5. Históricamente, la primera forma de las transformaciones de Lorentz vino dada por (2.6), siendo L una matriz de Lorentz especial, de la forma (1.12). H.A. Lorentz descubrió que estas transformaciones dejaban invariantes las ecuaciones de Maxwell al transformarlas de un sistema de referencia inercial a otro.

2.3. Grupo de Poincaré. Subgrupos

En esta sección se va a estudiar la estructura del conjunto de las tranformaciones de Lorentz. Para ello, consideramos un espacio de Minkowski $\mathcal{M}$.

Definición 2.3.1. *Se define $\mathcal{P}$ como el conjunto de todas las transformaciones de Lorentz en $\mathcal{M}$. Una transformación de Lorentz se dice* **homogénea** *si $\phi(0) = 0$. El conjunto de todas las transformaciones de Lorentz homogéneas se denota por $\mathcal{P}_0$.*

Nota 2.3.2. La condición $\phi(0) = 0$ se corresponde, según (2.6), con que $a = 0$ o, según la notación de pares (L, a):

$$\phi = (L, 0)\,.$$

Nota 2.3.3. Según la nueva notación de pares, los conjuntos de la definición anterior vienen dados por:

$$\begin{aligned} &\mathcal{P} = \{(L, a) : L \in \mathcal{L}, a \in \mathbb{R}^4\} \\ &\mathcal{P}_0 = \{(L, 0) : L \in \mathcal{L}, \text{siendo 0 el vector nulo de } \mathbb{R}^4\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Proposición 2.3.4. *El conjunto $\mathcal{P}$ con la composición de funciones es un grupo.*

Demostración. Es conocido que la composición de funciones es asociativa. Para comprobar que la operación es interna, consideremos $\phi, \phi' \in \mathcal{P}$. Por (2.2) se tiene que:

$$(\phi' \circ \phi)(x) = L' \cdot L \cdot x + L' \cdot a + a',$$

o, según la correspondencia (2.7):

$$\phi' \circ \phi = (L' \cdot L, L' \cdot a + a') \,. \tag{2.9}$$

Como $L \cdot L'$ es una matriz de Lorentz y $L' \cdot a + a' \in \mathbb{R}^4$, por el Teorema 2.2.3, $\phi' \circ \phi \in \mathcal{P}$, ya que tiene la forma (2.6), o (2.7) en notación de pares. Por este mismo Teorema, id, que correspondería al par:

$$(\mathbf{1}_4, 0_4) \,, \tag{2.10}$$

está en $\mathcal{P}$, siendo el elemento neutro del grupo, y teniendo en cuenta (2.3), ϕ^{-1}, representado por el par:

$$\left(L^{-1}, -L^{-1} \cdot a\right) , \tag{2.11}$$

también está en $\mathcal{P}$, conformando el elemento inverso. □

Observación 2.3.5. El grupo $(\mathcal{P}, \circ)$ es infinito, ya que por cada $a \in \mathbb{R}^4$ existe una TL en $\mathcal{P}$.

Corolario 2.3.6. *El conjunto $\mathcal{P}_0$ es un grupo con la operación heredada de $\mathcal{P}$. Además, es isomorfo a $\mathcal{L}$.*

Demostración. En primer lugar veamos que $\mathcal{P}_0$ es un grupo. Al ser la operación del mismo la heredada de $\mathcal{P}$, se deduce que es asociativa. Para el resto de propiedades conviene recordar que los elementos de $\mathcal{P}_0$ son los descritos en (2.8). La identidad, dada por (2.10), pertenece trivialmente a $\mathcal{P}_0$. Por otra parte, dado un elemento $(L, 0)$ de $\mathcal{P}_0$, su inverso sería $(L^{-1}, 0)$, según (2.11), que también está en $\mathcal{P}_0$. Por último, quedaría ver que la composición de dos elementos $(L, 0), (L', 0)$ de $\mathcal{P}_0$ también está en $\mathcal{P}_0$. Dicha composición vendría dada por $(L' \cdot L, 0)$ según (2.9), que queda dentro de $\mathcal{P}_0$.

Una vez visto que $\mathcal{P}_0$ es un grupo, hay que probar que es isomorfo a $\mathcal{L}$. Para ellos buscamos una aplicación biyectiva de $\mathcal{L}$ a $\mathcal{P}_0$. Consideremos:

$$\begin{array}{rlcl} \psi : & (\mathcal{L}, \cdot) & \to & (\mathcal{P}_0, \circ) \\ & L & \mapsto & \psi(L) = (L, 0) \end{array}$$

Esta aplicación es trivialmente inyectiva. Además, todo elemento de $\mathcal{P}_0$, dado por $(L, 0)$, con $L \in \mathcal{L}$, tiene una preimagen en $\mathcal{L}$, que es precisamente L, luego también es sobreyectiva. Por último, veamos que es lineal, es decir, que es un homomorfismo de grupos. Para ello hay que comprobar que:

$$\psi(L * L') = \psi(L) * \psi(L'),$$

siendo $*$ la operación correspondiente de cada grupo. Veámoslo:

$$\psi(L \cdot L') = (L \cdot L', 0) = (L, 0) \circ (L', 0) = \psi(L) \circ \psi(L').$$

Por tanto, ambos grupos son isomorfos. □

Definición 2.3.7. *Se denomina* **Grupo de Poincaré de $\mathcal{M}$** *al grupo $\mathcal{P}$. Además, $\mathcal{P}_0$, por ser isomorfo a $\mathcal{L}$, también se conoce como Grupo de Lorentz de $\mathcal{M}$.*

Definición 2.3.8. *Los conjuntos definidos por*

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_p = \{(L,a) : L \in \mathcal{L}_p, a \in \mathbb{R}^4\}, \\ &\mathcal{P}_{oc} = \{(L,a) : L \in \mathcal{L}_{oc}, a \in \mathbb{R}^4\}, \\ &\mathcal{P}_s = \{(L,a) : L \in \mathcal{L}_s, a \in \mathbb{R}^4\}, \\ &\mathcal{P}_{og} = \{(L,a) : L \in \mathcal{L}_{og}, a \in \mathbb{R}^4\}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

son las transformaciones de Lorentz propias, ortócronas, especiales y ortogonales respectivamente.

Capítulo 3

Estructuras en el espacio de Minkowski

Sabemos que en toda variedad diferenciable $\mathcal{M} = (M, \mathcal{A})$, para cada punto $p \in M$, se puede definir un espacio vectorial, $T_p\mathcal{M}$, formado por el conjunto de los vectores tangentes a M en p. Sin embargo, en un espacio de Minkowski es posible definir una estructura de espacio vectorial para el propio espacio de Minkowski, $\mathcal{M}$, como se va a probar en este capítulo. Además, se va a estudiar la independencia de la topología de un espacio de Minkowski respecto de las cartas de Minkowski asociadas a la estructura diferenciable generada por el atlas $\mathcal{A}$.

3.1. Estructura de espacio vectorial

Consideramos un espacio-tiempo de Minkowski $\mathcal{M} = (M, \mathcal{A}, g)$. En primer lugar, vamos a definir las operaciones adecuadas para poder encontrar la estructura de espacio vectorial de $\mathcal{M}$. De hecho, se verá que esa estructura no es única, sino que existen infinitas.

Proposición 3.1.1. *Sea (M, φ) una carta de Minkowski de $\mathcal{M}$, sean p_1, p_2, p_3 tres puntos arbitrarios de M, con $\varphi(p_i) = x_i$, $i = 1, 2, 3$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces, si definimos la suma de puntos en M y el producto por escalares como:*

$$p_1 + p_2 = \varphi^{-1}(x_1 + x_2) \quad y \quad \alpha \cdot p_3 = \varphi^{-1}(\alpha x_3), \tag{3.1}$$

el triplete $(M, +, \cdot)$ es un espacio vectorial de dimensión 4.

Demostración. En primer lugar, veamos que $(M, +)$ es un grupo abeliano:

1. La operación es interna ya que $\varphi(M) = \mathbb{R}^4$ (recordemos que (M, φ) es una carta global y, por tanto, φ es biyectiva), luego todo punto de $\mathbb{R}^4$ tiene una preimagen en M.

2. La conmutatividad se deduce de la definición de suma en M (ya que la suma de elementos de $\mathbb{R}^4$ es conmutativa).

3. La asociatividad se deduce igualmente de la asociatividad de la suma en $\mathbb{R}^4$:

$$p_1 + (p_2 + p_3) = \varphi^{-1}(x_1 + (x_2 + x_3)) = \varphi^{-1}((x_1 + x_2) + x_3) = p_1 + (p_2 + p_3).$$

4. El elemento nulo está definido por $0 = \varphi^{-1}(0, 0, 0, 0)$.

5. Existe el elemento inverso, definido por $-p = \varphi^{-1}(-x)$, para todo $p \in M$ con $\varphi(p) = x$.

Veamos ahora que se cumplen las propiedades relativas al producto por escalar:

1. El producto de un elemento de M por un escalar permanece en M, como se observa en (3.1), al ser (M, φ) una carta global.

2. Se cumple la propiedad asociativa:

$$(\alpha\beta) \cdot p_1 = \varphi^{-1}((\alpha\beta)x_1) = \varphi^{-1}(\alpha(\beta x_1)) = \alpha(\beta p_1).$$

3. El 1 es el elemento neutro:

$$1 \cdot p_1 = \varphi^{-1}(1 \cdot x_1) = \varphi^{-1}(x_1) = p_1.$$

4. Se verifican las dos propiedades distributivas posibles:

$$\alpha(p_1 + p_2) = \varphi^{-1}(\alpha(x_1 + x_2)) = \varphi^{-1}(\alpha x_1 + \alpha x_2) = \alpha p_1 + \alpha p_2,$$
$$(\alpha + \beta)p_1 = \varphi^{-1}((\alpha + \beta)x_1) = \varphi^{-1}(\alpha x_1 + \beta x_1) = \alpha p_1 + \beta p_1.$$

Por tanto, $(M, +, \cdot)$ es un espacio vectorial. □

Cada vez que se utiliza una carta de Minkowski en un resultado, cabe preguntarse si éste es independiente de la carta elegida o, en caso contrario, si existe alguna relación entre lo que se obtiene utilizando cartas diferentes. En general, cada carta de Minkowski genera una estructura de espacio vectorial distinta. Sin embargo, en el caso particular en que las cartas estén relacionadas por una transformación homogénea de Lorentz, sí definen la misma estructura de espacio vectorial.

Proposición 3.1.2. *Sean $(M, \varphi), (M, \varphi')$ dos cartas de Minkowski, con coordenadas respectivas $x = \varphi(p)$ y $x' = \varphi'(p)$, relacionadas mediante una transformación homogénea de Lorentz $\phi = \varphi \circ \varphi'^{-1} = (L, 0)$. Entonces, ambas definen la misma estructura de espacio vectorial sobre M.*

Demostración. Basta ver que:

$$p_1 + p_2 = \varphi^{-1}(x_1 + x_2) = \varphi^{-1}(\phi(x_1') + \phi(x_2')) = \varphi^{-1} \circ \phi(x_1' + x_2') = \varphi'^{-1}(x_1' + x_2'),$$
$$\alpha p_3 = \varphi^{-1}(\alpha x_3) = \varphi^{-1}(\alpha\phi(x_3')) = \varphi'^{-1}(\alpha x_3').$$

□

Observación 3.1.3. Si las cartas de Minkowski φ, φ' están relacionadas entre sí por una tranformación no homogenéa de Lorentz, $\phi = (L, a), a \neq 0$, se puede ver que no dan lugar a la misma estructura de espacio vectorial porque el elemento nulo es distinto, pudiendo así asociar infinitas estructuras de espacio vectorial a M. En efecto:

El elemento nulo asociado a φ es $0 = \varphi^{-1}(\hat{0})$, siendo $\hat{0} = (0, 0, 0, 0)$. Como $\phi = \varphi \circ \varphi'^{-1}$, se tiene que el vector $\hat{0}$ en las coordenadas x está relacionado con el vector x' a través de

$\hat{0} = \phi(x')$, luego $x' = -L^{-1} \cdot a$, que claramente es distinto de 0 al ser $a \neq \hat{0}$ y L una matriz de Lorentz. Por tanto:

$$0 = \varphi^{-1}(\hat{0}) = \varphi^{-1}(\phi(x')) = \varphi'^{-1}(x').$$

Sin embargo, el vector nulo asociado a φ^{-1} es $0' = \varphi'^{-1}(\hat{0}')$, con $\hat{0}' = (0,0,0,0)$. Se deduce por tanto que $0 \neq 0'$.

Proposición 3.1.4. *Se puede definir un producto escalar en M de la forma:*

$$g(p_1, p_2) := \varphi(p_1)^T \cdot \eta \cdot \varphi(p_2), \tag{3.2}$$

para todos $p_1, p_2 \in M$, siendo la matriz η = diag(1,1,1,-1), de forma que el espacio vectorial $(M, +, \cdot)$ con el producto escalar g sea un espacio vectorial de Lorentz.

Demostración. En primer lugar se va a probar que g es un producto escalar. Desarrollando (3.2) queda:

$$g(p_1, p_2) := \varphi(p_1)^T \cdot \eta \cdot \varphi(p_2) = \sum_{i=1,2,3} (\varphi(p_1))^i (\varphi(p_2))^i - (\varphi(p_1))^4 (\varphi(p_2))^4.$$

Cada sumando es el producto de la misma componente de $\varphi(p_1)$ y $\varphi(p_2)$, por lo que g es simétrica y, por la linealidad de φ, g es bilineal. Además, si $g(p_1, p_2) = 0$ para todo $p_1 \in M$, entonces p_2 tiene que ser 0 por el sistema de ecuaciones que obtendríamos al igualar g a 0, siendo, por tanto, un producto escalar.

