

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Matemáticas



Máster Universitario en Matemáticas
Departamento de Geometría y Topología

Trabajo Fin de Máster

Subvariedades asociadas a grafos

Realizado por: Gema Terrón Mejías

VºBº y dirigido por: Dr. Alfonso Carriazo Rubio

Sevilla, Febrero 2020

*A mi familia, por confiar en
mí, apoyarme y animarme
en este duro y bonito camino
de las matemáticas.*

Resumen

En este trabajo estudiamos un tema que conecta elementos de dos áreas de las Matemáticas tradicionalmente separadas: los grafos de la Matemática Discreta y las subvariedades de la Geometría Diferencial. Para ello, analizamos cuatro artículos en los que se desarrolla la teoría de las subvariedades asociadas a grafos, desde su introducción como un método de representación gráfica hasta su generalización a espacios vectoriales dotados de una estructura adicional. Abordamos los problemas fundamentales de dicha teoría: la forma de los grafos y la clasificación de las correspondientes subvariedades. Aportamos un buen número de ejemplos.

Abstract

In this work we study a subject connecting some elements from two traditionally separated areas in Mathematics: graphs from Discrete Mathematics and submanifolds from Differential Geometry. To do so, we analyze four papers in which the theory of submanifolds associated with graphs has been developed, from its insertion as a graphic representation method, to its generalization for vector spaces endowed with an additional structure. We deal with the fundamental problems in that theory: the shape of graphs and the classification of the corresponding submanifolds. We show many examples.

Índice general

Introducción	9
1. Preliminares.	13
1.1. Teoría de Grafos.	13
1.2. Distribuciones: Teorema de Frobenius.	15
1.3. Geometría casi-Hermítica.	16
1.4. Subvariedades slant.	17
2. Inmersiones bi-slant.	19
2.1. Subvariedades bi-slant	21
2.2. Representación gráfica.	23
3. Grafos asociados a espacios vectoriales de dimensión par.	29
3.1. Grafos asociados a bases ortonormales.	29
3.2. La forma de los grafos asociados a bases ortonormales.	43
4. Subvariedades asociadas a grafos.	59
4.1. Subvariedades asociadas a grafos.	59
4.2. El caso 4-dimensional.	63
5. Subvariedades débilmente asociadas a grafos.	69
5.1. Subvariedades (débilmente) asociadas a grafos.	69
5.2. Casos de dimensión baja.	72
5.3. Algunas familias relevantes de grafos.	77
Bibliografía	85

Introducción

La comprensión del comportamiento de una subvariedad bajo la acción de una estructura casi compleja J de una variedad casi-Hermítica se ha convertido en un tema de investigación interesante en la Teoría de Subvariedades. En este sentido, las subvariedades complejas y las subvariedades totalmente reales son bien conocidas y fueron generalizadas por B.-Y. Chen definiendo las inmersiones slant [6]. Más tarde, N. Papaghiuc introdujo una noción más general, llamadas subvariedades semi-slant [10], que también incluye la clase de las subvariedades CR. En este trabajo mostramos que, en todos estos casos, podemos encontrar un grafo estrechamente relacionado con la estructura algebraica en la subvariedad.

La idea de la asociación entre las subvariedades mencionados anteriormente y los grafos correspondientes surge del estudio de las superficies slant. Esta asociación, entendida inicialmente tan solo como una representación gráfica del comportamiento del tensor J sobre la subvariedad, fue descrita en primer lugar por A. Carriazo en [3]. Dada una superficie M^2 θ -slant propia en una variedad casi-Hermítica 4-dimensional (\widetilde{M}^4, J, g) , Chen demostró en [6] que podemos considerar una referencia local ortonormal especial, llamada referencia slant adaptada, $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ tal que X_1, X_2 son tangentes a M , X_3, X_4 son normales a M y satisfacen las siguientes igualdades:

$$g(JX_1, X_2) = -g(JX_3, X_4) = \cos \theta, \quad g(JX_1, X_3) = g(JX_2, X_4) = \sin \theta,$$

$$g(JX_1, X_4) = g(JX_2, X_3) = 0.$$

Está claro que las igualdades anteriores determinan completamente el comportamiento de la estructura casi compleja J en M . Entonces, parece interesante dar una expresión gráfica de las mismas. Podemos definir fácilmente un grafo utilizando el siguiente método:

1. Consideramos un vértice para cada campo de la referencia, etiquetándolos con su correspondiente índice natural.
2. La arista $\{i, j\}$ existe si y solo si $g(JX_i, X_j) \neq 0$.

3. Asignamos a cada arista su valor, que viene determinado por $g^2(JX_i, X_j)$.

Hay que tener en cuenta que como $g(JX_i, X_j) = -g(JX_j, X_i)$, la definición de la existencia de una arista no es ambigua. Aunque sería razonable haberle asignado el valor $g(JX_i, X_j)$ a la arista $\{i, j\}$, esto no parece conveniente ya que las aristas no dependen del orden de sus vértices, y por tanto, se le asigna el valor $g^2(JX_i, X_j)$.

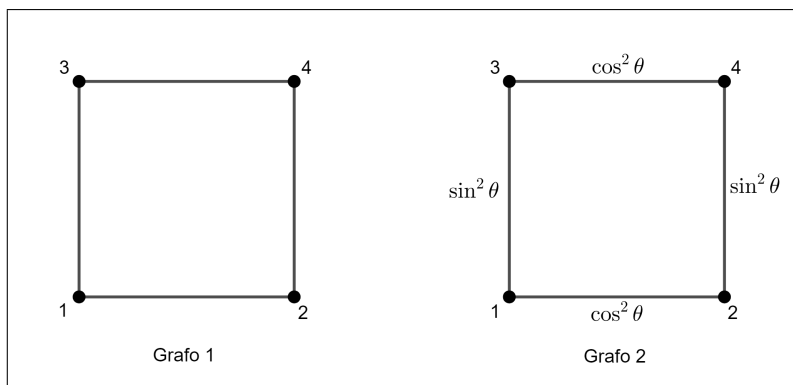


Figura 1: Grafos asociados a una superficie slant.

En el Grafo 1 de la Figura 1, podemos observar el grafo obtenido al realizar los pasos 1 y 2. Mientras que en el Grafo 2 de la Figura 1, se obtiene el grafo correspondiente al realizar también el paso 3. La diferencia entre estos dos grafos será un hecho importante: el primero es un grafo ponderado y el segundo no.

El punto de partida de la teoría de subvariedades asociadas a grafos fue establecer la asociación entre una base ortonormal del espacio tangente y un grafo etiquetado (y posiblemente ponderado). Entonces, se pretendió generalizar esa situación mediante la introducción de un nuevo método para asociar espacios vectoriales dotados de un producto escalar y grafos, a través de bases ortonormales. Es necesario señalar que la asociación entre espacios vectoriales y grafos no es un tema nuevo (por ejemplo, ver el Capítulo 6 de [9]).

La importancia de esta nueva asociación reside primero en el hecho de que surge naturalmente de la asociación (débil) entre subvariedades y grafos y, por lo tanto, puede reforzar el vínculo establecido entre la Matemática Discreta y la Geometría Diferencial, dos áreas tradicionalmente remotas en Matemáticas, convirtiéndose en un herramienta muy útil para el problema general de la clasificación de subvariedades. El concepto de subvariedades asociadas a grafos fue estudiado por A. Carriazo y L. M. Fernández en [4]. Y el concepto de asociación débil está

desarrollado en [5] por A. Carriazo, L. M. Fernández y A. Rodríguez-Hidalgo.

Teniendo en cuenta este punto de partida, solo consideraremos los espacios vectoriales euclídeos de dimensión par (debido al hecho de que las variedades casi-Hermíticas también son de dimensión par), donde el producto escalar desempeña el papel de la métrica casi-Hermítica. Señalaremos cómo, en estos espacios, siempre es posible considerar una isometría F tal que $F^2 = -Id$ (que corresponde a la estructura casi compleja de la Teoría de Subvariedades). La asociación de grafos y espacios vectoriales de dimensión par fue estudiada por L. Boza, A. Carriazo y L. M. Fernández en [2].

Sin embargo, esta nueva asociación también es importante por sí misma ya que establece un marco general con muchos problemas interesantes para resolver: la forma de los grafos que admiten dicha asociación, su comportamiento ante posibles cambios de bases ortonormales, la caracterización de grafos pertenecientes a familias relevantes, etc.

Aunque la secuencia histórica de estos estudios ha sido la nombrada, en este trabajo se ha optado por reordenar estos conceptos, ya que hemos partido de conceptos generales como son los espacios vectoriales para llegar a conceptos más concretos, como son las subvariedades.

Se comienza la presente memoria con una sección preliminar en la que presentamos los conceptos básicos y los resultados de la Teoría de Grafos, la Geometría casi-Hermítica, las distribuciones diferenciables, la Geometría casi-Hermítica y las subvariedades slant, para su uso posterior.

En el Capítulo 2 presentamos una nueva generalización de las subvariedades complejas y las subvariedades totalmente reales, así como de las subvariedades slant o las CR, al dar la definición de subvariedades bi-slant, y establecemos sus relaciones con esos tipos de subvariedades previamente conocidos. Probamos algunos resultados generales y señalamos cómo las subvariedades bi-slant no son solo una generalización trivial de subvariedades slant. Además, exponemos el método que nos permite mostrar el comportamiento mencionado de una subvariedad con respecto a J y lo usamos para mostrar ejemplos nuevos e interesantes.

A continuación, en el Capítulo 3 definimos la asociación entre grafos y bases ortonormales y proporcionamos varios ejemplos en las dimensiones 2, 4, 6 y 8. Además, estudiamos algunos cambios apropiados de bases produciendo otras muy prácticas y, por supuesto, preservando la asociación. Posteriormente, se investiga la forma de estos grafos. Mostramos algunas condiciones generales para ellos y

demostramos que un grafo está asociado a una base ortonormal si y solo si cada uno de sus componentes también lo está. Usando este hecho, determinamos completamente los grafos de grado máximo 3 admitiendo tal asociación.

Seguidamente, en el Capítulo 4, generalizamos la situación de las subvariedades bi-slant, definiendo subvariedades asociadas a grafos. Básicamente, primero construimos un grafo relacionado con el espacio tangente en un punto arbitrario de una subvariedad, y luego decimos que esta subvariedad está asociada al grafo si puede extenderse de manera diferenciable a cada punto de la subvariedad. Se muestran algunos resultados sobre la posibilidad de que un grafo se asocie con una subvariedad y los usamos para caracterizar subvariedades CR por medio de árboles (grafos conexos sin ciclos). También caracterizamos las superficies slant. Finalmente, estudiamos y caracterizamos las subvariedades asociadas a grafos en una variedad casi-Hermítica de dimensión 4.

Para finalizar, en el último Capítulo 5 completamos la noción de subvariedades asociadas a grafos introduciendo la idea de una “asociación débil”, que básicamente significa no tener en cuenta los pesos de las aristas. Por tanto, el objetivo principal de este apartado es estudiar los grafos que pueden estar “débilmente asociados” con una subvariedad. Para ello, primero se mencionan aquellos resultados del capítulo anterior que son análogos para la asociación débil y se introducen otros sobre cómo se ven tales grafos. Al usar estos resultados, se analizan estos grafos en las dimensiones 4 y 6 y los determinamos completamente. Por último también se estudian subvariedades asociadas a algunas familias especiales de grafos: bosques, ciclos y generalizaciones, y grafos cúbicos.

Los conceptos estudiados en este trabajo son especialmente recientes y no hay más aportaciones que las mencionadas durante el estudio. Esto provoca que no sea un tema totalmente cerrado y da lugar a posibles nuevas aportaciones.

Finalmente, me gustaría aprovechar esta introducción para dar las gracias al Profesor Dr. D. Alfonso Carriazo Rubio por todo el tiempo y esfuerzo que me ha dedicado a lo largo del proceso de elaboración de este trabajo, y sobre todo por darme siempre ánimos para continuar.

Gracias también a mis padres, mi hermana, mi familia y amigos por su apoyo y cariño en los momentos buenos y malos.

Capítulo 1

Preliminares.

En este capítulo se tratarán las definiciones básicas y los resultados más importantes que hemos considerado imprescindible para introducir el contexto en el que se sitúa el tema del trabajo y llevar a cabo una completa comprensión de los capítulos posteriores. Aunque se trata de conceptos conocidos en los campos de Matemática Discreta y Geometría Diferencial, son necesarios para facilitar la lectura del presente trabajo y para fijar desde el principio la notación uniforme que se usará en todo el desarrollo.

Se comienza con una sección de generalidades acerca de Teoría de Grafos, cuyos conceptos fueron estudiados en Matemática Discreta, asignatura impartida en el Grado en Matemáticas, lo que justifica que no se incluyan las demostraciones. Los resultados que aquí se incluyen pueden encontrarse en [7].

1.1. Teoría de Grafos.

Un *grafo* es un par $(V(G), A(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto finito no vacío de *vértices* y $A(G)$ es un conjunto prescrito de pares no ordenados de vértices distintos de $V(G)$, llamados *aristas*. Dado un par $\{i, j\}$ en $A(G)$, i y j se denominan *vértices adyacentes* y se dice que $\{i, j\}$ son incidentes tanto en i como en j . El *grado* de un vértice es el número de aristas incidentes en él. Un vértice de grado 0 se denomina *vértice aislado*. Un subconjunto de vértices es un conjunto independiente y sus vértices se denominan independientes si no hay dos de ellos adyacentes. Un grafo se denomina *regular* de grado d si todos sus vértices son de grado d . En particular, un grafo regular de grado 3 se denomina *grafo cúbico*.

El *complementario* de un grafo $G = (V(G), A(G))$ es el grafo \overline{G} tal que $V(\overline{G}) = V(G)$ y una arista $a \in A(\overline{G})$ si y sólo si $a \notin A(G)$. Si G es un grafo y a es una de sus aristas, el grafo $G - a$ es el obtenido al eliminar la arista a del

grafo G .

Dados dos grafos G_1 y G_2 , su unión $G = G_1 \cup G_2$ es el grafo tal que $V(G) = V(G_1) \sqcup V(G_2)$ y $A(G) = A(G_1) \sqcup A(G_2)$ (es decir, el grafo obtenido al juntar G_1 y G_2 sin aristas adicionales entre ellos).

El grafo de n vértices todos ellos de grado máximo $n - 1$ es denotado por K_n y se llama *grafo completo* de n vértices.

Un *camino* es un grafo determinado por una secuencia alternada de vértices y aristas distintas en las que cada arista incide con los dos vértices inmediatamente anteriores y posteriores. El camino de $n \geq 2$ vértices es denotado por P_n . Un *ciclo* es un camino cerrado, es decir, un camino que empieza y termina con el mismo vértice. El ciclo de $n \geq 3$ vértices es denotado por C_n .

El grafo d -cubo Q_d ($d \geq 1$) es el 1-estructura del hipercubo de dimensión d $\{(x_1, \dots, x_d) : 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, \dots, d\}$ (es decir, el grafo consistente en los vértices y las aristas del hipercubo). Obviamente, Q_d es un grafo regular con 2^d vértices de grado d . En particular, Q_3 es un grafo cúbico.

Un grafo se denomina *bipartito* si sus vértices pueden ser divididos en dos conjuntos, llamados conjuntos partitos, de manera que ninguna arista se una a dos vértices en el mismo conjunto. Un *grafo bipartito completo* es un grafo bipartito en el que cada vértice de un conjunto partito es adyacente a otro vértice del otro conjunto partito. En este caso, si dos conjuntos bipartitos tienen cardinal n y m , respectivamente, entonces el grafo se denota $K_{n,m}$.

A lo largo del trabajo, vamos a etiquetar los grafos al distinguir sus vértices entre sí por números naturales consecutivos. Por lo tanto, identificamos el conjunto de vértices de un grafo con n vértices con el conjunto $\{1, \dots, n\}$. También trataremos con grafos ponderados, es decir, grafos de manera que cada arista tenga un peso asignado (un número real).

En Teoría de Grafos, un isomorfismo entre dos grafos es una correspondencia biyectiva entre sus conjuntos de vértices que preserva su adyacencia. Se dice que dos grafos son isomorfos si existe un isomorfismo entre ellos. De esta forma, es obvio que las etiquetas de los vértices de dos grafos isomorfos deben ser las mismas. Dado que estamos considerando grafos ponderados y etiquetados, imponemos a partir de ahora que los isomorfismos preservan las etiquetas y los pesos. Por tanto, a lo largo de este trabajo un isomorfismo entre dos grafos con n vértices es la identificación del conjunto $\{1, \dots, n\}$ en sí mismo, preservando la adyacencia y

los pesos de las aristas. Para más información sobre Teoría de Grafos, se puede consultar [9].

1.2. Distribuciones: Teorema de Frobenius.

En esta sección hemos omitido las definiciones más generales sobre las variedades diferenciales, pues éstos se estudian en la asignatura del mismo nombre, del Grado en Matemáticas. Sin embargo, introducimos las definiciones y los resultados más relevantes sobre distribuciones diferenciables, sin incluir las demostraciones.

Estos resultados nos serán de gran utilidad para definir las subvariedades bi-slant y, en concreto, el Teorema de Frobenius es una clave fundamental para obtener ejemplos de subvariedades, como se indicará.

Definición 1.2.1 Sea M una variedad diferenciable de dimensión m . Una distribución n -dimensional ($1 \leq n \leq m$) en M es una aplicación \mathcal{D} que a cada punto $p \in M$ le hace corresponder un subespacio vectorial n -dimensional \mathcal{D}_p de $T_p(M)$. Entonces, se dice que un campo $X \in \chi(M)$ pertenece a \mathcal{D} si $X_p \in \mathcal{D}_p$, para todo $p \in M$ y se escribe:

$$\mathcal{D} = \{X \in \chi(M) / X_p \in \mathcal{D}_p, \text{ para todo } p \in M\}.$$

Definición 1.2.2 Una distribución n -dimensional \mathcal{D} se dice que es Diferenciable si para cada punto $p \in M$ existe un entorno abierto U de p y n campos diferenciables $X_1, \dots, X_n \in \chi(U)$, tales que $\mathcal{D}_p = \langle X_1(p), \dots, X_n(p) \rangle$, para todo $p \in U$.

Proposición 1.2.3 Sea M una variedad diferenciable y sea \mathcal{D} una distribución n -dimensional en M tal que existen $X_1, \dots, X_n \in \chi(M)$ con

$$\mathcal{D}_p = \langle X_1(p), \dots, X_n(p) \rangle,$$

para todo $p \in M$. Entonces, se verifica:

$$\mathcal{D} = \left\{ \sum_{i=1}^n f_i X_i / f_i \in \mathcal{F}(M), i = 1, \dots, n \right\}.$$

Definición 1.2.4 Una distribución \mathcal{D} se dice Involutiva (o Completamente Integrable) si dados cualesquiera $X, Y \in \mathcal{D}$ se verifica que $[X, Y] \in \mathcal{D}$.

Definición 1.2.5 Dadas una variedad diferenciable M y una distribución \mathcal{D} en M , se dice que una subvariedad (N, f) de M es una Subvariedad Integral de \mathcal{D} si se verifica que, para cualquier punto $q \in N$, $f_{*q}(T_q(N)) \subseteq \mathcal{D}_{f(q)}$.

Proposición 1.2.6 *Sea \mathcal{D} una distribución diferenciable en M tal que para cada punto $p \in M$ existe una subvariedad integral de \mathcal{D} de dimensión máxima que pasa por p . Entonces, \mathcal{D} es involutiva.*

Teorema 1.2.7 (Teorema de Frobenius) *Sea \mathcal{D} una distribución n -dimensional diferenciable e involutiva en una variedad diferenciable m -dimensional M . Dado $p \in M$, existe una subvariedad integral de dimensión n de \mathcal{D} que pasa por p . Además, existe un sistema local de coordenadas $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_m))$, centrado en p (esto es, $p \in U$ y $\varphi(p) = 0$), tal que las subvariedades integrales de \mathcal{D} que pasan por p son las placas $x_i = 0$, $i = n + 1, \dots, m$.*

Con la ayuda del Teorema de Frobenius, podremos garantizar que dado unos campos de vectores determinados, existen subvariedades integrales de dimensiones máximas para todas las distribuciones involutivas que define cualquier elección de un subconjunto de dichos campos. Esto hecho será muy útil, para dar representaciones gráficas de las subvariedades bi-slant.

1.3. Geometría casi-Hermítica.

La teoría de subvariedades de variedades casi-Hermíticas constituye hoy en día una de las áreas más interesante en la Geometría Diferencial, y es la herramienta clave para el desarrollo de esta memoria. Por ello se introducen aquí los resultados imprescindibles para comprender completamente los siguientes capítulos. Dichos conceptos se pueden encontrar en [12].

Se dice que la terna (\widetilde{M}, J, g) es una variedad casi-Hermítica donde \widetilde{M} es una variedad diferenciable de dimensión par, J es un campo tensorial del tipo $(1, 1)$ tal que $J^2 = -Id$ y g una métrica Riemanniana, compatible con el tensor J , es decir, tal que

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

para cualesquiera campos de vectores X e Y en \widetilde{M} . De la igualdad anterior se deduce que $g(JX, Y) = -g(X, JY)$ y por tanto $g(JX, X) = 0$.

En el caso en el que $\widetilde{\nabla}J = 0$, se dice que (\widetilde{M}, J, g) es una variedad de Kaehler.

Uno de los aspectos más interesantes de la Teoría de Subvariedades es el comportamiento del espacio tangente de la subvariedad con respecto a la estructura correspondiente. Así, en la geometría compleja existen dos clases bien conocidas de subvariedades: las subvariedades complejas y las subvariedades totalmente reales.

Sea M una subvariedad de una variedad Hermítica \widetilde{M} y X un campo de vectores tangente a M , que puede expresarse como:

$$JX = TX + FX,$$

donde TX es tangente a M y FX es normal a M . Entonces se dice que M es una subvariedad compleja si

$$J(T_pM) \subseteq T_pM,$$

para todo punto $p \in M$. Es decir, M es una subvariedad compleja de \widetilde{M} si y sólo si para cada vector no nulo X , tangente a M en un punto cualquiera p , el ángulo entre JX y T_pM es igual a cero, o lo que es lo mismo, si $F \equiv 0$.

En cuanto a las subvariedades totalmente reales, éstas vienen caracterizadas por la condición

$$J(T_pM) \subseteq T_p^\perp M,$$

para todo $p \in M$. En otras palabras, verifican que, para cada vector no nulo $X \in T_pM$, el ángulo entre JX y T_pM es igual a $\pi/2$, independientemente del punto $p \in M$, es decir, $T \equiv 0$.

1.4. Subvariedades slant.

En esta sección recordamos primero algunas fórmulas básicas y definiciones sobre subvariedades slant en Geometría Compleja, que usaremos más tarde. Para más detalles sobre variedades complejas, podemos recurrir a [12]. Gracias a la definición de distribución slant, se podrán introducir nuevos tipos de subvariedades en el Capítulo 1.

A partir de ahora, M será una subvariedad de una variedad casi-Hermítica (\widetilde{M}, J, g) y también denotamos por g la métrica inducida en M . Entonces, M se dice que es slant [6] si para cualquier $p \in M$ y para cada vector no nulo $X_p \in T_pM$, el ángulo $\theta(X_p)$, $0 \leq \theta(X_p) \leq \pi/2$, entre J_pX_p y T_pM es una constante θ , llamado ángulo slant de la subvariedad. En este caso, M se dice subvariedad θ -slant. En particular, está claro que M es una subvariedad compleja (resp. subvariedad totalmente real) con ángulo slant $\theta = 0$ (resp. $\theta = \pi/2$). Si M es una subvariedad θ -slant tal que $\theta \in (0, \pi/2)$, entonces se dice que es una subvariedad slant propia.

