UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Facultad de Matemáticas
Departamento de Análisis Matemático

LAS FUNCIONES GAMMA DE EULER-GAUSS Y ZETA DE RIEMANN

Trabajo Fin de Grado

presentado por

José Manuel Sánchez Cuadrado

Tutor: Luis Bernal González

Sevilla, Junio de 2020

Índice general

Abstract

The Swiss mathematician Leonhard Euler started the study of the Gamma function when he became interested in the problem of finding a function who maps the non negative integers to the factorial numbers. Gauss also studied the Gamma function, being the first mathematician who thought this function as a complex valued function. Because of the contribution of these mathematicians, the function we are studying is often called *Euler-Gauss* function. However, the Gamma function is not the only function that generalises the factorial, indeed, there are infinitely many of them. It would not be until the beginning of the XX century that the Danish mathematicians Harald Bohr and Johannes Mollerup distinguish the Gamma function from the rest as the unique generalization of the factorial which is log-convex.

It was also Euler the one who started the study of the function that is nowadays known as Riemann Zeta function, but he only was interested in it as a real valued function. Euler was capable of finding a link between the Zeta function and the prime numbers. This is known as the *Euler product for the Riemann Zeta function.* In 1859, the German mathematician Bernhard Riemann published a paper where he stated for the first time in history the Riemann Hypothesis. In this paper he shows that the prime number theorem follows from the Hypothesis. This problem is still unsolved, being the problem who has drawn the most attention from the mathematicians after Riemann. The famous mathematician David Hilbert was asked once what would be the first thing he will do if, like Barbarrosa[1], he awakes after been 500 years sleeping. His answer was asking if someone had proved the Riemann Hypotehsis.

In this work we aim to introduce the theory of the Gamma and Zeta functions in the real line and in the complex plane, followed by its main properties. The work is divided into two parts, each one dealing with the previous functions. In the middle of the work, both functions will be connected, showing the intimate bond between them.

[1] In the germanic popular culture, there is a myth which tells that Frederick Barbarrosa retired to a cave in Kyffhäuser's mountain after the Third Crusade, where he would be sleeping till Germany request his help.

Because of the magnitude of results that exist about these functions, it becomes impossible to carry out a work which covers all of them. Here we will try to show a good amount of results. All of them will be proved, except the simpler ones, which are those who are proved in the first years of a Math Degree.

Resumen

El estudio de la función Gamma se remonta a la época del matemático suizo Leonhard Euler, cuando trataba de encontrar una función cuyo valor en los enteros no negativos devolviera su correspondiente factorial. Gauss también contribuyó al estudio de la función Gamma, siendo pionero en su estudio como función de variable compleja. Por la enorme contribución de estos matemáticos, la función Gamma recibe el apellido *de Euler-Gauss*. Sin embargo, la función Gamma no es la única generalización del factorial que existe, de hecho, existen infinitas. No sería hasta principios del siglo XX cuando los matemáticos daneses Harald Bohr y Johannes Mollerup caracterizarían a la función Gamma como la única generalización del factorial que es logarítmicamente convexa.

También fue Euler el precursor de la que hoy es conocida como la función Zeta de Riemann, aunque se limitó a estudiarla como función de variable real. Euler fue capaz de encontrar una relación entre la función Zeta y los números primos mediante lo que hoy en día se conoce como *producto de Euler de la función Zeta de Riemann*. En 1859, el matemático alemán Bernhard Riemann formula por primera vez la Hipótesis de Riemann, probando que el Teorema de los números primos es consecuencia de esta. A día de hoy, este problema sigue abierto, siendo el problema que más obsesionaría a los matemáticos posteriores a Riemann. El propio David Hilbert dijo que, si al igual que Barbarroja[2], despertara dentro de 500 años, lo primero que haría sería preguntar si alguien había demostrado la Hipótesis de Riemann.

En este trabajo se pretende introducir la teoría de las funciones Gamma de Euler-Gauss y Zeta de Riemann tanto en la recta real como en el plano complejo, así como sus principales propiedades. La obra está divida en dos partes, las cuales tratarán sendas funciones. En el ecuador del trabajo, ambas funciones serán conectadas, desvelando así la estrecha relación que mantienen.

[2]En la cultura popular germánica, existe el mito de que Federico Barbarroja tras la Tercera Cruzada se retiró a una cueva del monte Kyffhäuser, donde yacería dormido hasta el momento en que Alemania lo necesitara.

Debido a la enorme cantidad de resultados que existen sobre las funciones a estudiar, resulta imposible concebir un trabajo en el que se mostraran todas y cada una de ellas. En este trabajo se intenta dar el mayor número posible de resultados, los cuales se demuestran todos, salvo los más elementales, que entendemos como aquellos que se ven en los primeros cursos de un Grado en Matemáticas.

Introducción

El texto se ha divido en 7 capítulos, donde los cuatro primeros de ellos están dedicados al estudio de la función Gamma y los tres últimos a la función Zeta de Riemann. En el Capítulo 1 se introducen los conceptos, definiciones y resultados básicos del análisis real requerido para estudiar la función Gamma. Entre ellos se encuentra la definición de función logarítmicamente convexa, así como algunos resultados relacionados con ella.

En el Capítulo 2 se introduce a la función Gamma en la recta real, presentándola en su forma integral y viendo que generaliza al factorial. La cuestión ahora es ver qué tiene de especial la función Gamma respecto al resto de generalizaciones del factorial. Esto es precisamente lo que nos muestra el Teorema de Bohr-Mollerup, el cual se enuncia y demuestra en el mismo capítulo. De este se deduce una nueva expresión de la función Gamma como límite. A continuación, se desarrolla la representación como producto infinito debida a Weierstrass, gracias a la cual podemos estudiar la derivabilidad de la función Gamma, mostrando que es una función infinitamente derivable. Se continúa con una breve introducción de la función Beta, mostrando su relación con la Gamma. Para finalizar, usando los resultados del capítulo se muestra la solución de la integral gaussiana.

Una vez vistas las formas elementales de la función Gamma, el siguiente objetivo es encontrar fórmulas en las que intervenga dicha función. Este es el propósito del Capítulo 3. En él, se deduce la fórmula de Stirling de un modo completamente elemental. Despúes se demuestran la fórmula de duplicación de Legendre, así como la más general fórmula de multiplicación de Gauss. Se deduce también la relación entre la función Gamma y la función seno, la cual es conocida como fórmula de reflexión de Euler. Se finaliza el capítulo resolviendo el problema de Basilea, el cual se deduce de la propia fórmula de reflexión de Euler.

La función Gamma muestra un especial interés como función de variable compleja. El Capítulo 4 comienza con una sección dedicada a recordar e introducir resultados del plano complejo tales como el Teorema de factorización de Weierstrass, así como su versión en forma de producto canónico. A continuación se comienza el estudio de la función Gamma en el plano complejo, empezando con su representación como producto de Weierstrass, el cual permite ver a Gamma como una función meromorfa con polos en los enteros no positivos. El concepto de convexidad no tiene mucho sentido cuando hablamos de funciones de variable compleja, y en consecuencia, tampoco el concepto de convexidad logarítmica. Esto nos lleva a preguntarnos si hay algo que caracterice a la función Gamma en el plano complejo como generalización del factorial. La caracterización que buscamos nos la da el Teorema de Wielandt, el cual se enuncia y demuestra. En el resto del capítulo se comprueba que las representaciones que tenía la función Gamma en la recta real se extienden al plano complejo, tales son las representaciones como límite y como integral paramétrica. Además, se introducen dos nuevas expresiones conocidas como producto de Euler y desarrollo en serie de Mittag-Leffler. El capítulo finaliza extendiendo la fórmula de reflexión de Euler al plano complejo.

La segunda parte de este trabajo da comienza en el Capítulo 5, en el cual empezamos con el estudio de la función Zeta de Riemann. Se introduce a esta función con su definición habitual en la recta real, es decir, como una serie convergente a la derecha del 1. Se continúa extendiendo esta definición al plano complejo, viendo que en cierto semiplano la serie define ua función holomorfa. Continuamos desarrollando el producto de Euler de la función Zeta, el cual nos muestra a dicha función como un producto funcional donde los índices recorren el conjunto de los números primos. Despúes unimos las dos funciones del trabajo mediante una ecuación que nos permite deducir la ecuación funcional que extiende a la función Zeta a todo el plano complejo. Tras demostrarla, vemos una ecuación que relaciona al logaritmo de la función Zeta con la función contadora de primos. El capítulo finaliza con el estudio de los números de Bernouilli, los cuales nos permiten encontrar valores concretos de la función Zeta, como por ejemplo, los denominados ceros triviales.

Es indudable que la función Zeta de Riemann juega un papel fundamental en la teoría analítica de números. En el Capítulo 6 hemos querido introducir los rudimentos de esta teoría comenzando con las funciones aritméticas y la convolución de Dirichlet, que permite dotar de estructura de grupo a cierto subconjunto de las anteriores funciones. Se sigue con el desarrollo de las series de Dirichlet y su relación con la convolución para finalmente deducir numerosas expresiones que relacionan la función Zeta con las funciones aritméticas.

No podíamos finalizar un estudio de la función Zeta sin hablar de la Hipótesis de Riemann, el problema del milenio que tiene en vilo a la comunidad matemática desde que Bernhard Riemann lo enunciara en 1859. En el Capítulo 7 se pretende finalizar este trabajo estudiando la Hipótesis de Riemann. Lo comenzamos localizando en primer lugar los ceros no triviales de la función, acotando la zona de búsqueda a la conocida como banda crítica. Esta zona es más complicada de estudiar, debido a que la ecuación funcional que satisface la función Zeta no es útil a la hora de computar la función en esta región. Por ello se estudia a continuación la extensión de la función Zeta a la banda crítica haciendo uso de la función Eta de Dirichlet. Para finalizar, se enuncian las conjeturas de Mertens y Pólya, las cuales se demuestra que implican la Hipótesis de Riemann. Estas conjeturas fueron demostradas falsas, por ello, el trabajo finaliza debilitando las hipótesis de estas para conseguir conjeturas que sigan implicando la Hipótesis de Riemann.

A lo largo de la obra se muestran numerosas figuras realizadas que pretenden ayudar a la compresión de ciertos conceptos, regiones del plano o funciones que se exponen en el trabajo. Todas las ilustraciones (salvo las que se mencionan explícitamente) han sido realizadas con los programas *Mathematica*, *Matlab* y *GeoGebra*.

Capítulo 1

Preliminares

Antes de entrar en materia es preciso que recordemos algunas definiciones y resultados elementales tales como la definición de función convexa y resultados relacionados. Además introduciremos el concepto de convexidad logarítmica y ciertos teoremas asociados.