Consideremos ahora los vectores $e_\alpha = \varphi^{-1}(z_\alpha)$, $\alpha = 1,2,3,4$, estando las componentes de z_α dadas por $z_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta$. Entonces, $\{e_\alpha\}_{\alpha=1,\cdots,4}$ es una base porque φ es biyectiva y $\{z_\alpha\}_{\alpha=1,\cdots,4}$ es una base de $\mathbb{R}^4$ (de hecho, es la base natural). Por la Definición 0.1.3, para terminar la prueba basta ver que:

$$g(e_\alpha, e_\beta) = \sum_{i=1,2,3} z_\alpha^i z_\beta^i - z_\alpha^4 z_\beta^4 = \sum_{i=1,2,3} \delta_\alpha^i \delta_\beta^i - \delta_\alpha^4 \delta_\beta^4.$$

□

3.2. Topología en el espacio de Minkowski

Dada una variedad M y un atlas $\mathcal{A}$ de M, la topología natural del atlas está definida por:

$$\tau_N = \{G \subset M : \varphi(G \cap U) \text{ es abierto de } \varphi(U), \text{ para toda } (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}.$$

La topología natural asociada a un atlas de una variedad se caracteriza, además, por convertir en homeomorfismo sobre la imagen cualquier aplicación de una carta local de dicho atlas. En el caso de un espacio de Minkowski, trabajamos con una carta global, (M, φ) (que es una carta de Minkowski) y, por tanto, $\varphi(M) = \mathbb{R}^4$, es decir, $\varphi : (M, \tau_N) \to (\mathbb{R}^4, \tau_{euc})$ es un homeomorfismo entre la variedad M, con la topología natural asociada al atlas y $\mathbb{R}^4$ con la euclídea.

Por otra parte, se conoce como topología inicial de M asociada a $\varphi : M \to \mathbb{R}^4$ al conjunto de preimagenes de abiertos de la topología euclídea de $\mathbb{R}^4$ a través de φ, es decir, al conjunto:

$$\tau = \{U : U = \varphi^{-1}(W), W \in \tau_{euc}\}.$$

Como la topología inicial de φ es la única topología que convierte a φ en homeomorfismo, ésta debe coincidir con la topología natural del atlas. Efectivamente, observando la expresión de ambas topologías se deduce que son la misma.

Si consideramos ahora otra carta de Minkowski (M, φ') de la misma estructura generada por el atlas considerado anteriormente, siguiendo un razonamiento análogo se deduce que la topología inicial asociada a φ' también coincide con la topología natural del atlas. Por tanto, se puede concluir que la topología de un espacio de Minkowski es independiente de la carta de Minkowski, siempre y cuando la estructura diferenciable sea la misma.

Capítulo 4

Vectores tangentes en el espacio de Minkowski

Uno de los principales objetivos en la representación de un espacio-tiempo relativista es plasmar la estructura causal del mismo. Esta estructura especifica qué eventos, es decir, qué puntos del espacio-tiempo, pueden estar conectados por trayectorias con velocidad menor o igual que la de la luz y cuáles no. Los eventos que pueden estar conectados por trayectorias a velocidad inferior a la de la luz se denominan **de tipo temporal**, los que pueden conectarse por trayectorias a la velocidad de la luz se llaman **de tipo luminoso** y aquellos que no pueden relacionarse por ninguno de los dos anteriores, **de tipo espacial**. Como es físicamente imposible que ningún proceso causal exceda la velocidad de la luz, esta clasificación permite conocer si un evento puede influenciar a otro.

Más generalmente, se puede hacer la siguiente clasificación entre los vectores de un espacio vectorial de Lorentz (V, g), de forma que V se descomponga en tres partes disjuntas. Sea $v \in V$, entonces:

$$\begin{array}{lll} v & \text{se dice de tipo temporal o, simplemente, temporal si} & g(v,v) < 0, \\ v & \text{se dice de tipo luminoso o, simplemente, luminoso si} & g(v,v) = 0 \text{ y } v \neq 0, \\ v & \text{se dice de tipo espacial o, simplemente, espacial si} & g(v,v) > 0 \text{ o } v = 0 \end{array}$$

Entonces, un vector v se dice **causal** si no es de tipo espacial. Los vectores causales son aquellos que pueden conectar dos puntos del espacio de Minkowski de forma que uno tenga un efecto sobre otro. Es importante resaltar que esto no significa que uno sea la causa de otro (a pesar de que el nombre lo sugiera), sino que uno puede (no necesariamente) influir sobre el otro.

En este capítulo se va a considerar un espacio de Minkowski $\mathcal{M}$ y un punto en él, $p \in M$ y se van a estudiar las propiedades de los vectores de su espacio tangente, T_pM, desde el punto de vista de la clasificación anterior. Sin embargo, son válidas en cualquier espacio vectorial de Lorentz. En particular, se van a encontrar cartas en las que el vector sólo tiene componentes del tipo referente a la clasificación anterior, es decir, sólo temporales (cuarta componente) en caso de que el vector sea temporal, o sólo espaciales (tres primeras componentes) en el caso en que el vector sea espacial. Por último, se van a estudiar cartas que no son de Minkowski, ya que permiten encontrar nuevas representaciones de los vectores (ya no tienen por qué ser tres coordenadas espaciales y una temporal).

4.1. Vectores de tipo temporal y de tipo espacial

Que un vector sea temporal no implica que sólo tenga la cuarta componente no nula, al igual que el hecho de que un vector sea espacial no implica que la componente temporal sea nula. Sin embargo, dado un vector $v \in T_pM$ es posible encontrar coordenadas de Minkowski para las que sí se cumplan ciertas características relativas al tipo de vector. Buscamos, por tanto, transformaciones de Lorentz que cambien unas coordenadas en otras particulares.

Para los vectores temporales podemos encontrar unas coordenadas en las que sólo tengan componente cuarta no nula:

Proposición 4.1.1. *Sea $u \in T_pM$ un vector temporal. Entonces, existe una carta de Minkowski φ' y un número $u'^4 \neq 0$ tal que:*

$$u = u'^4 \partial_{x'^4}. \tag{4.1}$$

Demostración. Sea (M, φ) una carta de Minkowski con coordenadas (x^1, x^2, x^3, x^4) y supongamos que:

$$u = \sum_{\alpha=1}^{4} u^\alpha \partial_{x^\alpha}(p).$$

Sea $w = \sqrt{\sum_{j=1}^{3}(u^j)^2} > 0$ (si fuese cero se cumpliría (4.1) para la propia φ). Como u es temporal, $g(u,u) < 0$ y, como $g(u,u) = w^2 - (u^4)^2$, se tiene que $|u^4| > w$.

Buscamos ahora una carta φ' tal que la transformación de Lorentz $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ transforme las coordenadas x iniciales a las x' deseadas o, lo que es lo mismo, buscamos una tranformación de Lorentz L tal que $x' = \varphi' \circ \varphi^{-1}(x) = L \cdot x$. Vamos a buscar la matriz de Lorentz de la siguiente forma:

Sean los vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$a^1 = \frac{1}{w}(u^1, u^2, u^3),$$

a^2 y a^3, de manera que $\{a^1, a^2, a^3\}$ formen una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Entonces, construimos la matriz rotacional:

$$A = \begin{pmatrix} Q & 0_3^T \\ 0_3 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

siendo $Q = (a^1, a^2, a^3)^T$ una matriz ortogonal. De esta forma:

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} Q & \mathbf{0}_3^T \\ \mathbf{0}_3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 0 \\ u^4 \end{pmatrix}.$$

Construimos ahora una matriz de Lorentz especial S_ν tal que $\nu = w/u^4$, con $k = (1 -$

$\nu^2)^{-1/2}$, y ponemos $r = -\nu k$. Por tanto, S_ν es de la forma:

$$S_\nu = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

y queda que $S_\nu \cdot A \cdot u$ vale:

$$S_\nu \cdot A \cdot u = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 0 \\ u^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} wk + ru^4 \\ 0 \\ 0 \\ wr + ku^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'^1 \\ u'^2 \\ u'^3 \\ u'^4 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} &u'^1 = wk + ru^4 = k(w - \nu u^4) = 0, \\ &u'^4 = wr + u^4 k = ku^4(1-\nu^2) = ((u^4)^2 - w^2)^{1/2} = (-g(u,u))^{1/2}. \end{aligned}$$

Es decir, hemos encontrado una matriz de Lorentz $L = S_\nu \cdot A$, con S_ν y A de la forma descrita anteriormente, que hace que el vector u tenga todas sus coordenadas nulas, excepto la última. □

Del mismo modo que todo vector temporal podemos escribirlo en unas coordenadas en las que sólo tenga componente temporal, si tenemos un vector de tipo espacial es posible encontrar unas coordenadas en las que sólo tenga componentes espaciales (esto es, componente temporal nula). Es más, se pueden encontrar unas coordenadas en las que sólo tenga una componente (de las tres espaciales) no nula.

Proposición 4.1.2. *Sea u un vector espacial con*

$$u = \sum_{\alpha=1}^{4} u^\alpha \partial_{x^\alpha}$$

para un carta de Minkowski φ tal que $0 < |u^4| < |u^1|$. Entonces, existe una carta de Minkowski φ' tal que $u'^4 = 0$.

Demostración. Consideramos una matriz de Lorentz especial S_ν, con $\nu = u^4/u^1$. Por hipótesis, $\nu \in (-1,1)$. Entonces:

$$S_\nu \cdot u = \begin{pmatrix} ku^1 + ru^4 \\ u^2 \\ u^3 \\ ru^1 + ku^4 \end{pmatrix},$$

de donde se deduce que la cuarta componente es nula. En efecto:

$$ru^1 + ku^4 = -\nu ku^1 + ku^4 = -u^4(u^1)^{-1}ku^1 + ku^4 = 0.$$

Las componentes segunda y tercera permanecen invariantes, mientras que la primera viene dada por:

$$ku^1 + ru^4 = k(u^1 - \nu u^4) = ku^1(1 - (u^1)^{-2}(u^4)^2) = u^1(1 - \nu^2)^{1/2} \neq 0.$$

La prueba puede hacerse de modo totalmente análogo para las componentes segunda y tercera. □

Proposición 4.1.3. *Sea u un vector espacial con*

$$u = \sum_{\alpha=1}^{4} u^\alpha \partial_{x^\alpha}$$

para un carta de Minkowski φ. Entonces, para todo $n \in \{1, 2, 3\}$ existe una carta de Minkowski φ'_n tal que $u = \sum_{n=1}^{4} u'^n \partial_{x'^n}$.

Demostración. Sea $u \neq 0$. Se va a probar el caso $n = 1$, ya que la prueba es análoga para $n = 2, 3$. Definimos de nuevo $w = \sqrt{\sum_{j=1}^{3}(u^j)^2} > 0$ y, al ser u un vector espacial (es decir, $g(u,u) > 0$), se tiene que $w > |u^4|$. De forma análoga a la Proposición 4.1.1, buscamos una transformación de Lorentz (o equivalentemente una matriz de Lorentz) que transforme las coordenadas (x^1, x^2, x^3, x^4) en las coordenadas buscadas. La matriz de Lorentz la buscamos de la forma $L = S_\nu \cdot A$, con A y S_ν definidas como en (4.2) y (4.3), salvo que, ahora, cogemos $\nu = u^4/w$. Así, queda que $L \cdot u$ vale:

$$L \cdot u = S_\nu \cdot \begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 0 \\ u^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} wk + ru^4 \\ 0 \\ 0 \\ wr + ku^4 \end{pmatrix}.$$

Nos queda, por tanto, que el vector u en las nuevas coordenadas tiene componentes segunda y tercera nulas y las componentes primera y cuarta como sigue:

$$\begin{aligned} u'^1 &= wk + ru^4 = k(w - \nu u^4) = kw(1 - (u^4)^2 w^{-2}) = w(1 - v^2)^{1/2} \neq 0, \\ u'^4 &= wr + u^4 k = -wu^4 w^{-1} k + u^4 k = 0. \end{aligned}$$

Es decir, el vector u vendría definido por $u = u'^1 \partial_{x'^1}$. □

A partir de la clasificación de los tipos de vector según su producto escalar es posible deducir algunas propiedades como las que siguen.

Proposición 4.1.4. *Sean $u, v \in T_pM$, siendo u un vector temporal. Entonces, si se cumple que $g(u, v) = 0$, v es un vector espacial.*

Demostración. Como u es un vector temporal, existe una carta de Minkowski φ tal que $u = u^4 \partial_{x^4}$, con $u^4 \neq 0$. Sea $v = \sum_{\alpha=1}^{4} v^\alpha \partial_{x^\alpha}$ el vector v en esas coordenadas. Entonces, $g(u, v) = u^4 v^4 = 0$, por lo que se deduce que $v^4 = 0$. Por tanto, o bien $v = 0$, o bien $g(v, v) = \sum_{j=1}^{3}(v^j)^2 > 0$, es decir, v es un vector espacial. □

Definición 4.1.5. *Sea $u \in T_pM$. El conjunto de todos los $v \in T_pM$ tales que $g(u,v) = 0$ se denomina* **complemento ortogonal de *u*** *y se denota por $u^{\perp}$.*

Proposición 4.1.6. *Sea $u \in T_pM$ un vector temporal. Entonces, $u^{\perp}$ es un espacio vectorial con un producto escalar definido positivo $h = g|_{u^{\perp}}$, es decir, $u^{\perp}$ es un espacio vectorial Euclídeo de dimensión 3.*

Demostración. Sean $v_1, v_2 \in u^{\perp}$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Entonces, por ser g un producto escalar se tiene que $g(u, a_1v_1 + a_2v_2) = 0$, es decir, $a_1v_1 + a_2v_2 \in u^{\perp}$. Además, $g(u, 0) = 0$, luego $0 \in u^{\perp}$ (nótese que no es necesario que u sea de tipo temporal para que $u^{\perp}$ sea un espacio vectorial).

Por último, g es definido positivo porque los elementos de $u^{\perp}$ son espaciales, tal y como se demuestra en la Proposición 4.1.4 y, por tanto, se cumple que $g(v,v) = \sum_{j=1}^{3}(v^j)^2 > 0$. □

Proposición 4.1.7. *Si dado $u \in T_pM$, $u \neq 0$, el complemento ortogonal $u^{\perp}$ sólo contiene vectores de tipo espacial, entonces $u^{\perp}$ es un espacio vectorial y u es temporal.*

Demostración. Como se ha visto en la demostración de la Proposición 4.1.6, $u^{\perp}$ es un espacio vectorial.

Supongamos que u es luminoso. Entonces, $g(u,u) = 0$ y, por tanto, $u \in u^{\perp}$, pero todos los elementos de $u^{\perp}$ son espaciales por hipótesis, luego u no puede ser luminoso.