Para cualquier campo de vectores tangente X , escribimos $JX = TX + FX$, donde TX es tangente a M y FX es normal a M . Entonces, es conocido [6] que M es θ -slant si y sólo si

$$T^2X = -\cos^2 \theta X, \tag{1.4.1}$$

para cualquier campo de vectores X tangente a M . Además, también es necesario otra caracterización de subvariedades slant, dado en [8]:

Lema 1.4.1 *Dada una referencia local ortonormal $\{X_1, \dots, X_m\}$ de TM , M es θ -slant si y sólo si*

$$\sum_{i=1}^m g(JX_j, X_i)g(JX_k, X_i) = \delta_{jk} \cos^2 \theta,$$

para cualesquiera $j, k = 1, \dots, m$.

Capítulo 2

Inmersiones bi-slant.

En [10], N. Papaghiuc introdujo la noción de subvariedad semi-slant de una variedad Kaehlariana, definiéndola como aquella subvariedad cuyo fibrado tangente admite una descomposición ortogonal en dos distribuciones, siendo una de ellas compleja y la otra slant con ángulo no nulo.

Vamos a comenzar el capítulo presentando el concepto de distribución slant en una subvariedad M de una variedad casi-Hermítica (\widetilde{M}, J, g) . A continuación, introduciremos la definición de una clase más general de subvariedades, las llamadas subvariedades bi-slant y, como caso particular de dichas subvariedades, las subvariedades semi-slant.

Teniendo en cuenta todos estos conceptos, en [3], A. Carriazo se planteó qué comportamiento tendría una subvariedad bajo la acción de una estructura casi compleja y expuso un método para obtener una representación gráfica de ello. Para finalizar el presente capítulo, se pone de manifiesto dicho método y se proporcionan algunos ejemplos para poder visualizarlo gráficamente.

En primer lugar vamos a relacionar las distribuciones complejas y las distribuciones totalmente reales, vistas en la Sección 1.3, con las distribuciones slant.

Sea \mathcal{D} una distribución diferenciable en M . Se dice que \mathcal{D} es compleja (resp. totalmente real) si $J(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ (resp. $J(\mathcal{D}) \subseteq T^\perp M$). Por otro lado \mathcal{D} se dice que es una distribución slant [10] si para cualquier $p \in M$ y para cada $X_p \in \mathcal{D}_p$, $X_p \neq 0$, el ángulo $\theta_{\mathcal{D}}(X_p)$, $0 \leq \theta_{\mathcal{D}}(X_p) \leq \pi/2$, entre $J_p X_p$ y \mathcal{D}_p es una constante llamada ángulo slant \mathcal{D} . De hecho, $\theta_{\mathcal{D}}(X_p)$ es un ángulo entre $J_p X_p$ y $(PT)_p X_p$, donde P denota el operador proyección de TM en \mathcal{D} . Encontramos la siguiente relación entre estas tres nociones:

Lema 2.0.1 *En las condiciones anteriores, tenemos que:*

- i) \mathcal{D} es una distribución compleja si y sólo si es una distribución slant con ángulo slant $\theta_{\mathcal{D}} = 0$.
- ii) Si \mathcal{D} es una distribución totalmente real, entonces es una distribución slant con ángulo slant $\theta_{\mathcal{D}} = \pi/2$.

Demostración:

Suponemos que \mathcal{D} es una distribución compleja. Entonces, está claro que es 0-slant, ya que $JX \in \mathcal{D}$, para cualquier $X \in \mathcal{D}$.

Veamos ahora la implicación recíproca. Supongamos que \mathcal{D} es 0-slant. Como $\cos \theta = \frac{g(JX, PTX)}{|JX||PTX|}$ y $\theta = 0$ se tiene que $\cos \theta = 1$, lo que implica

$$\frac{g(JX, PTX)}{|JX||PTX|} = 1.$$

Por otro lado, también se tiene que

$$g(JX, PTX) = g(TX, PTX) = g(PTX, PTX) = |PTX|^2.$$

Luego,

$$\frac{|PTX|^2}{|JX||PTX|} = 1,$$

lo que implica que $|PTX| = |JX| = |X|$, ya que $|JX|^2 = g(JX, JX) = g(X, X) = |X|^2$, por ser M una subvariedad isométricamente inmersa en una variedad casi-Hermítica. Esto implica que $JX = PTX \in \mathcal{D}$, para cualquier $X \in \mathcal{D}$. Por otro lado, también se tiene que $\mathcal{D} \subseteq J(\mathcal{D})$, ya que cada $X \in \mathcal{D}$ puede ser escrita como $X = J(-JX)$.

El apartado ii) se sigue inmediatamente de la definición. □

Si \mathcal{D} es una distribución θ -slant, también se puede probar que

$$(PT)^2X = -\cos^2 \theta X, \tag{2.0.1}$$

para cualquier $X \in \mathcal{D}$.

2.1. Subvariedades bi-slant

Sea M una subvariedad de una variedad casi-Hermítica (\widetilde{M}, J, g) . Vamos a suponer que existen dos distribuciones ortonormales \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 en M tales que $TM = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$. En esta situación, denotamos por P_i a la proyección de TM en \mathcal{D}_i y ponemos $T_i = P_i \circ T$, $i = 1, 2$. Hasta ahora, ya hay dos tipos de subvariedades conocidas que satisfacen la descomposición anterior, definidas como sigue:

- Si \mathcal{D}_1 es una distribución compleja y \mathcal{D}_2 es una distribución totalmente real, entonces M se dice que es una subvariedad *CR* [1].
- Si \mathcal{D}_1 es una distribución compleja y \mathcal{D}_2 es una distribución slant con el ángulo slant $\theta \neq 0$, entonces M se dice que es una subvariedad *semi-slant* [10].

La noción de subvariedad semi-slant claramente generaliza a las de slant y subvariedad CR. Ahora, vamos a introducir dos tipos nuevos de subvariedades:

- Si \mathcal{D}_1 es una distribución totalmente real y \mathcal{D}_2 es una distribución slant con el ángulo slant $\theta \neq \pi/2$, entonces se dice que M es una subvariedad *anti-slant*.
- Si \mathcal{D}_1 es una distribución θ_1 -slant y \mathcal{D}_2 es una distribución θ_2 -slant, entonces se dice que M es una subvariedad *bi-slant*. En este caso, nos referiremos a los ángulos usando la notación (θ_1, θ_2) .

Aunque las subvariedades anti-slant se llamaron de tal forma al ser definidas, posteriormente también se han llamado pseudo-slant o hemi-slant.

Pero, ¿cómo se relacionan los tipos de subvariedades descritos anteriormente? El siguiente teorema nos proporciona la respuesta a nuestra pregunta:

Teorema 2.1.1 *Sea M una subvariedad de una variedad casi-Hermítica (\widetilde{M}, J, g) .*

- i) M es una subvariedad CR si y sólo si es una bi-slant con $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$.*
- ii) M es una subvariedad semi-slant si y sólo si es una bi-slant con $\theta_1 = 0$, $\theta_2 \in (0, \pi/2]$.*
- iii) Si M es una subvariedad anti-slant entonces es una bi-slant con $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 \in [0, \pi/2)$.*
- iv) M es una subvariedad semi-slant y una subvariedad anti-slant si y sólo si es slant o CR.*

Demostración:

Vamos a probar el resultado i). Si M es una subvariedad CR, entonces el Lema 2.0.1 implica que es una subvariedad $(0, \pi/2)$ bi-slant. Para la implicación recíproca, sólo tenemos que probar que \mathcal{D}_2 es una distribución totalmente real, es decir, $T \equiv 0$ en \mathcal{D}_2 . Si tenemos $X \in \mathcal{D}_2$, entonces $T_2X = 0$ y así $TX = T_1X \in \mathcal{D}_1$. Pero, para cualquier $Y \in \mathcal{D}_1$, $g(T_1X, Y) = -g(X, TY) = 0$, ya que $TY \in \mathcal{D}_1$. Por tanto, $TX = 0$.

Los resultados ii) y iii) se obtienen directamente del Lema 2.0.1.

Con respecto al resultado iv), está claro que las subvariedades slant y CR aparecen como casos particulares de las subvariedades semi-slant y anti-slant. Recíprocamente, vamos a suponer que $TM = \mathcal{D}_{11} \oplus \mathcal{D}_{12} = \mathcal{D}_{21} \oplus \mathcal{D}_{22}$, donde \mathcal{D}_{11} (resp. \mathcal{D}_{21}) es una distribución compleja (resp. distribución totalmente real) y \mathcal{D}_{12} (resp. \mathcal{D}_{22}) es una distribución slant con ángulo $\theta_{12} \neq 0$ (resp. $\theta_{22} \neq \pi/2$). Podemos pensar que todas estas distribuciones son no-triviales (si no, la demostración termina inmediatamente). Entonces, dado $X \in \mathcal{D}_{11}$ y $Y \in \mathcal{D}_{21}$, tenemos que $g(X, Y) = g(JX, JY) = 0$, ya que $JX \in \mathcal{D}_{11}$ y $JY \in T^\perp M$. Por tanto, debe ser $\mathcal{D}_{12} = \mathcal{D}_{21}$, $\theta_{12} = \pi/2$, $\mathcal{D}_{11} = \mathcal{D}_{22}$ y $\theta_{22} = 0$, es decir, M es una subvariedad CR. \square

Obsérvese que el recíproco del punto iii) del Teorema 2.1.1 es cierto cuando $\theta_2 = 0$, pero no en general. De hecho, podemos mostrarlo en el Ejemplo 2.1.2.

En los ejemplos siguientes, se tiene que los coeficientes que acompañan a los campos definidos en cada caso, son constantes, por ello, los corchetes $[X_i, X_j]$ son todos nulos. Por lo tanto, cualquier elección de un subconjunto de estos campos define una distribución involutiva. Así, aplicando el Teorema 1.2.7 de Frobenius, sabemos que existen subvariedades integrales de dimensiones máximas para todas esas distribuciones.

Ejemplo 2.1.2 Consideramos $\mathbb{R}^8 = \mathbb{C}^4$ con coordenadas (x_i, y_i) y su estructura Kaehler usual. Dado $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \pi/2)$, definimos cuatro campos de vectores ortonormales en \mathbb{R}^8 de la siguiente forma:

$$X_1 = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_4},$$

$$X_2 = -\sin \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \cos \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y_4}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad X_4 = -\sin \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Ponemos $\mathcal{D}_1 = \langle X_1, X_2 \rangle$, $\mathcal{D}_2 = \langle X_3, X_4 \rangle$. Se tiene que \mathcal{D}_1 es una distribución

slant con $\theta_1 = \pi/2$ ya que:

$$g(JX_2, X_1) = \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 - \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = 0$$

$$g(JX_2, X_1) = -\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 + \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = 0.$$

Por otro lado, vamos a probar que \mathcal{D}_2 es una distribución slant con $\theta_2 \in (0, \pi/2)$, para ello, tenemos que ver si $(P_2T)^2X = -\cos^2 \theta X$:

En primer lugar, se tiene que:

$$P_2TX_3 = g(JX_3, X_3)X_3 + g(JX_3, X_4)X_4 = -\sin^2 \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Volvemos a aplicar P_2T al resultado obtenido, y nos queda:

$$\begin{aligned} P_2T(P_2TX_3) &= g(JP_2TX_3, X_3)X_3 + g(JP_2TX_3, X_4)X_4 = \\ &= -\sin^2 \alpha_1 \frac{\partial}{\partial y_1} = -\cos^2 \theta_2 X_3. \end{aligned}$$

Entonces, una subvariedad integral M de $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ es una subvariedad bi-slant con $\theta_1 = \pi/2$ y $\theta_2 \in (0, \pi/2)$ tal que $\cos^2 \theta_2 = \sin^2 \alpha_1$, pero no es una subvariedad anti-slant.

2.2. Representación gráfica.

Podemos ahora introducir un procedimiento de *representación gráfica* para comprender el comportamiento de M con respecto a J . Para ello, seguimos los siguientes pasos.

1. Si denotamos por n (resp. m) la dimensión de la variedad \widetilde{M} (resp. la subvariedad M), entonces elegimos una base ortonormal local $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_n\}$, tal que X_1, \dots, X_m son tangentes a M y X_{m+1}, \dots, X_n son normales a M .
2. Consideramos un vértice para cada campo de \mathcal{B} , etiquetada con su correspondiente índice natural.
3. Decimos que la arista $\{i, j\}$ existe si y sólo si $g(JX_i, X_j) \neq 0$.
4. Asignamos a cada arista el valor dado por $g^2(JX_i, X_j)$.
5. Finalmente, observamos que obtenemos una información visual adicional al poner los vértices correspondientes a los campos tangentes en una línea inferior imaginaria y aquellos que corresponden a campos normales es una línea superior.

Vamos a usar este método con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.2.1 Consideramos \mathbb{R}^8 como anteriormente. Para cualquier $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi/2]$, sea M la subvariedad dada por:

$$\varphi_1(u, v, w, s) = (u \cos \theta_1, u \sin \theta_1, w \cos \theta_2, w \sin \theta_2, v, 0, s, 0).$$

Elegimos la base ortonormal:

$$X_1 = \cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad X_3 = \cos \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_4}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial y_3},$$

$$X_5 = \frac{\partial}{\partial y_2}, \quad X_6 = \sin \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_7 = \frac{\partial}{\partial y_4}, \quad X_8 = \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - \cos \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_4},$$

El valor asignado a la arista que une los vértices 1 y 2 viene determinada por:

$$g^2(JX_1, X_2) = g^2(\cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_1}) = \cos^2 \theta_1.$$

De la misma forma se calculan los valores de las demás aristas y obtenemos la visualización gráfica mostrada en la Figura 2.1.

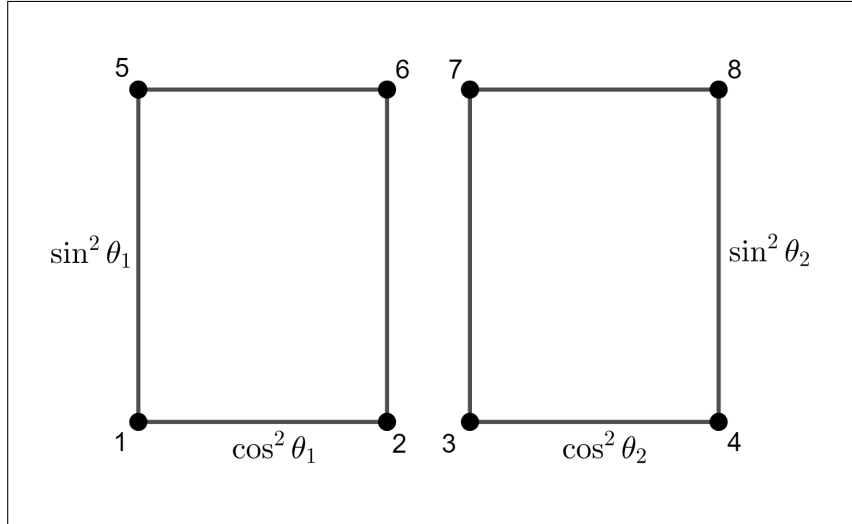


Figura 2.1: Ejemplo 2.2.1.

Ponemos $\mathcal{D}_1 = \langle X_1, X_2 \rangle$, $\mathcal{D}_2 = \langle X_3, X_4 \rangle$. Entonces, realizando cálculos análogos a los del ejemplo anterior, de la Figura 2.1 está claro que M es una subvariedad (θ_1, θ_2) bi-slant tal que $g(JX, Y) = 0$, para cualquier $X \in \mathcal{D}_1$ y cualquier $Y \in \mathcal{D}_2$. Además, si $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, entonces M es θ -slant.

Haciendo un pequeño cambio en φ_1 , obtenemos un ejemplo totalmente diferente:

Ejemplo 2.2.2 Para cualquier $\alpha \in [0, \pi/2]$, elegimos $\theta \in (0, \pi/2]$ tal que $\cos \theta = (\cos \alpha)/\sqrt{2}$. Sea M una subvariedad de \mathbb{R}^8 dado por:

$$\varphi_2(u, v, w, s) = (u \cos \alpha, u \sin \alpha, w \cos \theta, w \sin \theta, v, 0, s, v).$$

Mediante el uso de un campo ortonormal

$$\begin{aligned} X_1 &= \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x_2}, & X_5 &= \frac{\partial}{\partial y_2}, \\ X_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_4} \right), & X_6 &= \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} - \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ X_3 &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x_3} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial x_4}, & X_7 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_4} \right), \\ X_4 &= \frac{\partial}{\partial y_3}, & X_8 &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial x_3} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial x_4}, \end{aligned}$$

obtenemos la representación mostrada en la Figura 2.2.

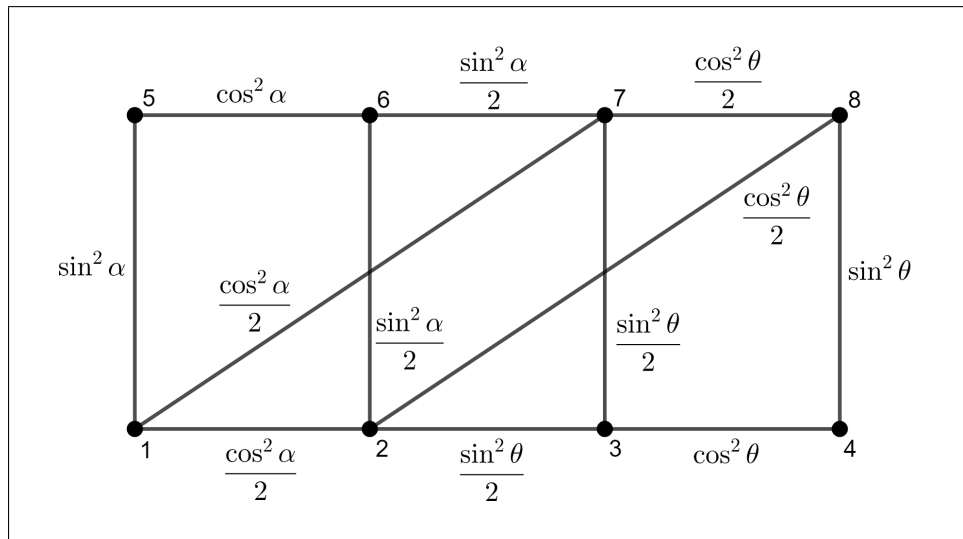


Figura 2.2: Ejemplo 2.2.2.

Consideramos $\mathcal{D}_1 = \langle X_1, X_2 \rangle$, $\mathcal{D}_2 = \langle X_3, X_4 \rangle$. Entonces, M es una subvariedad (θ, θ) bi-slant pero no es una subvariedad slant.

Ahora, para cualquier $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \pi/2)$, consideramos el campo ortonormal en \mathbb{R}^8 dado por:

$$\begin{aligned} X_1 &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_4}, \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial y_1}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial y_3}, \\ X_4 &= -\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_4}, \\ X_5 &= \cos \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \sin \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y_4}, & X_6 &= -\sin \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ X_7 &= -\sin \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + \cos \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_4}, & X_8 &= -\sin \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \cos \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y_4}, \end{aligned}$$

Conseguimos una representación gráfica del comportamiento de este campo bajo la acción de una estructura compleja J en \mathbb{R}^8 mediante el cubo mostrado en la Figura 2.3.

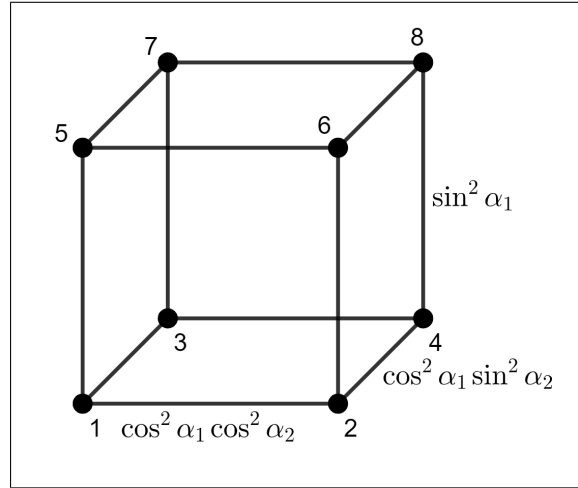


Figura 2.3: Representación cúbica.

Usando el campo anterior, obtenemos dos nuevos ejemplos:

Ejemplo 2.2.3 Ponemos $\mathcal{D}_1 = \langle X_1, X_2 \rangle$, $\mathcal{D}_2 = \langle X_3, X_4 \rangle$. Entonces una subvariedad integral de $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ es una subvariedad (θ, θ) bi-slant con $\cos^2 \theta = \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2$ y una subvariedad 4-dimensional α_1 -slant.

Ejemplo 2.2.4 Ponemos $\mathcal{D}_1 = \text{Span}\{X_1, X_2\}$, $\mathcal{D}_2 = \text{Span}\{X_3, X_4\}$. Si $\alpha_2 \neq \pi/4$, entonces una subvariedad integral de $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ es una subvariedad (θ_1, θ_2) bi-slant con $\theta_1 \neq \theta_2$ tal que $\cos^2 \theta_1 = \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2$ y $\cos^2 \theta_2 = \cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2$, pero no es una subvariedad slant.

Teniendo en cuenta el Ejemplo 2.1.2 podemos obtener de una forma similar, simple, eligiendo $\mathcal{D}_1 = \text{Span}\{X_1, X_8\}$, $\mathcal{D}_2 = \text{Span}\{X_2, X_6\}$. Entonces, de la Figura 2.3 es claro que \mathcal{D}_1 es una distribución $\pi/2$ -slant y \mathcal{D}_2 es una distribución θ_2 -slant tal que $\cos^2 \theta_2 = \sin^2 \alpha_1$, como hemos señalado anteriormente.

El procedimiento de representación gráfica ha sido muy útil para la búsqueda y visualización de ejemplos. Pero surgen algunas preguntas básicas:

- Esta representación gráfica, ¿se puede hacer solo para las subvariedades bi-slant o es algo más general?
- En tal caso, ¿cómo serían las subvariedades? ¿Y los grafos asociados?
- Es más, ¿se puede definir una asociación en un marco más general? ¿Cuáles serían los elementos básicos para ello?

Los siguientes capítulos nos proporcionarán respuestas a todas estas preguntas.

Capítulo 3

Grafos asociados a espacios vectoriales de dimensión par.

En este Capítulo vamos a comprobar que se puede definir una asociación a grafos en un marco más general como es el de espacios vectoriales euclídeos de dimensión par, los cuales están dotados de un isomorfismo especial. Desarrollaremos para ello el contenido del artículo [2]. Se darán ejemplos donde se podrá visualizar gráficamente la forma que tienen estos grafos y, analizando dichas formas, probaremos algunos resultados generales.

3.1. Grafos asociados a bases ortonormales.

Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión $2n$ dotado con un producto escalar (denotado por \cdot) y sea F una isometría en V (es decir, $Fv \cdot Fw = v \cdot w$, para cualesquiera $v, w \in V$) tal que $F^2 = -Id$. Observamos que, para cualquier $v \in V$, ocurre que v es ortogonal a Fv porque $v \cdot Fv = -F^2v \cdot Fv = -Fv \cdot v$ y entonces, $v \cdot Fv = 0$.

En estas condiciones siempre es posible construir una base ortonormal especial de V como sigue: sea w_1 cualquier vector unitario de V . Entonces, Fw_1 también es un vector unitario, además, ortogonal a w_1 . Por otro lado, si $n > 1$, sea w_2 cualquier vector unitario de V ortogonal a w_1 y Fw_1 . Es fácil probar que Fw_2 es otro vector unitario a w_1, Fw_1 y w_2 . Repitiendo este procedimiento, obtenemos una base ortonormal $\{w_1, \dots, w_{2n}\}$ de V , donde estamos denotando $w_{n+k} = Fw_k$, $k = 1, \dots, n$. Además, se observa que $Fw_{n+k} = -w_k$, para cualquier $k = 1, \dots, n$. Las bases ortonormales obtenidas de esta forma se denominan F -bases. Recíprocamente, es fácil probar que si $\{w_1, \dots, w_{2n}\}$ es una base ortonormal de V , entonces existe una única isometría F en V tal que $F^2 = -Id$ y $\{w_1, \dots, w_{2n}\}$ es una

F -bases. En efecto, F está definida como $Fw_k = w_{n+k}$ y $Fw_{n+k} = -w_k$, para cualquier $k = 1, \dots, n$.