1.1. Convexidad

Hay diversas maneras de definir la convexidad, todas ellas equivalentes. Nosotros usaremos la siguiente.

Definición. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, decimos que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **convexa** si para todo $t \in [0,1]$ y para todo $x, y \in I$ se verifica

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Si la desigualdad es estricta para $t \in (0,1)$, diremos que f es **estrictamente convexa**.

De la definición es inmediato comprobar que la suma de dos funciones convexas en un mismo intervalo es también convexa.

Geométricamente, una función es convexa en un cierto intervalo si dado cualquier par de puntos en dicho intervalo, la cuerda que los une queda siempre por encima de la gráfica. Esto es debido a que la ecuación de la cuerda es precisamente la ecuación paramétrica

$$\begin{cases} \mathcal{X} = (1-t)x + ty \\ \mathcal{Y} = (1-t)f(x) + tf(y), \end{cases}$$

y por ello la definición de convexidad tiene este signficado geométrico. En la Figura 1.1 se ilustra la convexidad de $f(x) = e^x$.

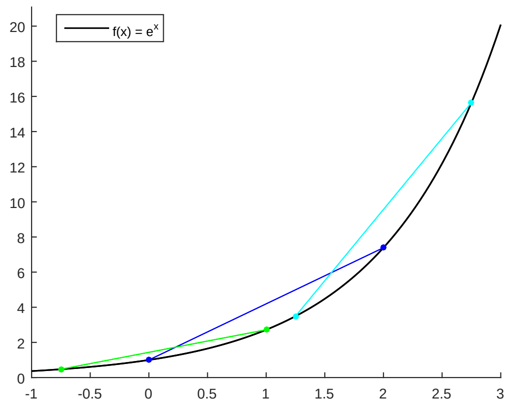

Figura 1.1: Gráfica de la función exponencial e^x.

La convexidad además implica que la pendiente de la recta que une x con z es menor que la pendiente de la recta que une x con y para todo $x < z < y$ en el intervalo donde la función es convexa. La prueba es directa por la definición de convexidad, ya que dado $x < y$ y tomando $t = \frac{z-x}{y-x}$, se tiene que $z = (1-t)x + ty$, donde $t \in (0,1)$ siempre que $x < z < y$. Entonces sin más que sustituir tenemos que

$$f(z) \leq \frac{y-z}{y-x} f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y),$$

y restando $f(x)$ en cada miembro se obtiene

$$f(z) - f(x) \leq \frac{(z-x)(f(y) - f(x))}{y-x},$$

concluyendosé así que

$$\frac{f(z) - f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y-x}.$$

De hecho se puede extraer otra propiedad, y es que dado $x < z < y$ también se tiene que la pendiente del segmento que une x y z es menor que la pendiente del segmento que une z e y. Para la prueba basta restar $f(y)$ en vez de $f(x)$ para obtener

$$f(z) - f(y) \leq \frac{(y-z)(f(x)-f(y))}{y-x},$$

de lo que se deduce que

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

Esto en particular también nos dice que la pendiente del segmento que une x e y es menor que la que une z e y (ver Figura 1.2).

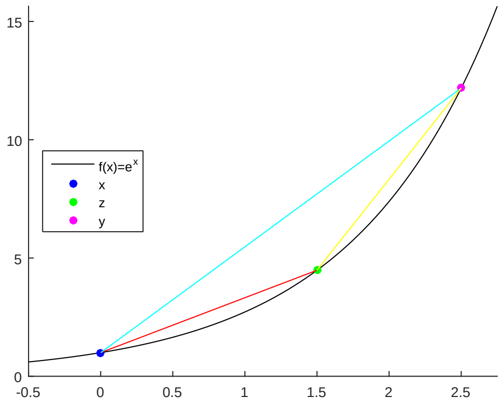

Figura 1.2: Crecimiento de las pendientes de los segmentos $\overline{xz}$ y $\overline{xy}$ con $x < z < y$.

Sin más que combinar esto con lo anterior se llega a

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

Gracias a todas estas propiedades de las funciones convexas vamos a poder probar que toda función convexa en un intervalo abierto debe ser continua.

Teorema 1.1. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función convexa en (a,b). Entonces f es continua en (a,b).*

Demostración. Debido a las propiedades obtenidas anteriormente se tiene la siguiente desigualdad para cada $x \in (a,b)$ y $x+h < b$ con $h > 0$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x},$$

que podemos escribirla así:

$$f(x) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} h \leq f(x + h) \leq f(x) + \frac{f(b) - f(x)}{b - x} h,$$

lo que nos muestra, haciendo $h \to 0$, que f es continua por la derecha. Procediendo de manera análoga se prueba también que f es continua por la izquierda. $\square$

A continuación mostramos la caracterización de las funciones convexas derivables en un intervalo.

Teorema 1.2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable en (a, b). Si f' es creciente en (a, b), entonces f es convexa en tal intervalo. En particular, si f'' existe y $f'' \geq 0$ en (a, b), entonces f es convexa.*

Demostración. Hemos de probar que

$$f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y)$$

para todo $x, y \in (a, b)$ y para todo $t \in (0, 1)$. En efecto, dados $x < y$ contenidos en el intervalo (a, b), fijado $t \in (0, 1)$ consideramos $z = (1 - t)x + ty$, el cual verifica $x < z < y$. Por el teorema del valor medio existen $r \in (x, z)$ y $s \in (z, y)$ de modo que

$$f(z) - f(x) = f'(r)(z - x) \;\text{ y }\; f(y) - f(z) = f'(s)(y - z).$$

Como por hipótesis f' es creciente, se tiene que $f'(r) \leq f'(s)$. Teniendo en cuenta que $z = (1 - t)x + ty$, se obtiene

$$(1 - t)(z - x) = t(y - z),$$

y en consecuencia

$$(1-t)(f(z)-f(x)) = f'(r)(1-t)(z-x) = f'(r)t(y-z) \leq f'(s)t(y-z) = t(f(y)-f(z)),$$

luego

$$(1 - t)(f(z) - f(x)) \leq t(f(y) - f(z)),$$

de donde se sigue que

$$f(z) \leq (1 - t)f(x) + tf(y)$$

como queríamos demostrar. $\square$

1.2. Convexidad logarítmica

Ahora vamos a introducir un concepto que será fundamental para caracterizar a la función Gamma. Este concepto es el de función logarítmicamente convexa.

Definición. Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Diremos que una función $f : I \to \mathbb{R}$, con $f(x) > 0 \ \forall x \in I$, es **logarítmicamente convexa** si la función $\log(f(x))$ es convexa.

Ahora veamos ciertos resultados relacionados con este nuevo concepto que nos serán útiles. Como es habitual, representamos por $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales.

Teorema 1.3. *El producto de dos funciones logarítmicamente convexas es de nuevo logarítmicamente convexo. Una sucesión de funciones logarítmicamente convexas tiene como límite una función logarítmicamente convexa, siempre que este límite exista y sea una función estrictamente positiva.*

Demostración. La prueba del producto de funciones logarítmicamente convexas es inmediata sin más que usar que la suma de funciones convexas es convexa y que $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ para todo $x, y > 0$. Para el segundo apartado, supongamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones logarítmicamente convexas que convergen puntualmente a una función f estrictamente positva. Sea $g_n = \log f_n$ y $g = \log f$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como cada g_n es convexa, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$g_n((1-t)x + ty) \leq (1-t)g_n(x) - tg_n(y).$$

Basta tomar límite para concluir que

$$g((1-t)x+ty) = \lim_{n\to\infty} g_n((1-t)x+ty) \leq \lim_{n\to\infty}(1-t)g_n(x)-tg_n(y) = (1-t)g(x)+tg(y),$$

probándose así la convexidad de g. □

Ahora vamos a ver un resultado más fuerte que el teorema anterior. En concreto, vamos a ver que la suma de funciones logarítmicamente convexas también es logarítmicamente convexa. Este hecho será usado con frecuencia en el resto del trabajo.

Teorema 1.4. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Supongamos $f, g : I \to \mathbb{R}$, y supongamos además que ambas son logarítmicamente convexas en I. Entonces se tiene que $f + g$ también es logarítmicamente convexa en I.*

Demostración. Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ logarítmicamente convexas. Entonces f verifica para todo $x, y \in I$ y para todo $t \in [0,1]$ la desigualdad

$$\log(f((1-t)x+ty)) \leq (1-t)\log(f(x)) + t\log(f(y)),$$

que es equivalente a

$$f((1-t)x+ty) \leq f(x)^{1-t}f(y)^t.$$

Del mismo modo, la función g verifica

$$g((1-t)x+ty) \leq g(x)^{1-t}g(y)^t$$

para todo $x, y \in I$ y para todo $t \in [0,1]$.

Hemos de probar que $f+g$ es también logarítmicamente convexa, es decir, hemos de ver que se verifica la siguiente desigualdad para todo $x, y \in I$ y para todo $t \in [0,1]$:

$$f((1-t)x+ty) + g((1-t)x+ty) \leq (f(x)+g(x))^{1-t}(f(y)+g(y))^t.$$

Entonces si conseguimos probar que

$$f(x)^{1-t}f(y)^t + g(x)^{1-t}g(y)^t \leq (f(x)+g(x))^{1-t}(f(y)+g(y))^t \tag{1.1}$$

habremos logrado nuestro objetivo. Dividiendo en la desigualdad por el segundo miembro, se ha de probar que

$$\frac{f(x)^{1-t}f(y)^t + g(x)^{1-t}g(y)^t}{(f(x)+g(x))^{1-t}(f(y)+g(y))^t} \leq 1.$$

Fijemos $x \in I$, y sea $k = f(x)+g(x)$. Entonces $k > 0$ ya que f y g son estrictamente positivas. Tenemos que $\frac{f(x)}{k} + \frac{g(x)}{k} = 1$. Entonces, factorizando f y g como $f(x) = k\,a$ y $g(x) = k\,c$ y sustituyendo en el miembro izquierdo de la desigualdad, nos queda

$$\frac{k^{1-t}a^{1-t}f(y)^t + k^{1-t}c^{1-t}g(y)^t}{k^{1-t}(a+c)^{1-t}(f(y)+g(y))^t} = \frac{a^{1-t}f(y)^t + c^{1-t}g(y)^t}{(a+c)^{1-t}(f(y)+g(y))^t},$$

donde $a+c=1$. Podemos hacer lo mismo con $f(y)$ y $g(y)$ renombrándolas de nuevo como $f(y) = k'b$ y $g(y) = k'd$ con $b+d=1$. Entonces la desigualdad se reduciría a probar

$$\frac{a^{1-t}b^t + c^{1-t}d^t}{(a+c)^{1-t}(b+d)^t} \leq 1$$

con $a+c=b+d=1$. Luego lo que hay que probar se queda en

$$a^{1-t}b^t + c^{1-t}d^t \leq 1.$$

Vamos a usar la famosa desigualdad de Young, la cual establece que, si $\alpha, \beta > 0$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ con $1 < p, q < \infty$, entonces

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}.$$

Al tomar $\alpha = a^{1-t}$, $\beta = b^t$, $p = \frac{1}{1-t}$ y $q = \frac{1}{t}$, lo anterior nos conduce a la desigualdad $a^{1-t}b^t \leq (1-t)a + tb$. De manera análoga obtenemos $c^{1-t}d^t \leq (1-t)c + td$, y usando estas dos últimas desigualdades llegamos a

$$a^{1-t}b^t + c^{1-t}d^t \leq (1-t)(a+c) + t(b+d) = 1,$$

lo cual concluye la prueba. □

Para concluir la sección y el capítulo vamos a dar un resultado sobre la convexidad logarítmica de funciones definidas por medio de una integral. Para ello usaremos el siguiente lema, que es bien conocido del cálculo integral elemental.