Supongamos ahora que u es espacial. Entonces, existe una carta de Minkowski para la que $u = \sum_{j=1}^{3} u^j \partial_{x^j}$. Consideramos un vector v temporal que, en unas ciertas coordenadas, se puede expresar como $v = v^4\partial_{x^4}$. Si hacemos el producto escalar de u con v, da 0 y, por tanto, v pertenecería a $u^{\perp}$, llegando de nuevo a una contradicción, ya que por hipótesis se ha supuesto que todos los vectores de $u^{\perp}$ son espaciales.

Por tanto, sólo nos queda una opción: u es un vector temporal. Por la Proposición 4.1.6 se tiene, además, que $u^{\perp}$ es un espacio vectorial Euclídeo de dimensión 3. □

Hasta ahora, sólo se han estudiado propiedades de los vectores espaciales y temporales. De los vectores luminosos se puede deducir fácilmente lo que sigue:

Proposición 4.1.8. *Un vector $u = \sum_{\alpha=1}^{4} u^{\alpha}\partial_{x^{\alpha}}$ es luminoso si y sólo si $u^4 \neq 0$ y $\sum_{j=1}^{3}(u^j)^2 = (u^4)^2$. Además, no existe ninguna carta de Minkowski φ' tal que el vector $\partial_{x'^{\alpha}}, \alpha = 1,2,3,4$, sea luminoso.*

Demostración. El producto escalar de u consigo mismo viene dado por:

$$g(u,u) = \sum_{j=1}^{3}(u^j)^2 - (u^4)^2.$$

El vector u es luminoso si y sólo si $g(u,u) = 0$, es decir, si y sólo si $\sum_{j=1}^{3}(u^j)^2 = (u^4)^2$ y $u^4 \neq 0$ (si $u^4 = 0$, entonces $u = 0$ y sería espacial).

Por otro lado, se tiene que $g(\partial_{x^{\alpha}}, \partial_{x^{\alpha}}) = \eta_{\alpha\alpha}$, con $\alpha = 1,2,3,4$, siendo η = diag(1,1,1,-1). Por tanto, el vector $\partial_{x^{\alpha}}$ no puede ser luminoso. □

4.2. Coordenadas que no son de Minkowski

Hasta ahora sólo hemos trabajado con cartas de Minkowski. Los vectores de la base que se generan con esas cartas, $(\partial_x^1, \partial_x^2, \partial_x^3, \partial_x^4)$, siempre son tres espaciales, uno temporal y ninguno luminoso. Sin embargo, es posible encontrar otras bases con vectores de los tres tipos.

Sea φ una carta de Minkowski. Se consideran los vectores $u_1, u_2, u_3, u_4 \in T_pM$ en función de los vectores ∂_{x^α}, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, generados por la carta φ como sigue:

$$\begin{aligned} u_j &= \partial_{x^j} + b\partial_{x^4}, \qquad j = 1, 2, 3, \\ u_4 &= -\partial_{x^1} + b\partial_{x^4}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde b es un número real positivo.

Proposición 4.2.1. *Los vectores $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ anteriores forman una base de T_pM para todo $b > 0$. Además, u_α, para $\alpha = 1, 2, 3, 4$, es un vector espacial si $b < 1$, luminoso si $b = 1$ y temporal si $b > 1$.*

Demostración. Como el espacio tangente es un espacio de dimensión 4, basta ver que los vectores u_1, u_2, u_3 y u_4 son linealmente independientes para probar que forman una base. Sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4 = 0.$$

Sustituyendo u_α por su definición queda:

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4 = (a_1 - a_4)\partial_{x^1} + a_2\partial_{x^2} + a_3\partial_{x^3} + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\partial_{x^4} = 0.$$

Por tanto, se deduce directamente que $a_2 = a_3 = 0$ y, en consecuencia, se tiene que $a_1 = a_4$ y $a_1 = -a_4$, es decir, que $a_1 = a_4 = 0$, por lo que los vectores u_1, u_2, u_3 y u_4 son linealmente independientes y, por tanto, forman una base de T_pM.

Por otro lado, se tiene que $g(u_\alpha, u_\alpha) = 1-b^2$ para $\alpha = 1, 2, 3, 4$. De aquí y de la clasificación de los tipos de vectores en función del valor de g se deduce la clasificación del enunciado en función de b. $\square$

Veamos ahora que la base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ en las condiciones anteriores está determinada por una carta.

Proposición 4.2.2. *Sean p un punto de M, φ una carta de Minkowski y T la matriz definida por*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & b \\ -1 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Definimos la función $\chi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ como $\chi(y) = T \cdot y$, y consideramos $\psi = \chi^{-1} \circ \varphi$. Entonces, los vectores definidos anteriormente vienen dados por $u_\alpha = \partial_{y^\alpha}$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$.

Demostración. Observando (4.4), vemos que T es la matiz que representa la transformación $e = T \cdot \partial_x$, siendo $e = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ y $\partial_x = (\partial_{x^1}, \partial_{x^2}, \partial_{x^3}, \partial_{x^4})$. La matriz T tiene rango máximo, puesto que su determinante vale $2b$ y que al definir la transformación (4.4) se tomó b real y positivo. Por tanto, la función $\chi(y) = Ty = x$ es biyectiva y diferenciable, con inversa $\chi^{-1}(x) = T^{-1}x = y$, que también es diferenciable. Así, χ es una transformación de coordenadas, que cumple:

$$\partial_{y^\beta} = \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y^\beta} \partial_{x^\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{4} T^\alpha_\beta \partial_{x^\alpha} = u_\beta,$$

es decir, $u_\beta = \partial_{y^\beta}$. Como $\psi = \chi^{-1} \circ \varphi$, se obtiene que $\psi(p) = T^{-1}\varphi(p) = (y^1, y^2, y^3, y^4)$, es decir, que (y^1, y^2, y^3, y^4) son las coordenadas asociadas a la carta ψ, que definen la nueva base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. $\square$

Capítulo 5

Orientabilidad

Sea una variedad de Lorentz $\mathcal{M}$ y una carta de Minkowski (M, φ) con coordenadas dadas por (x^1, x^2, x^3, x^4). Hasta ahora, hemos considerado que la cuarta componente, x^4, jugaba un papel diferente que el resto, aunque en la práctica se trata como una componente espacial más. Sin embargo, como puede observarse en el capítulo anterior, ésta se interpreta como el tiempo. La experiencia nos dice que el tiempo está orientado, es decir, que tiene una dirección, con dos posibles sentidos: pasado o futuro, lo que lleva a pensar que el conjunto de los vectores causales se divide en dos subconjuntos disjuntos que representan estos dos sentidos del tiempo.

Dada un variedad de Lorentz $\mathcal{M}$, vamos a introducir el concepto de orientabilidad en el tiempo, así como los conjuntos representantes del pasado y del futuro. Todo el desarrollo es igualmente válido para un espacio de Minkowski (aunque lo hacemos para el caso más general que lo cumple, las variedades de Lorentz), ya que es un caso particular de variedad de Lorentz con dimensión $n = 4$, como se vio en la Observación 2.1.2. Además, a partir de los vectores de la base daremos una noción de orientabilidad en M.

5.1. Orientabilidad en el tiempo

Definición 5.1.1. *Sea $\mathcal{M}$ una variedad de Lorentz y sea C el conjunto de vectores tangentes causales de $\mathcal{M}$. La variedad $\mathcal{M}$ se dice* **orientable en el tiempo** *si existen dos subconjuntos de C, C^+ y C^-, disjuntos, cuya unión es el total, es decir, tales que $C^+ \cup C^- = C$ y $C^+ \cap C^- = \emptyset$.*

Una consecuencia de la orientabilidad en el tiempo es que, bajo transporte paralelo, no es posible que un vector de C^+ se convierta en uno de C^-, ya que los conjuntos son disjuntos y una curva es diferenciable, y recíprocamente. Esta idea nos proporciona una definición alternativa de la orientabilidad en el tiempo (ver [7]). Para más detalles sobre el concepto de transporte paralelo se puede consultar la referencia [2].

Definición 5.1.2. *Los elementos de C^+ se denominan* **dirigidos hacia el futuro** *y los de C^-,* **dirigidos hacia el pasado**.

Una vez hecha esta introducción, vamos a estudiar en más profundidad el conjunto de vectores causales de $\mathcal{M}$, dando una definición explícita de los conjuntos C^+ y C^-. Además, vamos a probar que $\mathcal{M}$ es orientable en el tiempo. Para los sucesivos resultados que se van a desarrollar introducimos las siguientes notaciones.

Sea $u \in C \cap T_pM$ y sea φ una carta de Minkowski. Podemos escribir u como

$$u = \sum_{i_1}^{4} u^\alpha \partial_{x^\alpha},$$

con $|u^4| > 0$, ya que si $u = 0$ no sería un vector causal (sería espacial). Sea

$$r = \left(\sum_{i=1}^{3} (u^j)^2 \right)^{1/2} \geq 0.$$

Para $r > 0$, definimos $e^i = u^i \cdot r^{-1}$ tales que $\sum_{i=1}^{3} (e^i)^2 = 1$ y, para $r = 0$, definimos e^1, e^2, e^3 como tres números reales de forma que cumplan lo mismo que en el caso anterior. Por último, definimos $a = u^4$, de forma que podemos reescribir u como:

$$u = re^1\partial_{x^1} + re^2\partial_{x^2} + re^3\partial_{x^3} + a\partial_{x^4}. \tag{5.1}$$

Proposición 5.1.3. *El vector u representado como en (5.1) es temporal si y sólo si* $0 \leq r < |a|$ *y es luminoso si y sólo si* $0 < r = |a|$.

Demostración. Gracias a la reescritura de u como en (5.1) es fácil ver que:

$$g(u, u) = r^2 - a^2.$$

Así, se tiene que:

u es de tipo temporal	si y sólo si	$g(u, u) < 0$	si y sólo si	$r < \|a\|$,
u es de tipo luminoso	si y sólo si	$g(u, u) = 0$	si y sólo si	$r = \|a\|$.

□

Proposición 5.1.4. *Sea u un vector causal definido como en (5.1) para una cierta carta de Minkowski* φ*. Entonces, si dada otra carta de Minkowski* φ'*, la transformación de Lorentz* $\phi = \varphi' \circ \varphi^{-1}$ *es ortócrona, la cuarta componente de u no cambia de signo. Si por el contrario* ϕ *es no ortócrona, entonces la cuarta componente de u tiene signo opuesto tras la transformación.*

Demostración. Sea $u = \sum_{i=1}^{4} u^\alpha \partial_{x^\alpha}$ en las coordenadas de φ y $u = \sum_{i=1}^{4} u'^\beta \partial_{x'^\beta}$ en las coordenadas de φ'. Entonces:

$$a' = u'^4 = \frac{\partial \phi^4}{\partial x^\alpha} u^\alpha = L^4_\alpha u^\alpha.$$

Reescribiendo ahora las componentes u^α como en (5.1) queda:

$$a' = rL^4_1 e^1 + rL^4_2 e^2 + rL^4_3 e^3 + L^4_4 a = r \sum_{j=1}^{3} L^4_j e^j + L^4_4 a. \tag{5.2}$$

Si $r = 0$, entonces $a' = L_4^4 a$ y se tiene que, si ϕ es ortócrona, $L_4^4 \geq 1$ y, por tanto, a' tiene el mismo signo que a, mientras que si ϕ es no ortócrona, $L_4^4 \leq 1$ y, entonces, a' tiene signo opuesto a a. Por el contrario, si $r > 0$, es necesario distinguir casos y para la prueba emplearemos una serie de propiedades. En primer lugar, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene:

$$|\sum_{j=1}^{3} L_j^4 e^j| \leq |\sum_{j=1}^{3}(e^j)^2|^{\frac{1}{2}}|\sum_{j=1}^{3}(L_j^4)^2|^{\frac{1}{2}}.$$

Por definición, $\sum_{i=1}^{3}(e^i)^2 = 1$ y, sabiendo que $(L_4^4)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3}(L_4^i)^2$ (por (1.5)), se obtiene que $|L_4^4| > (\sum_{i=1}^{3}(L_4^i)^2)^{\frac{1}{2}}$. Entonces:

1. Si ϕ es ortócrona ($L_4^4 \geq 1$) y $a > 0$, aplicando la desigualdad triangular inversa a (5.2) se deduce que:

   $$a' \geq L_4^4 a - r|\sum_{j=1}^{3} L_j^4 e^j|.$$

   Teniendo en cuenta las desigualdades anteriores, queda que:

   $$a' \geq L_4^4(a - r) \geq 0,$$

   es decir, a y a' son del mismo signo.

2. Si ϕ es ortócrona ($L_4^4 \geq 1$) y $a < 0$, por (5.2) se tiene que:

   $$a' \leq L_4^4 a + r|\sum_{j=1}^{3} L_j^4 e^j|.$$

   Utilizando las mismas desigualdades que en el caso anterior queda:

   $$a' < L_4^4(a + r) = L_4^4(r - |a|) \leq 0,$$

   es decir, a y a' son de signo opuesto.

3. Si ϕ no es ortócrona ($L_4^4 \leq 1$) y $a > 0$, por (5.2) se deduce que:

   $$a' \leq L_4^4 a + r|\sum_{j=1}^{3} L_j^4 e^j|.$$

   Utilizando de nuevo las desigualdades, queda:

   $$a' < L_4^4 a + |L_4^4| r = |L_4^4|(r - a) \leq 0,$$

   es decir, a y a' son del mismo signo.

4. Si ϕ no es ortócrona ($L^4_4 \leq 1$) y $a < 0$, por (5.2) se obtiene que:

$$a' \geq L^4_4 a - r|\sum_{j=1}^{3} L^4_j e^j|.$$

   Utilizando de nuevo las desigualdades, queda:

$$a' > L^4_4 a - |L^4_4| r = |L^4_4|(|a| - r) \geq 0,$$

   es decir, a y a' son de signo opuesto.