Ahora, sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_{2n}\}$ cualquier base ortonormal de V . Podemos definir un grafo $G_{\mathcal{B}}$ siguiendo estos pasos:

1. Consideramos un vértice para cada vector de la base, etiquetado con su correspondiente índice natural. En realidad, a veces identificaremos vectores y vértices usando la misma notación.
2. Se dice que la arista $\{v_i, v_j\}$ existe si y sólo si $Fv_i \cdot v_j \neq 0$. Se observa que no hay lazos en $G_{\mathcal{B}}$, ya que $Fv_i \cdot v_i = 0$, para cualquier $i = 1, \dots, 2n$, como ya hemos señalado anteriormente.

Decimos que un grafo G etiquetado y ponderado y las bases \mathcal{B} están asociadas si G es isomorfo a $G_{\mathcal{B}}$.

Vamos a presentar algunos ejemplos, para poder visualizar gráficamente algunos grafos.

Ejemplo 3.1.1 Sean V un espacio vectorial euclídeo de dimensión 2 y F una isometría de V tal que $F^2 = -Id$. Si consideramos una F -base, $\{w_1, w_2\}$, entonces está asociada al grafo K_2 que se muestra en la Figura 3.1, ya que $Fw_1 \cdot w_2 = Fw_1 \cdot Fw_1 = w_1 \cdot w_1 = 1$.

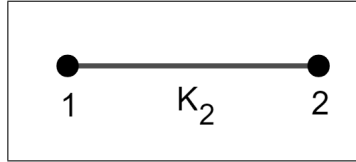


Figura 3.1: El grafo K_2 .

Ejemplo 3.1.2 Sean V un espacio vectorial euclídeo de dimensión 4 y F una isometría de V tal que $F^2 = -Id$. Si consideramos una F -base, $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Entonces, está asociada al grafo $K_2 \cup K_2$ de la Figura 3.2.

Ahora, sea $\theta \in (0, \pi/2)$. Si elegimos:

$$v_1 = \cos \theta w_1 + \sin \theta w_2, \quad v_2 = w_3, \quad v_3 = w_4, \quad v_4 = -\sin \theta w_1 + \cos \theta w_2,$$

veamos que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base ortonormal de V asociada al grafo C_4 mostrado en la Figura 3.2.

Efectivamente:

$$\begin{aligned}
 Fv_1 \cdot v_2 &= (\cos \theta Fw_1 + \sin \theta Fw_2) \cdot w_3 = (\cos \theta w_3 + \sin \theta w_4) \cdot w_3 = \cos \theta, \\
 Fv_1 \cdot v_3 &= (\cos \theta Fw_1 + \sin \theta Fw_2) \cdot w_4 = (\cos \theta w_3 + \sin \theta w_4) \cdot w_4 = \sin \theta, \\
 Fv_1 \cdot v_4 &= (\cos \theta w_3 + \sin \theta w_4) \cdot (-\sin \theta w_1 + \cos \theta w_2) = 0, \\
 Fv_2 \cdot v_3 &= Fw_3 \cdot w_4 = F(Fw_1) \cdot w_4 = F^2 w_1 \cdot w_4 = 0, \\
 Fv_2 \cdot v_4 &= Fw_3 \cdot (-\sin \theta w_1 + \cos \theta w_2) = F(Fw_1) \cdot (-\sin \theta w_1 + \cos \theta w_2) = \\
 &= F^2 w_1 \cdot (-\sin \theta w_1 + \cos \theta w_2) = \sin \theta, \\
 Fv_3 \cdot v_4 &= Fw_4 \cdot (-\sin \theta w_1 + \cos \theta w_2) = F(Fw_2) \cdot (-\sin \theta w_1 + \cos \theta w_2) = \\
 &= F^2 w_2 \cdot (-\sin \theta w_1 + \cos \theta w_2) = -\cos \theta.
 \end{aligned}$$

Finalmente, si elegimos:

$$\tilde{v}_1 = \cos \theta v_1 + \sin \theta v_2, \quad \tilde{v}_2 = \sin \theta v_1 - \cos \theta v_2, \quad \tilde{v}_3 = v_3, \quad \tilde{v}_4 = v_4,$$

entonces, $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \tilde{v}_4\}$ es una base ortonormal de V asociada al grafo K_4 que se muestra en la Figura 3.2.

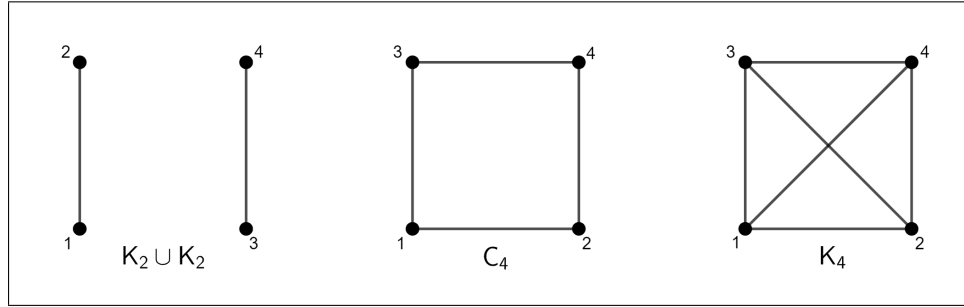


Figura 3.2: Caso de dimensión 4.

En realidad, estos tres grafos de la Figura 3.2 son los únicos no isomorfos que pueden ser asociados a una base ortonormal en un espacio vectorial de dimensión 4, como se muestra más adelante.

Ejemplo 3.1.3 Sean V un espacio vectorial euclídeo de dimensión 6, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in (0, \pi/2)$ y F una isometría de V tal que $F^2 = -Id$. Vamos a elegir una F -base

$$\{w_1, w_2, w_3, w_4 = Fw_1, w_5 = Fw_2, w_6 = Fw_3\}.$$

Si consideramos las bases ortonormales dadas en la Tabla 3.1, entonces éstas están asociadas a los grafos indicados en la Figura 3.3. En realidad, algunos de estos grafos son muy conocidos. Por ejemplo, G_5 es $K_{3,3}$ y G_{12} es K_6 .

Las comprobaciones son sencillas y análogas a las expuestas en el ejemplo anterior, aunque demasiado largas y por ello se ha considerado oportuno no incluirlas.

Grafos	Bases ortonormales correspondientes
$G_1 = G_{61} = 3K_2$	$\begin{aligned} v_1 &= w_1; v_2 = w_4; \\ v_3 &= w_2; v_4 = w_5; \\ v_5 &= w_3; v_6 = w_6. \end{aligned}$
$G_2 = G_{85} = C_4 \cup K_2$	$\begin{aligned} v_1 &= w_1; v_2 = w_4; v_3 = w_3; \\ v_4 &= \sin \alpha_1 w_2 - \cos \alpha_1 w_6; \\ v_5 &= \cos \alpha_1 w_2 + \sin \alpha_1 w_6; \\ v_6 &= w_5. \end{aligned}$
$G_3 = G_{166} = K_4 \cup K_2$	$\begin{aligned} v_1 &= w_1; v_2 = w_4; \\ v_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} w_3 - \frac{1}{2} (w_2 + w_6); \\ v_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} w_3 + \frac{1}{2} (w_2 + w_6); \\ v_5 &= w_5; v_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} (w_6 - w_2). \end{aligned}$
$G_4 = G_{154} = K_{3,3} - e$	$\begin{aligned} v_1 &= w_1; v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (w_4 + w_5); \\ v_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (w_5 - w_4); \\ v_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (w_2 + w_6); \\ v_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (w_6 - w_2); v_6 = w_3. \end{aligned}$
$G_5 = G_{174} = K_{3,3}$	$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \alpha_1 w_1 + \cos \alpha_1 w_2 + w_3); \\ v_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (w_4 + w_6); \\ v_3 &= \cos \alpha_1 w_1 - \sin \alpha_1 w_2; v_4 = w_5; \\ v_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \alpha_1 w_1 + \cos \alpha_1 w_2 - w_3); \\ v_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (w_6 - w_4). \end{aligned}$
$G_6 = G_{194} = \overline{K_{1,3}} \cup K_2$	$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (w_2 + w_3); \\ v_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} w_3 - \frac{1}{2} (w_6 - w_2); \\ v_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} w_3 + \frac{1}{2} (w_6 - w_2); \\ v_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (w_4 + w_5); \\ v_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (w_5 - w_4); v_6 = w_1. \end{aligned}$

Grafos	Bases ortonormales correspondientes
$G_7 = G_{202} = \overline{P_4 \cup 2K_1}$	$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_1 - w_2);$ $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_4 + w_6);$ $v_3 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2 + w_3 + w_5);$ $v_4 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2 - w_3 - w_5);$ $v_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_4 - w_6);$ $v_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_3 - w_5).$
$G_8 = G_{204} = \overline{3K_2}$	$v_1 = \sin \alpha_1 w_1 + \cos \alpha_1 w_2;$ $v_2 = \sin \alpha_3 w_4 + \cos \alpha_3 w_6;$ $v_3 = \sin \alpha_2 w_3 + \cos \alpha_2 w_5;$ $v_4 = \sin \alpha_1 w_2 - \cos \alpha_1 w_1;$ $v_5 = \sin \alpha_2 w_5 - \cos \alpha_2 w_3;$ $v_6 = \sin \alpha_3 w_6 - \cos \alpha_3 w_4.$
$G_9 = G_{205} = \overline{P_3 \cup 3K_1}$	$v_1 = w_6; v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_6 - w_5);$ $v_3 = \frac{1}{2}(w_1 - w_2) - \frac{1}{\sqrt{2}}w_4;$ $v_4 = \frac{1}{2}(w_1 - w_2) + \frac{1}{\sqrt{2}}w_4;$ $v_5 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2 + w_3 + w_5);$ $v_6 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2 - w_3 - w_5).$
$G_{10} = G_{206} = \overline{2K_2 \cup 2K_1}$	$v_1 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2 + w_3 + w_5);$ $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_1 - w_2);$ $v_3 = \frac{1}{2}(w_3 - w_5) + \frac{1}{\sqrt{2}}w_4;$ $v_4 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2 - w_3 - w_5);$ $v_5 = \frac{1}{2}(w_3 - w_5) - \frac{1}{\sqrt{2}}w_4; v_6 = w_6.$
$G_{11} = G_{207} = K_6 - e$	$v_1 = w_1; v_2 = w_2;$ $v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(w_3 + w_4 + w_5);$ $v_4 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-3w_3 + w_4 + 2w_5 + w_6);$ $v_5 = \frac{1}{\sqrt{3}}(w_4 - w_5 + w_6);$ $v_6 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-w_3 + 2w_4 - w_5 - 3w_6).$

Grafos	Bases ortonormales correspondientes
$G_{12} = G_{208} = K_6$	$v_1 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2 + w_3 + w_5);$ $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}w_4 + \frac{1}{2}(w_1 - w_2);$ $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}w_6 - \frac{1}{2}(w_3 - w_5);$ $v_4 = \frac{1}{2}(w_1 - w_2) - \frac{1}{\sqrt{2}}w_4;$ $v_5 = \frac{1}{2}(w_3 - w_5) + \frac{1}{\sqrt{2}}w_6;$ $v_6 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2 - w_3 - w_5).$

Cuadro 3.1: Grafos y bases ortonormales del ejemplo 3.1.3.

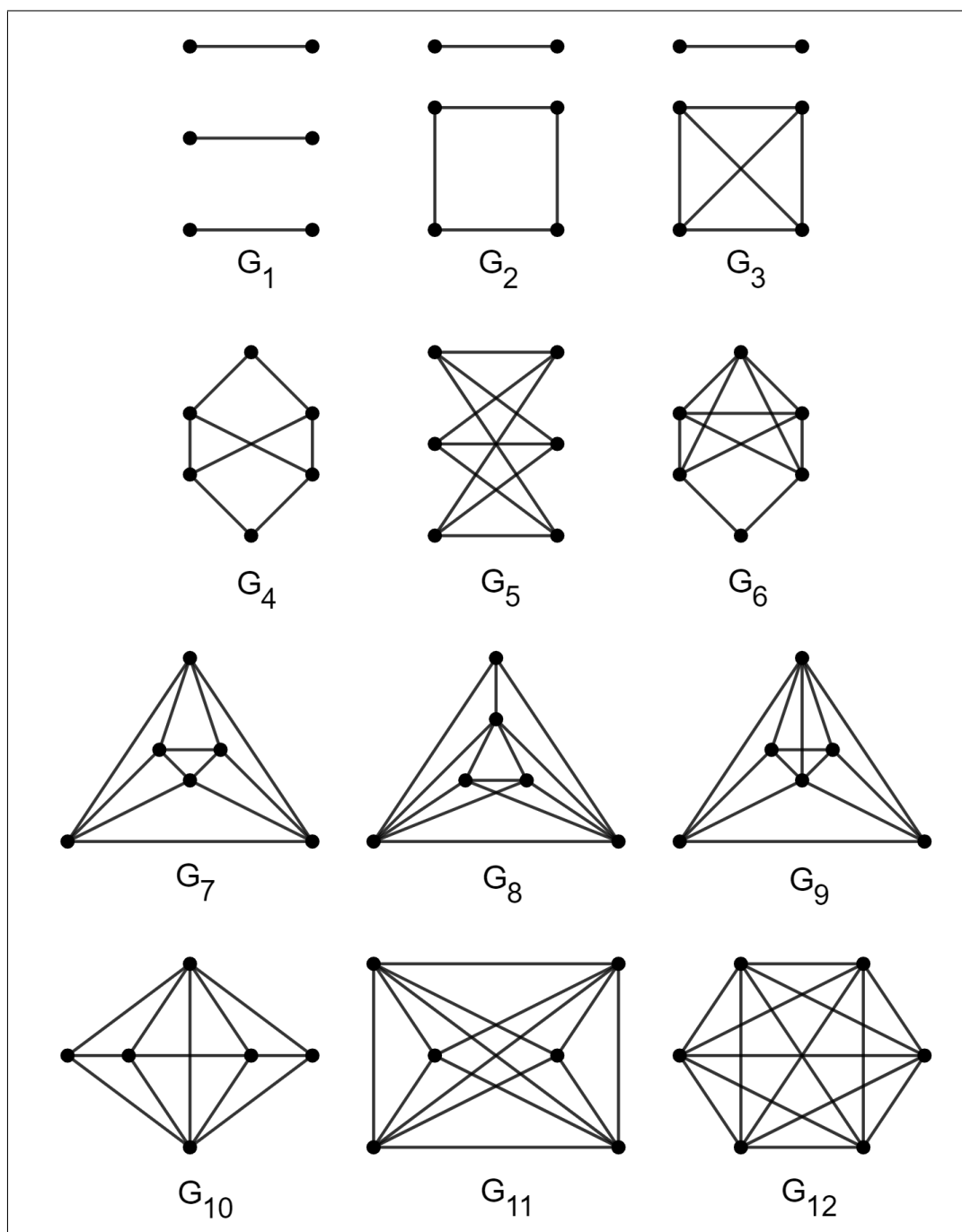


Figura 3.3: Grafos asociados a las bases ortonormales de dimensión 6 correspondientes al Ejemplo 3.1.3.

Ejemplo 3.1.4 Sean V un espacio vectorial euclídeo de dimensión 8, $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \pi/2)$ y F una isometría de V tal que $F^2 = -Id$. Consideramos una F -base

$$\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 = Fw_1, w_6 = Fw_2, w_7 = Fw_3, w_8 = Fw_4\}.$$

Entonces, si elegimos:

$$\begin{aligned} v_1 &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 w_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 w_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 w_3 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 w_4, \\ v_2 &= w_5, \\ v_3 &= w_7, \\ v_4 &= -\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 w_1 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 w_2 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 w_3 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 w_4, \\ v_5 &= \cos \alpha_2 w_6 + \sin \alpha_2 w_8, \\ v_6 &= -\sin \alpha_1 w_1 + \cos \alpha_1 w_2, \\ v_7 &= -\sin \alpha_1 w_3 + \cos \alpha_1 w_4, \\ v_8 &= -\sin \alpha_2 w_6 + \cos \alpha_2 w_8, \end{aligned}$$

es fácil ver que $\{v_1, \dots, v_8\}$ es una base ortonormal de V asociada al grafo cúbico que se muestra en la Figura 3.4.

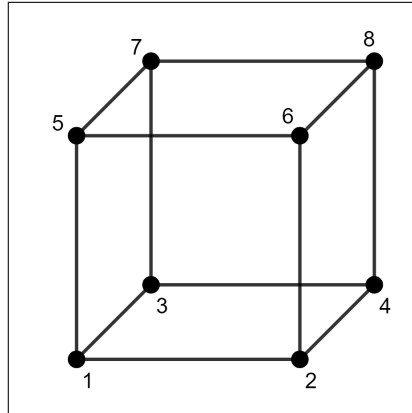


Figura 3.4: El grafo Q_3 .

Una primera pregunta acerca de esta asociación puede ser su dependencia en la elección de bases ortonormales. Por ejemplo, vamos a considerar $n = 2$ y la base $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_4\}$ dada en el Ejemplo 3.1.2, la cual está asociada al Grafo 1 ($K_2 \cup K_2$) mostrado en la Figura 3.5. Si ahora tomamos $\tilde{\mathcal{B}} = \{\sqrt{2}/2(w_1 + w_2), \sqrt{2}/2(w_1 - w_2), w_3, w_4\}$, entonces $\tilde{\mathcal{B}}$ es también base ortonormal de V asociada al Grafo 2 ($K_{2,2}$) de la Figura 3.5. Obviamente, estos dos grafos están lejos de ser isomorfos.

Por tanto, es interesante mirar el cambio apropiado de las bases que conservan las asociaciones con los grafos. En este sentido, introducimos algunos operadores,

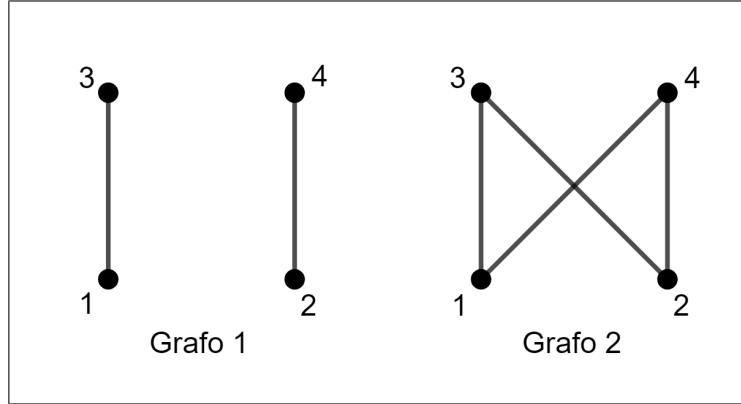


Figura 3.5: Cambio de bases.

que permiten simplificar la estructura de la base ortonormal asociada al grafo dado. Entonces, dados una F -base, $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_{2n}\}$, de V y un vector $v \in V$ escrito como $v = \sum_{k=1}^n a_k w_k + \sum_{k=1}^n b_k w_{n+k}$ podemos definir los siguientes operadores:

(i) Para cada entero p tal que $1 \leq p \leq n$,

$$o_p(v) = \sum_{k=1, k \neq p}^n a_k w_k + \sum_{k=1, k \neq p}^n b_k w_{n+k} - a_p w_p - b_p w_{n+p}.$$

(ii) Para cada entero p tal que $1 \leq p \leq n$ y cualquier $\alpha \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} \phi_{p,\alpha}(v) &= \sum_{k=1, k \neq p}^n a_k w_k + \sum_{k=1, k \neq p}^n b_k w_{n+k} \\ &\quad + (a_p \cos \alpha - b_p \sin \alpha) w_p + (b_p \cos \alpha + a_p \sin \alpha) w_{n+p}. \end{aligned}$$

(iii) Para cualesquiera $p \neq q$ tal que $1 \leq p, q \leq n$ y cualquier $\alpha \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} \varphi_{p,q,\alpha}(v) &= \sum_{k=1, k \neq p,q}^n a_k w_k + \sum_{k=1, k \neq p,q}^n b_k w_{n+k} \\ &\quad + (a_p \cos \alpha - a_q \sin \alpha) w_p + (a_q \cos \alpha + a_p \sin \alpha) w_q \\ &\quad + (b_p \cos \alpha - b_q \sin \alpha) w_{n+p} + (b_q \cos \alpha + b_p \sin \alpha) w_{n+q}. \end{aligned}$$

El operador $o_p(v)$ consiste en cambiar el signo de los elementos que se encuentran en la posición p . En cambio, los operadores $\phi_{p,\alpha}(v)$ y $\varphi_{p,q,\alpha}(v)$ cambian los elementos de las posiciones p y $n+p$ por combinaciones lineales de senos y cosenos.

En primer lugar, tenemos el siguiente resultado:

Lema 3.1.5 Para cualesquiera enteros $p \neq q$ tal que $1 \leq p, q \leq n$ y cualquier $\alpha \in [0, 2\pi]$, los operadores descritos anteriormente son isométricos, conmutan con F y, por tanto, se satisfacen las siguientes propiedades, para cualesquiera $v, v' \in V$

$$(i) F(o_p(v)) \cdot o_p(v') = Fv \cdot v'.$$

$$(ii) F(\phi_{p,\alpha}(v)) \cdot \phi_{p,\alpha}(v') = Fv \cdot v'.$$

$$(iii) F(\varphi_{p,q,\alpha}(v)) \cdot \varphi_{p,q,\alpha}(v') = Fv \cdot v'.$$

Demostración:

En primer lugar, se tiene que

$$Fv \cdot v' = \left(\sum_{k=1}^n a_k \underbrace{Fw_k}_{w_{n+k}} + \sum_{k=1}^n b_k \underbrace{Fw_{n+k}}_{-w_k} \right) \cdot v' = \sum_{k=1}^n a_k b'_k - \sum_{k=1}^n b_k a'_k.$$

Vamos a comprobar que se cumplen los tres puntos del lema:

$$\begin{aligned} (i) F(o_p(v)) \cdot o_p(v') &= \left(\sum_{k=1, k \neq p}^n a_k \underbrace{Fw_k}_{w_{n+k}} + \sum_{k=1, k \neq p}^n b_k \underbrace{Fw_{n+k}}_{-w_k} - a_p \underbrace{Fw_p}_{w_{n+p}} - b_p \underbrace{Fw_{n+p}}_{-w_p} \right) \cdot \\ &\quad \left(\sum_{k=1, k \neq p}^n a'_k w_k + \sum_{k=1, k \neq p}^n b'_k w_{n+k} - a'_p w_p - b'_p w_{n+p} \right) \\ &= - \sum_{k=1, k \neq p}^n a'_k b_k + \sum_{k=1, k \neq p}^n a_k b'_k - a'_p b_p + a_p b'_p. \end{aligned}$$

Por tanto, $F(o_p(v)) \cdot o_p(v') = Fv \cdot v'$.

$$\begin{aligned} (ii) F(\phi_{p,\alpha}(v)) \cdot \phi_{p,\alpha}(v') &= \\ &\quad \left(\sum_{k=1, k \neq p}^n a_k \underbrace{Fw_k}_{w_{n+k}} + \sum_{k=1, k \neq p}^n b_k \underbrace{Fw_{n+k}}_{-w_k} + (a_p \cos \alpha - b_p \sin \alpha) \underbrace{Fw_p}_{w_{n+p}} + \right. \\ &\quad \left. (b_p \cos \alpha - a_p \sin \alpha) \underbrace{Fw_{n+p}}_{-w_p} \right) \cdot \left(\sum_{k=1, k \neq p}^n a'_k w_k + \sum_{k=1, k \neq p}^n b'_k w_{n+p} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. (a'_p \cos \alpha - b'_p \sin \alpha)w_p + (b'_p \cos \alpha + a'_p \sin \alpha)w_{n+p} \right) = - \sum_{k=1, k \neq p}^n a'_k b_k + \\
& \sum_{k=1, k \neq p}^n a_k b'_k + (a_p \cos \alpha - b_p \sin \alpha)(b'_p \cos \alpha + a'_p \sin \alpha) - \\
& (b_p \cos \alpha + a_p \sin \alpha)(a'_p \cos \alpha - b'_p \sin \alpha) = - \sum_{k=1, k \neq p}^n a'_k b_k + \sum_{k=1, k \neq p}^n a_k b'_k + \\
& + a_p b'_p \cos^2 \alpha + a_p a'_p \sin \alpha \cos \alpha - b_p b'_p \sin \alpha \cos \alpha - b_p a'_p \sin^2 \alpha - \\
& - (b_p a'_p \cos^2 \alpha - a_p b'_p \sin^2 \alpha - b_p b'_p \sin \alpha \cos \alpha + a_p a'_p \sin \alpha \cos \alpha) = \\
& = - \sum_{k=1, k \neq p}^n a'_k b_k + \sum_{k=1, k \neq p}^n a_k b'_k + a_p b'_p \cos^2 \alpha - b_p a'_p \sin^2 \alpha - \\
& - a'_p b_p \cos^2 \alpha + a_p b'_p \sin^2 \alpha = - \sum_{k=1, k \neq p}^n a'_k b_k + \sum_{k=1, k \neq p}^n a_k b'_k + a_p b'_p - a'_p b_p.
\end{aligned}$$

Y se obtiene, que efectivamente, $F(\phi_{p,\alpha}(v)) \cdot \phi_{p,\alpha}(v') = Fv \cdot v'$.