Lema 1.5. *Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, entonces se tiene que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Teorema 1.6. *Sea $f : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$ una función continua, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$. Supongamos además que para cada $t \in [a, b]$ la función $f(t, x)$ es logarítmicamente convexa respecto de x. Entonces tenemos que la función $F(x) := \int_a^b f(t, x)dt$ también es logarítmicamente convexa.*

Demostración. Usando el Lema 1.5, tenemos que

$$\int_a^b f(t, x)dt = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}, x\right)$$

y, en consecuencia, $F(x) = \int_a^b f(t, x)dt$ es logarítmicamente convexa por el Teorema 1.3, ya que es límite de funciones logarítmicamente convexas. □

Es más, si la integral fuera impropia, si existe también es logarítmicamente convexa. Esto sigue del hecho de que una integral impropia es límite de integrales propias sobre subintervalos. Entonces como dicha integral impropia es límite de funciones logarítmicamente convexas, se deduce del Teorema 1.3, de nuevo, que la integral impropia es también logarítmicamente convexa.

Nos centraremos a partir de ahora en las funciones del tipo

$$F(x) = \int_a^b \varphi(t) t^{x-1} dt \tag{1.2}$$

siendo $\varphi(t)$ una función continua y positiva en el interior del intervalo de integración, el cual se supone contenido en $(0, +\infty)$. Supongamos que la integral converge para cada $x \in I$. Notemos que efectivamente, $F(x)$ es una función logarítmicamente convexa por el teorema previamente demostrado. En efecto, para cada $t \in (a, b)$, tenemos que

$$\log(\varphi(t)t^{x-1}) = \log(\varphi(t)) + (x-1)\log t,$$

la cual es una función lineal respecto de x, y por tanto, es una función convexa.

Capítulo 2

La función Gamma

En este capítulo vamos a introducir la función Gamma en el campo real y ver sus principales características.

2.1. Generalizando el factorial

El objetivo de esta sección será ver la conexión que tiene la función Gamma con el factorial. El factorial está definido sobre los números naturales como $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ para cualquier entero no negativo, con el convenio $0! = 1$.

Nuestro problema ahora consiste en buscar una expresión que generalice al factorial para cualquier valor real. Notemos el siguiente hecho:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^n dt = n! \;\text{ con } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{2.1}$$

La prueba de que esto es cierto vendrá a continuación. Admitiendo este hecho, tiene sentido cambiar n por cualquier valor real, de modo que entonces tendríamos una función que generalizaría al factorial. Entonces, definimos la *función Gamma de Euler-Gauss* como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \tag{2.2}$$

para aquellos $x \in \mathbb{R}$ tales que la integral converge. Se sigue pues, de la propia definición, que $\Gamma(n+1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Parece más lógico haber definido la función Gamma directamente como la integral dada en (2.1), pero por motivos históricos no es así. La función definida como la integral de (2.1) cambiando n por $x \in \mathbb{R}$ se suele denotar como $\Pi(x)$, teniendose así que $\Pi(x) = \Gamma(x+1)$, y por tanto, $\Pi(n) = n!$.

En primer lugar, veamos para qué valores de x la integral converge. Estudiamos primero la convergencia de $\int_0^1 e^t t^{x-1} dt$. Para $x \geq 1$ es claramente convergente ya que el integrando está acotado en $[0,1]$. Para $0 < x < 1$, el integrando diverge en $t = 0$, pero tenemos que dado $0 < \epsilon < 1$, $\int_\epsilon^1 e^{-t}t^{x-1}dt \leq \int_\epsilon^1 t^{x-1}dt$, la cual es convergente cuando $\epsilon \to 0$, y por tanto tenemos que $\int_0^1 e^t t^{x-1}dt$ es convergente para todo $x > 0$.

Es fácil ver que la integral $\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ es convergente para todo x real, comparando con $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$, puesto que, por el principio de comparación por paso al límite, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t}t^{x-1}}{1/t^2} = 0 < +\infty$$

y $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$ es convergente, luego se tiene la convergencia de la primera. Por tanto, Γ está definida, en principio, para $x > 0$.

Ahora vamos a ver en la siguiente proposición el hecho que une la función Gamma y el factorial.

Proposición 2.1. *La función Gamma verifica las siguientes propiedades:*

1. $\Gamma(1) = 1$.

2. (*Propiedad reproductiva*) $\quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,\forall x > 0$.

Demostración. El primer apartado es inmediato pues $\int_0^\infty e^{-t} = 1$. Para el segundo apartado procedemos a integrar por partes $\int_\epsilon^\delta e^t t^x dt$ con $0 < \epsilon < \delta$ para obtener

$$\int_\epsilon^\delta e^t t^x dt = -t^x e^{-t}\big|_\epsilon^\delta + x\int_\epsilon^\delta e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Notemos ahora que $\lim_{\delta\to\infty} \delta^x e^{-\delta} = 0 = \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^x e^{-\epsilon}$, luego nos queda $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, como queríamos demostrar. □

Hemos de observar que gracias a esta expresión de Gamma, conociendo el valor de $\Gamma(x)$ con $0 < x \leq 1$ podemos hallar su valor en el resto de intervalos de la forma $(n, n+1]$ con $n \in \mathbb{N}$, pues se deduce directamente la fórmula

$$\Gamma(n+x) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\Gamma(x). \tag{2.3}$$

Como consecuencia, se tiene que $\Gamma(n) = (n-1)!$ y $\int_0^\infty e^{-t}t^n dt = n!$, o lo que es lo mismo, $\Gamma(n+1) = n!$ como indicamos al comienzo del capítulo.

La integral que define la función $\Gamma(x)$ es fácil ver que es divergente para $x \leq 0$, ya que llamando $\alpha := 1 - x$, se tiene que

$$\int_{\epsilon}^{1} e^{-t} t^{x-1} dt = \int_{\epsilon}^{1} e^{-t} \frac{1}{t^{\alpha}} dt \geq \int_{\epsilon}^{1} e^{-1} \frac{1}{t^{\alpha}} dt,$$

donde esta última integral diverge cuando $\epsilon \to 0$ y $\alpha \geq 1$. Entonces podríamos pensar en buscar una forma de generalizar Γ para valores negativos. Gracias a (2.3), surge de manera natural definir $\Gamma(x)$ como

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \tag{2.4}$$

siempre que $-n < x < -n+1$ con $n \in \mathbb{N}$. Cuando x es un entero negativo ó 0, la anterior expresión no está definida. Observemos que la expresión anterior está bien definida cuando $x < 0$ y no es un entero, pues dado $-n < x < -n+1$, se tiene que $x + n$ está en el intervalo $(0, 1)$.

Observación. Notemos que debido a esta definición, se tiene que si $-n < x < -n+1$ y n es impar, entonces $\Gamma(x) < 0$, pues en el denominador de (2.4) hay un número impar de productos negativos y $\Gamma(x+n) > 0$ porque $x + n > 0$. Análogamente, se tiene que si el n es par, entonces $\Gamma(x) > 0$.

Con estos últimos resultados nos damos cuenta de que para generalizar el factorial bastaría con coger cualquier función $f(x)$ definida en el intervalo $(0, 1]$ con $f(1) = 1$, y para el resto de valores (distintos de los enteros negativos) definirla como

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-2)\cdots(x+n)f(x+n) & \text{si } x > 1 \\ \frac{f(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

siendo $n \in \mathbb{Z}$ tal que $0 < x + n \leq 1$ (en concreto, $n = \lfloor 1 - x \rfloor$, donde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota la parte entera). De esta definición es claro que $f(x+1)$ es una generalización del factorial. Surge de manera natural preguntarse qué es lo que distingue a la función Γ de todas las demás generalizaciones del factorial.

2.2. El teorema de Bohr-Mollerup

El teorema que se va a ver a continuación caracteriza de forma única a la función Gamma, ya que como vamos a ver, bajo ciertas hipótesis Gamma es la única función que generaliza al factorial. Este hecho será muy útil para deducir ciertas relaciones que cumple Gamma.

Teorema 2.2 (Teorema de Bohr-Mollerup)**.** *Sea f una función cuyo dominio $\mathcal{D}$ incluye a todos los reales positivos y verifica las siguientes tres condiciones:*

1. $f(x+1) = xf(x)\ \forall x \in \mathcal{D}$.
2. f *es logarítmicamente convexa.*
3. $f(1) = 1$.

Entonces f es idénticamente Γ en su dominio de definición.

Demostración. La existencia de una función que cumpla estas características ya ha sido probada, pues obviamente Γ las verifica. Veamos la unicidad. Para ello, debido a la primera propiedad, f verifica que

$$f(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)xf(x).$$

Entonces bastará ver que f coincide con Γ en el intervalo $(0,1]$ para concluir el resultado.