$\square$

El conjunto de vectores causales en M es conocido como el **cono de luz** y su representación caracteriza al espacio de Minkowski. Si uno imagina que la luz está confinada en un plano, cuando se produce un evento E y se emite luz desde donde éste tiene lugar, ésta se expande como un frente de ondas circular. Si incluimos una tercera dimensión correspondiente al tiempo, lo que tenemos es un cono (en realidad, medio cono), conocido como el cono de luz futuro. El cono de luz pasado se comporta a la inversa: un círculo que se contrae hasta converger a un solo punto, el mismo en el que tiene lugar el evento E. Aunque en realidad el espacio-tiempo tenga 4 dimensiones, esta representación proporciona una buena forma de visualizarlo. Como las señales y otras influencias causales no pueden viajar más rápido que la luz, el cono de luz juega un papel esencial a la hora de definir el concepto de causalidad que se introdujo en el capítulo anterior: dado un evento E, el conjunto de eventos que suceden sobre o dentro del cono de luz pasado son aquellos que pueden influenciar al evento E, mientras que el conjunto de eventos que suceden sobre o dentro del cono de luz futuro son aquellos que pueden verse influenciados por el evento E. Así, todos los puntos que queden fuera del cono de luz no pueden tener ninguna relación con el evento E: no pueden influenciarlo ni ser influidos por él.

Definición 5.1.5. *Dado $p \in M$, el* **cono causal** *en T_pM se define como:*

$$C_p = \{v \in T_pM : g_p(v, v) \leq 0, v \neq 0\}.$$

El conjunto de todos los conos causales en M es:

$$C = \bigcup_{p \in M} C_p.$$

Definición 5.1.6. *Dado $p \in M$, sea φ una carta de Minkowski y sean (x^1, x^2, x^3, x^4) las correspondientes coordenadas en esa carta, de forma que un vector $v \in T_pM$ viene dado por $v = \sum_{\alpha=1}^{4} v^\alpha \partial_{x^\alpha}(p)$. Entonces, definimos los conjuntos:*

$$C_p^+ = \{v \in C_p : v^4 > 0\}$$

y, respectivamente:

$$C_p^- = \{v \in C_p : v^4 < 0\}.$$

A partir de ellos, definimos $C^+ = \bigcup_{p\in M} C_p^+$ *y* $C^- = \bigcup_{p\in M} C_p^-$.

La definición de C^+ y C^- depende de la carta de Minkowski elegida. Sin embargo, por la Proposición 5.1.4, los conjuntos C^+ y C^- no varían bajo una transformación de Lorentz ortócrona, puesto que ésta mantiene constante el signo de la cuarta componente del vector, mientras que se intercambian (es decir, $C'^+ = C^-$ y $C'^- = C^+$) bajo una transformación no ortócrona, ya que en este caso la cuarta componente cambia de signo. Esto quiere decir que no hay ninguna distinción entre pasado y futuro con la definición dada y que, por tanto, habrá que elegir qué conjunto corresponde a pasado y cuál a futuro. Para introducir las nociones de pasado y futuro es necesario probar primero que $\mathcal{M}$ es orientable en el tiempo y, para ello, hay que hacer uso del concepto de transporte paralelo que ya se mencionó al inicio de la sección.

Proposición 5.1.7. $\mathcal{M}$ *es orientable en el tiempo.*

Demostración. Dado un punto $p \in M$ y una carta de Minkowski φ, con coordenadas denotadas por (x^1, x^2, x^3, x^4), consideramos los conjuntos C^+ y C^-. Vamos a hacer la prueba para C^+, pero se hace de manera análoga para C^-. Sea p' un punto arbitrario de M y sea $u' = \sum_{\alpha=1}^4 u^\alpha \partial_{x'^\alpha} \in C_{p'}^+$. Entonces:

$$u = \sum_{\alpha=1}^{4} \mathbf{u}^\alpha \partial_{x^\alpha},$$

donde $\mathbf{u}^\alpha$ denota la función constante igual a u^α, define un campo vectorial en M con $u \in C_p^+$.

La derivada covariante de u es:

$$\nabla u = \sum_{i,l,k} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i u^l \right) dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i,l,k} \left(\Gamma_{kl}^i u^l \right) dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Los símbolos de Christoffel, en función del tensor métrico, vienen dados por:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{4} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right)$$

y, como en el espacio de Minkowski el tensor métrico es constante, los símbolos de Christoffel se anulan y queda que $\nabla u = 0$, es decir, que u es paralelo. Sea ahora $\gamma : I \to M$ una curva diferenciable en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ que contenga las preimagenes de p y p' a través de γ. Entonces:

$$\nabla_{\dot\gamma} u = \nabla u(\dot\gamma) = 0.$$

Esto significa que después de transportar paralelamente p a p' todo vector de C_p^+ está en $C_{p'}^+$. □

Definición 5.1.8. *Dada una carta* φ*, los elementos de los conjuntos* C^+ *y* C^- *definidos a partir de ella reciben el nombre de* **dirigidos hacia el futuro** *y* **dirigidos hacia el pasado***, respectivamente.*

5.2. Orientabilidad de los vectores de la base

Una vez vista la orientabilidad en el tiempo, vamos a definir la orientabilidad en una variedad de Lorentz $\mathcal{M}$ a partir de los vectores de una base.

Definición 5.2.1. *Una variedad de Lorentz $\mathcal{M}$ se dice* **orientada** *si existe una 4-forma ω definida en todo $\mathcal{M}$ que no se anule en ningún punto. A la 4-forma ω se le denomina* **orientación**.

En lo que sigue, consideramos que estamos trabajando en una variedad de Lorentz $\mathcal{M}$.

Proposición 5.2.2. *Sea φ una carta de Minkowski. La 4-forma:*

$$\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 = \sum_{P\in\mathcal{S}} \epsilon(P) dx^{P(1)} \otimes dx^{P(2)} \otimes dx^{P(3)} \otimes dx^{P(4)} \tag{5.3}$$

es una orientación de $\mathcal{M}$, donde $\mathcal{S}$ es el grupo de permutaciones de 4 elementos y $\epsilon(P)$ es el signo de P, de forma que $\epsilon(P) = 1$ para permutaciones pares y $\epsilon(P) = -1$ para permutaciones impares.

Demostración. La 4-forma ω está definida en todo $\mathcal{M}$ y para cada $p \in M$ se tiene

$$\omega(p)(\partial_{x^1 p}, \partial_{x^2 p}, \partial_{x^3 p}, \partial_{x^4 p}) = 1,$$

es decir, no se anula en ningún punto. □

Así, podemos definir la orientación de los vectores de la base como sigue:

Definición 5.2.3. *Sea $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base arbitraria de T_pM. Se dice que está* **orientada positivamente** *si $\omega(p)((u_1, u_2, u_3, u_4)) > 0$ y se dice que está* **orientada negativamente** *en caso contrario.*

La definición dada de ω depende de la elección de la carta, por lo que es necesario saber cómo afecta al comportamiento de ω un cambio de carta.

Proposición 5.2.4. *Sea ω la 4-forma definida a partir de una carta de Minkowski φ y ω' la definida a partir de otra carta de Minkowski φ'. Entonces, se tiene que:*

$$\begin{aligned} &\omega = \omega' && \textit{para transformaciones de Lorentz propias}, \\ &\omega = -\omega' && \textit{para transformaciones de Lorentz impropias}. \end{aligned}$$

Demostración. Consideramos la transformación de Lorentz $\phi' = \varphi' \circ \varphi^{-1}$ que cambia $dx^\alpha = L^\alpha_\beta dx'^\beta$, con $L^\alpha_\beta = \dfrac{\partial \phi'^\alpha}{\partial x^\beta}$. Así, la Ecuación (5.3) queda:

$$\omega = \sum_{P\in\mathcal{S}} \epsilon(P) \sum_{\beta_1,\cdots,\beta_4=1}^{4} L^{P(1)}_{\beta_1} L^{P(2)}_{\beta_2} L^{P(3)}_{\beta_3} L^{P(4)}_{\beta_4} dx'^{\beta_1} \otimes dx'^{\beta_2} \otimes dx'^{\beta_3} \otimes dx'^{\beta_4}.$$

Introducimos la notación $A(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = \sum_{P\in\mathcal{S}} \epsilon(P) L^{P(1)}_{\beta_1} L^{P(2)}_{\beta_2} L^{P(3)}_{\beta_3} L^{P(4)}_{\beta_4}$. Este término vale:

$$A(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=\begin{cases}\det L & \text{si } (\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) \text{ es una permutación par de } \{1,2,3,4\}\\ -\det L & \text{si } (\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) \text{ es una permutación impar de } \{1,2,3,4\}\\ 0 & \text{en caso contrario.}\end{cases}$$

Por tanto, $\omega = \det L \sum_{P\in\mathcal{S}} \epsilon(P) dx'^{P(1)} \otimes dx'^{P(2)} \otimes dx'^{P(3)} \otimes dx'^{P(4)}$, es decir, $\omega = \det L \cdot \omega'$. □

5.3. Orientación en $\mathcal{M}$

Hasta ahora, se han definido los vectores causales como elementos de T_pM, que tiene una estructura de espacio vectorial. Sin embargo, en el Capítulo 3 se vió que $(M,+,\cdot,g)$ también es un espacio vectorial de Lorentz. En esta sección vamos a reproducir los resultados obtenidos para los vectores causales en T_pM para los vectores de $(M,+,\cdot,g)$. Todas las estructuras en M dependen de la carta de Minkowski elegida, por lo que tomaremos la misma que se utiliza para definir la orientación en el tiempo en $\mathcal{M}$. En primer lugar, vamos a clasificar los elementos de M.

Recordemos que, según vimos en la Sección 3.1, si (M,φ) es una carta de Minkowski, una base del espacio vectorial de Lorentz $(M,+,\cdot,g)$ está formada por los vectores $e_i=\varphi^{-1}(z_i)$, $i=1,2,3,4$, donde z_i es el vector de $\mathbb{R}^4$ con todas sus coordenadas nulas, salvo la i-ésima que vale 1.

Definición 5.3.1. *Aplicando la clasificación de los vectores de un espacio vectorial de Lorentz a $(M,+,\cdot,g)$ podemos hacer una clasificación de los puntos $p\in M$, que en forma coordenada se escriben como $p=\sum_{\alpha=1}^4 p^\alpha e_\alpha$. Así, un punto $p\in M$ se dice:*

temporal	*si y sólo si*	$g(p,p)<0$	*si y sólo si*	$\sum_{i=1}^3 (p^j)^2 < (p^4)^2$,
luminoso	*si y sólo si*	$g(p,p)=0$ *y* $p\neq 0$	*si y sólo si*	$\sum_{i=1}^3 (p^j)^2 = (p^4)^2$ *y* $p\neq 0$,
espacial	*si y sólo si*	$g(p,p)>0$ *o* $p=0$	*si y sólo si*	$\sum_{i=1}^3 (p^j)^2 > (p^4)^2$ *o* $p=0$.

Un punto p se dice **causal** *si es de tipo temporal o luminoso.*

Una vez hecha esta clasificación, podemos aplicar todo lo desarrollado sobre la orientabilidad en el tiempo en una variedad de Lorentz a $(M,+,\cdot,g)$, obteniendo resultados similares.

Proposición 5.3.2. *Sea $p\in M$ un elemento causal, que escrito en las coordenadas de Minkowski para una carta φ queda $p=\sum_{\alpha=1}^4 p^\alpha e_\alpha$. Dada otra carta de Minkowski φ', la cuarta componente de p en dichas coordenadas, p'^4, tiene el mismo signo que p^4 si la transformación de Lorentz $\phi=\varphi'\circ\varphi^{-1}$ es ortócrona, y signo opuesto si es no ortócrona.*

Demostración. La prueba es completamente análoga a la de la Porposición 5.1.4, pero con un punto $p\in M$ en lugar de un vector $u\in T_pM$. □

Definición 5.3.3. *Se define el* **cono causal en M** *como*

$$\mathcal{C}=\{p\in M:\ p \text{ es causal}\}.$$

Para la carta de Minkowski elegida al principio de esta sección, definimos los subconjuntos de $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}^+ = \{p \in \mathcal{C} : p = \sum_{\alpha=1}^{4} p^\alpha e_\alpha, p^4 > 0\},$$

y

$$\mathcal{C}^- = \{p \in \mathcal{C} : p = \sum_{\alpha=1}^{4} p^\alpha e_\alpha, p^4 < 0\}.$$

Entonces, $\mathcal{C}^+$ se denomina **cono de luz futuro** *y a los $p \in \mathcal{C}^+$, puntos dirigidos hacia al futuro, mientras que $\mathcal{C}^-$ se denomina* **cono de luz pasado** *y a los $p \in \mathcal{C}^-$, dirigidos hacia el pasado.*

A continuación, introducimos dos relaciones entre elementos de M que nos dan una idea de la posición que puede tener un punto de M en el cono causal de otro. Estas relaciones se pueden definir en M porque, además de ser tratados como vectores, los puntos de M son interpretados como posiciones de eventos en el espacio y el tiempo.

Definición 5.3.4. *Para todos los pares (p_1, p_2), con $p_1, p_2 \in M$, se define la relación $\ll$, llamada* **cronológica***, dada por $p_1 \ll p_2$ si y sólo si $p_2 - p_1$ está dirigido hacia el futuro y es de tipo temporal. En ese caso, se dice que p_2 está en el futuro cronológico de p_1.*

Definición 5.3.5. *Para todos los pares (p_1, p_2), con $p_1, p_2 \in M$, se define la relación $\leq$, llamada* **causal***, dada por $p_1 \leq p_2$ si y sólo si $p_2 - p_1$ es cero o está dirigido hacia el futuro y es causal. Se dice que p_2 puede estar causado o influenciado causalmente por p_1.*

Definición 5.3.6. *Los conjuntos*

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^+(p) &= \{p' \in M : p \leq p'\} = \{p' : p' - p \in \mathcal{C}^+\}, \\ \mathcal{K}^-(p) &= \{p' \in M : p' \leq p\} = \{p' : p' - p \in \mathcal{C}^-\}, \end{aligned}$$

se llaman respectivamente **futuro causal** *y* **pasado causal** *de p. Análogamente, se denominan* **futuro cronológico** *y* **pasado cronológico** *de p a los conjuntos:*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^+(p) &= \{p' \in M : p \ll p'\}, \\ \mathcal{J}^-(p) &= \{p' \in M : p' \ll p\}. \end{aligned}$$

Observación 5.3.7. Por definición, $\ll \subset \leq$, es decir, si $p_1 \ll p_2$, entonces $p_1 \leq p_2$ y, por tanto, $\mathcal{J}^+(p) \subset \mathcal{K}^+(p)$ y $\mathcal{J}^-(p) \subset \mathcal{K}^-(p)$.