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad F(\varphi_{p,q,\alpha}(v)) \cdot \varphi_{p,q,\alpha}(v') &= \left(\sum_{k=1, k \neq p,q}^n a_k \underbrace{Fw_k}_{w_{n+k}} + \sum_{k=1, k \neq p,q}^n b_k \underbrace{Fw_{n+k}}_{-w_k} + \right. \\
& + (a_p \cos \alpha - a_q \sin \alpha) \underbrace{Fw_p}_{w_{n+p}} + (a_q \cos \alpha + a_p \sin \alpha) \underbrace{Fw_q}_{w_{n+q}} + \\
& \left. + (b_p \cos \alpha - b_q \sin \alpha) \underbrace{Fw_{n+p}}_{-w_p} + (b_q \cos \alpha + b_p \sin \alpha) \underbrace{Fw_{n+q}}_{-w_q} \right) \cdot \varphi_{p,q,\alpha}(v') = \\
& - \sum_{k=1, k \neq p,q}^n a'_k b_k + \sum_{k=1, k \neq p,q}^n a_k b'_k + (a_p \cos \alpha - a_q \sin \alpha)(b'_p \cos \alpha - b'_q \sin \alpha) + \\
& + (a_q \cos \alpha + a_p \sin \alpha)(b'_q \cos \alpha + b'_p \sin \alpha) - (b_p \cos \alpha - b_q \sin \alpha) \cdot \\
& (a'_p \cos \alpha - a'_q \sin \alpha) - (b_q \cos \alpha + b_p \sin \alpha)(a'_q \cos \alpha + a'_p \sin \alpha) = \\
& - \sum_{k=1, k \neq p,q}^n a'_k b_k + \sum_{k=1, k \neq p,q}^n a_k b'_k + a_p b'_p + a_q b'_q - a'_p b_p - a'_q b_q.
\end{aligned}$$

Y por tanto, se cumple también que $F(\varphi_{p,q,\alpha}(v)) \cdot \varphi_{p,q,\alpha}(v') = Fv \cdot v'$. \square

Se tiene, por tanto, el siguiente corolario inmediato.

Corolario 3.1.6 *Para cualesquiera enteros $p \neq q$ tal que $1 \leq p, q \leq n$ y cualquier $\alpha \in [0, 2\pi]$, una base ortonormal asociada a un grafo es transformada por los operadores o_p , $\phi_{p,\alpha}$, $\varphi_{p,q,\alpha}$ en otra base ortonormal asociada al mismo grafo.*

Los siguientes resultados nos van a proporcionar bases con buenas propiedades.

Teorema 3.1.7 *Sea $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_{2n}\}$ una F -base y sea G su grafo asociado a una cierta base ortonormal. Entonces, existe otra base ortonormal $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_{2n}\}$, asociada a G y, para cualquier $j = 1, \dots, 2n$, tenemos:*

$$v_j = \begin{cases} w_1 & \text{if } j = 1, \\ \sum_{k=2}^j a_{j,k} w_k + \sum_{k=1}^{j-1} b_{j,k} w_{n+k} & \text{if } 2 \leq j \leq n, \\ \sum_{k=2}^n a_{j,k} w_k + \sum_{k=1}^n b_{j,k} w_{n+k} & \text{if } n+1 \leq j \leq 2n. \end{cases}$$

Además, se puede suponer que $a_{k,k} \geq 0$, para cualquier $k = 2, \dots, n$.

Demostración:

Sea $\{v_1, \dots, v_{2n}\}$ una base ortonormal asociada a G . Para cualquier $j = 1, \dots, 2n$, identificamos $v_j = \sum_{k=1}^n a_{j,k} w_k + \sum_{k=1}^n b_{j,k} w_{n+k}$ con el vector $\vec{v}_j = (a_{j,1}, \dots, a_{j,n}, b_{j,1}, \dots, b_{j,n})$.

El objetivo es anular los $b_{j,k}$, con $k = 1, \dots, n$. Para ello, el término $(b_p \cos \alpha + a_p \sin \alpha) w_{n+p}$ del operador $\phi_{p,\alpha}(v)$ debe ser nulo, es decir,

$$b_p \cos \alpha = -a_p \sin \alpha.$$

De aquí, se obtiene que $\alpha = -\arctan\left(\frac{b_p}{a_p}\right)$.

Entonces, si aplicamos sucesivamente a cualquier \vec{v}_j los operadores $\phi_{h, -\arctan(b_{1,h}/a_{1,h})}$, con $1 \leq h \leq n$, entonces, el vector \vec{v}_1 cambia a uno como

$$(a'_{1,1}, \dots, a'_{1,n}, \underbrace{0, \dots, 0}_n).$$

Así, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $b_{1,h} = 0$, para cualquier $h = 1, \dots, n$. Ahora, si aplicamos sucesivamente a cualquier \vec{v}_j los operadores

$$\varphi_{1,h, -\arctan(a_{1,h}/a_{1,1})}, \quad 2 \leq h \leq n,$$

el vector \vec{v}_1 cambia a

$$(a'_{1,1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2n-1}).$$

Por tanto, también podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a_{1,h} = 0$, para cualquier $h = 2, \dots, n$. Finalmente, aplicando o_1 , si es necesario, para cualquier \vec{v}_j , conseguimos que el vector \vec{v}_1 sea transformado a

$$(1, \underbrace{0, \dots, 0}_{2n-1}).$$

Dado que \vec{v}_j , con $2 \leq j \leq 2n$, es ortogonal a \vec{v}_1 , tenemos que $a_{j,1} = 0$.

En lo siguiente, denotaremos de nuevo por $a_{j,k}$ y $b_{j,k}$ los coeficientes de \vec{v}_j . Si aplicamos sucesivamente a cualquier \vec{v}_j los operadores $\phi_{h, -\arctan(b_{2,h}/a_{2,h})}$, con $2 \leq h \leq n$, el vector \vec{v}_2 cambia a uno como

$$(0, a'_{2,2}, \dots, a'_{2,n}, b'_{2,1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1})$$

y suponemos sin pérdida de generalidad que $b_{2,h} = 0$, para cualquier $h = 2, \dots, n$. Ahora, si aplicamos sucesivamente a cualquier \vec{v}_j los operadores

$$\varphi_{2,h, -\arctan(a_{2,h}/a_{2,2})}, \quad 3 \leq h \leq n,$$

el vector \vec{v}_2 es transformado en

$$(0, a'_{2,2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, b'_{2,1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}).$$

Entonces, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a_{2,h} = 0$, para cualquier $h = 3, \dots, n$. Si $a'_{2,2} < 0$, podemos aplicar o_2 para obtener que el coeficiente de \vec{v}_2 es no negativo.

Como anteriormente, denotamos por $a_{j,k}$ y $b_{j,k}$ los coeficientes de \vec{v}_j . Al usar un proceso inductivo, supongamos que

$$\vec{v}_p = (0, a_{p,2}, \dots, a_{p,p}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-p}, b_{p,1}, \dots, b_{p,p-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-p+1})$$

para un cierto valor de $p \in \{2, \dots, n-1\}$ y $a_{p,p} \geq 0$. A continuación, vamos a aplicar sucesivamente a cualquier \vec{v}_j los operadores $\phi_{h, -\arctan(b_{p+1,h}/a_{p+1,h})}$, con $p+1 \leq h \leq n$, para que el vector \vec{v}_{p+1} se transforme en

$$(0, a'_{p+1,2}, \dots, a'_{p+1,n}, b'_{p+1,1}, \dots, b'_{p+1,p}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-p}).$$

Por tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $b_{p+1,h} = 0$, para cualquier $h = p + 1, \dots, n$. Ahora, si aplicamos sucesivamente a cualquier \vec{v}_j los operadores

$$\varphi_{p+1,h,-\arctan(a_{p+1,h}/a_{p+1,p+1})},$$

con $p + 2 \leq h \leq n$, el vector \vec{v}_{p+1} cambia a

$$(0, a'_{p+1,2}, \dots, a'_{p+1,p+1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-p-1}, b'_{p+1,1}, \dots, b'_{p+1,p}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-p}),$$

así podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a_{p+1,h} = 0$, para cualquier $h = p + 2, \dots, n$. Finalmente, si $a'_{p+1,p+1} < 0$, sólo tenemos que aplicar o_{p+1} para obtener un coeficiente no negativo $(p + 1)$ -th en \vec{v}_{p+1} , lo que completa la prueba inductiva de este resultado. \square

Teorema 3.1.8 *Sea $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_{2n}\}$ una F -base y sea G su grafo asociado a una cierta base ortonormal tal que sus primeros r vértices son independientes. Entonces, existe otra base ortonormal $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_{2n}\}$, asociada a G y, para cualquier $j = 1, \dots, 2n$, tenemos:*

$$v_j = \begin{cases} w_j & \text{if } j \leq r, \\ \sum_{k=r+1}^j a_{j,k} w_k + \sum_{k=1}^{j-1} b_{j,k} w_{n+k} & \text{if } r + 1 \leq j \leq n, \\ \sum_{k=r+1}^n a_{j,k} w_k + \sum_{k=1}^n b_{j,k} w_{n+k} & \text{if } n + 1 \leq j \leq 2n, \end{cases}$$

con $a_{k,k} \geq 0$, para cualquier $k = r + 1, \dots, n$.

Demostración:

Sea $\{v_1, \dots, v_{2n}\}$ una base ortonormal asociada a G dada por el Teorema 3.1.7. Entonces, $v_1 = w_1$.

A continuación, usando un proceso inductivo, suponemos que existe una base ortonormal $\{v_1, \dots, v_{2n}\}$ asociada a G tal que $v_j = w_j$ si $j \leq p \leq r - 1$ y

$$v_{p+1} = \sum_{k=2}^{p+1} a_{p+1,k} w_k + \sum_{k=1}^p b_{p+1,k} w_{n+k}.$$

Como $v_j \cdot v_{p+1} = 0$, tenemos que $a_{p+1,j} = 0$. Por otro lado, del Teorema 3.2.9 se sigue que $r \leq n$ y así, $p + 1 \leq n$. Por tanto, $v_{n+j} \cdot v_{p+1} = 0$ y obtenemos que $b_{p+1,j} = 0$. De esta forma, $v_{p+1} = a_{p+1,p+1} w_{p+1}$.

Ahora, como $v_{p+1} \cdot v_{p+1} = 1$ y $a_{p+1,p+1} \geq 0$, tenemos que $a_{p+1,p+1} = 1$ lo que completa la prueba inductiva de $v_j = w_j$ si $j \leq r$.

Finalmente, si $k \leq r$ y $j \geq r + 1$, como $v_k \cdot v_j = 0$, se sigue que $a_{j,k} = 0$ y el resultado se mantiene. \square

Ejemplo 3.1.9 En el Ejemplo 3.1.4, dimos una base ortonormal $\{v_1, \dots, v_8\}$ asociado al cubo Q_3 . Ahora, si reordenamos poniendo:

$$\tilde{v}_1 = v_6; \tilde{v}_2 = v_7; \tilde{v}_3 = v_1; \tilde{v}_4 = v_4; \tilde{v}_5 = v_3; \tilde{v}_6 = v_2; \tilde{v}_7 = v_8; \tilde{v}_8 = v_5$$

y consideramos el operador

$$\Phi = \phi_{4,\pi} \circ \varphi_{3,4,\alpha_2+\pi} \circ \varphi_{2,4,\alpha_1-\frac{\pi}{2}} \circ \varphi_{2,3,\frac{\pi}{2}} \circ \varphi_{1,2,-\alpha_1+\frac{\pi}{2}},$$

entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} \Phi(\tilde{v}_i) &= w_i, \quad i = 1, \dots, 4, \\ \Phi(\tilde{v}_5) &= -\sin \alpha_1 w_6 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 w_7 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 w_8, \\ \Phi(\tilde{v}_6) &= -\sin \alpha_1 w_5 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 w_7 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 w_8, \\ \Phi(\tilde{v}_7) &= -\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 w_5 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 w_6 + \sin \alpha_1 w_8, \\ \Phi(\tilde{v}_8) &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 w_5 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 w_6 + \sin \alpha_1 w_7. \end{aligned}$$

Notamos que $\{\Phi(\tilde{v}_1), \dots, \Phi(\tilde{v}_8)\}$ es una base ortonormal asociada al cubo Q_3 , teniendo la forma descrita en el Teorema 3.1.8 con $r = 4$.

3.2. La forma de los grafos asociados a bases ortonormales.

En esta sección vamos a estudiar cómo puede ser un grafo asociado a una base ortonormal. En lo siguiente, consideramos grafos etiquetados.

Proposición 3.2.1 *Un grafo asociado a una base ortonormal no tiene vértices aislados.*

Demostración:

Suponemos que un grafo G con un vértice aislado está asociado a una base ortonormal $\{v_1, \dots, v_{2n}\}$. Sea v_i el vector correspondiente al vértice aislado. Entonces $Fv_j \cdot v_j = 0$ para cualquier j , lo que implica que $Fv_i = 0$. Pero esto es una contradicción con el hecho de que F es una isometría. \square

Ahora, presentamos dos resultados generales:

Teorema 3.2.2 *Sea G un grafo con $2n$ vértices v_1, \dots, v_{2n} tal que:*

1. v_1, \dots, v_{n-1} son vértices independientes.
2. v_n no es adyacente a ningún v_{n+1} o v_{n+2} .
3. v_n es adyacente a alguno de v_{n+3}, \dots, v_{2n} .
4. v_{n+1} y v_{n+2} son adyacentes.

Entonces, G no está asociado a ninguna base ortonormal.

Demostración:

Suponemos que G está asociado a una base ortonormal. Entonces, haciendo uso del Teorema 3.1.8, estas bases pueden ser escritas como

$$v_j = \begin{cases} w_j & \text{if } j \leq n-1, \\ a_{n,n}w_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_{n,k}w_{n+k} & \text{if } j = n, \\ a_{j,n}w_n + \sum_{k=1}^n b_{j,k}w_{n+k} & \text{if } n+1 \leq j \leq 2n, \end{cases}$$

donde $\{w_1, \dots, w_{2n}\}$ es una F -base. Así,

$$Fv_n = a_{n,n}w_{2n} - \sum_{k=1}^{n-1} b_{n,k}w_k, \quad (3.2.1)$$

$$Fv_{n+1} = a_{n+1,n}w_{2n} - \sum_{k=1}^n b_{n+1,k}w_k. \quad (3.2.2)$$

Teniendo en cuenta que v_n no es adyacente a ningún v_{n+1} o v_{n+2} , de (3.2.1) y (3.2.2) se sigue que:

$$0 = Fv_n \cdot v_{n+1} = a_{n,n}b_{n+1,n}$$

y

$$0 = Fv_n \cdot v_{n+2} = a_{n,n}b_{n+2,n}.$$

Si $a_{n,n} \neq 0$, entonces $b_{n+1,n} = b_{n+2,n} = 0$ y así,

$$Fv_{n+1} \cdot v_{n+2} = -a_{n+2,n}b_{n+1,n} + a_{n+1,n}b_{n+2,n} = 0,$$

lo que es una contradicción con el hecho de que v_{n+1} y v_{n+2} sean adyacentes. Por tanto, debe ser $a_{n,n} = 0$.

Ahora, si $j \geq n+3$, $Fv_n \cdot v_j = a_{n,n}b_{j,n} = 0$, pero esto es contradicción con que v_n es adyacente a algún v_{n+3}, \dots, v_{2n} y queda probado el teorema. \square

Teorema 3.2.3 *Dado un grafo, si tenemos dos conjuntos de vértices W_1 y W_2 , no necesariamente disjuntos, tal que*

- (i) W_1 tiene m_1 vértices ($m_1 \geq 2$) y W_2 tiene m_2 vértices con $m_2 < m_1$,
- (ii) cualquier vértice W_1 es adyacente a, al menos, un vértice de W_2 , y
- (iii) los vecinos comunes de cualquier par de vértices de W_1 siempre están en W_2 ,

entonces el grafo no puede asociarse a ninguna base ortonormal.

Demostración:

Suponemos que el grafo está asociado a una base ortonormal, dada por $\{v_1, \dots, v_{2n}\}$. Vamos a elegir $v_h, v_k \in W_1$, $h \neq k$ y denotaremos por w'_1, \dots, w'_{m_2} a los vértices de W_2 . Entonces,

$$0 = \sum_{i=1}^{2n} (Fv_h \cdot v_i)(Fv_k \cdot v_i) = \sum_{i=1}^{m_2} (Fv_h \cdot w'_i)(Fv_k \cdot w'_i).$$

Como consecuencia, los vectores de \mathbb{R}^{m_2} ,

$$(Fv_h \cdot w'_1, \dots, Fv_h \cdot w'_{m_2}) \text{ y } (Fv_k \cdot w'_1, \dots, Fv_k \cdot w'_{m_2})$$

son ortogonales. Por tanto, tenemos que m_1 vectores no nulos y ortogonales 2 a 2 en \mathbb{R}^{m_2} , lo que es una contradicción. \square

Los dos teoremas anteriores nos proporcionan algunas condiciones para que un grafo no esté asociado a una base ortonormal. Sin embargo, hay grafos que no están asociados pero que no los satisfacen, como mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.4 Sea G un grafo de 8 vértices $\{v_1, \dots, v_8\}$ y aristas

$$\begin{aligned} & \{\{v_1, v_4\}, \{v_1, v_7\}, \{v_1, v_8\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_7\}, \{v_2, v_8\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_6\}, \\ & \{v_3, v_8\}, \{v_4, v_6\}, \{v_4, v_7\}, \{v_4, v_8\}, \{v_5, v_6\}, \{v_5, v_7\}, \{v_5, v_8\}, \{v_6, v_7\}, \{v_7, v_8\}\}, \end{aligned}$$

tal y como se muestra en la Figura 3.6.

Vamos a suponer que G está asociado a una base ortonormal denotada también por $\{v_1, \dots, v_8\}$. Ya que v_1, v_2 y v_3 son vértices independientes, usando el Teorema

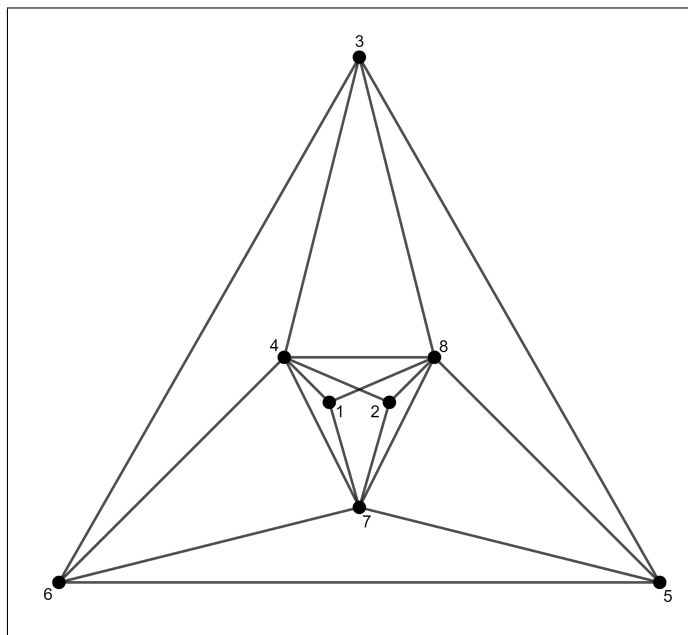


Figura 3.6: Grafo del Ejemplo 3.2.4.

3.1.8, las bases se pueden escribir como:

$$v_j = \begin{cases} w_j & \text{if } j \leq 3, \\ a_{4,4}w_4 + \sum_{k=1}^3 b_{4,k}w_{4+k} & \text{if } j = 4, \\ a_{j,4}w_4 + \sum_{k=1}^4 b_{j,k}w_{4+k} & \text{if } 5 \leq j \leq 8, \end{cases}$$

donde $\{w_1, \dots, w_8\}$ es una F -base. Dado que las aristas $\{v_1, v_5\}$, $\{v_1, v_6\}$, $\{v_2, v_5\}$, $\{v_2, v_6\}$ y $\{v_3, v_7\}$ no pertenecen al grafo, se deduce que $b_{5,1} = Fv_1 \cdot v_5 = 0$, $b_{5,2} = Fv_2 \cdot v_5 = 0$, $b_{6,1} = Fv_1 \cdot v_6 = 0$, $b_{6,2} = Fv_2 \cdot v_6 = 0$ y $b_{7,3} = Fv_3 \cdot v_7 = 0$.

Ahora, como $\{v_4, v_6\}$ es una arista de G , se tiene que $0 \neq Fv_4 \cdot v_6 = a_{4,4}b_{6,4}$ y entonces, $a_{4,4} \neq 0$ y $b_{6,4} \neq 0$. Además, como $\{v_3, v_5\}$ y $\{v_3, v_6\}$ son también aristas del grafo, $0 \neq Fv_3 \cdot v_5 = b_{5,3}$ y $0 \neq Fv_3 \cdot v_6 = b_{6,3}$, es decir, $b_{5,3}, b_{6,3} \neq 0$. Por último, como $\{v_4, v_5\}$ no es una arista de G , $0 = Fv_4 \cdot v_5 = a_{4,4} \cdot b_{5,4}$, entonces $b_{5,4} = 0$.

A continuación, si aplicamos que la base es ortonormal, $0 = v_4 \cdot v_5 = a_{4,4}a_{5,4} + b_{4,3}b_{5,3}$, lo que implica que

$$a_{5,4} = -\frac{b_{4,3}b_{5,3}}{a_{4,4}}.$$

Además, $0 = v_4 \cdot v_6 = a_{4,4}a_{6,4} + b_{4,3}b_{6,3}$, que implica

$$a_{6,4} = -\frac{b_{4,3}b_{6,3}}{a_{4,4}}$$

y

$$0 = v_5 \cdot v_6 = a_{5,4}a_{6,4} + b_{5,3}b_{6,3} = \frac{(a_{4,4}^2 + b_{4,3}^2)b_{5,3}b_{6,3}}{a_{4,4}^2},$$

lo que contradice que $a_{4,4} \neq 0$, $b_{5,3} \neq 0$ y $b_{6,3} \neq 0$. Como consecuencia, el grafo G no está asociado a ninguna base ortonormal.