Tomamos entonces $x \in (0,1)$. Puesto que por hipótesis, f es logarítmicamente convexa, se tendrá que las pendientes de las líneas que unen puntos en la gráfica del logaritmo de f son monótonamente crecientes (como ya se vio en el primer capítulo). Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, se verifica la siguiente desigualdad que representa este aumento de las pendientes:

$$\frac{\log\left(f(n)\right) - \log\left(f(n-1)\right)}{n-(n-1)} \leq \frac{\log(f(x+n)) - \log(f(n))}{(n+x)-n} \leq \frac{\log(f(n+1)) - \log(f(n))}{(n+1)-n}.$$

Ahora, usando que en particular $f(n) = (n-1)!$, y tras simplificar usando las propiedades del logaritmo, podemos expresar la desigualdad como

$$\log(n-1) \leq \frac{\log\left(\frac{f(x+n)}{(n-1)!}\right)}{x} \leq \log(n).$$

Multiplicando por x en las desigualdades obtenemos

$$\log(n-1)^x \leq \log\left(\frac{f(x+n)}{(n-1)!}\right) \leq \log(n)^x,$$

y aprovechándonos de que el logaritmo es una función monótona y multiplicando por $(n-1)!$, obtenemos la desigualdad

$$(n-1)^x(n-1)! \leq f(x+n) \leq n^x(n-1)!.$$

Ahora, usando que $f(x) = \frac{f(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$, llegamos a

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

Por último, reescribimos esta desigualdad como

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}\frac{x+n}{n}.$$

Ahora bien, las dos desigualdades que hemos probado para acotar $f(x)$, aunque estén escritas ambas mediante n, son independientes cada una de la otra; por tanto, en particular, podemos cambiar n por $n+1$ en la desigualdad de la izquierda sin necesidad de cambiar n en la desigualdad derecha. Con esto se obtiene

$$\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)} \leq f(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}\frac{x+n}{n}. \tag{2.5}$$

Puesto que $\lim_{n\to\infty} \frac{x+n}{n} = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se llega a que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}.$$

Luego $f(x)$ tiene una expresión única (cuando $0 < x \leq 1$), pero $\Gamma(x)$ también debe tener esta expresión puesto que verifica las hipótesis del teorema. Por lo tanto $f \equiv \Gamma$ en el intervalo $(0, 1]$ (en $x = 1$, coinciden obviamente gracias a la condición tercera), y debido a que Γ queda completamente determinada por sus valores en dicho intervalo, se concluye que f y Γ coinciden en todo el dominio de f. $\square$

Por último, la expresión obtenida para Γ en el intervalo $(0, 1]$ también es válida para todos los valores donde Γ está definida, pues sustituyendo x por $x + 1$ tenemos que

$$\frac{n^{x+1}n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)} = x\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\frac{n}{x+n+1}.$$

Puesto que el límite del miembro derecho de la igualdad existe para $0 < x \leq 1$, también existe el límite del miembro izquierdo, el cual se corresponde con la expresión de $\Gamma(x)$ con $x + 1$ en lugar de x, luego el límite existe para $x \in (1, 2]$ también. En general, ya que la igualdad anterior es cierta independientemente del valor de x, lo que nos indica precisamente es que si existe el límite de la expresión en x, también existe en $x + 1$. Igualmente, si existe para $x + 1$, entonces también existe para x, siempre que $x \neq 0$. Por tanto, se obtiene como consecuencia la siguiente expresión alternativa para la función Gamma que se expone a continuación.

Corolario 2.3. *Para todo* $x \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ *se verifica*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}. \tag{2.6}$$

2.3. Representación de Weierstrass

Manipulando la expresión (2.6) vamos a dar una definicón alternativa de Γ. Para ello, vamos a dividir por $n!$ la expresión tanto en el numerador como en el denominador, y emparejar los términos $1, 2, \ldots, n$ con los términos $1 + x, 2 + x, \ldots, n + x$ respectivamente. Entonces la expresión a la que afecta el límite queda como

$$\frac{1}{x}\frac{n^x}{(1+x)(1+\frac{x}{2})(1+\frac{x}{3})\cdots(1+\frac{x}{n})}.$$

Ahora, teniendo en cuenta que podemos escribir 1 como

$$1 = e^{x(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}e^{x(-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n})},$$

y escribiendo n^x como $e^{x\log(n)}$, resulta

$$\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = e^{x(\log(n)-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n})}\frac{1}{x}\cdot\frac{e^{\frac{x}{1}}}{1+\frac{x}{1}}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+\frac{x}{2}}\cdots\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}.$$

Antes de continuar, fijémomos en que al tomar límite, nos va a aparecer la famosa *constante de Euler-Mascheroni* γ, la cual se define como

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n.$$

El límite que define a γ existe y es finito, hecho que será probado más adelante. Luego tomando límite en la expresión anterior, se obtiene la expresión como producto infinito

$$\Gamma(x) = e^{-\gamma x}\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}, \tag{2.7}$$

la cual es llamada *representación de Weierstrass de* Γ.

2.4. Existencia de la constante de Euler-Mascheroni

Antes de proseguir con el estudio de la función Gamma vamos a probar que en efecto, el límite

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n$$

existe y es finito. Para ello denotamos como S_n la sucesión de sumas parciales

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n. \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Notemos ahora que podemos escribir

$$\begin{aligned} \log n &= [\log(n) - \log(n-1)] + [\log(n-1) - \log(n-2)] + \cdots + [\log(2) - \log(1)] = \\ &= \left[\log\left(\frac{n}{n-1}\right)\right] + \left[\log\left(\frac{n-1}{n-2}\right)\right] + \cdots + \left[\log\left(\frac{2}{1}\right)\right]. \end{aligned}$$

Por tanto, podemos reescribir S_n como

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \log\left(\frac{k+1}{k}\right),$$

es decir,

$$S_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

La anterior es una serie de térmimos positivos. Para verlo, basta usar que $\log(1 + t) \leq t$ para todo $t > 0$ y tomar $t = 1/x$. Esto prueba que

$$\frac{1}{x} - \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \geq 0.$$

Ahora vamos a proceder a acotar superiormente S_n. El desarrollo en serie de Taylor de $\log(1 + x)$ es

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},$$

el cual es válido para $x \in (-1, 1]$. Por tanto, haciendo $x \mapsto 1/x$ se deduce que

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{nx^n}$$

para $x \geq 1$. Entonces, puesto que esto lo podemos escribir como

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right) + K(x)$$

donde $K(x) \geq 0$, se deduce que

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2},$$

es decir,

$$\frac{1}{x} - \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{2x^2}.$$

Por tanto, obtenemos que

$$S_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \log\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k^2},$$

lo cual prueba que S_n está acotada superiormente pues el miembro derecho de la desigualdad converge. Así, queda demostrado que en efecto γ es un valor finito.

2.5. Derivabilidad

Ahora vamos a ver que $\Gamma(x)$ es indefinidamente diferenciable. Para ello vamos a usar la expresión (2.7). Procedemos tomando logaritmos, lo cual es factible ya que podemos suponer que $x > 0$ (y en consecuencia $\Gamma(x) > 0$) debido a la expresión (2.3). Entonces tenemos

$$\log \Gamma(x) = -\gamma x - \log x + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k} - \log\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right). \tag{2.8}$$

Ahora trataremos de probar que $\log \Gamma(x)$ es derivable, pues en ese caso tendríamos directamente que $\Gamma(x)$ es derivable ya que $\Gamma(x) = e^{\log \Gamma(x)}$. Podremos ver la derivada de $\log \Gamma(x)$ como la serie de las derivadas de los términos del miembro derecho de (2.8), siempre que esta sea uniformemente convergente.

Asumiendo este hecho momentáneamente, al derivar término a término (2.8) nos queda

$$-\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(k+x)}.$$

Puesto que hemos supuesto que $x > 0$, la última serie está acotada en cada intervalo $(0, r]$ por $r \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, la cual es convergente. Entonces por el teorema Mayorante de Weierstrass se tiene que la serie converge uniformemente en cada uno de esos intervalos. En consecuencia, resulta que $\log \Gamma(x)$ es derivable en cada intervalo de la forma anterior. En particular, el intervalo puede ser tan amplio como se quiera, luego se tiene la derivabilidad para todo $x > 0$, y por lo comentado anteriormente, $\Gamma(x)$ es derivable para todo $x > 0$.

Veamos ahora qué le ocurre a la segunda derivada de $\log \Gamma(x)$. Tenemos que la serie derivada formal de lo anterior es

$$\frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}.$$

De nuevo esta serie es uniformemente convergente en cada intervalo de la forma $(0, r]$ para cualquier $r > 0$, luego se deduce que $\log \Gamma(x)$, y por tanto $\Gamma(x)$, es dos veces diferenciable. De hecho, es sencillo calcular las derivadas consecutivas de esta última serie. Es fácil ver que la derivada $n-$ésima para $n \geq 2$ es

$$(\log \Gamma(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-1)!}{(x+k)^n}. \tag{2.9}$$

y, al igual que ocurría antes, la serie es uniformemente convergente, por lo que queda probado que $\Gamma(x)$ es indefinidamente diferenciable. Anotamos que, de nuevo por (2.3) se tiene la derivabilidad para valores negativos de x, con x no entero.

Observación. Notemos que la derivada segunda de $\log \Gamma(x)$ es siempre positiva donde está definida Γ. Recordando que

$$(\log(f(x)))'' = \frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{f(x)^2},$$

se deduce aplicándo este hecho a Γ que

$$\Gamma(x)\Gamma''(x) - (\Gamma'(x))^2 > 0 \implies \Gamma(x)\Gamma''(x) > (\Gamma'(x))^2 \geq 0,$$

luego se tiene que $\Gamma(x)$ y $\Gamma''(x)$ son simultaneamente positivas o negativas para cada valor de x. Se deduce que $|\Gamma(x)|$ es una función convexa por el criterio de la derivada segunda para la convexidad.

2.6. La función β

La función $\beta(x, y)$ es una función de dos variables que, al igual que Γ, viene definida mediante una integral. Su expresión es

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

Hemos de ver en primer lugar para qué valores de x e y la integral es convergente. Si $x \geq 1$ e $y \geq 1$, el integrando es una función continua y acotada, luego la integral es convergente. El problema en la convergencia surge en que el integrando diverge en $t=0$ si $x<1$ y diverge en $t=1$ si $y<1$. Sin embargo, es fácil ver que la convergencia se mantiene si tanto x como y son estrictamente positivas. Para probarlo procedemos a dividir la integral en dos partes tomando $0<\epsilon<1/2<\delta<1$ para tener

$$\int_{\epsilon}^{\delta} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_{\epsilon}^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\delta} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

En la primera integral tenemos que $(1-t)^{y-1}$ está acotado en el intervalo en el que se define la integral, luego podemos considerar $M_y := \max\limits_{0\leq t\leq 1/2}(1-t)^{y-1} < +\infty$. Por tanto, la primera integral se puede acotar por

$$\int_{\epsilon}^{\frac{1}{2}} t^{x-1}M_y dt = M_y \frac{t^x}{x}\Big|_{\epsilon}^{\frac{1}{2}} = \frac{M_y}{x}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x - \epsilon^x\right].$$

Entonces, haciendo $\epsilon \to 0^+$, se tiene la convergencia para $x>0$. Para la segunda integral se puede proceder igual, acotando t^{x-1} por $M_x := \max\limits_{1/2\leq t\leq 1} t^{x-1}$ y haciendo $\delta \to 1^-$.