Observación 5.3.8. Los conjuntos $\mathcal{J}^+(p)$ y $\mathcal{J}^-(p)$ son no vacíos, ya que para

$$p = \sum_{\alpha=1}^{4} p^\alpha e_\alpha \in M,$$

los vectores $p' = \sum_{\alpha=1}^{4}(p^\alpha + \lambda\delta_4^\alpha)e_\alpha \in \mathcal{J}^+(p)$ y $p' = \sum_{\alpha=1}^{4}(p^\alpha - \lambda\delta_4^\alpha)e_\alpha \in \mathcal{J}^-(p)$.

Proposición 5.3.9. *La relación $\leq$ es una relación de orden parcial, mientras que la relación $\ll$ es sólo transitiva.*

Demostración. Para ver que la relación $\leq$ es de orden parcial hay que probar que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

1. Es reflexiva porque $p - p = 0$, luego $p \leq p$.

2. Si $p \leq p'$ y $p' \leq p$, entonces $p - p'$ y $p' - p$ son dirigidos hacia el futuro. Sin embargo, esto no es posible, ya que la cuarta componente de cada uno serían opuestas. Esto implica que $p = p'$ y, por tanto, $\leq$ es antisimétrica.

3. Supongamos que $p_1 \leq p_2$ y que $p_2 \leq p_3$, es decir, que $p_2 - p_1$ y $p_3 - p_2$ son causales y dirigidos hacia el futuro. Supongamos además que $p_1 \neq p_2 \neq p_3$ (si no, estaríamos en un caso trivial). Esto implica que $p_2^4 - p_1^4, p_3^4 - p_2^4 > 0$ y que:

$$p_2^4 - p_1^4 \geq (\textstyle\sum_{j=1}^3 (p_2^j - p_1^j)^2)^{1/2},$$
$$p_3^4 - p_2^4 \geq (\textstyle\sum_{j=1}^3 (p_3^j - p_2^j)^2)^{1/2},$$

   lo que implica que $p_3^4 - p_1^4 > 0$ y que:

$$p_3^4 - p_1^4 \geq (\textstyle\sum_{j=1}^3 (p_3^j - p_2^j)^2)^{1/2} + (\textstyle\sum_{j=1}^3 (p_2^j - p_1^j)^2)^{1/2}.$$

   Usando la desigualdad triangular, queda:

$$p_3^4 - p_1^4 \geq (\textstyle\sum_{j=1}^3 (p_3^j - p_1^j)^2)^{1/2}.$$

   Por tanto, $p_3 - p_1$ es causal y dirigido hacia el futuro.

Para ver que $\ll$ es transitiva, consideramos $p_1 \ll p_2$ y $p_2 \ll p_3$, es decir, que $p_2 - p_1$ y $p_3 - p_2$ son temporales y dirigidos hacia el futuro. Por un lado, $p_2^4 - p_1^4, p_3^4 - p_2^4 > 0$ y, sumando ambas expresiones, queda que $p_3^4 - p_1^4 > 0$, luego $p_3 - p_1$ es dirigido hacia el futuro. Por otra parte:

$$p_2^4 - p_1^4 > (\textstyle\sum_{j=1}^3 (p_2^j - p_1^j)^2)^{1/2},$$
$$p_3^4 - p_2^4 > (\textstyle\sum_{j=1}^3 (p_3^j - p_2^j)^2)^{1/2}.$$

Análogamente al caso $\leq$, sumando ambas expresiones y aplicando la desigualdad triangular se deduce que:

$$p_3^4 - p_1^4 > (\textstyle\sum_{j=1}^3 (p_3^j - p_1^j)^2)^{1/2},$$

es decir, que $p_3 - p_1$ es temporal. Por lo tanto, $p_1 \ll p_3$. $\square$

Capítulo 6

Cinemática en un espacio-tiempo de Minkowski

En los capítulos anteriores se han desarrollado todas las estructuras y resultados necesarios para describir el espacio de Minkowski: en el Capítulo 2 se han definido las cartas de Minkowski y las transformaciones de Lorentz, en el Capítulo 3, se ha demostrado la estructura de espacio vectorial de Lorentz del espacio de Minkowski y se ha comentado su topología, y en los Capítulos 4 y 5 se ha hablado de los vectores tangentes del espacio de Minkowski, introduciendo el concepto de causalidad y de los conceptos de orientabilidad y orientabilidad en el tiempo.

El objetivo de este capítulo es describir dos fenómenos conocidos en la Relatividad Especial: la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud. Para poder realizar las medidas de las magnitudes físicas correspondientes es necesario introducir una serie de herramientas. Se van a definir los sistemas de referencia y los observadores, así como los relojes de un observador. Además, dado que espacio y tiempo no son absolutos en Relatividad Especial, se van a describir las transformaciones de la velocidad de un sistema de referencia a otro.

6.1. Líneas de universo, señales y observadores

En esta sección se van a introducir las líneas de universo, que son las trayectorias que siguen las partículas en el espacio-tiempo, las señales, que es lo que se envía cuando ocurre un suceso y, por tanto, lo que se mide, y los observadores, que son los que realizan la medida de las magnitudes físicas. Para ello consideramos un espacio de Minkowski $\mathcal{M}$.

Definición 6.1.1. *Una* **curva de universo** *es una aplicación C^k, $k \geq 2$, $\gamma : I \to M$ definida en un intervalo abierto $I \subset \mathcal{R}$ no acotado, tal que $\dot{\gamma}$ es de tipo temporal y dirigida hacia el futuro para todo $\sigma \in I$. Su imagen, $\gamma(I)$ se denomina* **línea de universo**.

En ocasiones nos referiremos a la propia γ como línea de universo.

Definición 6.1.2. *La restricción de una curva de universo a un subconjunto finito $[\sigma_1, \sigma_2] \subset I$ se denomina* **señal** *de p_1 a p_2, siendo $p_1 = \gamma(\sigma_1)$ y $p_2 = \gamma(\sigma_2)$.*

En las condiciones de las definiciones anteriores, se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 6.1.3. *Sean $p_1, p_2 \in M$. Si $p_1 \ll p_2$, entonces existe una señal de p_1 a p_2.*

Demostración. Sea φ la carta de Minkowski elegida. Como antes, pongamos $p_1 = \sum_{i=1}^4 p_1^i e_i$ y $p_2 = \sum_{i=1}^4 p_2^i e_i$, con respecto a dicha carta. Como $p_1 \ll p_2$, por definición $p_2 - p_1$ es de tipo temporal y dirigido hacia el futuro. Por tanto, según la Definición 5.3.1, $p_2^4 - p_1^4 > 0$ y

$$\left(\sum_{j=1}^{3} (p_2^j - p_1^j)^2 \right)^{1/2} < p_2^4 - p_1^4. \tag{6.1}$$

Se definen la curva $\bar{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}^4$, dada en coordenadas por:

$$\bar{\gamma}^\alpha(\sigma) = p_1^\alpha + (p_2^\alpha - p_1^\alpha)\sigma,\ \alpha = 1, 2, 3, 4 \tag{6.2}$$

y la curva en M, $\gamma = \varphi^{-1} \circ \bar{\gamma}$. Así, $\gamma(0) = p_1$, $\gamma(1) = p_2$ y se obtiene que:

$$\dot{\gamma}(\sigma) = \sum_{\alpha=1}^{4} (p_2^\alpha - p_1^\alpha) \partial_{x^\alpha} \in T_{\gamma(\sigma)} M,$$

siendo (x^1, x^2, x^3, x^4) las coordenadas de φ. Como cada componente se corresponde con la respectiva de $p_2 - p_1$, se cumple (6.1) y, por tanto, $\dot{\gamma}$ es temporal y dirigido hacia el futuro, para todo $\sigma \in [0, 1]$. De aquí se deduce que γ es una señal de p_1 a p_2. □

Corolario 6.1.4. *La curva $\gamma = \varphi^{-1} \circ \bar{\gamma}$ es una geodésica con parámetro afín.*

Demostración. Las componentes de $\bar{\gamma}$ vienen dadas por (6.2). Como dependen linealmente de σ, la derivada segunda se anula, y se obtiene que:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \ddot{\bar{\gamma}} \partial_{x^\alpha} = 0.$$

□

De la expresión y razonamiento del corolario anterior se deduce que para un curva ζ, $\nabla_{\dot{\zeta}} \dot{\zeta}$ se anula si y sólo si la curva $\bar{\zeta} = \varphi \circ \zeta$ es una función lineal de su parámetro.

Corolario 6.1.5. *La curva $\gamma = \varphi^{-1} \circ \bar{\gamma}$, con $\bar{\gamma}$ definida como en la proposición anterior, es una función lineal en σ:*

$$\gamma(\sigma) = p_1 + (p_2 - p_1)\sigma.$$

Demostración. Las componentes de $\bar{\gamma}$ vienen dadas por $\bar{\gamma}^\alpha(\sigma) = p_1^\alpha + (p_2^\alpha - p_1^\alpha)\sigma$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ y, al aplicarle φ^{-1}, llegamos a la expresión buscada. □

Ahora, cabe preguntarse si se cumple el recíproco de la Proposición 6.1.3, es decir, si existe una señal de p_1 a p_2, ¿se verifica que $p_1 \ll p_2$? Para responder a esta pregunta son necesarios una serie de resultados previos.

En primer lugar, se va a considerar la estructura de espacio vectorial de M (además de su topología), ya que nos permite diferenciar curvas en M. Así, si consideramos $\gamma : I \to M$ una curva $C^k, k \geq 1$, se puede definir $\mathring{\gamma} = \frac{d}{d\sigma}\gamma(\sigma)$, donde " $^\circ$ " representa la derivada de la curva respecto de su parámetro. Sea $\bar{\gamma} = \varphi \circ \gamma$. Entonces, por la linealidad de φ, resulta que:

$$\mathring{\gamma}(\sigma) = \varphi^{-1} \circ \dot{\bar{\gamma}}(\sigma) = \sum_{\alpha=1}^{4} \dot{\bar{\gamma}}^\alpha(\sigma) \varphi^{-1}(z_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{4} \dot{\bar{\gamma}}^\alpha(\sigma) e_\alpha,$$

donde $z_\alpha = \varphi(e_\alpha)$ y tiene componentes δ_α^β. Hemos obtenido que $\mathring{\gamma}(\sigma)$ tiene las mismas componentes que $\dot{\gamma}(\sigma)$, pero con la diferencia de que $\mathring{\gamma}(\sigma)$ es un vector asociado al punto $\gamma(\sigma)$.

Sea ahora una aplicación $f : M \times M \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(s,p,q) = g(p-q, p-q) + s = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \eta_{\alpha\beta}(p^\alpha - q^\alpha)(p^\beta - q^\beta) + s,$$

donde $p = \sum_{\alpha=1}^4 p^\alpha e_\alpha$ y $q = \sum_{\beta=1}^4 q^\beta e_\beta$. Como η = diag(1,1,1,-1), la función f se puede reescribir como:

$$f(s,p,q) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} (p^i - q^i)^2 - (p^4 - q^4)^2 + s.$$

Para un valor fijo de q, si $p \in \mathcal{J}_p^+$, entonces $q \ll p$, es decir, $p - q$ es temporal y dirigido hacia el futuro. Esto implica que $p^4 - q^4 > 0$ y que:

$$\sum_{j=1}^{3} (p^j - q^j)^2 < (p^4 - q^4)^2.$$

Por tanto, existe un $s > 0$ tal que $f(p,q,s) = 0$. El recíproco se obtiene haciendo el mismo razonamiento a la inversa: dado q fijo y $s > 0$, si $f(p,q,s) = 0$, $p - q$ debe ser temporal y se obtiene que $p^4 - q^4 > 0$.

Así, fijado q, para cada $s \geq 0$ definimos el conjunto $F_s = \{p \in M : f(p,q,s) = 0\}$. Estos conjuntos son hipersuperficies y verifican que $\mathcal{J}^+(q) = \bigcup_{s>0} F_s$.

Como consecuencia del teorema de la función implícita, para cada p tal que $f(p,q,s) = 0$, la diferencial de f es un vector normal a la hipersuperficie F_s. Normalizándolo, se obtiene que el vector normal a F_s en un punto p viene dado por $\mathbf{n} = \sum_{\alpha=1}^{4} n^\alpha e_\alpha$, con

$$n^\alpha = \sum_{\kappa,\lambda,\beta=1}^{4} \left(-\eta^{\kappa\lambda} \frac{\partial f}{\partial p^\kappa} \frac{\partial f}{\partial p^\lambda} \right)^{-1/2} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial p^\beta}.$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial p^i} = 2(p^i - q^i) \quad \text{para i=1,2,3,} \qquad \frac{\partial f}{\partial p^4} = -2(p^4 - q^4),$$

se obtiene que:

$$\sum_{\kappa,\lambda=1}^{4} \eta^{\kappa\lambda} \frac{\partial f}{\partial p^\kappa} \frac{\partial f}{\partial p^\lambda} = 4(f - s), \qquad \sum_{\beta=1}^{4} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial p^\beta} = 2(p^\alpha - q^\alpha).$$

Por tanto, para $p \in F_s \subset \mathcal{J}^+(q)$ con $s > 0$, esto es, para $f(p,q,s) = 0$, el vector normal resulta $\mathbf{n} = s^{-1/2}(p - q)$. En consecuencia, el vector normal, que resulta ser $p - q$ por una constante, es temporal y dirigido hacia el futuro. Todos los vectores tangentes de F_s en p están en $\mathbf{n}^\perp$. Esto implica que g aplicada a esos vectores y $\mathbf{n}$ es 0 y, al ser $\mathbf{n}$ temporal, se obtiene que dichos vectores son espaciales, como se probó en la Proposición 4.1.4.

En este contexto, podemos probar el siguiente resultado:

Proposición 6.1.6. *Sea $\gamma : I \to M$ una curva de universo y sea $\gamma(\sigma_0)$, $\sigma_0 \in I$. Entonces, $\gamma(\sigma) \in \mathcal{J}^+(\gamma(\sigma_0))$, para todo $\sigma \geq \sigma_0, \sigma \in I$.*

Demostración. Se tiene que $\mathring{\gamma}(\sigma_0)$ es temporal y dirigido hacia el futuro, ya que γ es una curva de universo. Sea $q = \gamma(\sigma_0)$ y sea la función $h_q : I \to \mathbb{R}$ dada por:

$$h_q(\sigma) = -g(\gamma(\sigma) - q, \gamma(\sigma) - q).$$

Observando la definición de f, para una curva de universo γ, dicha función se puede escribir como $h_q(\sigma) = s - f(\gamma(\sigma), q, s)$. Por tanto, $\gamma(\sigma) \in F_s \subset \mathcal{J}^+(q)$ si y sólo si $h_q(\sigma) = s > 0$.