Sin embargo, el Teorema 3.2.3 es muy útil para determinar algunas propiedades sobre la forma de grafos asociados a bases ortonormales. Por ejemplo, en el caso $m_1 = 2$, se obtiene el siguiente resultado inmediato:

Corolario 3.2.5 *Si dos vértices de un grafo G asociado a una base ortonormal tienen un vecino común, entonces tienen otro vértice común. En consecuencia:*

- (i) *La componente conexa de cualquier vértice de grado 1 es K_2 .*
- (ii) *El único posible ciclo aislado contenido en G es C_4 . En particular, G no tiene triángulos aislados.*

Se sabe (ver [13]) que hay 11 grafos no isomorfos con 4 vértices. De la Proposición 3.2.1 y del corolario anterior, es fácil probar que solo los grafos de la Figura 3.2 pueden ser asociados a una base ortonormal. De hecho lo son, como se muestra en el Ejemplo 3.1.2.

Tenemos consecuencias más interesantes del Teorema 3.2.3:

Corolario 3.2.6 *Sean G un grafo asociado a una base ortonormal y v_i un vértice de G con grado $t \geq 2$ y v_{j_1}, \dots, v_{j_t} sus vértices adyacentes. Si hay otro vértice v_h , diferente de ellos, que es adyacente a cualquiera de los vértices v_{j_r} , $1 \leq r \leq t$, entonces v_h también es adyacente, al menos, a otro de los vértices v_{j_k} , $1 \leq k \leq t$ y $k \neq r$.*

Demostración:

Si suponemos que v_h no es adyacente a ningún v_{j_k} , $k \neq r$, entonces, aplicamos el Teorema 3.2.3 para los subconjuntos $W_1 = \{v_i, v_h\}$ y $W_2 = \{v_{j_r}\}$. \square

Puede verse una representación gráfica de este resultado en la Figura 3.7.

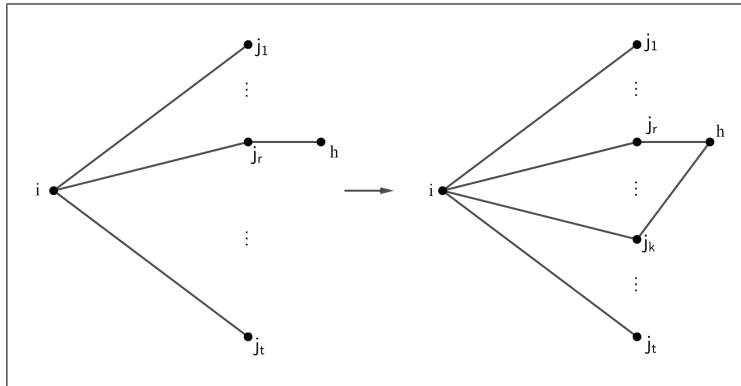


Figura 3.7: Representación gráfica del Corolario 3.2.6.

Corolario 3.2.7 *Sea G un grafo asociado a una base ortonormal y v_i un vértice de G con grado 2. Denotamos por v_j, v_k sus vértices adyacentes. Entonces, v_j y v_k no pueden ser vértices adyacentes. Además, si hay otro vértice v_l , diferente de v_i y v_k , que es adyacente a v_j , entonces v_l también es adyacente a v_k .*

Demostración:

Suponemos que v_j y v_k son vértices adyacentes. Entonces, es suficiente aplicar el Teorema 3.2.3 a los subconjuntos $W_1 = \{v_i, v_j\}$ y $W_2 = \{v_k\}$. La segunda parte del resultado es un caso particular del Corolario 3.2.6. \square

En la Figura 3.8 se muestra una representación gráfica de este resultado.

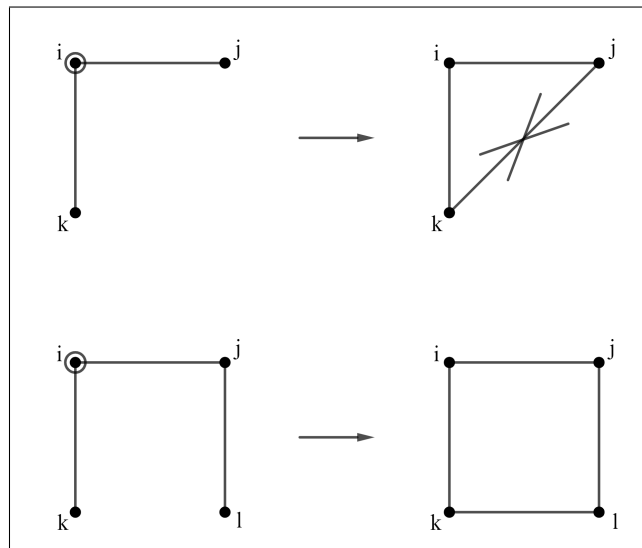


Figura 3.8: Representación gráfica del Corolario 3.2.7.

Otro caso particular del Corolario 3.2.6 es el siguiente:

Corolario 3.2.8 *Sea G un grafo asociado a una base ortonormal y v_i un vértice de G con grado 3. Denotamos por v_j, v_k, v_l sus vértices adyacentes. Se cumplen las siguientes propiedades:*

- (i) *Si v_j y v_k son adyacentes, entonces v_l es adyacente tanto a v_j como a v_k .*
- (ii) *Si hay otro vértice v_h , diferente de v_i, v_k, v_l que es adyacente a v_j , entonces, v_h también es adyacente a v_k o v_l .*

La Figura 3.9 muestra una representación gráfica de este resultado.

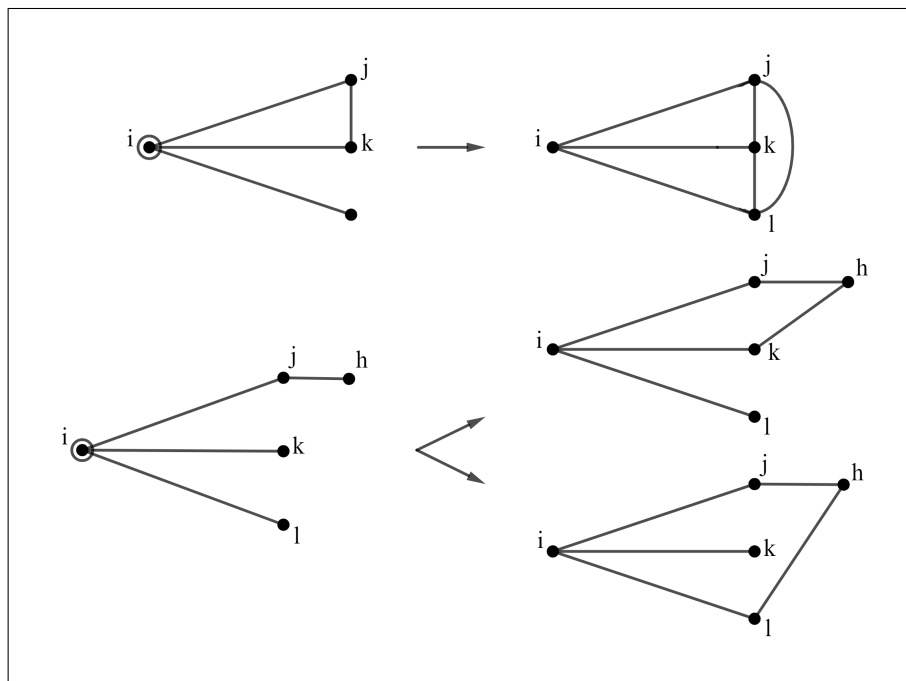


Figura 3.9: Representación gráfica del Corolario 3.2.8.

Observamos que, en realidad, el apartado (i) de este corolario puede obtenerse del apartado (ii). De hecho, implica que si hay un triángulo en un grafo asociado a una base ortonormal y uno de sus vértices tiene grado 3, entonces el triángulo se encuentra en un tetraedro.

Al usar los resultados generales anteriores, ahora podemos analizar los casos de dimensión 4 y 6.

De los posibles grafos de 4 vértices, usando la Figura 3.10 y los resultados anteriores, podemos eliminarlos todos, salvo los grafos 3,8 y 11, que corresponden con los grafos de la Figura 3.2, que ya sabemos que están asociados.

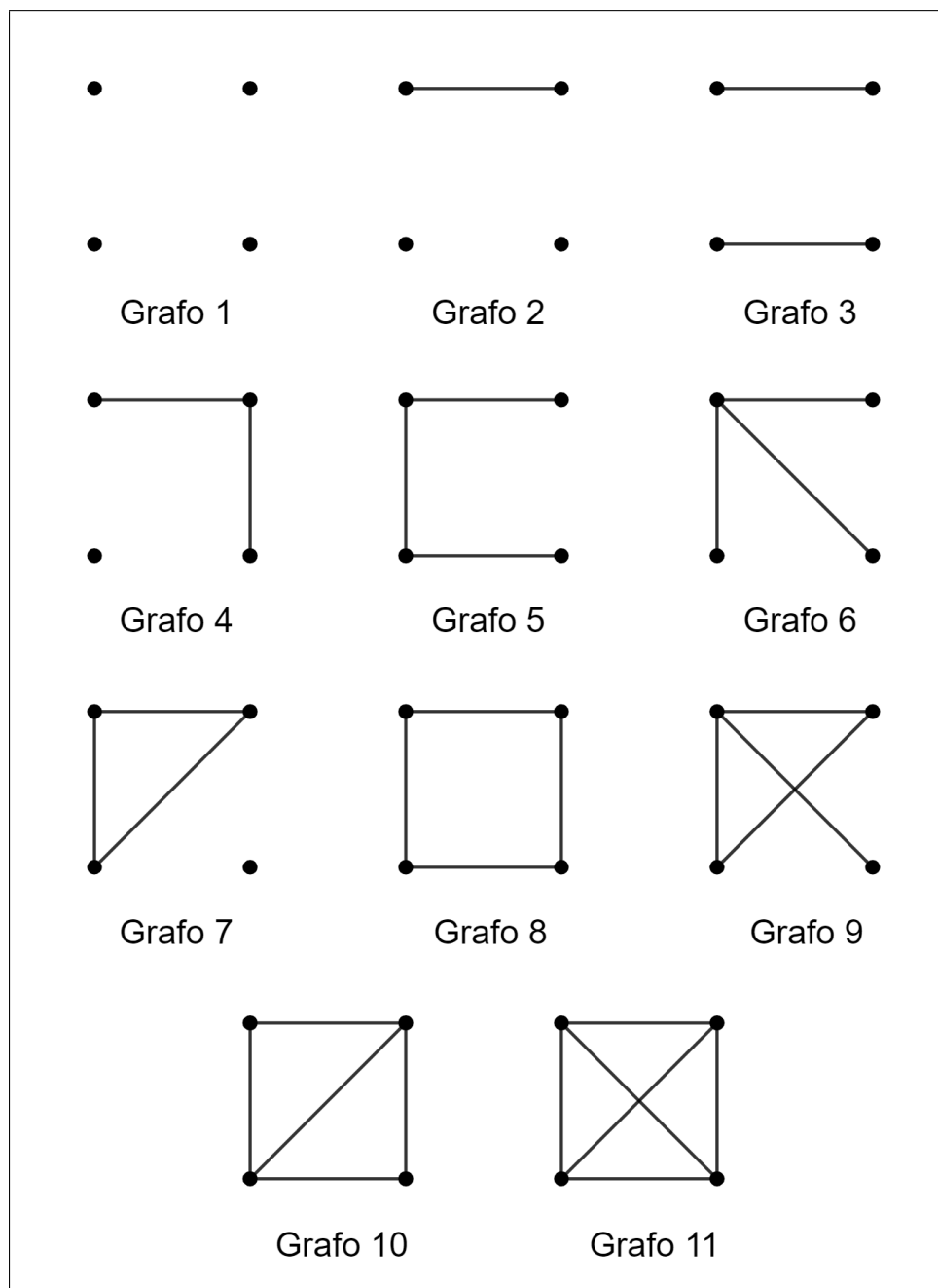


Figura 3.10: Posibles grafos asociados a una base ortonormal de dimensión 4.

En cuanto a la dimensión 6, hay 156 grafos diferentes (en el sentido de no-isomorfos) de 6 vértices; se pueden encontrar en las páginas 9-11 de [13]. Echando un vistazo a estos grafos, nos damos cuenta de que es posible rechazar todos ellos, excepto posiblemente 15, que podrían estar asociados a una base ortonormal.

En el Ejemplo 3.1.3 hemos demostrado que 12 de ellos, denotados por $G_1 - G_{12}$ (ver Figura 3.3), están, de hecho, asociados a bases ortonormales, dando específicamente tales bases en la Tabla 3.1. Los otros tres, que denotamos por $G_{13} - G_{15}$, podemos verlos en la Figura 3.11. Es fácil probar, usando el Teorema 3.2.3, que G_{13} y G_{14} no están asociados a ninguna base ortonormal, tomando, en ambos casos, W_1 como el conjunto cuyos elementos tienen tres de los vértices de mínimo grado del grafo correspondiente y W_2 el conjunto cuyos elementos tienen dos vértices de máximo grado. ¿Qué ocurre con G_{15} ? Para encontrar una respuesta, necesitamos dar un nuevo resultado.

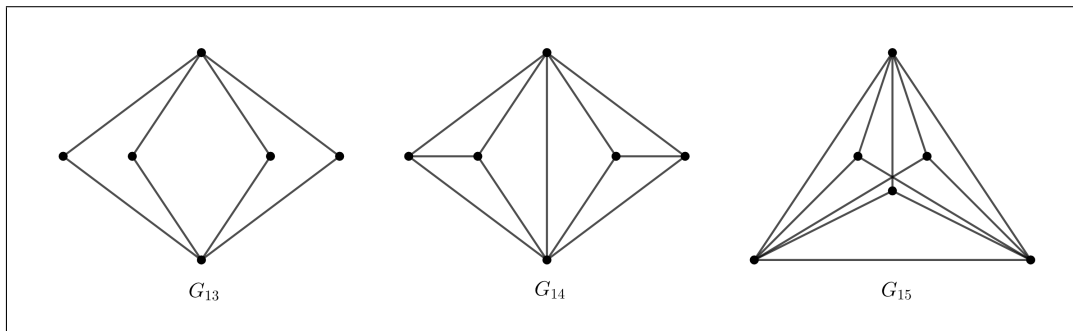


Figura 3.11: Grafos $G_{13} - G_{15}$.

Teorema 3.2.9 *El número de vértices independientes de un grafo asociado a una base ortonormal es, a lo sumo, la mitad de su número total de vértices. Además, si en tal grafo con $2n$ vértices hay n de ellos independientes, entonces los otros n vértices también lo son.*

Demostración:

Sea G un grafo con $2n$ vértices asociado a una base ortonormal $\{v_1, \dots, v_{2n}\}$ y suponemos que existen $n + k$ ($0 < k < n$) vértices independientes en G . Sea W_1 el conjunto de tales vértices independientes y W_2 un conjunto de $n + k - 1$ vértices de G que contiene los $n - k$ vértices del conjunto complementario de W_1 . Al usar el hecho de que G no tiene vértices aislados, es fácil mostrar que W_1 y W_2 satisfacen las condiciones del Teorema 3.2.3 y, como consecuencia, G no puede ser asociado a una base ortonormal, lo cual es una contradicción. Por tanto, G tiene,

al menos, n vértices independientes.

Además, suponemos que v_{n+1}, \dots, v_{2n} son vértices independientes, es decir, $Fv_h \cdot v_k = 0$ cuando $n+1 \leq h, k \leq 2n$. Como $\sum_{j=1}^{2n} (Fv_p \cdot v_j)^2 = 1$, para cualquier $p = 1, \dots, 2n$, entonces:

$$\begin{aligned} n &= \sum_{p=n+1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} (Fv_p \cdot v_j)^2 = \sum_{p=n+1}^{2n} \sum_{j=1}^n (Fv_p \cdot v_j)^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{p=n+1}^{2n} (Fv_p \cdot v_j)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{p=n+1}^{2n} (Fv_j \cdot v_p)^2 = \sum_{p=1}^n \sum_{j=n+1}^{2n} (Fv_p \cdot v_j)^2. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} n &= \sum_{p=1}^n \sum_{j=1}^{2n} (Fv_p \cdot v_j)^2 = \sum_{p=1}^n \sum_{j=1}^n (Fv_p \cdot v_j)^2 + \sum_{p=1}^n \sum_{j=n+1}^{2n} (Fv_p \cdot v_j)^2 = \\ &= \sum_{p=1}^n \sum_{j=1}^n (Fv_p \cdot v_j)^2 + n. \end{aligned}$$

Como consecuencia, $Fv_p \cdot v_j = 0$ si $1 \leq p, j \leq n$ y los primeros n vértices son también independientes. \square

Usando este teorema podemos probar que el grafo G_{15} de la Figura 3.11 no puede ser asociado a una base ortonormal porque los tres vértices de grado 3 son vértices independientes y los otros no. Esto completa el estudio del caso 6-dimensional.

Otra consecuencia inmediata de los teoremas anteriores es el siguiente corolario:

Corolario 3.2.10 *Si un grafo bipartito G de $2n$ vértices está asociado a una base ortonormal, entonces G es un subgrafo de $K_{n,n}$.*

A continuación, una idea natural para continuar el estudio de la forma de grafos asociados a bases ortonormales podría ser incrementar el número de vértices de los grafos (equivalentemente, la dimensión del espacio vectorial) a 8, 10, 12, y así. Pero, en realidad, esto no es una buena idea porque el número de estos grafos crece demasiado. Sin embargo, podemos ofrecer más resultados generales.

Recordamos ahora que un subespacio vectorial W de V se dice invariante por F si $Fw \in W$, para cualquier $w \in W$. Es fácil probar, usando el mismo razonamiento visto anteriormente, que cualquier subespacio invariante de V es de dimensión par y admite una F -base.

Lema 3.2.11 *Sea G un grafo asociado a una base ortonormal. Entonces, los vértices de una componente de G generan un subespacio invariante de V . Además, dos de tales subespacios son ortogonales.*

Demostración:

Vamos a denotar por $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_{2n}\}$ la base ortonormal asociada a G y por W_i el subespacio generado por los vértices de una componente G_i de G . Podemos suponer que $\{v_1, \dots, v_m\}$ son los vectores de \mathcal{B}' que generan W_i . Por lo tanto, para cualquier $w = \sum_{k=1}^m a_k v_k \in W_i$ y cualquier $h \in \{m+1, \dots, 2n\}$, tenemos que

$$Fw \cdot v_h = \sum_{k=1}^m a_k Fv_k \cdot v_h = 0 \text{ y así } Fw \text{ debe estar en } W_i.$$

Además, si $i \neq j$, entonces W_i y W_j son ortogonales porque las componentes correspondientes G_i y G_j no tienen vértices adyacentes. \square

Teorema 3.2.12 *Un grafo está asociado a una base ortonormal si y sólo si cualquiera de sus componentes también lo está.*

Demostración:

Sea G un grafo asociado a una base ortonormal $\{v_1, \dots, v_{2n}\}$ y sea G_i una componente de G . Denotamos por W_i al subespacio de V generado por los vectores $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\}$ correspondientes a los vértices de G_i . Consideramos en W_i el producto escalar inducido por V y la aplicación lineal $F_i = F|_{W_i}$ que es un endomorfismo de W_i debido al Lema 3.2.11. Está claro que F_i es una isometría de W_i tal que $F_i^2 = -Id$ y que G_i está asociado a la base ortonormal $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\}$.

Para la implicación recíproca, suponemos que cualquier componente G_i ($i = 1, \dots, r$) de G está asociado a una base ortonormal. Entonces existen un espacio vectorial V_i (dotado con un producto escalar y una isometría F_i de V_i tal que $F_i^2 = -Id$) y una base ortonormal $\{v_1^i, \dots, v_{2n_i}^i\}$ de V_i asociada a G_i . Consideramos la suma directa $V = \bigoplus_i V_i$ con su producto escalar natural de componente a componente y la isometría F de V dado por $Fv = \sum_i F_i v_i$, para cada $v = \sum_i v_i \in V$. Es claro que $F^2 = -Id$ y que G está asociado a una base ortonormal

$$\{v_1^1, \dots, v_{2n_1}^1, \dots, v_1^r, \dots, v_{2n_r}^r\}$$

lo que concluye la demostración. \square

Finalmente, utilizando los resultados anteriores, vamos a estudiar la forma de los grafos cuyos vértices tienen grado menor o igual que 3 y están asociados a una base ortonormal.

Teorema 3.2.13 *Un grafo cúbico está asociado a una base ortonormal si y sólo si sus componentes conexas son K_4 , $K_{3,3}$ o Q_3 .*

Demostración:

Sea G un grafo cúbico asociado a una base ortonormal y sea C una de sus componentes conexas. Tenemos los siguientes casos:

Caso 1: $K_{2,3}$ es un subgrafo de C . Denotamos por v_1 y v_5 los vértices de grado 3 en el subgrafo $K_{2,3}$ y por v_2, v_3 y v_4 sus vecinos comunes. Sea v_6 el vecino de v_2 que no es ni v_1 ni v_5 . Usando el Corolario 3.2.8 (ii), v_6 es adyacente a v_3 . Si también es adyacente a v_4 , entonces C debe ser $K_{3,3}$. Por otro lado, si v_6 no es adyacente a v_4 , sea v_7 vecino de v_4 que no es ni v_1 ni v_5 . Del Corolario 3.2.8 (ii), de nuevo, v_7 debe ser adyacente a v_2 o v_3 , pero esto es imposible porque G es un grafo cúbico.

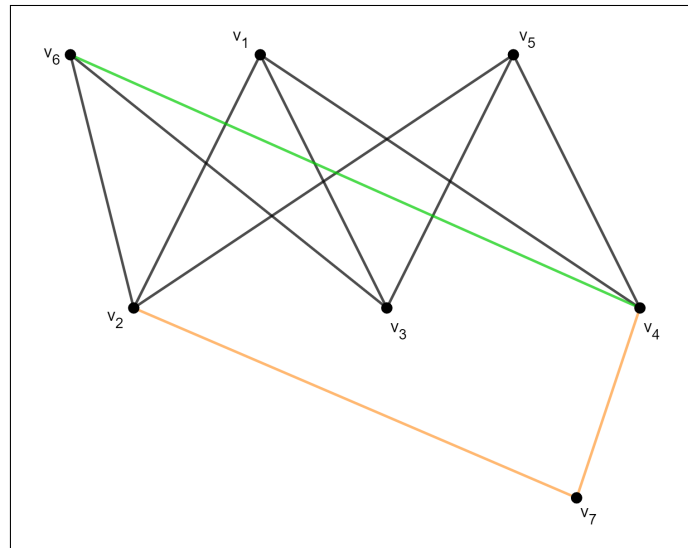


Figura 3.12: Representación gráfica del caso 1.

Caso 2: K_3 es un subgrafo de C . Sean v_1, v_2 y v_3 los vértices de K_3 y v_4 el otro vecino de v_1 . Usando el Corolario 3.2.8 (i), v_4 es adyacente a v_2 y v_3 . Entonces, C debe ser K_4 .

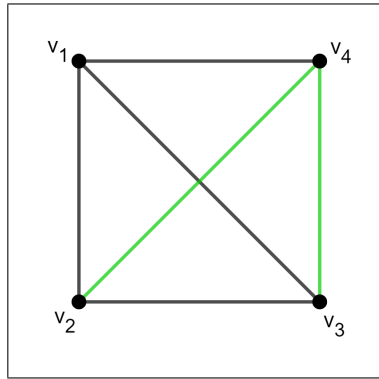


Figura 3.13: Representación gráfica del caso 2.