Ahora fijémonos en qué ocurre cuando sustituimos x por $x+1$ en la expresión de $\beta(x,y)$. Resulta

$$\beta(x+1,y) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x (1-t)^{x+y-1}dt.$$

Al integrar por partes usando los cambios $u = \left(\frac{t}{1-t}\right)^x$ y $dv = (1-t)^{x+y-1}dt$, obtenemos

$$\int_{\epsilon}^{\delta} \left(\frac{t}{1-t}\right)^x (1-t)^{x+y-1}dt = -\left(\frac{t}{1-t}\right)^x \frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\Big|_{\epsilon}^{\delta} + \int_{\epsilon}^{\delta} \frac{x(1-t)^{x+y}}{x+y}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\frac{1}{(1-t)^2}dt.$$

La parte fuera de la integral se puede simplificar como $-\frac{t^x(1-t)^y}{x+y}$, con lo que queda claro que, haciendo $\epsilon \to 0^+$ y $\delta \to 1^-$, esa parte queda nula. La parte derecha, tras ser simplificada, queda exactamente como la expresión de $\beta(x,y)$ multiplicada por $\frac{x}{x+y}$. Acabamos de probar con esto que la función $\beta(x,y)$ verifica

$$\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y) \tag{2.10}$$

para todo $x > 0$.

Ahora, fijado $y > 0$, consideramos la función

$$f(x) = \beta(x, y)\Gamma(x + y).$$

Esta función verifica que $f(x + 1) = xf(x)$ ya que

$$f(x+1) = \beta(x+1, y)\Gamma(x+y+1) = \frac{x}{x+y}\beta(x, y)(x+y)\Gamma(x+y) = xf(x).$$

Además, $f(x)$ está bien definida para $x > 0$. Es más, de hecho también es logarítmicamente convexa ya que $\Gamma(x + y)$ lo es y $\beta(x, y)$ también lo es como función de x pues $\beta(x, y)$ es de la forma $\int_a^b \varphi(t)t^{x-1}dt$ con $\varphi(t)$ una función positiva y continua (ver (1.2)).

Ahora bien, sustituyendo $x = 1$ se tiene que

$$\beta(1, y) = \int_0^1 (1-t)^{y-1}dt = \frac{1}{y}$$

y en consecuencia se deduce que

$$f(1) = \frac{1}{y}\Gamma(1 + y) = \Gamma(y).$$

Entonces $\frac{f(1)}{\Gamma(y)} = 1$, luego si consideramos

$$g(x) := \frac{f(x)}{\Gamma(y)} = \beta(x, y)\frac{\Gamma(x + y)}{\Gamma(y)},$$

vemos que $g(x)$ satisface todas las hipótesis del Teorema de Bohr-Mollerup, por lo que se tiene que $g(x) \equiv \Gamma(x)$ para todo $x > 0$. Esto prueba que la expresión

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)} \tag{2.11}$$

es válida para todo $x, y > 0$.

2.7. Valores notables de Γ

Para finalizar el capítulo, vamos a ver ciertos valores de Γ de especial interés que podemos hallar.

2.7.1. La constante de Euler-Mascheroni

En primer lugar, recordemos que

$$(\log\Gamma(x))' = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right),$$

es decir,

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x)\left[-\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right)\right]. \tag{2.12}$$

Entonces puesto que $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ es una suma telescópica de suma 1, sin más que sustituir $x = 1$ en (2.12), se obtiene que el valor de la derivada de la función Gamma en $x = 1$ es precisamente la constante de Euler-Mascheroni. Es decir,

$$\Gamma'(1) = -\gamma.$$

2.7.2. La integral gaussiana

La famosa integral, conocida como integral gaussiana,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

es quizás el primer ejemplo de integral definida que se enseña que no puede ser resuelta usando la regla de Barrow, pues no posee una primitiva compuesta por funciones elementales. La forma más usual de evaluar esta integral consiste en integrar $e^{-(x^2+y^2)}$ sobre todo $\mathbb{R}^2$ mediante un cambio a coordenadas polares. Aquí lo vamos a hacer de otra manera, usando la funciones Gamma y Beta.

Notemos que la función Γ evaluada en $x = \frac{1}{2}$ es

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt.$$

Ahora, realizando el cambio de variable $\sqrt{t} = u$, nos queda

$$\int_0^{\infty} 2e^{-u^2}du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du,$$

luego

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du.$$

La relación (2.11) nos permite evaluar fácilmente $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ pues tenemos para $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$ la siguiente igualdad:

$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\Gamma(1)} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}} dt.$$

Realizando el cambio de variable $t = \operatorname{sen}^2 u$ se obtiene que

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \pi.$$

Y puesto que sabemos que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, se concluye que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi},$$

de donde se deduce que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Capítulo 3

Relaciones importantes

En este capítulo vamos a ver algunas de las relaciones que posee la función Gamma, las cuales resultan muy útiles a la hora de calcular valores de la propia función.

3.1. La aproximación de Stirling

En esta sección vamos a desarrollar la *fórmula de Stirling*, la cual nos da una aproximación de $n!$ en términos de funciones elementales. Poder aproximar el factorial por medio de funciones elementales es de gran utilidad a la hora de computar $n!$ cuando n es grande, ya que al ser el crecimiento del factorial tan rápido, se hace díficil su cálculo.

Notemos que podemos acotar tanto superior como inferiormente $n!$ de la siguiente manera. Puesto que la sucesión $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ es estrictamente creciente y con límite e, se tiene en primer lugar que

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

También se tiene que la sucesión $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$ es decreciente y con límite e. Esto se deduce estudiando la monotonía de la función $\varphi(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$. En efecto, derivando φ respecto de x se obtiene

$$\varphi'(x) = \frac{\varphi(x)}{x}\left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 1\right],$$

y usando la desigualdad primera que dimos se tiene que

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 1 < \log(e) - 1 = 0,$$

luego $\varphi(x)$ es estrictamente decreciente para todo $x > 0$ y con límite e. Entonces obtenemos la siguiente desigualdad

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

la cual podemos escribir como

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^k < e < \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}.$$

Ahora, como la desigualdad anterior es cierta para todo $k \in \mathbb{N}$, evaluando en $k = 1, 2, \ldots, n-1$ y multiplicando se llega a

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{4^3}{3^3}\cdots\frac{(n-1)^{n-2}}{(n-2)^{n-2}}\cdot\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} < e^{n-1} < \frac{2^2}{1}\cdot\frac{3^3}{2^3}\cdot\frac{4^4}{3^4}\cdots\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-2)^{n-1}}\cdot\frac{n^n}{(n-1)^n}.$$

Simplificando se obtiene inmediatamente

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} < e^{n-1} < \frac{n^n}{(n-1)!},$$

que nos conduce directamente a

$$en^n e^{-n} < n! < en^{n+1}e^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es decir, tenemos $n!$ acotado superior e inferiormente. Este hecho nos lleva a pensar que $n!$ debe tener un comportamiento asintótico como el de una sucesión del tipo $n^{n+\alpha}e^{-n}$ para cierto $\alpha \in (0,1)$. Vamos a probar a continuación que esto es cierto.

Proposición 3.1. *Existe un $a > 0$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{a\,n^{n+1/2}} = 1,$$

es decir, $n! \sim a\,n^{n+1/2}e^{-n}$.

Demostración. En primer lugar nos será útil la igualdad

$$\log\left(\frac{n+1}{n}\right) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{(2n+1)^{2k+1}}.$$

La prueba de esta sigue de realizar las siguientes manipulaciones y de tener en cuenta el desarrollo de $\log(1+x)$ en serie de potencias cuando $|x| < 1$:

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{n+1}{n}\right) &= \log\left(\frac{2n+2}{2n}\right) = \log\left(\frac{2n+2}{2n+1} : \frac{2n}{2n+1}\right) = \\
&= \log\left(1+\frac{1}{2n+1}\right) - \log\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2n+1)^{-k}}{k} - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(-1)^k\frac{(2n+1)^{-k}}{k} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2n+1)^{-k}}{k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^{-k}}{k}.
\end{aligned}$$

Cuando k es par vemos que los sumandos respectivos se cancelan, luego nos queda dos veces la suma en los k impares, que podemos escribir como

$$2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{(2n+1)^{2k+1}},$$

como queríamos demostrar.

Denotemos por a_n la sucesión $\frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$, la cual es positiva para todo $n > 0$. Podemos considerar entonces la sucesión $b_n = \log a_n$. Calculamos ahora

$$\begin{aligned}
b_n - b_{n+1} &= \log\left(\frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}\right) - \log\left(\frac{(n+1)!e^n e}{(n+1)^{n+1/2}(n+1)}\right) = \\
&= \log\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2}\frac{1}{e}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1.
\end{aligned}$$

Ahora, usando la igualdad que vimos al principio, se tiene que

$$b_n - b_{n+1} = \left(n+\frac{1}{2}\right) 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}\frac{1}{(2n+1)^{2k+1}}\right) - 1 =$$

$$= \frac{2n+1}{2} 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\frac{1}{(2n+1)^{2k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\frac{1}{(2n+1)^{2k}} > 0.$$

De aquí sigue que la sucesión $\{b_n\}_1^\infty$ es decreciente. Como el logaritmo es una función monótona, $\{a_n\}_1^\infty$ es también decreciente. Veamos ahora que b_n está también acotada inferiormente. Como

$$b_n - b_{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{(2n+1)^{2k}},$$

entonces

$$b_n - b_{n+1} < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)^{k} = \frac{1}{4n(n+1)}.$$

Ahora, podemos escribir $b_1 - b_n$ como una serie telescópica para obtener

$$b_1 - b_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k - b_{k+1} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4k(k+1)} < \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Más adelante se probará que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$. Aun sin saber el valor de la suma, esto nos muestra que

$$b_n > b_1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

es decir, b_n está acotada inferiormente.

Gracias a estos resultados se deduce que la sucesión a_n es monótona decreciente y acotada inferiormente por una constante estrictamente positiva. Por ello esta sucesión es convergente, y por tanto, existe $\lim_{n\to\infty} a_n =: a > 0$, que es equivalente a decir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n! e^n}{a\, n^{n+1/2}} = 1.$$

□

La cuestión ahora es determinar cuál es el valor de dicha constante a. Este valor se hallará en la siguiente sección, en la cual se probará la *Fórmula de multiplicación de Gauss.*

3.2. Fórmula de Multiplicación de Gauss

.

Vamos a aprovecharnos ahora del Teorema de Bohr-Mollerup para hallar ciertas igualdades que involucran a la función Gamma.

Fijemos un p entero positivo, y consideremos la función

$$f(x) = p^x \Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right)$$

con $x > 0$. Notemos que el logaritmo de p^x es una función lineal y por tanto su derivada segunda es 0. Entonces p^x es una función logarítmicamente convexa, y puesto que el resto de factores de $f(x)$ también son logarítmicamente convexos, deducimos que $f(x)$ es logarítmicamente convexa.