Por otro lado, probemos que h_q es estrictamente monótona creciente. Supongamos que h_q no es estrictamente monótona creciente para algún σ. Entonces, $\mathring{\gamma}(\sigma)$ sería tangente a F_s con $s = h_q(\sigma)$ y, por tanto, $\mathring{\gamma}(\sigma)$ sería de tipo espacial, en contradicción con la hipótesis de que sea temporal. Por tanto, h_q es estrictamente monótona creciente y existe su inversa, h_q^{-1}. Así, para todo $s \in h_q(I)$ existe un σ tal que $h_q(\sigma) = s$, lo que asegura que $\gamma(\sigma) \in \mathcal{J}^+(q)$. $\square$

Corolario 6.1.7. *Toda curva de universo γ es inyectiva.*

Demostración. Sea $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Entonces, como h_q es inyectiva, $s_1 = h_q(\sigma_1) \neq s_2 = h_q(\sigma_2)$. Además, de la definición de F_s se deduce que $F_{s_1} \cap F_{s_2} = \emptyset$ y, como $\gamma(\sigma_j) \in F_{s_j}$, se tiene que $\gamma(\sigma_1) \neq \gamma(\sigma_2)$, es decir, γ es inyectiva. $\square$

Corolario 6.1.8. *Sea γ una curva de universo y sea $\sigma_1 < \sigma_2$. Entonces, $\gamma(\sigma_1) \ll \gamma(\sigma_2)$.*

Demostración. Este resultado se deduce de manera inmediata de la Proposición 6.1.6, ya que dada una curva de universo γ y un punto $\gamma(\sigma_1)$, se cumple que $\gamma(\sigma) \in \mathcal{J}^+(\gamma(\sigma_1))$ para todo $\sigma > \sigma_1$. Como $\sigma_2 > \sigma_1$, se obtiene que $\gamma(\sigma_2) \in \mathcal{J}^+(\gamma(\sigma_1))$, es decir, que $\gamma(\sigma_1) \ll \gamma(\sigma_2)$. $\square$

A continuación se van a estudiar las curvas de universo de tipo luminoso, que son de especial interés porque se utilizan para describir pulsos de luz en el vacío.

Definición 6.1.9. *Sea $\gamma : I \to M$ una función $C^k, k \geq 3$, definida en un intervalo abierto $I \subset M$. Una curva de este tipo se dice* **curva de luz** *si es una geodésica y $\dot{\gamma}(\sigma)$ es de tipo luminoso y dirigida hacia el futuro, para todo $\sigma \in I$. El conjunto $\gamma(I)$ se llama* **línea de universo de luz o rayo de luz**.

Definición 6.1.10. *La restricción de una curva de luz a un intervalo finito $[\sigma_1, \sigma_2] \subset I$ se denomina* **señal de luz o señal luminosa** *de p_1 a p_2, siendo $p_1 = \gamma(\sigma_1)$ y $p_2 = \gamma(\sigma_2)$.*

De forma análoga a las curvas de universo, para las curvas de luz se pueden obtener una serie de resultados que relacionan una señal luminosa de p_1 a p_2 con la relación $\leq$.

Proposición 6.1.11. *Sea $\gamma : I \to M$ una curva luminosa con $\sigma_0 \in I$. Entonces, $\gamma(\sigma) \in \mathcal{H}^+(\gamma(\sigma_0)) = \mathcal{K}^+(\gamma(\sigma_0)) \setminus \mathcal{J}^+(\gamma(\sigma_0))$ para todo $\sigma \geq \sigma_0$.*

Demostración. Por definición, si γ es una curva luminosa, es una geodésica (con parámetro afín) y por lo tanto es una función lineal de su parámetro σ. Así, se puede escribir:

$$\gamma(\sigma) = \gamma(\sigma_0) + u(\sigma - \sigma_0) \tag{6.3}$$

y, por tanto, $\mathring{\gamma}(\sigma) = u$, para todo $\sigma \in I$, siendo $u \in M$. El conjunto $\mathcal{H}^+(\gamma(\sigma_0))$ se ha definido como el de aquellos puntos p tales que $p \leq \gamma(\sigma_0)$ (esto es, $p - \gamma(\sigma_0)$ causal y dirigido hacia el futuro, suponiendo que es no nulo) menos los que cumplan $p \ll \gamma(\sigma_0)$ (equivalente a que $p - \gamma(\sigma_0)$ sea temporal y dirigido hacia el futuro), es decir, tales que $p - q$ sea de tipo luminoso y dirigido hacia el futuro. Por tanto, para probar que $\gamma(\sigma) \in \mathcal{H}^+(\gamma(\sigma_0))$ si $\sigma > \sigma_0$, hay que ver que $\gamma(\sigma) - \gamma(\sigma_0)$ es luminoso y dirigido hacia el futuro. Como $\mathring{\gamma}(\sigma)$ es de tipo luminoso y dirigido hacia el futuro por definición, u también lo es. Así, si $\sigma > \sigma_0$, se cumple que $\gamma(\sigma) - \gamma(\sigma_0) = u(\sigma - \sigma_0)$ es luminoso y dirigido hacia el futuro, ya que estamos multiplicando u por un número real y positivo, como queríamos probar. □

Proposición 6.1.12. *La función $\gamma : I \to M$ es inyectiva.*

Demostración. Al igual que en la proposición anterior podemos escribir γ como (6.3), con $\sigma_0 \in I$ fijo. Sean $\sigma_1, \sigma_2 \in I$ y supongamos que $\gamma(\sigma_1) = \gamma(\sigma_2)$. Para que γ sea inyectiva hay que probar que entonces $\sigma_1 = \sigma_2$. A partir de (6.3) se obtiene que:

$$\begin{aligned}\gamma(\sigma_1) &= \gamma(\sigma_0) + u(\sigma_1 - \sigma_0),\\ \gamma(\sigma_2) &= \gamma(\sigma_0) + u(\sigma_2 - \sigma_0).\end{aligned}$$

Como $\gamma(\sigma_1) = \gamma(\sigma_2)$, se deduce que $u(\sigma_1 - \sigma_2) = 0$. Tal y como se ha visto en la demostración anterior, $\mathring{\gamma}(\sigma) = u$ para todo $\sigma \in I$, luego u es luminoso y dirigido hacia el futuro, por lo que:

$$0 < \left(\sum_{j=1}^{3} (u^j)^2\right)^{1/2} = u^4,$$

es decir, $u \neq 0$, y por tanto se deduce que $\sigma_1 = \sigma_2$. □

Proposición 6.1.13. *Sean p_1, p_2 dos puntos de M tales que $p_1 \leq p_2$ con $p_1 \neq p_2$ y $p_2 \notin \mathcal{J}^+(p_1)$. Entonces, existe una curva luminosa $\gamma : \mathbb{R} \to M$ tal que la restricción de γ al intervalo $[0, 1]$ es una señal luminosa de p_1 a p_2.*

Demostración. Las hipótesis $p_1 \leq p_2$ con $p_1 \neq p_2$ y $p_2 \notin \mathcal{J}^+(p_1)$ conducen a que $p_2 - p_1$ sea luminoso y dirigido hacia el futuro. Consideramos una curva $\gamma : \mathbb{R} \to M$ tal que:

$$\gamma(\sigma) = p_1 + (p_2 - p_1)\sigma.$$

Esta curva es lineal en su parámetro y, por tanto, es una geodésica. Además, $\mathring{\gamma}(\sigma) = p_2 - p_1$, por lo que es luminoso y dirigido hacia el futuro. Por último, se verifica que $\gamma(0) = p_1$ y $\gamma(1) = p_2$. Por tanto, esta curva cumple lo que buscamos. □

Proposición 6.1.14. *Para toda curva de luz $\gamma : I \to M$ se cumple que $\bar{\gamma}^4(\sigma_1) < \bar{\gamma}^4(\sigma_2)$ si $\sigma_1 < \sigma_2$. Por tanto, $\bar{\gamma}^4$ es inyectiva.*

Demostración. Como γ es una curva de luz, es una geodésica y, por tanto, lineal respecto de su parámetro, por lo que se puede escribir:

$$\gamma(\sigma) - \gamma(\sigma_1) = u(\sigma - \sigma_1),$$

con $u \in M$ y $\sigma_1, \sigma \in I$. Como $\mathring{\gamma}(\sigma) = u$ para todo $\sigma \in I$ y es dirigida hacia el futuro por definición, se cumple que $u^4 > 0$. La curva $\bar{\gamma}$ viene definida por $\bar{\gamma} = \varphi \circ \gamma$, luego $\bar{\gamma}^\alpha = \varphi^\alpha \circ \gamma$. Aplicando φ a la expresión anterior, la cuarta componente queda:

$$\bar{\gamma}(\sigma)^4 - \bar{\gamma}(\sigma_1)^4 = \varphi(u)^4(\sigma - \sigma_1) > 0,$$

para todo $\sigma > \sigma_1$. Por tanto, $\bar{\gamma}^4$ es inyectiva. □

Definición 6.1.15. *En el contexto físico, las curvas de universo reciben el nombre de* **observadores**. *Al par (p, u) con $p \in M$ y $u \in T_pM$ tal que u es un vector temporal y dirigido hacia el futuro se le denomina* **observador intantáneo**.

Definición 6.1.16. *Sea $p \in M$ y sea φ una carta de Minkowski. Consideremos otra carta de Minkowski ψ con coordenadas (y^1, y^2, y^3, y^4), tal que la transformación de Lorentz $\psi \circ \varphi^{-1}$ es ortócrona. Dados $\sigma \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^4$, definimos:*

$$\begin{array}{ll} \bar{\mu}^j(\sigma) = y_0^j & j = 1,2,3 \\ \bar{\mu}^4(\sigma) = y_0^4 + a\sigma & a > 0. \end{array}$$

Así, la curva definida por $\mu(\sigma) = \psi^{-1} \circ \bar{\mu}(\sigma)$ es inyectiva, temporal y dirigida hacia el futuro. Por tanto, esta curva es un observador, denominado **observador inicial o de Minkowski**.

La curva μ es lineal en su parámetro σ y, por tanto, μ es una geodésica con parámetro afín.

Definición 6.1.17. *Un conjunto de observadores con líneas de universo disjuntas dos a dos se llama* **sistema de referencia**. *Un conjunto de observadores de Minkowski definidos a partir de la misma carta ψ pero con diferentes (y^1, y^2, y^3) se denomina* **sistema de referencia inercial o de Minkowski**.

En las secciones siguientes serán de especial interés los sistemas de referencia inerciales con los mismos y^4 y a.

6.2. Relojes en el espacio de Minkowski

Una vez definido en qué consiste un observador, es necesario dotarlo de un instrumento que permita realizar medidas. Este instrumento son los relojes. De nuevo, consideramos como punto de partida un espacio de Minkowski, $\mathcal{M}$, así como todas las definiciones y resultados de la sección anterior.

Definición 6.2.1. *Sea γ un observador con línea de universo $\gamma(I)$. Sea $U : \gamma(I) \to \mathbb{R}$ una función $C^k, k \geq 3$, tal que $f = U \circ \gamma$ es estrictamente creciente. Esta función U recibe el nombre de* **reloj de γ** *o* **reloj en $\gamma(I)$**. *El número $t = U(\gamma(\sigma))$ se denomina* **parámetro temporal de γ** *o* **tiempo en $\gamma(I)$**.

Para toda curva de universo γ, existe su inversa γ^{-1}, como hemos visto anteriormente, ya que γ es inyectiva. Por tanto, es posible definir un reloj U de γ para toda función f estrictamente creciente $C^k, k \geq 3$, como $U = f \circ \gamma^{-1}$. El ejemplo más sencillo es considerar $f = id$, de forma que σ es el parámetro temporal de γ. Por tanto, γ siempre tiene un reloj, γ^{-1}. Sin embargo, para el desarrollo de este capítulo se va a utilizar la función f que se define a continuación.

Definición 6.2.2. *Sea la función*

$$f(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} (-g(\dot{\gamma}(\lambda), \dot{\gamma}(\lambda))^{1/2} d\lambda,$$

cuyo integrando es positivo, y por tanto es estrictamente creciente. Entonces, $U_E = f \circ \gamma^{-1}$ es un reloj y se denomina **reloj de tiempo propio de $\boldsymbol{\gamma}$**. *El parámetro temporal de U_E se denomina* **tiempo propio** *y se denota por τ.*

Si consideramos por ejemplo el observador de Minkowski μ de la Definición 6.1.16, como $\dot{\mu}(\sigma) = a\partial_{y^4}$, se obtiene que $f(\sigma) = a\sigma$ para $\sigma_0 = 0$. Por tanto, $\tau = U(\gamma(\sigma)) = f(\sigma) = a\sigma = y^4$ es el tiempo propio de un observador de Minkowski.

Proposición 6.2.3. *Toda curva γ parametrizada por su tiempo propio verifica que:*

$$g(\dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau)) = -1.$$

Demostración. Por definición, $\tau = U_E(\gamma(\tau)) = f(\tau)$. Como

$$\tau = f(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} (-g(\dot{\gamma}(\tau'), \dot{\gamma}(\tau')))^{1/2} d\tau',$$

se tiene que cumplir que $\tau_0 = 0$ y que $(-g(\dot{\gamma}(\tau'), \dot{\gamma}(\tau')))^{1/2} = 1$, es decir, $g(\dot{\gamma}(\tau'), \dot{\gamma}(\tau')) = -1$. $\square$

Sea γ un observador con dos relojes $U = f \circ \gamma^{-1}, U' = f' \circ \gamma^{-1}$. Si definimos la función $h = f' \circ f^{-1} = U' \circ U^{-1}$, ésta nos da la relación entre los parámetros temporales t y t' de U y U', ya que $t' = U'(\gamma(\sigma)) = U'U^{-1}U(\gamma(\sigma)) = h(t)$. Esta función h es estrictamente creciente, ya que f y f' lo son. Así, a partir de un reloj U podemos construir relojes U' a partir de funciones monótonas crecientes como h y establecer relaciones entre ellos.