Caso 3: Ni $K_{2,3}$ ni K_3 es subgrafo de C . Sea v_1 cualquier vértice de C y v_2, v_4, v_5 sus vecinos. Como K_3 no es subgrafo de C , v_2, v_4 y v_5 no son adyacentes dos a dos. Ahora, sea v_3 un vecino de v_2 diferente de v_1 . Por el Corolario 3.2.8 (ii), v_3 es adyacente a v_4 o v_5 . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que v_3 es adyacente a v_4 . Por tanto, no puede ser también adyacente a v_5 porque $K_{2,3}$ no es subgrafo de C . Sean v_6, v_7 y v_8 los vecinos de v_2, v_3 y v_4 , respectivamente, no pertenecientes a $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Puesto que, ni $K_{2,3}$ ni K_3 es subgrafo de C , es fácil ver que v_5, v_6, v_7 y v_8 son diferentes dos a dos. Del Corolario 3.2.8 (ii), v_5 y v_7 son adyacentes a v_6 y v_8 , y C es Q_3 .

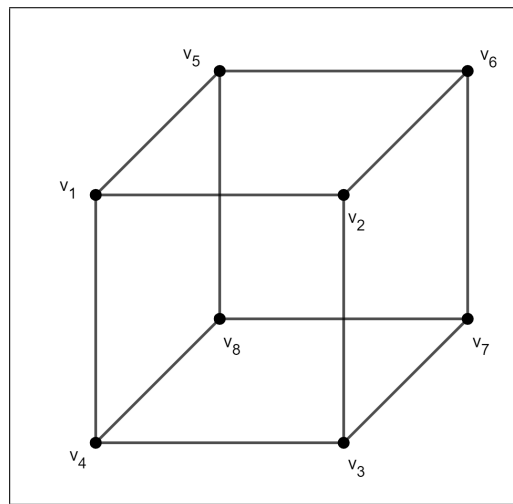


Figura 3.14: Representación gráfica del caso 3.

Recíprocamente, si las componentes del grafo cúbico son K_4 , $K_{3,3}$ y Q_3 , entonces es suficiente aplicar el Teorema 3.2.12 y la existencia de la base ortonormal asociada a K_4 , $K_{3,3}$ y Q_3 (ver Ejemplo 3.1.2, G_5 del Ejemplo 3.1.3 y el Ejemplo 3.1.4, respectivamente). \square

Teorema 3.2.14 *Los únicos grafos de grado máximo al menos 3 que están asociados a una base ortonormal son aquellos cuyas componentes conexas son K_2 , C_4 , K_4 , $K_{3,3} - e$, $K_{3,3}$ o Q_3 .*

Demostración:

Hemos mostrado ya en los Ejemplos 3.1.1-3.1.4 que K_2 , C_4 , K_4 , $K_{3,3} - e = G_4$, $K_{3,3}$ y Q_3 están asociados a una base ortonormal. Así, del Teorema 3.2.12, cualquier grafo que tenga algunos de ellos como sus componentes conexas también lo es.

Para probar la unicidad, sea G un grafo de grado máximo al menos 3 asociado a una base ortonormal y vamos a considerar cualquier componente conexa C de G . Entonces, si G es un grafo cúbico, usando el Teorema 3.2.13, C es K_4 , $K_{3,3}$ o Q_3 . Por otro lado, si hay vértices de grado 1 en C , del Corolario 3.2.5, C es K_2 . Por tanto, sólo tenemos que considerar el caso en el que todos los vértices de C tienen grado 2 o 3 con al menos uno de ellos de grado 2. Denotamos este por v_1 . Sea v_2 y v_3 sus vecinos. Del Corolario 3.2.5, existe otro vecino común v_4 de v_2 y v_3 . Se tienen entonces dos casos:

Caso 1: v_2 es de grado 2. Suponemos que v_3 es de grado 3 y v_5 su vecino que no es ni v_1 ni v_4 . Entonces, del Corolario 3.2.5, v_1 y v_5 tienen un vecino común diferente de v_3 . Sin embargo, el único vecino de v_1 diferente de v_3 es v_2 , pero, como v_2 es de grado 2, no puede ser adyacente a v_5 , que es una contradicción y así, v_3 es de grado 2. A continuación, si v_4 tiene un vecino, diremos v_5 , diferente de v_2 y v_3 , del Corolario 3.2.5, v_2 y v_5 tienen otro vértice común, que no es v_4 . Pero el único vecino de v_2 , diferente de v_4 , es v_1 , que no es adyacente a v_5 y se deduce que v_4 no puede ser de grado 3. Como consecuencia, C es C_4 .

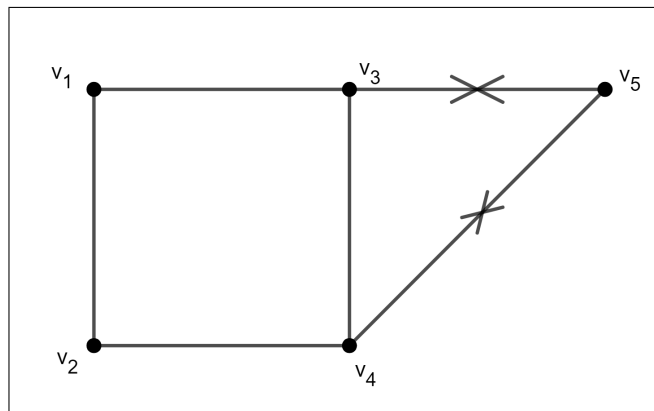


Figura 3.15: Representación gráfica del caso 1.

Caso 2: v_2 es de grado 3. Sea v_5 vecino de v_2 que no es ni v_1 ni v_4 . Del Corolario 3.2.5, v_1 y v_5 tienen otro vértice en común, pero como v_1 es de grado 2, este vértice común tiene que ser v_3 . Ahora, usando el Teorema 3.2.3 para $m = 3$ y ya que v_1 es de grado 2, v_4 y v_5 tienen un vecino común, diremos v_6 , diferente de v_2 y v_3 . Entonces, v_6 no puede ser de grado 3 porque, si existe un vértice, denotado por v_7 , adyacente a v_6 , que no es ni v_4 ni v_5 , del Corolario 3.2.5, v_4 y v_7 deben tener otro vecino común, diferente de v_6 , pero v_2 y v_3 , los otros vecinos de v_4 , no pueden ser adyacentes a v_7 . Como consecuencia, v_6 es de grado 2 y C es G_4 . \square

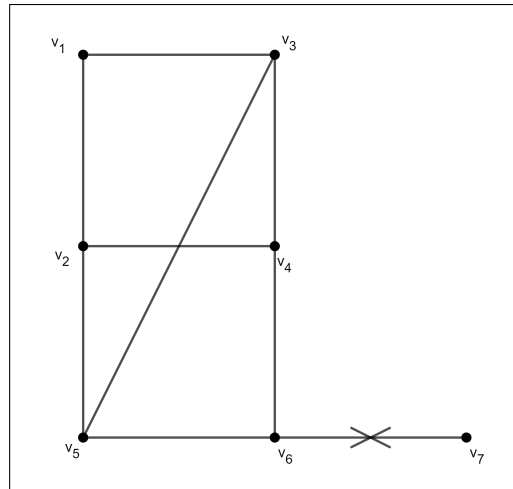


Figura 3.16: Representación gráfica del caso 2.

Capítulo 4

Subvariedades asociadas a grafos.

Como hemos visto en el capítulo anterior, se puede definir una asociación entre espacios vectoriales de dimensión par y grafos. Se pretende ahora definir esa asociación, pero en un marco diferente, el de subvariedades y con una clara diferencia, teniendo en cuenta, en este caso, los pesos de las aristas. Por esta razón, algunos de los resultados obtenidos en el Capítulo 3 serán análogos en este contexto.

En este capítulo presentamos una relación interesante entre Teoría de Grafos y Geometría Diferencial al definir subvariedades de variedades casi-Hermíticas asociadas a ciertos tipos de grafos. Estos conceptos fueron estudiados por A. Carriazo y L. M. Fernández en [4]. Vamos a mostrar algunos resultados sobre la posibilidad de que un grafo se asocie con una subvariedad. Para finalizar, concluimos con una sección donde caracterizamos las subvariedades asociadas a los grafos en una variedad casi-Hermítica de dimensión 4.

4.1. Subvariedades asociadas a grafos.

Sea M^m una variedad Riemanniana isométricamente inmersa³ en una variedad casi-Hermítica (\widetilde{M}^n, J, g) . Sea $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_n\}$ una referencia local ortonormal definida en un entorno U del punto $p \in M$. Entonces, para cualquier $q \in U$, definimos el grafo ponderado $G_{\mathcal{B},q}$ dado por el conjunto de vértices de $\{1, \dots, n\}$ tal que la arista $\{i, j\}$ existe si y solo si $g_q(J_q X_{iq}, X_{jq}) \neq 0$, con peso $g_q^2(J_q X_{iq}, X_{jq})$. Hay que tener en cuenta que esto es solo una generalización del procedimiento de construcción estudiado en el Capítulo 2 para las subvariedades bi-slant.

Ahora podemos introducir la idea de asociación entre subvariedades y grafos. Sea M^m una subvariedad de una variedad casi-Hermítica (\widetilde{M}^n, J, g) y sea G un grafo ponderado con vértices $\{1, \dots, n\}$. Entonces, se dice que M está asociado

a G si para cualquier $p \in M$ existen un entorno $U(p)$ y una referencia local ortonormal $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_n\}$ en U que satisfacen las siguientes condiciones:

- $\{X_1, \dots, X_m\}$ son tangentes a M y $\{X_{m+1}, \dots, X_n\}$ son normales a M .
- Para cualquier $q \in U$, el grafo $G_{\mathcal{B},q}$ es isomorfo a G .

El concepto de isomorfismo es, en este caso, en el sentido de que dos grafos serán isomorfos si conservan la adyacencia y los pesos de sus aristas. También pediremos que el isomorfismo conserve las etiquetas, por lo que será realmente la aplicación identidad en $\{1, \dots, n\}$, conservando la adyacencia y los pesos. Es decir, se construyen los grafos $G_{\mathcal{B},q} \forall q \in U$ y se pide que sean todos “iguales”.

Ejemplo 4.1.1 Como hemos mostrado anteriormente, cada superficie θ -slant en una variedad casi-Hermítica 4-dimensional está asociada al Grafo 2 de la Figura 1. Es fácil probar que las superficies complejas y las superficies totalmente reales están asociadas al mismo grafo, desapareciendo las aristas correspondientes cuando $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$, respectivamente.

Esta situación puede ser generalizada a subvariedades slant con dimensión arbitraria, considerando una referencia slant adaptada (ver [6, pp. 84-85]). Por tanto, vemos que, en general, una subvariedad θ -slant está asociada al grafo de la Figura 4.1.

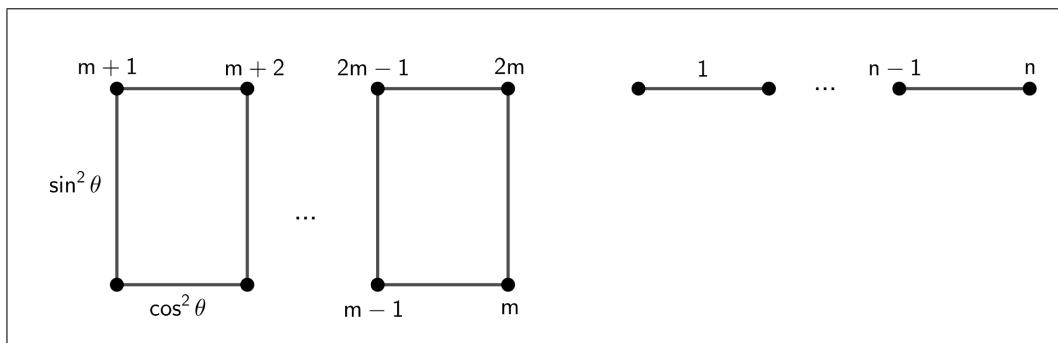


Figura 4.1: Subvariedades slant.

Ejemplo 4.1.2 Siguiendo el mismo procedimiento que en el Ejemplo 4.1.1, se tienen subvariedades semi-slant asociadas al grafo mostrado en la Figura 4.2.

Hay que tener en cuenta que la anterior definición depende de la referencia ortonormal elegida. Por ejemplo, si consideramos una superficie totalmente real M^2 en una variedad casi-Hermítica \widetilde{M}^4 , es fácil probar que M está asociada al

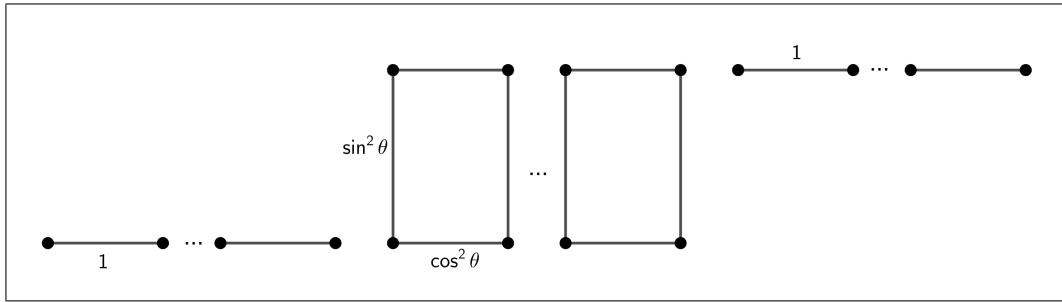


Figura 4.2: Subvariedades semi-slant.

Grafo 1 que se muestra en la figura 4.3. De hecho, es suficiente considerar una referencia local ortonormal $\{X_1, X_2, JX_1, JX_2\}$ en un entorno de cada punto. Sin embargo, podemos tomar también el campo

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(X_1 + X_2), \frac{\sqrt{2}}{2}(X_1 - X_2), JX_1, JX_2 \right\};$$

así, M está asociada también con el Grafo 2 de la Figura 4.3 (que se denota normalmente por $K_{2,2}$).

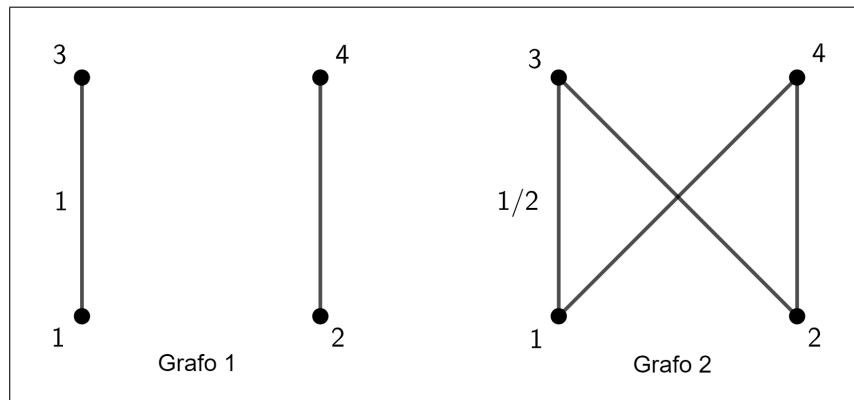


Figura 4.3: Superficies totalmente reales.

Si comparamos este resultado con la Figura 3.5 que corresponde con un cambio de base del Ejemplo 3.1.2 dado en el capítulo anterior, observamos que es el mismo grafo que el de la Figura 4.3, salvo los pesos de las aristas. Esto se debe a que las bases tomadas son las mismas y a que la asociación de grafos a espacios vectoriales de dimensión par tiene en cuenta grafos no ponderados, mientras que los grafos asociados a subvariedades sí son ponderados.

Ahora, vamos a mostrar algunos resultados generales que tiene que satisfacer un grafo para estar asociado a una subvariedad. Pero tenemos que tener en cuenta lo estudiado anteriormente. Si consideramos, para cada $p \in M$, $V = T_p(\widetilde{M})$ con el producto escalar g_p y la isometría J_p , podemos aplicar los resultados ya obtenidos en el Capítulo 3, exceptuando los que atienden a los pesos de las aristas, pues los grafos asociados a espacios vectoriales de dimensión par no eran ponderados.

Lema 4.1.3 *Sea M una subvariedad asociada a un grafo G . Entonces, la suma de los pesos de las aristas incidentes de cada vértice de G debe ser igual a 1.*

Demostración:

Se sigue directamente de la compatibilidad entre la métrica y las estructuras casi complejas en una variedad casi-Hermítica. \square

Los siguientes resultados son consecuencias de la Proposición 3.2.1 y el Corolario 3.2.5 del capítulo anterior.

Lema 4.1.4 *Sea M una subvariedad asociada a un grafo G . Entonces, G no tiene vértices aislados.*

Proposición 4.1.5 *Sea M una subvariedad asociada a un grafo G . Entonces, G no contiene triángulos aislados.*

Proposición 4.1.6 *Sea M una subvariedad asociada a un grafo G . Sea v un vértice en G de grado 1. Entonces, la componente conexa que contiene a v en G es K_2 .*

Usando esta proposición, podemos obtener la siguiente caracterización de subvariedades CR por medio de árboles (grafos conexos sin ciclos) y bosques (uniones disjuntas de árboles; ver [7]).

Teorema 4.1.7 *Una subvariedad está asociada a un bosque si y solo si es una subvariedad CR. En este caso, cada árbol es un K_2 .*

Demostración:

Suponemos que una subvariedad M está asociada a un bosque G . Por la Proposición 4.1.6, cada componente conexa de G tiene que ser un K_2 , ya que cada árbol tiene vértices de grado 1 (ver [7]). Entonces, podemos suponer que el grafo G se parece al de la Figura 4.4, reordenando la referencia local ortonormal dado por la asociación, si es necesario, donde $d_1 + d_2 = m$. Consideramos $d_1 = 0$ (resp. $d_2 = 0$) si no hay aristas tangente horizontal (resp. vertical) en G . Ahora, dado $p \in M$, podemos definir $\mathcal{D}_1 = \langle X_1, \dots, X_{d_1} \rangle$ y $\mathcal{D}_2 = \langle X_{d_1+1}, \dots, X_{d_1+d_2} \rangle$ en un entorno

de p . Se sigue que \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 son dos distribuciones diferenciables bien definidas en M tal que $TM = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$. Además, \mathcal{D}_1 (resp. \mathcal{D}_2) es una distribución compleja (resp. totalmente real), y así, M es una subvariedad CR.

En cuanto a la implicación recíproca se sigue de un cálculo directo. □

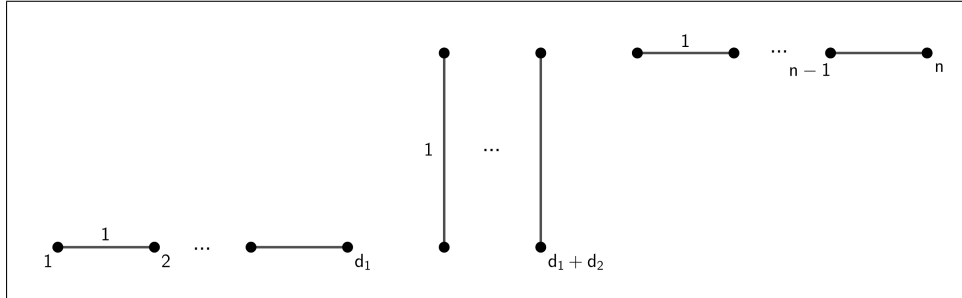


Figura 4.4: Subvariedades CR.

Anteriormente hemos mostrado cómo este trabajo fue motivado por el estudio de las superficies slant. Ahora, podemos probar que la asociación con grafos realmente caracteriza este tipo de subvariedades.

Teorema 4.1.8 *Sea M^2 una superficie isométricamente inmersa en una variedad casi-Hermítica. Entonces, M es slant si y solo si existe un grafo G tal que M está asociado a G .*

Demostración:

Sabemos ya que una superficie slant está asociada a un grafo. Recíprocamente, suponemos que una superficie M está asociada a un grafo G . Sea i, j los vértices tangentes de G . Si estos vértices no son adyacentes, entonces está claro que M es una superficie totalmente real. Ahora, suponemos que i y j son adyacentes. Si no hay otros vértices adyacentes a i o j , entonces el peso de la arista $\{i, j\}$ debe ser 1 y M es una subvariedad compleja. Si no, denotamos por μ el peso de la arista $\{i, j\}$, $0 < \mu < 1$. En este caso, tenemos que $P^2 = -\mu Id$, por tanto, M es una subvariedad slant con ángulo θ tal que $\cos^2 \theta = \mu$. □

4.2. El caso 4-dimensional.

En esta sección vamos a estudiar las subvariedades asociadas a grafos en una variedad casi-Hermítica \widetilde{M}^4 de dimensión 4. Se sabe que hay solo 11 grafos diferentes con 4 vértices [7]. Pero, en virtud del Lema 4.1.3, la Proposición 4.1.5 y la

Proposición 4.1.6, podemos ver que, si M es una subvariedad de \widetilde{M}^4 asociada a un grafo G , entonces G debe ser uno de los grafos que se muestran en la Figura 4.5. Este resultado es análogo a lo ya obtenido para dimensión 4 en el Capítulo anterior.

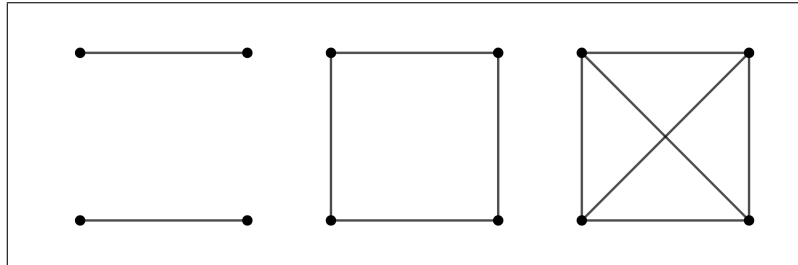


Figura 4.5: Posibles grafos asociados a subvariedades en un espacio de dimensión 4.

Hemos mostrado previamente que, si una subvariedad está asociada a un grafo, entonces este grafo no es único. Por tanto, podemos decir que dos grafos ponderados y etiquetados G y G' son equivalentes, $G \sim G'$, si para cualquier subvariedad M asociada a G , entonces M está asociada a G' y cualquier subvariedad M' asociada a G' , entonces M' está asociada a G . Obviamente esto es una relación de equivalencia entre las clases de grafos asociados a subvariedades. Nuestro objetivo es ahora clasificar las subvariedades asociadas a grafos haciendo uso de esta relación.

Primero, consideramos curvas en \widetilde{M} . Es fácil ver que, si M es una curva en \widetilde{M} asociada a un grafo G , entonces, bajo isomorfismos, G debe ser uno de los grafos de la Figura 4.6.