Ahora cambiamos x por $x+1$ en la expresión de $f(x)$. El último factor se convierte en $\Gamma(1+x/p)$, que, usando la propiedad reproductiva de la función Gamma, es lo mismo que $x/p\,\Gamma(x/p)$. Luego tenemos que

$$f(x+1) = p\,\overbrace{p^x\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)}^{f(x)}\frac{x}{p},$$

es decir, $f(x)$ satisface

$$f(x+1) = xf(x) \quad \forall x > 0.$$

Se deduce que $f(x)$ satisface todas las hipótesis del Teorema de Bohr-Mollerup a excepción de la condición $f(1) = 1$. Sea $a_p := f(1)$ para cada $p \in \mathbb{N}$. Entonces la función $\frac{f(x)}{a_p}$ sí que verifica todas las hipótesis del citado teorema. Por lo tanto obtenemos la siguiente igualdad:

$$p^x\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = a_p\Gamma(x) \quad \forall x > 0. \tag{3.2}$$

La cuestión ahora es calcular cuál es el valor de a_p, el cual al ser $f(1)$ es

$$a_p = p\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{p}{p}\right). \tag{3.3}$$

Para $k \in \{1, \ldots, p\}$ hacemos $x = k/p$ en la expresión (2.6). Tras algunas simplificaciones, obtenemos

$$\Gamma\left(\frac{k}{p}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{k/p} n! p^{n+1}}{k(k+p)(k+2p)\cdots(k+np)}.$$

Ahora multiplicamos desde $k = 1$ hasta $k = p$ la expresión anterior. Teniendo en cuenta que en el denominador, el factor k queda como el producto $1\cdot 2\cdots p$, el siguiente factor $k+p$ queda como $(p+1)\cdot(p+2)\cdots(p+p)$ y así con el resto de factores, resulta que en el denominador queda $(p+np)!$. En el numerador, queda el producto $n^{k/p}$ que, usando la fórmula de la suma de los primeros p naturales, queda $n^{(p+1)/2}$. Entonces nos queda la expresión para a_p como el límite

$$a_p = \lim_{n\to\infty} p\frac{n^{(p+1)/2}(n!)^p p^{np+p}}{(np+p)!}. \tag{3.4}$$

Para simplificar un poco esta última expresión, utilizamos el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{np}\right)\left(1+\frac{2}{np}\right)\cdots\left(1+\frac{p}{np}\right) = 1.$$

El valor del límite es evidente. Si cada factor lo reescribimos como $\frac{np+k}{np}$ para $k = 1,\ldots,p$, queda que el numerador es $(np+1)(np+2)\cdots(np+p) = \frac{(np+p)!}{(np)!}$, luego el límite se puede reescribir como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(np+p)!}{(np)!(np)^p} = 1.$$

Entonces, multiplicando este límite en cada miembro de (3.4), obtenemos

$$a_p = \lim_{n\to\infty} p\frac{(n!)^p p^{np}}{(np)!n^{(p-1)/2}}.$$

Ahora bien, por la Proposición 3.1 tenemos que

$$n! \sim a\, n^{n+1/2}e^{-n} \ \text{ y } \ (np)! \sim a(np)^{np+1/2}e^{-np}.$$

Sustituyendo en el límite anterior obtenemos

$$a_p = \lim_{n\to\infty} p\frac{a^p n^{np+p/2}e^{-np}p^{np}}{an^{np+1/2}p^{np+1/2}e^{-np}n^{(p-1)/2}}$$

y tras simplificar nos queda que

$$a_p = p^{1/2}a^{p-1}.$$

Finalmente, tomando el caso particular $p=2$ tenemos que

$$a_2 = \sqrt{2}a.$$

Además, por (3.3) tenemos que

$$a_2 = 2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1) = 2\sqrt{\pi},$$

luego finalmente se obtiene que $a = \sqrt{2\pi}$ y por tanto que

$$a_p = p^{1/2}(2\pi)^{(p-1)/2}.$$

Al hallar el valor de a tenemos que la *fórmula de Stirling* para $n!$ es la siguiente.

Teorema 3.2 (Fórmula de Stirling)**.** *Se tiene que $n!$ y $\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}$ tienen el mismo comportamiento asintótico, es decir,*

$$n! \sim \sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}.$$

En el siguiente gráfico podemos apreciar la precisión de esta aproximación.

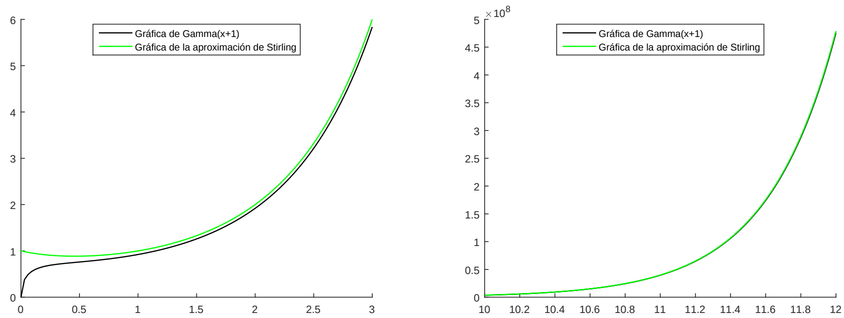

Figura 3.1: Gráficas de las funciones $\Gamma(x+1)$ y $f(x) = \sqrt{2\pi}x^{x+1/2}e^{-x}$ en negro y verde respectivamente, mostradas en los intervalos $[0,3]$ y $[10,12]$ respectivamente. Como se puede apreciar, la aproximación es ya muy buena desde valores pequeños.

También de (3.2) se obtiene la *fórmula de multiplicación de Gauss* sin más que sustituir la expresión que hemos hallado para a_p.

Teorema 3.3 (Fórmula de multiplicación de Gauss)**.** *Para todo $x > 0$ se da la igualdad*

$$\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = \frac{(2\pi)^{(p-1)/2}}{p^{x-1/2}}\Gamma(x).$$

Equivalentemente, haciendo el cambio $x \mapsto px$, se obtiene

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{p}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{p-1}{p}\right) = \frac{(2\pi)^{(p-1)/2}}{p^{px-1/2}}\Gamma(px).$$

Esta última expresión es la que hace llamar a esta fórmula más propiamente por su nombre ya que nos da una expresión que relaciona el valor de $\Gamma(px)$ como producto de funciones Gamma.

El caso particular para $p = 2$ recibe el nombre de *fórmula de duplicación de Legendre*, la cual es

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x) \quad \forall x > 0. \tag{3.5}$$

Haciendo el cambio $x \mapsto 2x$, esta fórmula nos conduce a

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x) \quad \forall x > 0,$$

cuya expresión da nombre a esta relación.

Observación. La *fórmula de duplicación de Legendre* se puede obtener directamente sin hallar antes la *fórmula de multiplicación de Gauss*. Para ello, fijando $p = 2$ en (3.2) y (3.3) se tiene

$$a_2 = 2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\pi},$$

y por tanto

$$2^x\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\sqrt{\pi}\,\Gamma(x),$$

luego

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x).$$

3.3. La relación entre Gamma y la función seno

A continuación vamos a probar una importante ecuación que relaciona a las funciones seno y Gamma, la cual resulta muy útil debido a que de ella se derivan múltiples igualdades.

Para hallar dicha relación vamos a usar la misma técnica que utilizamos en la prueba del Teorema 3.3 . Consideramos la función $f(x)$ definida como

$$f(x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x)\,\mathrm{sen}(\pi x),$$

la cual solo está definida para valores no enteros de x puesto que Gamma no está definida en los enteros negativos ni en 0. Si hacemos el cambio $x \mapsto x+1$ obtenemos

$$f(x+1) = \Gamma(x+1)\Gamma(-x)\operatorname{sen}(\pi x+\pi) = \cancel{x}\overbrace{\Gamma(x)\frac{\Gamma(1-x)}{-\cancel{x}}(-1)\operatorname{sen}(\pi x)}^{f(x)} = f(x),$$

es decir, que $f(x)$ es una función periódica de periodo $T=1$. Notemos además que podemos escribir f como

$$f(x) = \frac{\Gamma(1+x)}{x}\Gamma(1-x)\operatorname{sen}(\pi x),$$

cuyo límite cuando $x \to 0$ (usando que $\operatorname{sen}(\pi x) \sim \pi x$ cuando $x \to 0$) es π, luego podemos extender de manera continua la definición de $f(x)$ para todos los valores reales dando el valor $f(0) = \pi$ y en consecuencia al ser f periódica de periodo 1 asignar $f(p) = \pi$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Ahora consideramos la fórmula de Legendre en x y en $1-x$:

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x), \quad \Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{-x}}\Gamma(1-x).$$

Usando estas dos últimas ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ahora la fórmula del seno del ángulo doble ($\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$) y que en la última expresión aparecen los miembros izquierdos de las ecuaciones que hemos obtenido con la fórmula de Legendre, basta sustituir para obtener

$$f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x+1}{2}\right) = \pi\Gamma(x)\Gamma(1-x)\operatorname{sen}(\pi x) = \pi f(x). \tag{3.6}$$

Recordemos que en el intervalo $[0,1]$ la función $f(x)$ es positiva, luego tiene sentido tomar logaritmos. Denotamos entonces por $g(x)$ a la derivada segunda de la función $\log(f(x))$. Esta función $g(x)$ también es periódica de periodo $T=1$ puesto que es una composición de f, f' y f'' las cuales son periódicas. Entonces se extiende la definición de $g(x)$ para todos los valores reales gracias a la periodicidad.

Seguidamente, tomamos logaritmos en el primer y último miembro de la ecuación (3.6), y derivando dos veces se obtiene

$$\frac{1}{4}\left(g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) = g(x). \tag{3.7}$$

Al ser $g(x)$ una función continua en $[0,1]$ y periódica, g debe estar acotada por cierta constante $M > 0$, es decir, $|g(x)| \leq M\ \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces usando (3.7) se obtiene la desigualdad

$$|g(x)| = \frac{1}{4}\left|g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{4}\left|g\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \frac{1}{4}\left|g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \leq \frac{M}{4} + \frac{M}{4} = \frac{M}{2}.$$

Es decir, $|g(x)| \leq M/2\, \forall x \in \mathbb{R}$. Ahora, repitiendo de nuevo los pasos de la desigualdad anterior n veces, se tiene que $|g(x)| \leq M/2^n\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in \mathbb{R}$, luego necesariamente $g \equiv 0$. Recordemos que $g(x)$ era la derivada segunda de $\log(f(x))$, luego al ser $g(x) = 0$ se tiene que la derivada de $\log(f(x))$ es una constante, así que $\log(f(x))$ es una función lineal. Pero además, $\log(f(x))$ es periódica, luego ha de ser una constante. Entonces $f(x)$ también tiene que ser una constante, y puesto que conocemos el valor de f en los enteros, que recordemos era $f(p) = \pi$, se tiene que $f \equiv \pi$. Entonces se obtiene inmediatamente por la definición de $f(x)$ que

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}. \tag{3.8}$$

A esta ecuación se la conoce como *fórmula de reflexión de Euler.*

Observación. Notemos que la relación (3.8) queda bien definida para todo $x \in \mathbb{R}$ si la reescribimos como

$$\frac{\pi}{\Gamma(1-x)\Gamma(x)} = \operatorname{sen}(\pi x)$$

debido a que cuando x tiende a p, con $p \in \mathbb{Z}$, ambos miembros tienden a 0, luego cuando $x \in \mathbb{Z}$, queda naturalmente definida la anterior relación.