Definición 6.2.4. *Sean γ un observador, U un reloj de γ, t su parámetro temporal y sea U' otro reloj de γ. Entonces, se dice que:*

$$\begin{array}{ll} U \text{ es más rápido que } U' & \text{si } \dot{h}(t) < 1, \\ U \text{ es más lento que } U' & \text{si } \dot{h}(t) > 1, \\ U \text{ y } U' \text{ son igual de rápidos} & \text{si } \dot{h} = 1. \end{array}$$

La curva de universo γ de un observador puede parametrizarse con cualquiera de sus relojes sin cambiar su carácter causal. Sea $\gamma : I \to M$ una curva de universo y U un reloj de ese observador. Entonces, $f = U \circ \gamma : I \to I' \subset \mathbb{R}$ y para todo $\sigma \in I$ existe $t \in I'$ tal que $\sigma = f^{-1}(t)$. Sea $\gamma' : I' \to M$ definida por $\gamma'(t) = \gamma(f^{-1}(t))$. Entonces:

$$\dot{\gamma}'(t) = \frac{d}{dt} f^{-1} \dot{\gamma}(f(t)).$$

Como f es estrictamente creciente, $\frac{d}{dt} f^{-1}(t) > 0$ para todo $t \in I'$ y, por tanto, $\dot{\gamma}'(t)$ es temporal y dirigida hacia el futuro, ya que $\dot{\gamma}$ lo es.

6.3. Velocidad Newtoniana

La física Newtoniana se caracteriza por tener un tiempo y espacio absolutos. En Relatividad Especial, no existen dichos conceptos absolutos. Por tanto, lo único que podemos describir es el espacio y el tiempo respecto de un observador. Así, la velocidad también depende del observador y en esta sección se va a estudiar cómo se transforma de uno a otro.

Definición 6.3.1. *El* **tiempo de un observador** γ *viene dado por el parámetro temporal del reloj* γ^{-1}*, mientras que el* **espacio de un observador** γ *en un tiempo* $\sigma \in I$ *se define como* $R_{\mathring{\gamma}(\sigma)} = (\mathring{\gamma}(\sigma))^{\perp}$.

Observamos que el tiempo se define para un observador, mientras que el espacio, para un observador instantáneo. Para definir la velocidad, vamos a trabajar en el espacio $(M, +, \cdot, g)$, dotado de la estructura de espacio vectorial de Lorentz. La carta de Minkowski necesaria para definir esta estructura la denotaremos por φ. Este desarrollo se puede hacer análogamente en T_pM.

Consideremos dos curvas $\gamma : I \to M$ y $\zeta : I' \to M$, siendo γ causal y dirigida hacia el futuro y ζ temporal y dirigida hacia el futuro. Supongamos que existen dos parámetros temporales, $\tau_0 \in I$ y $\sigma_0 \in I'$, tales que $\gamma(\tau_0) = \zeta(\sigma_0) = p \in M$. Sean además $u = \mathring{\gamma}(\tau_0)$ y $v = \mathring{\zeta}(\sigma_0)$. Entonces, si (p, v) es un observador instantáneo, ¿cómo se define la velocidad u_N de γ que mide el observador (p, v) con su reloj?

Para responder a esta pregunta necesitamos una serie de elementos previos. En primer lugar, consideramos un carta ψ, relacionada con φ a través de una transformación de Lorentz ortócrona $(L, 0)$, es decir, dada por $\psi = L \cdot \varphi$. Así, se puede definir la base $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, donde $e_\alpha = \psi^{-1}(z_\alpha)$ y z_α tiene como componentes $z_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta$. Notaremos por $\theta = \{\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4\}$ la base dual de e, cuyas componentes son $\theta^\kappa = \sum_{\lambda=1}^4 \eta^{\kappa\lambda} g(e_\lambda, \cdot)$. Por último, para que (p, v) sea un observador instantáneo se tiene que cumplir que v sea temporal y dirigido hacia el futuro, es decir, que se pueda escribir como $v = we_4$, con $w > 0$.

Proposición 6.3.2. *La aplicación* $P : M \to e_4^\perp$ *definida como* $P = \sum_{j=1}^3 e_j \otimes \theta^j$ *es una proyección.*

Demostración. Para demostrar que P es una proyección hay que probar que $P^2 = P$. Por la definición de P, es lineal y se cumple que $Pe_4 = 0$ y $Pe_j = e_j$ para $j = 1, 2, 3$. Por tanto:

$$P^2 = \sum_{j,k=1}^{3} e_j \otimes \theta^j(e_k)\theta^k = P,$$

ya que $\theta^j(e_k) = \delta^j_k$ para $j = 1, 2, 3$. $\square$

Como se ha mencionado anteriormente, suponemos que $v = we_4$ con $w > 0$ para que (p, v) sea un observador instantáneo. Por tanto, el espacio $v^\perp$ está generado por $\{e_1, e_2, e_3\}$ (normalmente se denota $v^\perp = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$). Como la velocidad debe ser un vector espacial, debe estar en $v^\perp$. Por definición, $u = \sum_{\alpha=1}^4 u^\alpha e_\alpha$, con $u^\alpha = \dot{\bar{\gamma}}^\alpha(\tau_0)$ y $\bar{\gamma} = \psi \circ \gamma$. Entonces:

$$Pu = \sum_{j=1}^{3} \dot{\bar{\gamma}}^j(\tau_0) e_j,$$

que es lo que se conoce como **velocidad Newtoniana**.

Definición 6.3.3. *La velocidad Newtoniana u_N de una curva γ causal y dirigida hacia el futuro medida mediante el parámetro de tiempo τ de γ en el instante de tiempo τ_0 es:*

$$u_N = P\mathring{\gamma}(\tau_0),$$

donde P es la proyección en el espacio R_v definido por un observador instantáneo $(\gamma(\tau_0), v)$.

Proposición 6.3.4. *La velocidad Newtoniana u_N de γ en un punto $p = \gamma(\tau_0)$ medida por un observador instantáneo (p, v) con su reloj propio está dada por:*

$$u_N = aPu,$$

donde $a = g(v, v)g(v, u)^{-1}$, siendo $u = \mathring{\gamma}(\tau_0)$.

Demostración. Por los resultados probados en la Sección 6.1, las funciones $\bar{\gamma}^4$ y $\bar{\zeta}^4$ son inyectivas, siendo $\bar{\gamma} = \psi \circ \gamma$ y $\bar{\zeta} = \psi \circ \zeta$. Entonces, la función $\chi : I' \to I$ dada por $\chi : (\bar{\gamma}^4)^{-1} \circ \bar{\zeta}^4$ transforma el parámetro temporal σ de ζ al parámetro temporal τ de γ. Así, la transformación de un parámetro a otro es $\tau = \chi(\sigma)$ y la curva γ reparametrizada viene dada por $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \chi$. De aquí se obtiene que:

$$\frac{d}{d\sigma}\tilde{\gamma}(\sigma) = \frac{d}{d\tau}\gamma(\tau) \cdot \frac{d}{d\sigma}\chi(\sigma).$$

Si definimos $t = \bar{\gamma}^4(\tau)$, entonces:

$$\dot{\chi}(\sigma) = \frac{d}{dt}(\bar{\gamma}^4)^{-1}(t) \cdot \dot{\bar{\zeta}}^4(\sigma),$$

y la expresión anterior resulta $\mathring{\tilde{\gamma}}(\sigma) = u(\tau) \cdot \dot{\chi}(\sigma)$, siendo $u(\tau) = \mathring{\gamma}(\tau)$. Si definimos u_N como la velocidad Newtoniana parametrizada por σ, por la Definición 6.3.3, se deduce que:

$$u_N = P\mathring{\tilde{\gamma}}(\sigma_0) = \dot{\chi}(\sigma_0)Pu(\tau_0).$$

Para probar el resultado ya sólo queda ver que $\dot{\chi}(\sigma_0) = a$. Una de las hipótesis establecidas al comienzo de la sección es que $v = we_4$ con $w > 0$, lo que nos lleva a que $g(v, v) = -w^2$ y $g(v, u) = -wu^4$. Por tanto, $a = w(u^4)^{-1}$. Además, $\dot{\bar{\zeta}}^4(\sigma_0) = w$ y, recordando que se ha definido $t = \bar{\gamma}^4(\tau)$, se deduce que:

$$\frac{d}{dt}(\bar{\gamma}^4)^{-1}(t_0) = (\dot{\bar{\gamma}}^4(\tau_0))^{-1} = (u^4)^{-1},$$

luego $\dot{\chi}(\sigma_0) = w(u^4)^{-1} = a.$ $\square$

Hasta ahora, se ha descrito la velocidad que mide un observador instantáneo (p, v) de una curva causal γ que coincide con el observador en τ_0, pero, ¿qué relación hay entre las velocidades que miden dos observadores instantáneos distintos? Para resolver esta cuestión consideramos dos observadores (p, v) y (p', v') y una carta φ necesaria para establecer la orientabilidad en el tiempo de M y su estructura de espacio vectorial de Lorentz (por coherencia suponemos que es la misma). Por la Proposición 4.1.1, como v y v' son temporales, existen dos cartas ψ y ψ' para las que esos vectores pueden expresarse como $v = v^4 e_4$ y $v' = v'^4 e'_4$, siendo $\{e_j\}_{j=1,\cdots,4}$ y $\{e'_j\}_{j=1,\cdots,4}$ las bases en M generadas por las cartas ψ y ψ'. Tal y como se vio en la demostración de la proposición mencionada, las transformaciones de Lorentz $\psi \circ \varphi^{-1}$ y $\psi' \circ \varphi^{-1}$ pueden ser escogidas homogéneas, de forma que $\psi \circ \psi'$ también lo es. Notando la transformación por $(L, 0)$, se obtiene la relación $e_\beta = \sum_{\alpha=1}^4 L^\alpha_\beta e'_\alpha$ entre las bases generadas por ψ y ψ'. Por otro lado, la velocidad (no confundir con la velocidad Newtoniana que hemos definido) de la curva causal γ cuya velocidad Newtoniana queremos medir en el punto $\gamma(\tau_0)$ está dada por:

$$\mathring{\gamma}(\tau_0) = \sum_{\alpha=1}^{4} u^\alpha e_\alpha = \sum_{\beta=1}^{4} u'^\beta e'_\beta.$$

Sustituyendo la relación entre una base y otra a través de la matriz L se infiere que $u'^k = \sum_{\lambda=1}^4 L^k_\lambda e^\lambda$. Por último, sean

$$\begin{aligned} u_N &= \textstyle\sum_{j=1}^3 u_N^j e_j, \\ u'_N &= \textstyle\sum_{j=1}^3 u_N'^j e'_j \end{aligned} \tag{6.4}$$

las velocidades Newtonianas medidas por los observadores inerciales (p, v) y (p', v'). Bajo estas condiciones se puede formular la relación entre ambas velocidades Newtonianas.

Proposición 6.3.5. *Para dos observadores instantáneos (p, v) y (p', v') que miden respecto de sus relojes de tiempo propio se cumple la relación:*

$$u_N'^j = \left(\sum_{r=1}^{3} L^4_r u^r_N + L^4_4\right)^{-1} \left(\sum_{n=1}^{3} L^j_n u^n_N + L^j_4\right).$$

Demostración. Por la Proposición 6.2.3 de la sección anterior, para las curvas que dan lugar a v y v' parametrizadas respecto de sus relojes de tiempo propio se cumple que $g(v, v) = g(v', v') = -1$. Por tanto, $v^4 = v'^4 = 1$. Además, $g(v, u) = -u^4$ y $g(v', u') = -u'^4$. A partir de la definición de velocidad Newtoniana dada en la Proposición 6.3.4, por la que $u = aPu$ con $a = g(v, v)g(v, u)^{-1}$ y análogamente para u', se deduce que:

$$\begin{aligned} u_N &= (u^4)^{-1} \textstyle\sum_{j=1}^3 u^j e_j, \\ u'_N &= (u'^4)^{-1} \textstyle\sum_{j=1}^3 u'^j e'_j. \end{aligned}$$

Comparando estas expresiones con (6.4), se deduce que $u_N^j = (u^4)^{-1}u^j$ y $u_N^{'j} = (u'^4)^{-1}u'^j$. En la segunda ecuación, sustituyendo las componentes de u' en función de las de u y multiplicando por $(u^4)^{-1}/(u^4)^{-1}$ queda que:

$$u_N^{'j} = (L_\alpha^4 (u^4)^{-1} u^\alpha)^{-1} (L_\beta^j (u^4)^{-1} u^\beta).$$

Sustituyendo $u_N = (u^4)^{-1} \sum_{j=1}^3 u^j e_j$ en esta última expresión se deduce la ecuación buscada. □

En el caso concreto en que la matriz L sea una matriz de Lorentz especial

$$L = S_\nu = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & -\nu k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\nu k & 0 & 0 & k \end{pmatrix},$$

con $k^{-1} = (1-\nu^2)^{1/2}$ y $\nu \in (-1,1)$, se obtiene la siguiente relación entre las velocidades:

$$\begin{aligned} u_N^{'1} &= \frac{u_N^1 - \nu}{1 - \nu u_N^1}, \\ u_N^{'2} &= \frac{u_N^2}{k(1 - \nu u_N^1)}, \\ u_N^{'3} &= \frac{u_N^3}{k(1 - \nu u_N^1)}. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de **fórmulas relativistas de composición de velocidades**. Físicamente se tiene la siguiente interpretación. Supongamos que un objeto se mueve a velocidad u_N respecto de un sistema de referencia inercial S y que tenemos otro sistema de referencia S' que se mueve a velocidad ν respecto de él en la dirección "1". Entonces, las ecuaciones anteriores permiten conocer las componentes de la velocidad u'_N con la que se mueve el objeto respecto del sistema de referencia S'.

Nota 6.3.6. En toda la sección se ha considerado el sistema natural de unidades, en el que la velocidad de la luz vale 1.