Tenemos los siguientes resultados:

Teorema 4.2.1 *Todos los grafos que se muestran en la Figura 4.6 son equivalentes.*

Demostración:

Podemos ver fácilmente que los grafos G_1, G_2 y G_3 son equivalentes, simplemente reordenando las referencias locales ortonormales apropiados. Vamos a ver ahora que G_1 es equivalente a $G_4(a^2, b^2)$, para cualquier a, b tal que $a^2 + b^2 = 1$. Si M es una subvariedad asociada a G_1 mediante una referencia local $\{X_1, \dots, X_4\}$ y definimos la nueva referencia ortonormal

$$Y_1 = X_1, \quad Y_2 = aX_2 + bX_4, \quad Y_3 = X_3, \quad Y_4 = bX_2 - aX_4,$$

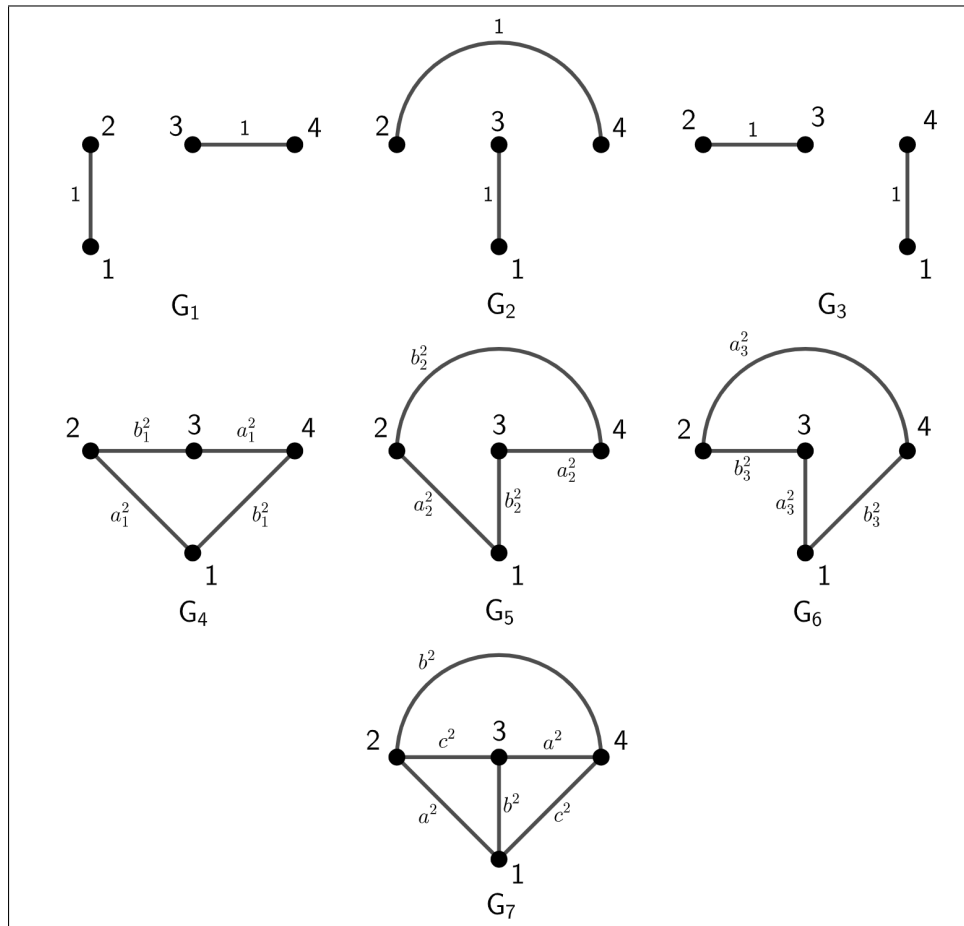


Figura 4.6: Grafos asociados a curvas.

entonces, M está asociado a G_4 mediante $\{Y_1, \dots, Y_4\}$. Recíprocamente, es suficiente considerar el cambio

$$X_1 = Y_1, \quad X_2 = h_1 Y_2 + h_2 Y_4, \quad X_3 = Y_3, \quad X_4 = h_2 Y_2 - h_1 Y_4,$$

donde $h_1 = g(JY_1, Y_2)$ y $h_2 = g(JY_1, Y_4)$. De forma similar, tenemos que $G_2 \sim G_5$ y $G_3 \sim G_6$.

Finalmente, probamos que $G_4(a^2 + b^2, c^2) \sim G_7(a^2, b^2, c^2)$, para cualesquiera a, b, c tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Como anteriormente, si $\{X_1, \dots, X_4\}$ (resp. $\{Y_1, \dots, Y_4\}$) es una referencia local ortonormal asociada a $G_4(a^2 + b^2, c^2)$ (resp. $G_7(a^2, b^2, c^2)$), entonces solo es necesario tener en cuenta los cambios

$$Y_1 = X_1, \quad Y_2 = \lambda X_2 + \mu_1 X_3, \quad Y_3 = \mu_1 X_2 - \lambda X_3, \quad Y_4 = X_4,$$

con $\lambda^2 = a^2/(a^2 + b^2)$, $\mu_1^2 = b^2/(a^2 + b^2)$ y

$$X_1 = Y_1, \quad X_2 = \lambda Y_2 + \mu_2 Y_3, \quad X_3 = \mu_2 Y_2 - \lambda Y_3, \quad X_4 = Y_4,$$

con $\lambda = g(JY_1, Y_2)/\sqrt{a^2 + b^2}$, $\mu_2 = g(JY_1, Y_3)/\sqrt{a^2 + b^2}$. Dado que \sim es una relación de equivalencia, se concluye la prueba. \square

Por tanto, no encontramos diferentes clases de curvas asociadas a grafos. En particular, vemos que cualquier curva asociada a un grafo es una subvariedad totalmente real. Esto es un hecho general conocido para curvas en variedades casi-Hermiticas.

Si estudiamos superficies en \widetilde{M} , la situación es bastante diferente. Los grafos asociados a superficies aparecen en la Figura 4.7. Denotamos por $[G_i]$ las clases de equivalencias definidas por G_i .

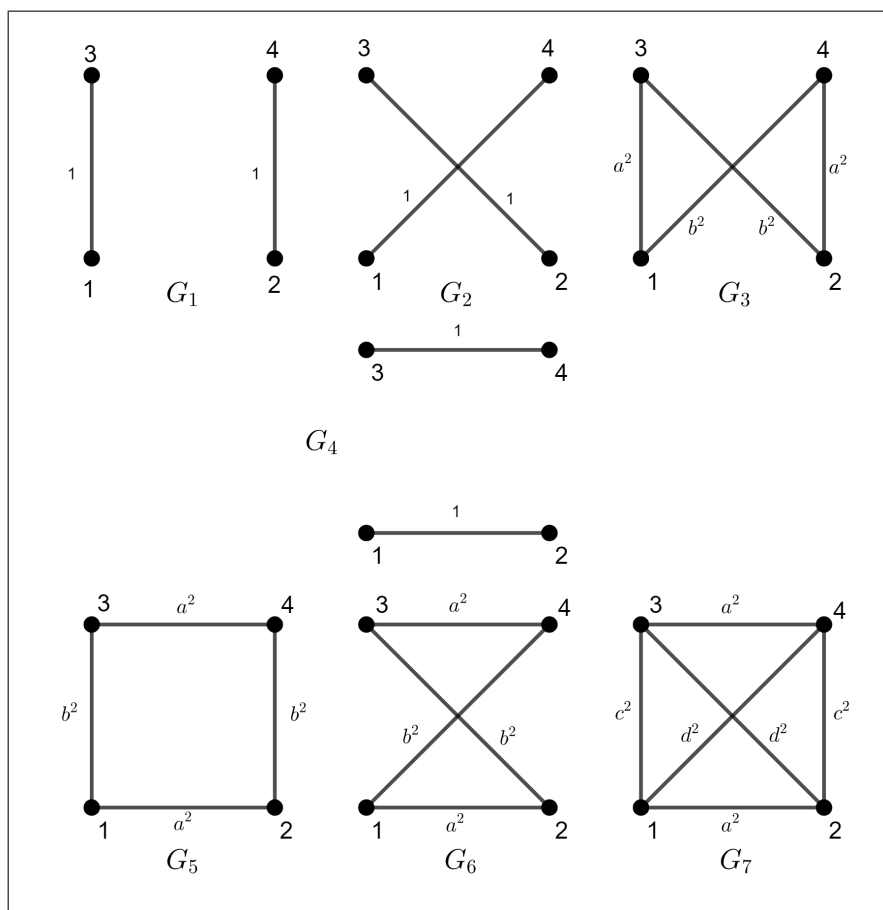


Figura 4.7: Grafos asociados a superficies.

Teorema 4.2.2 *Si consideramos los grafos de la Figura 4.7, entonces tenemos las siguientes clases de equivalencias:*

- i) $[G_1] = [G_2] = [G_3(a^2, b^2)]$, para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a^2 + b^2 = 1$;
- ii) $[G_4]$;
- iii) para cada $a^2 > 0$, obtenemos una clase de equivalencia diferente $[G_5(a^2, b^2)] = [G_6(a^2, b^2)] = [G_7(a^2, c^2, d^2)]$, cualesquiera $b, c, d \in \mathbb{R}$ que sean tales que $a^2 + b^2 = a^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Además, dada una superficie M^2 en \widetilde{M}^4 , M está asociado a la clase $[G_1]$ (resp. $[G_4]$) si y solo si es una superficie totalmente real (resp. superficie compleja), y M está asociada a $[G_5(a^2, b^2)]$ si y solo si es una superficie slant adecuada con ángulo slant θ tal que $a^2 = \cos^2\theta$.

Demostración:

La equivalencia entre los grafos G_1 y G_2 (resp. G_5 y G_6) se sigue de la reordenación de los campos correspondiente. Vamos a ver ahora que, dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 = 1$, entonces G_1 es equivalente a $G_3(a^2, b^2)$. Si M es una subvariedad asociada a G_1 mediante una referencia local $\{X_1, \dots, X_4\}$ y definimos los nuevos campos ortonormales

$$Y_1 = aX_1 + bX_2, \quad Y_2 = bX_1 - aX_2, \quad Y_3 = X_3, \quad Y_4 = X_4,$$

entonces, M está asociada a $G_3(a^2, b^2)$ mediante $\{Y_1, \dots, Y_4\}$.

Recíprocamente, suponemos que M' es una subvariedad asociada a $G_3(a^2, b^2)$ mediante un campo local $\{Y_1, \dots, Y_4\}$. Por tanto, podemos deducir de $J^2 = -Id$ que:

$$\begin{aligned} g(JY_1, Y_3)g(JY_2, Y_4) - g(JY_1, Y_4)g(JY_2, Y_3) &= \pm 1, \\ g(JY_1, Y_3)g(JY_1, Y_4) + g(JY_2, Y_3)g(JY_2, Y_4) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces, para probar que M' está asociada a G_1 , es suficiente considerar el cambio

$$X_1 = -h_1Y_1 + h_2Y_2, \quad X_2 = h_2Y_1 + h_1Y_2, \quad X_3 = Y_3, \quad X_4 = Y_4,$$

donde $h_1 = g(JY_2, Y_4)$ y $h_2 = g(JY_1, Y_4)$.

Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 = a^2 + c^2 + d^2 = 1$, para probar que $G_5(a^2, b^2)$ y $G_7(a^2, c^2, d^2)$ son equivalentes, solo tenemos que tener en cuenta los cambios

$$Y_1 = \lambda + \mu_1X_2, \quad Y_2 = \mu_1X_1 - \lambda X_2, \quad Y_3 = X_3, \quad Y_4 = X_4,$$

con $\lambda^2 = c^2/b^2$, $\mu_1^2 = d^2/b^2$ y

$$X_1 = -\lambda + \mu_2 Y_2, \quad X_2 = \mu_2 Y_1 + \lambda Y_2, \quad X_3 = Y_3, \quad X_4 = Y_4,$$

con $\lambda = g(JY_2, Y_4)/b$, $\mu_2 = g(JY_1, Y_4)/b$, donde $\{X_1, \dots, X_4\}$ (resp. $\{Y_1, \dots, Y_4\}$) es una referencia local ortonormal asociado a $G_5(a^2, b^2)$ (resp. $G_7(a^2, c^2, d^2)$).

Finalmente, es fácil ver que G_1, G_4 y G_5 no son equivalentes entre sí, ya que representan comportamientos totalmente diferentes de una subvariedad con respecto a la estructura casi compleja J . Por tanto, podemos terminar la prueba siguiendo la del Teorema 4.1.8. \square

En este caso, vemos que la clasificación de grafos también clasifica superficies asociadas a grafos, atendiendo a sus comportamientos con respecto a la estructura casi compleja de \widetilde{M} . Hemos encontrado diferentes clases de superficies: superficies totalmente reales, superficies complejas y superficies slant. De hecho, hemos probado que toda superficie asociada a un grafo en una variedad casi-Hermítica de dimensión 4 es una superficie slant, que es un caso particular del Teorema 4.1.8.

Finalmente, la situación de hipersuperficies asociadas a grafos es parecida a la de las curvas. Podemos probar el teorema similar correspondiente:

Teorema 4.2.3 *Todos los grafos asociado a hipersuperficies de \widetilde{M}^4 son equivalentes.*

Está claro que una subvariedad asociada al grafo mostrado en la Figura 4.8 es una subvariedad CR. Así, se sigue del Teorema 4.2.3 que cada hipersuperficie de \widetilde{M}^4 asociada a un grafo es una subvariedad CR.

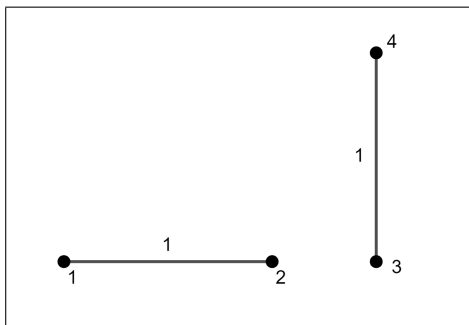


Figura 4.8: Hipersuperficies CR.

Capítulo 5

Subvariedades débilmente asociadas a grafos.

Este capítulo es una continuación del capítulo anterior, por lo que se tienen las mismas asociaciones pero, en este caso, sin considerar pesos en las aristas. Por tanto, guardará gran parecido, en cuanto a los resultados esperados, con el Capítulo 3.

Estos resultados fueron dados por A. Carriazo, L. M. Fernández y A. Rodríguez-Hidalgo y podemos encontrarlos de forma más detallada en [5].

En primer lugar, vamos a introducir los conceptos de isomorfismos débiles y asociación débil.

Un isomorfismo débil entre dos grafos etiquetados con n vértices es una identificación del conjunto $\{1, \dots, n\}$ en sí mismo, conservando la adyacencia. Se dice que dos grafos son débilmente isomorfos si existe un isomorfismo débil entre ellos.

Teniendo en cuenta la definición de asociación entre subvariedades y grafos dada al comienzo del Capítulo 4, el concepto de asociación débil es análogo, cambiando “isomorfo” por “débilmente isomorfo”, lo que significa básicamente no tener en cuenta el peso de las aristas.

5.1. Subvariedades (débilmente) asociadas a grafos.

En el Capítulo 4, hemos definido la asociación entre subvariedades y grafos. Obviamente, toda subvariedad asociada a grafos también está débilmente asociada.

da a él, ya que los grafos isomorfos son en particular grafos débilmente isomorfos. Por otro lado, no es necesario que G sea un grafo ponderado para que defina una asociación débil.

Hay que tener en cuenta que la definición de asociación entre subvariedades y grafos depende de la referencia ortonormal elegida. Sin embargo, este hecho ha sido estudiado en el Capítulo 4, dando una relación de equivalencia entre grafos asociados a subvariedades. De hecho, dos grafos etiquetados ponderados G y G' se dicen equivalentes si para cualquier subvariedad M asociada a G , M está asociada a G' y para cualquier subvariedad M' asociada a G' , M' está asociada a G . Por tanto, las subvariedades asociadas a grafos pueden ser clasificadas a través de esta relación (por ejemplo, el caso de dimensión 4 del Capítulo 4), pero el objetivo de esta Sección es otro.

La asociación débil de subvariedades con grafos no es tan extraña. De hecho, el siguiente resultado muestra que es un hecho local natural para cualquier subvariedad.

Teorema 5.1.1 *Dada cualquier subvariedad M de una variedad casi-Hermítica, existe una subvariedad abierta de M que está asociada débilmente con un grafo.*

Demostración:

Sean M^m una subvariedad de una variedad casi-Hermítica (\widetilde{M}^n, J, g) , y $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_n\}$ una referencia local ortonormal definida en un subconjunto abierto U tal que $\{X_1, \dots, X_m\}$ son tangentes a M y $\{X_{m+1}, \dots, X_n\}$ son normales a M . Consideramos las funciones $f_{ij} = g(JX_i, X_j)$, $i < j$, las cuáles son diferenciable en U .

Consideramos ahora: $\{(i, j) / i, j = 1, \dots, n, i < j\} = \{(i_1, j_1), \dots, (i_r, j_r)\}$. Entonces, podemos llevar a cabo el siguiente procedimiento de construcción. Ponemos $U_0 = U$. Para cada $k = 1, \dots, r$, si $f_{i_k j_k} = 0$ en U_{k-1} , entonces $U_k = U_{k-1}$. Si no, usando las propiedades de continuidad, sabemos que existe un subconjunto abierto no vacío $U_k \subseteq U_{k-1}$ tal que $f_{i_k j_k}(q) \neq 0$, para cualquier $q \in U_k$. Por último, obtenemos un subconjunto abierto U_r que satisface que, si existe un punto $q \in U_r$ con $f_{ij}(q) = 0$, entonces $f_{ij} = 0$ en U_r . Por tanto, está claro que, si construimos los grafos $G_{\mathcal{B}, p}$ para cualquier $p \in U_r$, todos son débilmente isomorfos entre sí, y como consecuencia la subvariedad abierta U_r está débilmente asociada a tales grafos. \square

Sin embargo, estamos interesados en estudiar subvariedades que presentan dicha asociación de forma global (y diferenciable). Primero podemos dar algunos ejemplos:

Ejemplo 5.1.2 En el Capítulo 4 hemos probado que una subvariedad θ -slant está asociado a los grafos que se muestran en la Figura 4.1. De forma similar, podemos ver que toda subvariedad casi-slant M tal que $\theta_p \in (0, \pi/2)$, para cualquier $p \in M$, está débilmente asociada al mismo grafo.

Ejemplo 5.1.3 De forma similar, si tenemos una subvariedad bi-slant con distribuciones slant \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 que satisfacen $g(JX, Y) = 0$ para cualquier $X \in \mathcal{D}_1$ e $Y \in \mathcal{D}_2$, entonces está asociada al grafo mostrado en la Figura 4.2 del Capítulo 4.

En el Capítulo 4, se ha determinado y clasificado completamente las subvariedades asociadas a los grafos en dimensión 4, examinando directamente todos los grafos con 4 vértices. Para hacerlo, ha sido muy útil saber cómo se veía un grafo asociado a una subvariedad. En este punto, queremos estudiar, para su uso posterior, cual es la “forma” de un grafo débilmente asociado a una subvariedad M de una variedad casi-Hermítica (\widetilde{M}, J, g) . De ahora en adelante, sea G un grafo. Sea $p \in M$ y sea $\{X_1, \dots, X_n\}$ una referencia local ortonormal que determina la asociación entre M y G en un entorno $U(p)$ de p . Si A denota la matriz

$$A = (g(JX_r, X_s)), \quad 1 \leq r, s \leq n,$$

entonces, como $J^2 = -Id$ y g es compatible con J , es fácil probar que:

$$A^2 = (a_{rs}) = -Id. \quad (5.1.1)$$

A continuación, se dan una serie de resultados del Capítulo 4, que son análogos a la asociación débil:

- Lema 4.1.4.
- Proposición 4.1.5.
- Proposición 4.1.6.
- Teorema 4.1.7.

También serán válidos los siguientes resultados, correspondientes al Capítulo 3:

- Corolario 3.2.6.
- Corolario 3.2.7.
- Corolario 3.2.8.

Estos resultados nos proporcionan información acerca de la restricción de la forma de los grafos. Si hay un triángulo en un grafo débilmente asociado a una subvariedad, entonces todos sus vértices deberían tener grado mayor o igual que 3. En el caso de que haya un triángulo en un grafo asociado débilmente con una subvariedad y uno de sus vértices tiene grado 3, entonces el triángulo es un tetraedro.

5.2. Casos de dimensión baja.

El objetivo de esta sección es determinar los grafos que pueden ser débilmente asociados a subvariedades de una variedad casi-Hermítica de dimensión 4 o 6.

En el primer caso, el trabajo está realizado básicamente en el Capítulo 3. En este Capítulo no se ha considerado la asociación débil, pero, usando los resultados mencionados en la sección anterior, se puede ver fácilmente que los grafos con 4 vértices que pueden ser débilmente asociados a subvariedades son los que aparecen en la figura 4.5 del Capítulo 3.

Ahora, nos centramos en el caso de dimensión 6, es decir, en los grafos con 6 vértices. Como hemos señalado anteriormente, hay 156 grafos. Estos pueden verse en las páginas 9-11 de [13]. Razonando en cada espacio tangente $T_p(M)$ con producto escalar g_p e isomorfismo J_p , podemos usar los resultados del Capítulo 3 para enunciar el siguiente resultado:

Teorema 5.2.1 *Si una subvariedad de una variedad casi-Hermítica de dimensión 6 está débilmente asociada a un grafo, entonces su grafo debe ser uno de los $G_1 - G_{12}$ de la Figura 3.3.*

Ahora, una pregunta natural es: ¿Están realmente todos ellos débilmente asociados a una subvariedad? La respuesta es positiva. De hecho, vamos a presentar un ejemplo de subvariedad asociada (no solo débilmente) con cada uno de ellos.

Consideramos \mathbb{R}^6 con las coordenadas cartesianas $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ y dotado con su estructura estándar casi-Hermítica dada por el campo de tensores g y J definido por

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}, \quad g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = 0, \quad g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \delta_{ij},$$

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

La estructura de los ejemplos que vamos a presentar es la siguiente: para cada G_i , $i = 1, \dots, 12$ etiquetado, como anteriormente, de arriba a abajo y de izquierda a derecha, le daremos una referencia ortonormal $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_6\}$ en \mathbb{R}^6 tal que los correspondientes grafos $G_{\mathcal{B},q}$ son isomorfos a G_i , y satisfacen que todos los $[X_i, X_j]$ sean nulos. Por tanto, cualquier distribución generada por alguno de estos campos de vectores es involutiva y la correspondiente subvariedad integral es la deseada.

La referencia ortonormal correspondiente para los grafos $G_1 - G_{12}$ aparece en las tablas 5.1-5.3.

También se pueden obtener a partir de la Tabla 3.1, haciendo los cambios de notación oportunos.

Grafo	Referencia Ortonormal Correspondiente
G_1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}; X_2 = \frac{\partial}{\partial y_1}; X_3 = \frac{\partial}{\partial x_2};$ $X_4 = \frac{\partial}{\partial y_2}; X_5 = \frac{\partial}{\partial x_3}; X_6 = \frac{\partial}{\partial y_3}.$
G_2	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}; X_2 = \frac{\partial}{\partial y_1}; X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}; X_4 = \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x_2} - \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y_3}$ $X_5 = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_2} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y_3}; X_6 = \frac{\partial}{\partial y_2}; \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}).$
G_3	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}; X_2 = \frac{\partial}{\partial y_1}; X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial y_3} \right);$ $X_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial y_3} \right); X_5 = \frac{\partial}{\partial y_2}; X_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_3} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$
G_4	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}; X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} \right); X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{\partial}{\partial y_1} \right);$ $X_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial y_3} \right); X_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_3} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right); X_6 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$
G_5	$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \right); X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_3} \right);$ $X_3 = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x_2}; X_4 = \frac{\partial}{\partial y_2};$ $X_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} \right); X_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_3} - \frac{\partial}{\partial y_1} \right);$ $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}).$

Cuadro 5.1: Referencias Ortonormales correspondientes a los grafos $G_1 - G_5$.