Un hecho destacable es que no era necesario usar $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ya que, dejando ese valor como una constante desconocida, habríamos obtenido igualmente el resultado deseado. Así, también se puede calcular el valor de $\Gamma(1/2)$ sutituyendo en (3.8) x por $1/2$, y teniendo en cuenta que $\Gamma(1/2) > 0$.

3.4. El problema de Basilea

Una de las igualdades más notables a las que nos conduce (3.8) se obtiene escribiendo la relación como

$$\operatorname{sen}(\pi x) = \frac{\pi}{-x\Gamma(x)\Gamma(-x)}$$

gracias a la propiedad reproductiva de la función Gamma. Sustituyendo $\Gamma(x)$ por la expresión que da la representación de Weierstrass (2.7), se obtiene rápidamente el desarrollo del $\operatorname{sen}(\pi x)$ como producto infinito:

$$\operatorname{sen}(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right). \tag{3.9}$$

Esta expresión nos permite dar la solución al famoso *problema de Basilea*, el cual consiste en hallar el valor de la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Veamos la prueba:

Si consideramos el desarrollo en serie de Taylor de la función

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}$$

centrado en $x = 0$, tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x} = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{3!} + \frac{\pi^4 x^4}{5!} + \cdots \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, utilizando (3.9) se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x} = \left(1 - \frac{x^2}{1}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)\cdots$$

Si multiplicamos, obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x} = 1 - x^2\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots\right) + x^4(\cdots) + \cdots$$

Entonces, puesto que ambos desarrollos son válidos, comparando los coeficientes de x^2 se obtiene, gracias a la unicidad de los coeficientes de Taylor, el resultado deseado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Esta es la prueba que dio Euler para el problema de Basilea. Sin embargo, el desarrollo como producto del seno no lo probó rigurosamente. Euler pensó, que puesto que los ceros de $\operatorname{sen}(\pi x)$ son todos los números enteros, entonces al igual que se puede hacer con los polinomios, podría factorizarse igualmente en este caso como producto de sus ceros, obteniendo así el desarrollo que antes probamos. El Teorema que da la factorización de una función con infinitos ceros en función de un producto infinito relacionado con dichos ceros es el *Teorema de Factorización de Weierstrass*, el cual usaremos en los capítulos posteriores donde trataremos la función Gamma desde el punto de vista complejo.

Anotamos que existen otras soluciones al problema de Basilea. Una de ellas consiste en considerar la serie de Fourier de la función x^2 en el intervalo $[0, 2\pi)$ (extendida periódicamente a $\mathbb{R}$) y aplicar en $x = 0$ un adecuado teorema de convergencia. También en el Capítulo 5 veremos otra solución del problema de Basilea en la que intervendrán la función Zeta de Riemann y los números de Bernouilli.

Capítulo 4

La función Gamma en el plano complejo

Para finalizar este estudio sobre la función Gamma, vamos a ver cómo podemos extender esta función al plano complejo además de ver las propiedades que tendrá. Para ello son necesarias ciertas nociones sobre análisis en el plano complejo que se darán a continuación. Ciertas definiciones como *función analítica* o *función entera* se darán por supuestas, así como algunos resultados elementales del análisis complejo como el *Principio de Prolongación Analítica*. Las nociones que se van a exponer sobre el plano complejo son principalmente teoremas relacionados con productos infinitos, ya que la principal forma en la que vamos a representar a la función Gamma es mediante la representación de Weierstrass (2.7) vista con anterioridad. Como veremos, esta representación extiende a Gamma sobre todo el plano complejo verificando además la ecuación funcional $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

4.1. Resultados previos

Comenzamos dando primero un teorema que nos permite caracterizar cuándo un producto infinito funcional converge a una función holomorfa.

Teorema 4.1 (de Weierstrass). *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω que converge uniformemente en compactos de Ω a cierta función $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Entonces $f \in H(\Omega)$.*

Demostración. Sea Δ triángulo cerrado, $\Delta \subset \Omega$. Por el teorema de Goursat se tiene que $\int_{\Delta} f_n(z)dz = 0$ para todo n natural. Como, además, f_n converge uniformemente a f en $\partial\Delta$, podemos intercambiar límite con integración, resultando que

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)dz = 0.$$

Por otra parte, f es continua en Ω al ser límite uniforme local de una sucesión de funciones continuas en Ω. Este hecho junto con que la integral de f sobre cualquier triángulo de Ω es nula, nos muestra que f debe ser holomorfa en Ω por el teorema de Morera. $\square$

Como consecuencia se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.2. *Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en compactos de Ω a cierta función $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Entonces $f \in H(\Omega)$.*

A continuación se enuncia un resultado elemental de funciones de variable compleja, el cual nos asegura la analiticidad de funciones definidas mediante integrales paramétricas bajo ciertas condiciones.

Teorema 4.3 (Analiticidad de integrales paramétricas)**.** *Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $C \subset \Omega$ una curva regular. Sea $F : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $F(s) = \int_C f(t,s)dt$, y supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *La función $s \in \Omega \mapsto f(t,s)$ es analítica para todo $t \in C$.*

2. *La función $t \in C \mapsto f(t,s)$ es medible para todo $s \in \Omega$.*

3. *Existe $g : C \to \mathbb{R}$ con $\int_C g(t)dt < +\infty$ tal que $|f(t,s)| \leq g(t)$ para todo $t \in C$ y para todo $s \in \Omega$.*

Entonces $F \in H(\Omega)$.

Recordamos ahora un resultado que nos será útil para probar (4.5).

Teorema 4.4. *Sea f una función entera que no tiene ceros en $\mathbb{C}$. Entonces f se puede escribir como*

$$f(z) = e^{g(z)} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

donde $g(z)$ es una función entera.

Ahora vamos a dar el resultado central de esta sección, el cual será demostrado parcialmente debido a que la segunda parte de la prueba es esencialmente la misma que la del Teorema 4.6 que se da a continuación del Teorema de Factorización de Weierstrass.

Teorema 4.5 (Teorema de factorización de Weierstrass)**.** *Sea f una función entera que tiene una sucesión infinita de ceros $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ no nulos que tienden a ∞, donde cada cero aparece tantas veces como indica su multiplicidad, y sea λ el orden de su cero en el origen si tuviera. Entonces existe una función entera g tal que f admite la siguiente expresión en todo $\mathbb{C}$:*

$$f(z) = e^{g(z)} \cdot z^{\lambda} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{a_n} + \cdots + \frac{z^n}{n a_n^n}\right)$$

Demostración. La convergencia uniforme del producto que aparece es inmediata imitando la prueba del teorema que se da a continuación, ya que en dicho teorema, el p es fijo, mientras que aquí el n es variable en cada factor. Una vez supuesto demostrado este hecho, la función

$$\varphi(z) = z^{\lambda} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{a_n} + \cdots + \frac{z^n}{n a_n^n}\right)$$

es entera con los mismos ceros que f, luego el cociente $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ es una función entera sin ceros, y por lo tanto, se puede escribir como

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = e^{g(z)},$$

siendo $g(z)$ una función entera. □

Teorema 4.6 (Producto canónico)**.** *En las condiciones del Teorema 4.5, si p es el mayor entero no negativo para el cual la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^p}$$

diverge. Entonces existe una función entera g tal que f puede ser representada como

$$f(z) = e^{g(z)} \cdot z^{\lambda} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{a_n} + \cdots + \frac{z^p}{p a_n^p}\right).$$

Esta representación es conocida como producto canónico de f.

Demostración. Basta probar que el producto que aparece define una función entera, ya que la existencia de g quedó probada en 4.5. Dado K compacto de $\mathbb{C}$, existe $R > 0$ tal que $|z| \leq R$ para todo $z \in K$. Como la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a ∞ cuando n tiende a ∞, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que $|a_n| \geq 2R$ para todo $n \geq N$. A partir de estos valores se tendrá entonces que $|z/a_n| \leq 1/2$. Con todo esto en cuenta, podemos escribir el producto como

$$\prod_{n=1}^{N-1}\left(\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\cdot \exp\left(\frac{z}{a_n}+\cdots+\frac{z^p}{pa_n^p}\right)\right)\cdot \exp\left[\sum_{n=N}^{\infty}\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+\left(\frac{z}{a_n}+\cdots+\frac{z^p}{pa_n^p}\right)\right]. \quad (4.1)$$

El logaritmo que aparece es el principal y aunque en general no es cierto que $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ en $\mathbb{C}$, es sencillo ver que cuando a y b tienen parte real positiva sí se verifica la igualdad. En nuestro caso, por la elección de N, las mantisas de los logaritmos que tenemos en la última suma están en el el disco $1 + \frac{1}{2}\mathbb{D}$, luego en particular tienen parte real positiva.

Para cada término de la suma, teniendo en cuenta que

$$\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right) = -\frac{z}{a_n} - \cdots - \frac{z^p}{pa_n^p} - \frac{z^{p+1}}{(p+1)a_n^{p+1}} - \cdots,$$

resulta que

$$\left|\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+\frac{z}{a_n}+\cdots+\frac{z^p}{pa_n^p}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^p z^k}{(p+k)a_n^p a_n^k}\right|.$$

Se sigue de la desigualdad triangular que el anterior término está acotado por

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{z^p z^k}{(p+k)a_n^p a_n^k}\right| = \left|\frac{z}{a_n}\right|^{p+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^k}{(p+k+1)|a_n|^k} \leq \frac{R^{p+1}}{|a_n|^{p+1}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 2\frac{R^{p+1}}{|a_n|^{p+1}}.$$

Puesto que la serie $\sum 1/|a_n|^{p+1}$ converge por hipótesis, gracias a la cota anterior se obtiene que la serie

$$\sum_{n=N}^{\infty}\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+\left(\frac{z}{a_n}+\cdots+\frac{z^p}{pa_n^p}\right)$$

converge uniformemente en K, y por el Teorema 4.1, dicha función define una función entera, y por tanto su exponencial es asimismo una función entera. En consecuencia, el producto (4.1) define una función entera al ser un producto finito de funciones enteras. □

4.2. Gamma en $\mathbb{C}$ como producto infinito

Vimos ya en capítulos anteriores diferentes representaciones de Γ sobre la recta real. Para el plano complejo vamos a utilizar la representación de Weierstrass, la cual nos dará una extensión de Γ al plano complejo.