6.4. Dilatación en el tiempo

La dilatación del tiempo fue predicha por Einstein en 1905, pero no fue verificada experimentalmente hasta 1941 por B. Rossi y D.B. Hall. El problema era conseguir un reloj que se desplazase lo suficientemente rápido como para mostrar una dilatación medible. Rossi y Hall aprovecharon los relojes naturales que tienen las partículas subatómicas inestables, que se desintegran en promedio después de un tiempo definido, característico de cada tipo de partícula, conocido como vida media. En particular, se estudió la desintegración muónica, cuyo tiempo de vida media es de 2'2 μs. La velocidad a la que se mueven en la atmósfera es cercana a la de la luz, por lo que pueden desplazarse unos 660 metros antes de desintegrarse. En consecuencia, es improbable que lleguen a la superficie terrestre desde las grandes alturas de la atmósfera donde se producen. En el experimento original, se registraron un promedio de 563 muones/hora a una altura de 2.000 metros, y se detectaron unos 400 muones/hora a nivel del mar. Teniendo en cuenta el tiempo de vida media y la velocidad de los muones se esperaban unos 25 muones/hora en la superficie terrestre, por lo que se encontraron muchísimos más de los esperados. Esto implica que un reloj en movimiento se atrasa, es decir, va más lento. Para más información sobre experimentos que probasen la dilatación del tiempo se puede consultar [8].

Sea ψ una carta de Minkowski generada a partir de φ por una transformación de Lorentz homogénea y ortócrona, como en las secciones anteriores. Sea μ un observador de Minkowski con

$$\mu(\tau) = \sum_{j=1}^{4} y^j e_j + \tau e_4,$$

y sea γ un observador para el que se cumple:

$$\gamma(\tau) = \sum_{j=1}^{3} \bar{\gamma}^j(\tau) e_j + \tau e_4,$$

siendo $\bar{\gamma} = \varphi \circ \gamma$. Ambos tienen como parámetro temporal la cuarta componente. Supongamos que existen dos instantes de tiempo τ_1 y τ_2 con $\tau_1 < \tau_2$ para los que se cumple que $\mu(\tau_i) = \gamma(\tau_i)$ para $i = 1, 2$.

Por otra parte, consideramos que la velocidad Newtoniana v_N de γ, dada por:

$$v_N(\tau) = \left(\sum_{j=1}^{3} (\dot{\bar{\gamma}}(\tau))^2 \right)^{1/2},$$

debe ser no nula en un subintervalo no vacío de $[\tau_1, \tau_2]$.

Recordemos que el tiempo propio de un observador γ viene dado por $t = U(\gamma(\sigma))$, donde U es un reloj dado por $U = f \circ \gamma^{-1}$ y f dada como en la Definición 6.2.2. Por tanto, el tiempo propio de μ es τ y el de γ viene dado por:

$$t = t(\tau) = \int_0^{\tau} (-g(\mathring{\gamma}(\tau'), \mathring{\gamma}(\tau')))^{1/2} d\tau'.$$

Todas estas suposiciones se pueden traducir en que μ está quieto respecto de las coordenadas de ψ, mientras que γ se mueve, al menos, en el intervalo en el que suponemos que la velocidad es distinta de 0. Bajo estas condiciones se tiene el siguiente resultado:

Proposición 6.4.1. *En el contexto de las suposiciones desarrolladas anteriormente, se cumple la desigualdad*

$$t_2 - t_1 = t(\tau_2) - t(\tau_1) < \tau_2 - \tau_1.$$

Demostración. De la definición de γ se deduce que:

$$\mathring{\gamma}(\tau) = \sum_{j=1}^{3} \dot{\bar{\gamma}}^j(\tau) e_j + e_4.$$

Por tanto:

$$g(\mathring{\gamma}(\tau), \mathring{\gamma}(\tau)) = \sum_{j=1}^{3} (\dot{\mathring{\gamma}}^j(\tau))^2 - 1 = v_N^2(\tau) - 1.$$

Como $v_N(t) \neq 0$ en un subintervalo de $[\tau_1, \tau_2]$, se cumple que:

$$t(\tau_2) - t(\tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (1 - v_N^2(t))^{1/2} dt < \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt = \tau_2 - \tau_1.$$

□

Esta relación se conoce como **dilatación del tiempo** y se puede interpretar de la siguiente forma. Consideramos dos eventos P y Q que ocurren en la misma línea de universo γ. Para ese mismo observador γ, el tiempo que transcurre entre un evento y otro, $t_2 - t_1$, se conoce como tiempo propio. Si ahora consideramos otro observador μ que ve que γ se desplaza a una velocidad v_N respecto de él, medirá un tiempo $\tau_2 - \tau_1$ que siempre será mayor que el propio.

En este contexto, surge una paradoja conocida como la **paradoja de los gemelos**. Supongamos que μ y γ son dos gemelos y que γ comienza un viaje cósmico en τ_1, mientras que μ no se mueve en el sistema de coordenadas considerado en esta sección y se vuelven a encontrar en un tiempo τ_2. El tiempo transcurrido para μ es $\tau_2 - \tau_1$, mientras que para γ es $t_2 - t_1 < \tau_2 - \tau_1$, es decir, el viajero vuelve siendo más joven que su gemelo. Sin embargo, en principio los gemelos son indistinguibles: si consideramos que el gemelo γ es el que permanece en reposo y μ el viajero, se tendría que obtener lo contrario, que μ es más joven que γ al volver. Esta aparente contradicción lógica se resuelve como sigue: si μ está en reposo y γ se mueve en una dirección dada, la única forma de que γ vuelva al mismo sitio en el que está μ es que cambie de dirección durante el trayecto. Esto implica que γ experimenta una aceleración. Sin embargo, en el contexto de la Relatividad Especial se estudian sistemas de referencia inerciales, esto es, que se mueven con velocidad contante unos respecto de otros.

6.5. Contracción de la longitud

La noción de contracción de la longitud fue introducida por Lorentz y FitzGerald antes de que la Relatividad Especial fuese formulada. Describe la hipótesis de que la longitud de un cuerpo sólido moviéndose respecto del éter (sistema inercial único cuya existencia se postuló en el siglo diecinueve como medio por el que se propagaba la luz) sea menor que la longitud medida en reposo respecto del éter. Posteriormente, una vez reconocido que el éter no existía y desarrolladas las transformaciones de Lorentz, se pudo formular el hecho de que la longitud de un cuerpo que se mide es mayor cuando éste está en reposo con respecto al observador. En esta sección se va a probar este resultado.

Consideramos dos sistemas de referencia inerciales, que notaremos por MR y MR', determinados por dos cartas de Minkowski φ y φ' y una varilla sólida, notada por Σ. Suponemos que Σ está en reposo respecto de MR y que el sistema MR' se mueve respecto de MR. Para ilustrar la contracción de la longitud hay que realizar dos medidas, la longitud l de Σ respecto de MR y la longitud l' se que mide en MR' y probar que $l' < l$. El proceso de medida en cada caso se realiza de la siguiente forma:

1. Sea μ un observador de Minkowski en MR, sistema respecto del que la varilla Σ está en reposo y supongamos que μ conoce este hecho por un experimento previo. Observando la varilla, μ puede medir sus extremos, con coordenadas $x_1 = (x_1^1, x_1^2, x_1^3, \sigma_1)$ y $x_2 = (x_2^1, x_2^2, x_2^3, \sigma_2)$. Como Σ está en reposo en este sistema de referencia, las coordenadas espaciales no variarán con el tiempo. Así, la longitud l se determina como:

$$l = \left(\sum_{j=1}^{3}(x_1^j - x_2^j)^2\right)^{1/2}.$$

2. Para medir la longitud de la varilla en MR' se necesitan todos los observadores de Minkowski de dicho sistema, asumiendo que conocen sus coordenadas en la carta de Minkowski φ'. Se toma un parámetro temporal τ común para todos los observadores en el que cada uno debe determinar si uno de los extremos de Σ coincide con su posición o no. Entonces, existen exactamente dos observadores, uno para cada extremo, para los que su posición coincide con la de un extremo. Las coordenadas en la carta φ' vendrán dadas por $x_1' = (x_1'^1, x_1'^2, x_1'^3, \tau)$ y $x_2' = (x_2'^1, x_2'^2, x_2'^3, \tau)$. A partir de ellas, la longitud de la varilla en el sistema de referencia MR' viene dada por:

$$l' = \left(\sum_{j=1}^{3}(x_1'^j - x_2'^j)^2\right)^{1/2}.$$

Lema 6.5.1. *Sean x_1, x_2 las coordenadas de los extremos de la varilla medidas en MR y sean x_1', x_2' las correspondientes medidas en MR', como se ha detallado anteriormente. La relación entre estas coordenadas viene dada por:*

$$x_\rho'^j = L_4^j (L_4^4)^{-1}(\tau - z^4) + z^j + \sum_{r=1}^{3}(L_r^j - (L_4^4)^{-1} L_4^j L_r^4) x_\rho^r, \tag{6.5}$$

con $j = 1, 2, 3$, $\rho = 1, 2$ y la transformación de Lorentz $(L, z) = \varphi' \circ \varphi^{-1}$.

Demostración. La transformación $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ implica que:

$$x_\rho' = L \cdot x_\rho + z \tag{6.6}$$

para $\rho = 1, 2$ y tomando la cuarta componente, queda la expresión:

$$\tau = \sum_{\alpha=1}^{4} L_\alpha^4 x_\rho^\alpha + z^4.$$

Despejando queda:

$$x_\rho^4 = (L_4^4)^{-1}(\tau - z^4 - \sum_{r=1}^{3} L_r^4 x_\rho^r). \tag{6.7}$$

Tomando ahora componentes en (6.6) y sustituyendo x_ρ^4 por su expresión (6.7), se deduce que:

$$x'^j_\rho = \sum_{r=1}^{3} L^j_r x^r_\rho + L^j_4 x^4_\rho + z^j = \sum_{r=1}^{3} L^j_r x^r_\rho + L^j_4 (L^4_4)^{-1}(\tau - z^4 - \sum_{r=1}^{3} L^4_r x^r_\rho) + z^j. \qquad (6.8)$$

□

Esta proposición nos permite encontrar una expresión que relacione l' y l a través de la matriz L de la transformación de Lorentz de φ a φ'. Utilizando (6.8) para x'^j_1 y x'^j_2 y restando ambas expresiones resulta:

$$x'^j_1 - x'^j_2 = \sum_{r=1}^{3} (L^j_r - (L^4_4)^{-1} L^j_4 L^4_r)(x^r_1 - x^r_2),$$

luego la relación entre l y l' viene dada por:

$$l' = \left(\sum_{j=1}^{3} (x'^j_1 - x'^j_2)^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{r=1}^{3} (L^j_r - (L^4_4)^{-1} L^j_4 L^4_r)(x^r_1 - x^r_2) \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Consideremos el caso particular en el que L es una matriz de Lorentz especial. Sea

$$L = S_\nu = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & -\nu k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\nu k & 0 & 0 & k \end{pmatrix},$$

con $k^{-1} = (1-\nu^2)^{1/2}$ y $\nu \in (-1,1)$. Las componentes de L vienen dadas por:

$$\begin{array}{ll} L^j_r = k\delta^j_1\delta^1_r + \delta^j_2\delta^2_r + \delta^j_3\delta^3_r, & L^4_4 = k, \\ L^j_4 = -\nu k \delta^j_1, & L^4_r = -\nu k \delta^1_r, \end{array}$$

donde $j, r = 1,2,3$. Entonces, la expresión de l' queda:

$$l' = \left(\sum_{j=1}^{3} (x^j_1 - x^j_2)^2 - (1-\nu^2)(x^1_1 - x^1_2)^2 \right)^{1/2}.$$

Definiendo $a = l^{-1}(x^1_1 - x^1_2)$ y sacando l factor común en la expresión anterior se obtiene:

$$l' = (1 - (a\nu)^2)^{1/2} l.$$

El caso en que $a = 1$ significa que la varilla se mueve en la dirección a relativa a MR', ya que implica $l = (x^1_1 - x^1_2)$, y se deduce la expresión:

$$l' = (1-\nu^2)^{1/2} l = \frac{1}{k} l.$$

Como ya se mencionó al estudiar las transformaciones de Lorentz, las matrices de Lorentz especiales fueron las primeras en describir unas transformaciones que dejaban invariantes las ecuaciones de Maxwell en el contexto de la relatividad especial. Hoy en día, estas matrices son las que se utilizan para describir dichas transformaciones. Si un sistema de referencia $\bar{S}$ se mueve con velocidad ν en la dirección x respecto de otro sistema de referencia S, ambos inerciales, la transformación en esa dirección viene dada por $\bar{x} = k(x - \nu t)$. Si además la varilla cuya longitud queremos medir está en esa dirección y se mueve con $\bar{S}$, su longitud vendrá dada por $\bar{l} = \bar{x_2} - \bar{x_1} = k(x_2 - x_1) = kl$. Así, la longitud que mide el sistema S, que sería nuestro MR' moviéndose con velocidad ν respecto de $\bar{S}$, el sistema respecto del que la varilla está quieta (esto es, MR), viene dada por $l = \frac{1}{k}\bar{l}$, expresión que coincide con la que hemos deducido. Como $k^{-1} = (1 - \nu^2)^{1/2}$ y $\nu \in (-1, 1)$, se cumple que $k \geq 1$, y por tanto l' medido en el sistema MR' es menor que l es medido en el sistema MR, es decir, la longitud de la varilla se contrae al medirla en un sistema de referencia que se mueve respecto del que está en reposo para la varilla. Por esta razón este fenómeno se conoce en Relatividad Espacial como contracción de la longitud.

Bibliografía

[1] Choquet-Bruhat Y, de Witt-Morette C. *Analysis, Manifolds and Physics*. Oxford-North-Holland (1996).

[2] Do Carmo, M.P. *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Alianza Universidad Textos (1990).

[3] Lee, J.M. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer (2013).

[4] Petkov, V. *Space, Time and Spacetime. Physical and Philosophical Implications of Minkokwski's Unification of Space and Time.* Springer (2010).

[5] Resnick, R. *Introduction to Special Relativity*. John Wiley & Sons, Inc. (1968).

[6] Schlichtkrull, H. *Differentiable Manifolds. Lecture Notes for Geometry 2*. Department of Mathematics, University of Copenhagen (2011).

[7] Schröter, J. *Minkowski Space. The Spacetime of Special Relativity.* De Gruyter (2017).

[8] Taylor, J.R. *Mecánica clásica*. Editorial Reverté (2013).