Grafos	Referencia Ortonormal Correspondiente
G_6	$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \right); X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y_3} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right);$ $X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y_3} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right); X_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} \right);$ $X_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{\partial}{\partial y_1} \right); X_6 = \frac{\partial}{\partial x_1}.$
G_7	$X_1 = \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_2}; X_2 = \sin \gamma \frac{\partial}{\partial y_1} + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial y_3};$ $X_3 = \sin \beta \frac{\partial}{\partial x_3} + \cos \beta \frac{\partial}{\partial y_2}; X_4 = \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x_2} - \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_1};$ $X_5 = \sin \beta \frac{\partial}{\partial y_2} - \cos \beta \frac{\partial}{\partial x_3}; X_6 = \sin \gamma \frac{\partial}{\partial y_3} - \cos \gamma \frac{\partial}{\partial y_1};$ $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$
G_8	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y_3}; X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_3} - \frac{\partial}{\partial y_2} \right); X_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial y_1};$ $X_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial y_1}; X_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial y_2} \right);$ $X_6 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial y_2} \right).$
G_9	$X_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial y_2} \right); X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right);$ $X_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial y_2} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial y_1}; X_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial y_2} \right);$ $X_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial y_2} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial y_1}; X_6 = \frac{\partial}{\partial y_3}.$

Cuadro 5.2: Referencias Ortonormales correspondientes a los grafos $G_6 - G_9$.

Grafos	Referencias Ortonormales Correspondientes
G_{10}	$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right); X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_3} \right);$ $X_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial y_2} \right);$ $X_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial y_2} \right);$ $X_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_3} \right); X_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial y_2} \right).$
G_{11}	$X_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial y_1} \right);$ $X_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial y_1} \right); X_3 = \frac{\partial}{\partial y_2};$ $X_4 = \frac{\partial}{\partial y_3}; X_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial y_1} \right);$ $X_6 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial y_1} \right).$
G_{12}	$X_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial y_2} \right);$ $X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right); X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial y_3} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial y_2} \right);$ $X_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial y_1}; X_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial y_2} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial y_3};$ $X_6 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial y_2} \right).$

Cuadro 5.3: Referencias Ortonormales correspondientes a los grafos $G_{10} - G_{12}$.

5.3. Algunas familias relevantes de grafos.

Como el número de grafos crece muy rápido con respecto al número de sus vértices, en este momento la tarea de analizar los grafos débilmente asociados a subvariedades en dimensiones mayor que 6 parece inaccesible. Por tanto, pensamos que es más interesante lidiar con algunas familias particulares de grafos.

Como hemos mostrado anteriormente, las subvariedades asociadas débilmente con grafos sin ciclos (bosques) están completamente determinados. En consecuencia, en esta sección estudiamos subvariedades débilmente asociadas a grafos que contienen ciclos. Comenzamos considerando esta pregunta cuando los grafos son justamente ciclos.

Los primeros ejemplos de tales subvariedades son casos particulares de aquellos del Ejemplo 2.1.2.

Ejemplo 5.3.1 Las superficies θ -slant propias inmersas en una variedad casi-Hermítica de dimensión 4 son subvariedades asociadas al Grafo 1 que aparece en la Figura 1. Por otro lado, si M es una subvariedad casi-slant de \widetilde{M}^4 tal que $\theta_p \in (0, \pi/2)$ para cualquier $p \in M$, entonces M es una subvariedad débilmente asociada al Grafo 2 de la Figura 1.

Podemos construir algunos ejemplos nuevos.

Ejemplo 5.3.2 Consideramos \mathbb{R}^4 con las coordenadas cartesianas usuales (x_1, x_2, y_1, y_2) y ponemos

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} \right), \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_2} \right).$$

Entonces, es claro que la distribución \mathcal{D} generada por X_1, X_2, X_3 es integrable y así, se determina una foliación de subvariedades asociadas a los grafos cíclicos $C_{4,5}$ mostrados en la Figura 5.1, con $a^2 = b^2 = 1/2$.

Ejemplo 5.3.3 Toda curva regular en una variedad casi-Hermítica de dimensión 4 es una subvariedad asociada a los grafos cíclicos $C_{4,1}$ mostrados en la Figura 5.1, para cualquier a, b tal que $a^2 + b^2 = 1$. Para probar esto, es suficiente considerar el campo de vectores tangente unitario X a lo largo de la curva y el campo de vectores Y tal que $\{X, JX, Y, JY\}$ es una referencia local ortonormal. Entonces, definimos la referencia de asociación

$$X_1 = X, \quad X_2 = aJX + bJY, \quad X_3 = Y, \quad X_4 = bJX - aJY.$$

Del mismo modo, tenemos lo siguiente.

Ejemplo 5.3.4 Toda hipersuperficie orientable M de una variedad casi-Hermitica de dimension 4 es una subvariedad asociada a los grafos cíclicos $C_{4,5}$ mostrados en la Figura 5.1, para cualquier a, b tal que $a^2 + b^2 = 1$. En este caso, solo elegimos una referencia local ortonormal $\{JC, X, JX, C\}$ donde C es normal a M y X es tangente a M , y definimos

$$X_1 = aJX + bJC, \quad X_2 = X, \quad X_3 = bJX - aJC, \quad X_4 = C.$$

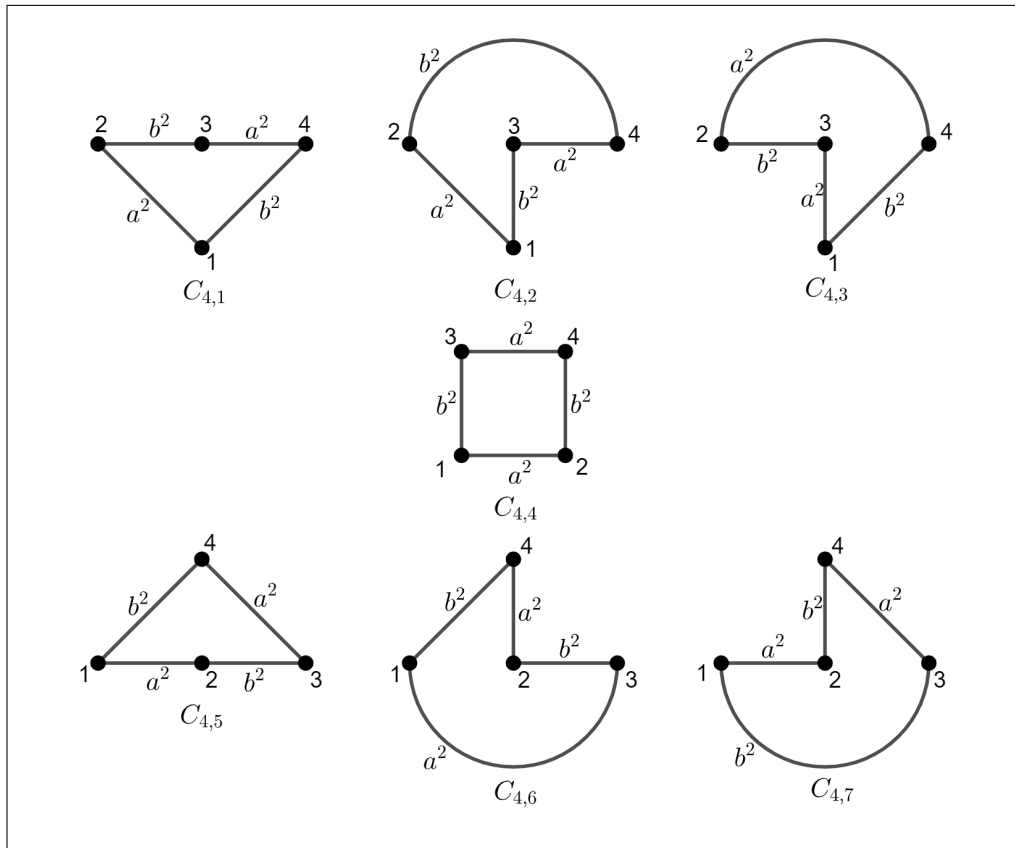


Figura 5.1: Ciclos débilmente asociados a subvariedades.

Por tanto, vemos que hay amplios ejemplos de subvariedades asociadas a un ciclo de 4 vértices (C_4). De hecho, el siguiente resultado muestra que esta es la única posibilidad para el número de vértices de un ciclo débilmente asociado a una subvariedad:

Teorema 5.3.5 Sea (\widetilde{M}^n, J, g) una variedad casi-Hermitica. Suponemos que existe un punto $p \in \widetilde{M}$ y una referencia local ortonormal de campo de vectores $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_n\}$ en un entorno de p tal que un ciclo aislado C_r ($r \leq n$) aparece en el grafo $G_{\mathcal{B}, p}$. Entonces, $r = 4$.

Este resultado se demuestra usando el apartado (ii) del Corolario 3.2.5.

Entonces obtenemos el siguiente corolario directo.

Corolario 5.3.6 *Sea (\widetilde{M}^n, J, g) una variedad casi-Hermítica. Si existe una subvariedad débilmente asociada a un grafo en \widetilde{M}^n , entonces $n = 4$. En particular, este ciclo es C_4 .*

Por tanto, cada ciclo débilmente asociado a una subvariedad debe ser uno de los dibujados en la Figura 5.1 (en realidad, todos ellos son isomorfos, en el sentido general, a C_4). Notemos que los tres primeros ciclos solo difieren en el etiquetado de los vértices. Lo mismo ocurre en los tres últimos. Por otro lado, es claro que $C_{4,1}$, $C_{4,2}$ y $C_{4,3}$ corresponden a curvas, $C_{4,4}$ está débilmente asociada a superficies y $C_{4,5}$, $C_{4,6}$ y $C_{4,7}$ representan hipersuperficies.

Si queremos estudiar subvariedades asociadas a estos grafos, necesitamos asignar los pesos a^2, b^2 como se muestra en la figura, tal que $a^2 + b^2 = 1$. Esto se sigue del Lema 4.1.3 del Capítulo 4, y nos referimos a ese Capítulo para un análisis detallado de subvariedades asociadas a grafos en dimension 4.

Ahora, podemos estudiar grafos que consisten en uniones finitas disjuntas de C_4 y K_2 . Por ejemplo, el grafo mostrado en la Figura 4.2 es un grafo de esta forma. En realidad, los siguientes resultados muestran que este tipo de grafos caracteriza una generalización de subvariedades bi-slant que aparecen en el Ejemplo 5.1.3.

Teorema 5.3.7 *Una subvariedad M de una variedad casi-Hermítica (\widetilde{M}^n, J, g) está asociada a un grafo consistente de una unión finita disjunta de algunos C_4 y K_2 si y sólo si sus fibrados tangentes admiten una descomposición ortogonal directa*

$$TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp \oplus \mathcal{D}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}_r$$

tal que \mathcal{D} es una distribución compleja, \mathcal{D}^\perp es una distribución totalmente real y, para cualquier $i = 1 \dots r$, \mathcal{D}_i es una distribución θ_i -slant que satisface $g(JX, Y) = 0$ para cualquier $X \in \mathcal{D}_i$ y cualquier $Y \in \mathcal{D}_j$, $i \neq j$.

Demostración:

Esta demostración se puede hacer directamente razonando a través de las referencias de asociación, simplemente teniendo en cuenta que los vértices correspondientes a la tangente horizontal de K_2 define la distribución compleja, los vértices tangente que aparecen en la vertical de K_2 define una distribución totalmente real y los que corresponden a cada grupo de C_4 con el mismo peso horizontal determinan una distribución que se puede demostrar que es slant. Además, la definición

de la distribución no depende de la referencia de asociación elegida. El recíproco se sigue de elegir referencias adecuadas adaptadas. \square

Hay que tener en cuenta que estas subvariedades son un caso particular de subvariedades skew CR (ver [11]).

El siguiente paso en nuestro estudio podría ser tratar con grafos que consisten en una unión de ciclos no disjunta, es decir, la unión de ciclos con algunas aristas que los conectan. Una idea para determinar la forma de un grafo de este tipo es elegir un vértice e intentar fijar las aristas necesarias que inciden en él, trabajando en cada paso con los grados más pequeños posibles. En este sentido, hemos obtenido la siguiente proposición.

Proposición 5.3.8 *Sea G un grafo que consiste en una unión no-disjunta de dos C_4 tal que uno de estos vértices tiene grado 2 y con los menores grados posibles en los demás vértices. Si G está débilmente asociado a una subvariedad, entonces debe ser el grafo de la Figura 5.2.*

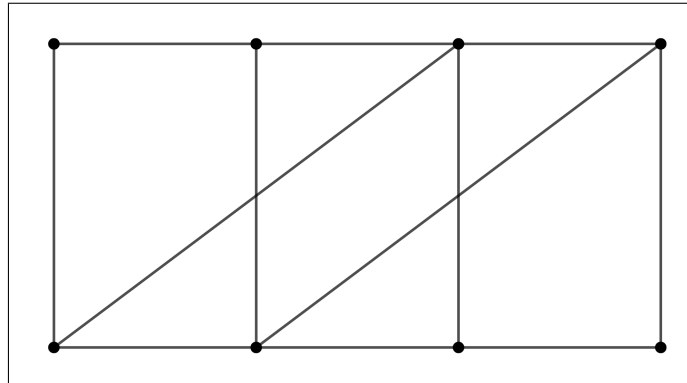


Figura 5.2: Unión no disjunta de C_4 .

Demostración:

Sea i_1 uno de los vértices de G con grado 2, y denotamos por i_2, i_3 sus vértices adyacentes (que están, por supuesto, en el mismo C_4 que i_1). Si suponemos que i_2 y i_3 tienen también grado 2, entonces el vértice restante del ciclo, llamemos i_4 , debería ser adyacente al menos a uno de los vértices del otro ciclo, llamemos i_5 . Pero, si aplicamos el Corolario 3.2.7 a los vértices i_1, i_2, i_4, i_5 (con i_2 como el vértice con grado 2), se sigue que i_5 debe ser adyacente a i_1 , lo que es imposible. Por tanto, i_2 o i_3 debe tener grado mínimo de 3. En realidad, vamos a probar que

ambos tienen un grado mayor o igual a 3:

Del Corolario 3.2.7 sabemos que no pueden ser adyacentes entre sí. Por tanto, si i_2 tiene grado $d \geq 3$, entonces es adyacente a i_1 (por supuesto), al vértice restante del ciclo i_4 , y a $d - 2$ vértices del otro ciclo. Pero, si aplicamos el Corolario 3.2.7 a los vértices i_1, i_2, i_3, i_5 (con i_1 como el vértice con grado 2), i_5 es cualquiera de esos vértices $d - 2$ adyacentes a i_2 , entonces deducimos que i_5 es también adyacente a i_3 , y así el grado de estos vértices es también mayor o igual a 3. Se puede seguir un argumento similar si suponemos que i_3 tiene grado $d \geq 3$ para probar la misma propiedad para i_2 .

Volvamos y supongamos que i_2 tiene solo grado 3. Como hemos señalado anteriormente, ya sabemos que es adyacente a i_1 , al vértice restante del ciclo i_4 y a un vértice del otro ciclo, digamos i_5 , que es adyacente, a su vez, a i_3 . Vamos a denotar por i_6, i_7 a los vértices adyacentes a i_5 en el segundo ciclo. Podemos aplicar ahora el Lema Corolario 3.2.8 (ii) a los vértices i_1, i_2, i_4, i_5, i_6 (con i_2 como el vértice con grado 3) y tenemos que i_6 debe ser adyacente a i_4 . Además, aplicando el mismo resultado a i_1, i_2, i_4, i_5, i_7 , tenemos que i_7 es adyacente a i_4 . En este punto, ya hemos obtenido un grafo isomorfo (en sentido general) al de la Figura 5.2. \square

Curiosamente el grafo de la Figura 5.2 es el mismo del Ejemplo 2.2.2 del Capítulo 2.

Finalmente, vamos a ofrecer un resultado relacionado con otra familia de grafos relevante: grafos cúbicos. Un grafo se dice grafo cúbico si todos sus vértices tienen grado 3. En el Capítulo 4 se ha demostrado que el único grafo cúbico con 4 vértices (conocido como el tetraedro y llamado grafo completo K_4 en teoría de grafos) está asociado a algunas subvariedades. Con respecto al grafo cúbico con 6 vértices, hay dos de ellos (ver [13]), y hemos visto en la sección anterior que solo uno puede estar asociado a subvariedades (el grafo G_5 de la Figura 3.3, conocido como $K_{3,3}$ en teoría de grafos). También hemos dado algunos ejemplos de tal asociación. Ahora, obtenemos el siguiente teorema sobre grafos cúbicos de 8 vértices.

Teorema 5.3.9 *Sea G un grafo cúbico débilmente asociado a una subvariedad de una variedad casi-Hermítica de dimensión 8. Entonces, G debe ser la unión disjunta de dos tetraedros o un cubo (ver Figura 5.3).*

Demostración:

Sea i_1 cualquier vértice de G cuyos grados deben ser 3 ya que G es un grafo cúbico. Entonces, denotemos por i_2, i_3, i_4 sus vértices adyacentes y sea H el

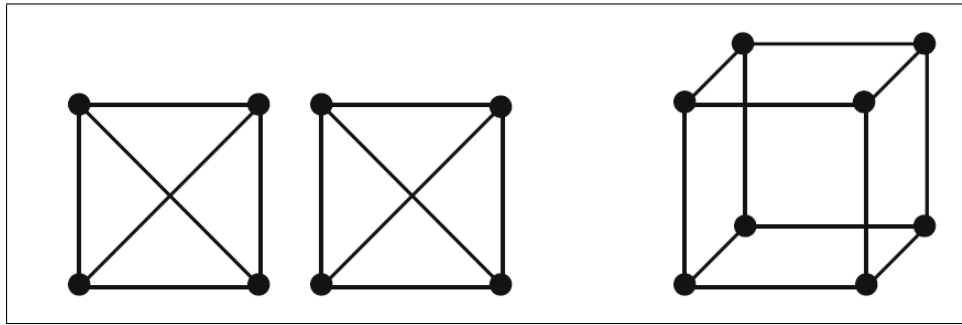


Figura 5.3: Grafos cúbicos asociados a una subvariedad en dimensión 8.

subgrafo de G inducido por sus vértices no adyacentes. Hay dos casos a tener en cuenta:

Caso I. Hay al menos dos vértices adyacentes entre i_2, i_3 e i_4 . Así, del Corolario 3.2.8 (i), i_1, i_2, i_3 e i_4 inducen un tetraedro. Además, como los vértices de H son de grado 3 y no son adyacentes a $i_1 - i_4$, se tiene que H es otro tetraedro.

Caso II. No hay vértices adyacentes entre i_2, i_3 e i_4 . Entonces, como todos los vértices de H tienen grado 3, se prueba fácilmente que H tiene tres aristas.

En esta situación, si cualquier vértice de H es de grado 2 en H , tiene que ser adyacente a exactamente uno de $i_2 - i_4$ ya que es de grado 3 en G , pero este hecho contradice el Corolario 3.2.8 (ii). Como consecuencia, hay un vértice en H , digamos i_5 , que es adyacente a los otros tres vértices de H , todos ellos de grado 1 en H porque H solo tiene 3 aristas, y así, adyacente exactamente a 2 vértices de $i_2 - i_4$.

Denotemos los vértices adyacentes a i_2 e i_5 , por i_6 e i_7 y los vértices adyacentes a i_5 pero no a i_2 por i_8 . Si i_3 es adyacente a i_6 e i_7 , entonces el vértice i_4 no puede ser adyacente a cualquiera de ellos y así, es adyacente solo a i_1 y tal vez a i_8 , lo que es una contradicción porque i_4 es de grado 3. Por tanto, i_3 es adyacente a i_8 y a uno entre i_6 e i_7 , digamos i_6 . Finalmente, i_4 debería ser adyacente a i_7 e i_8 ya que todos sus vértices son de grado 3. Por tanto, G es isomorfo a un cubo y esto completa la prueba. \square

Este teorema también podría haberse obtenido aplicando directamente el Teorema 3.2.13. De hecho, ese teorema nos permitiría obtener los grafos cúbicos asociados a subvariedades en cualquier dimensión: aquellos cuyas componentes son $K_4, K_{3,3}$ o Q_3 .

En realidad, tenemos algunos ejemplos de subvariedades asociados a grafos de la Figura 5.3. Con respecto al grafo $K_4 \sqcup K_4$ que consiste en la unión disjunta de dos tetraedros, hemos probado en el Ejemplo 5.1.3 que una subvariedad bi-slant M con ángulos slant $\theta_1, \theta_2 \in (0, \pi/2)$ y distribuciones slant \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 satisface que $g(JX, Y) = 0$ para cualquier $X \in \mathcal{D}_1$ e $Y \in \mathcal{D}_2$, está asociado a la unión disjunta de dos C_4 (etiquetado, como en la Figura 4.2, de abajo hacia arriba y de izquierda a derecha). Entonces, si denotamos por $\{X_1, \dots, X_8\}$ la referencia asociada correspondiente, solo tenemos que tener en cuenta los cambios

$$Y_1 = \lambda_1 X_1 + \mu_1 X_2, \quad Y_2 = \mu_1 X_1 - \lambda_1 X_2, \quad Y_3 = \lambda_2 X_3 + \mu_2 X_4, \quad Y_4 = \mu_2 X_3 - \lambda_2 X_4,$$

$$Y_j = X_j, \quad j = 5, \dots, 8,$$

con $\lambda_i^2 = c_i^2 / \sin^2 \theta_i$, $\mu_i^2 = d_i^2 / \sin^2 \theta_i$, c_i, d_i números reales tal que $c_i^2 + d_i^2 = \sin^2 \theta_i$, $i = 1, 2$. Por tanto, M está asociada a $K_4 \sqcup K_4$ mediante $\{Y_1, \dots, Y_8\}$, con los pesos apropiados en el grafo ($\cos^2 \theta_i$ en las aristas horizontales, c_i^2 en las verticales y d_i^2 en las diagonales, $i = 1, 2$.)

Por otro lado, algunos ejemplos diferentes de subvariedades asociadas a un cubo los hemos estudiado en el Capítulo 3. Pero también podemos entender el cubo como la unión no disjunta de dos C_4 (por ejemplo, sus caras inferior y superior). Así, tenemos el siguiente corolario del Teorema 5.3.9.

Corolario 5.3.10 *Sea G un grafo que consiste en la unión no disjunta de dos C_4 tal que sus vértices tienen grado 3. Si G está débilmente asociado a una subvariedad, entonces debe ser un cubo.*

Bibliografía

- [1] A. Bejancu, CR-submanifolds of a Kaehler manifold, I. *Proc. Amer. Math. Soc.* **69**(1978), 135-142.
- [2] L. Boza, A. Carriazo and L. M. Fernández, Graphs associated with vector spaces of even dimension: A link with differential geometry. *Linear Algebra Appl.* **437** (2012), 60-76.
- [3] A. Carriazo, Bi-slant immersions, *Proceedings ICRAMS*, 2000 (India).
- [4] A. Carriazo and L. M. Fernández, Submanifolds associated with graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (11) (2004), 3327-3336.
- [5] A. Carriazo, L. M. Fernández and A. Rodríguez - Hidalgo, Submanifolds weakly associated with graphs, *Proc. Math. Sci.* **119** (3) (2009), 297-318.
- [6] B.Y. Chen, *Geometry of Slant Submanifolds*, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, 1990.
- [7] F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1972.
- [8] S. Maeda, Y. Ohnita, and S. Udagawa. On slant immersions into Kähler manifolds, *Kodai Math. J.*, **16** (1993), 205-219.
- [9] J.L. Gross and J. Yellen (Eds.), *Handbook of Graph Theory*, CRC Press, Boca Raton, 2004.
- [10] N. Papaghiuc, Semi-slant submanifolds of a Kaehlerian manifold, *An. Stiint. Al. I. Cuza. Univ. Iasi.* **40** (1994), 55-61.
- [11] G.S. Ronsse, Generic and skew CR-submanifolds of a Kaehler manifold, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica* **18** (2) (1990), 127-141.
- [12] K. Yano and M. Kon, *Structures on Manifolds*, Series in Pure Mathematics 3. World Scientific, Singapore, 1984.
- [13] R.C. Read and R.J. Wilson, *An Atlas of Graphs*, Oxford University Press, Oxford, 1998.