Recordatorio. Recordemos que la expresión de Weierstrass de Gamma es

$$\Gamma(x) = e^{-\gamma x}\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{x/n}}{1+\frac{x}{n}}.$$

En primer lugar, por el Teorema 4.6, podemos ver que la función

$$G(z) := \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}$$

define una función entera, ya que la sucesión de ceros de esa función es $\{-n\}_{n=1}^{\infty}$ y es claro que el mayor entero para el cual la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|a_n|^p$ diverge es $p=1$.

Consecuentemente, la función $1/\Gamma(z)$ es una función entera con ceros simples en los enteros negativos y el cero. Por lo tanto, se deduce que $\Gamma(z)$ es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos simples en dichos puntos, y que está representada por el producto

$$\Gamma(z) = e^{-\gamma z}\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{z/n}}{1+\frac{z}{n}}.$$

Gracias a esta representación, se pueden obtener algunas propiedades interesantes que enunciamos a continuación.

Proposición 4.7. *Si $z = x+iy$, se verifican:*

1. $|\Gamma(x+iy)| \leq |\Gamma(x)|$ *para todo* $z = x+iy \in \mathbb{C}\backslash\{0,-1,\ldots\}$.
2. $\Gamma(\overline{z}) = \overline{\Gamma(z)}$ *para todo* $z = x+iy \in \mathbb{C}\backslash\{0,-1,\ldots\}$, *y por tanto,* $|\Gamma(\overline{z})| = |\Gamma(z)|$.

Demostración. Ambas propiedades se siguen directamente de la definición:

1. En primer lugar, tenemos que

$$|\Gamma(x+iy)| = |e^{-\gamma x}e^{-iy\gamma}|\frac{1}{|x+iy|}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|e^{x/n}e^{iy/n}|}{|1+(x+iy)/n|} \leq$$

$$\leq e^{-\gamma x}\frac{1}{|x|}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{x/n}}{|1+x/n|} = |\Gamma(x)|.$$

2. Por otra parte, resulta que

$$\Gamma(\overline{z}) = e^{-\gamma\overline{z}}\frac{1}{\overline{z}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\overline{z}/n}}{1+\overline{z}/n} = \overline{e^{-\gamma z}}\frac{1}{\overline{z}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{e^{z/n}}}{\overline{1+z/n}} = \overline{\Gamma(z)}.$$

Esta última propiedad puede ser probada mediante el principio de reflexión de Schwarz ya que sabemos que la función Γ toma valores reales en todo el eje real donde esté definida. □

Ambas propiedades pueden apreciarse en la siguiente Figura 4.1.

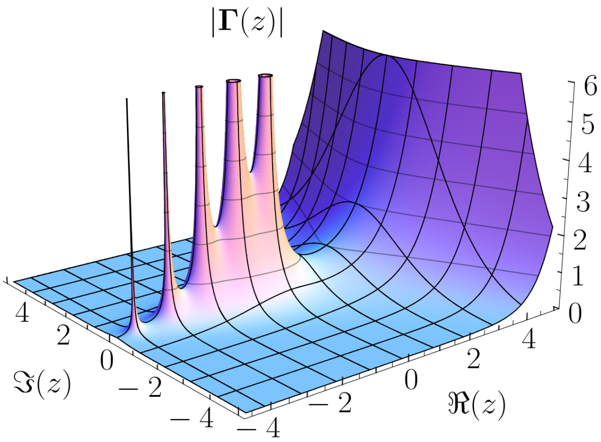

Figura 4.1: Valor absoluto de Γ en $\mathbb{C}$. By Geek3 - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5156881

4.3. El Teorema de Wielandt

En el Capítulo 2 vimos el Teorema de Bohr-Mollerup, el cual mostraba que la función Gamma es la única generalización real del factorial bajo ciertas hipótesis. En el plano complejo la función Gamma también es la única función que generaliza al factorial asumiendo las hipótesis que ahora veremos. Esta caracterización es conocida como *Teorema de Wielandt*.

Teorema 4.8 (Teorema de Wielandt). *Sea $F(z) \in H(H_0)$, donde H_0 es el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$, una función holomorfa que verifica:*

1. $F(z+1) = zF(z)$ *para todo* $z \in H_0$.

2. *$F(z)$ está acotada en la banda $S = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \Re(z) < 2\}$.*

3. *$F(1) = 1$.*

Entonces $F(z) = \Gamma(z)$ para todo $z \in H_0$.

Demostración. Comenzamos definiendo la función $G(z) = F(z) - \Gamma(z)$, la cual es holomorfa en H_0. Además, se tiene que

$$G(z+1) = F(z+1) - \Gamma(z+1) = zF(z) - z\Gamma(z) = z(F(z) - \Gamma(z)) = zG(z),$$

es decir, $G(z+1) = zG(z)$ para todo $z \in H_0$. Como $G(z)$ satisface la anterior ecuación funcional, se puede extender a todo el plano $\mathbb{C}$ como ya se hizo con la función Gamma. Basta definir

$$G(z) = \frac{G(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}$$

siempre que $-n < \Re(z) < -n+1$. Como $G(1) = 0$, $G(z)$ tiene singularidades evitables en $z = -n$ y por tanto, $G(z)$ se extiende a una función entera. A esta extensión la seguimos llamando $G(z)$.

Tenemos por la Proposición 4.7 que $\Gamma(z)$ está acotada en la banda S. Como $F(z)$ está también acotada en S, se sigue que $G(z)$ está también acotada en S.

Vamos a ver ahora que $G(z)$ también es acotada en la banda $S_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re(z) < 1\}$. En primer lugar, como $G(z+1) = zG(z)$, es claro que si $|\Im(z)| < 1$ entonces $G(z)$ es acotada en S_0. Por otra parte, si $|\Im(z)| \geq 1$, se deduce también que $G(z)$ es acotada en S_0 teniendo en cuenta que $G(z) = G(z+1)/z$. Por lo tanto, $G(z)$ está acotada en S_0.

Ahora definimos la función $H(z) = G(z)G(1-z)$, la cual es entera. Si $z \in S_0$, entonces $1 - z \in S_0$, por lo tanto $H(z)$ está acotada en S_0. Como $G(z+1) = zG(z)$ y $G(-z) = -G(1-z)/z$ se tiene que

$$H(z+1) = G(z+1)G(-z) = -zG(z)\frac{G(1-z)}{z} = -G(z)G(1-z) = -H(z),$$

es decir, $H(z)$ verifica la ecuación funcional $H(z+1) = -H(z)$. Esto nos desvela que $H(z)$ está acotada en todo $\mathbb{C}$ ya que $|H(z+1)| = |H(z)|$, y por lo tanto, al estar $H(z)$ acotada en la banda S_0 también lo está en todas las bandas comprendidas entre dos enteros consecutivos. Al ser $H(z)$ una función entera y acotada, se tiene por el Teorema de Liouville que $H(z)$ es una función constante. Como $G(1) = 0$, la función $H(z)$ debe ser la función constantemente 0. De aquí se sigue que $G(z)$ también debe ser la función constantemente 0, y por tanto, $F(z) = \Gamma(z)$ para todo z en el dominio de $F(z)$, como se quería demostrar. $\square$

Observación. En la prueba del teorema anterior, se ha usado la reproductividad de la función Gamma en el plano complejo, es decir, que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ para $z \in \mathbb{C}$. Esta propiedad no se ha probado todavía pero se hará más adelante.

4.4. Representación de Gamma como límite

Cuando se probó el Teorema de Bohr-Mollerup, se obtuvo una expresión de Γ como límite, el cual era

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

válida para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, \ldots\}$. Vamos a ver ahora que de hecho, esta expresión es cierta también el plano complejo.

Para verlo, basta considerar el producto parcial de la expresión de Weierstrass

$$\Gamma_m(z) = e^{-z\left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \log m\right)} \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{m} \frac{e^{z/n}}{1+\frac{z}{n}},$$

cuyo límite es precisamente $\Gamma(z)$. Tras separar la primera exponencial en la forma

$$e^{-z\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}} e^{z\log m} = m^z \prod_{n=1}^{m} e^{-z/n},$$

podemos reescribir el producto como

$$\Gamma_m(z) = m^z \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{m} \frac{1}{1+\frac{z}{n}},$$

que, tras manipularlo ligeramente queda como

$$\Gamma_m(z) = m^z \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{m} \frac{n}{z+n} = \frac{m^z m!}{z(z+1)\cdots(z+m)}.$$

Luego basta hacer $m \to \infty$ para obtener

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

válida para todo $z \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, \ldots\}$, como se quería probar.

4.5. Gamma como producto de Euler

Vamos a dar ahora otra representación de la función Gamma como producto infinito, la cual es debida a Euler. Para llegar a ella, partimos de la representación de Gamma como límite. Consideramos

$$\Gamma_m(z) = m^z \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{m} \frac{1}{1+\frac{z}{n}}.$$

Ahora, fijémonos en que podemos escribir m como

$$m = \prod_{n=1}^{m-1} \frac{n+1}{n} = \frac{m}{m+1} \prod_{n=1}^{m} \frac{n+1}{n} = \frac{m}{m+1} \prod_{n=1}^{m} \left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Sustituyendo m por la anterior expresión en la fórmula de $\Gamma_m(z)$ se obtiene

$$\Gamma_m(z) = \left(\frac{m}{m+1}\right)^z \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{m} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{1+\frac{z}{n}}.$$

Tomando límite en esta última expresión, se deduce la expresión de Gamma como producto de Euler

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{1+\frac{z}{n}}, \tag{4.2}$$

la cual de nuevo, es válida para todo $z \in \mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,\ldots\}$.

Una de las particularidades de la función Gamma era que verificaba la ecuación funcional $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ para todo x real no nulo ni entero negativo. Esta propiedad sigue siendo cierta en el plano complejo a excepción de los puntos ya citados. Para ver esto consideramos el producto parcial de Gamma como producto de Euler

$$\Gamma_m(z+1) = \frac{1}{z+1} \prod_{n=1}^{m} \left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{1+\frac{z+1}{n}} \left(1+\frac{1}{n}\right)\right].$$

Separando el producto y manipulando un poco se llega a

$$\Gamma_m(z+1) = \frac{1}{z+1} \prod_{n=1}^{m} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{n+1+z} \cdot \prod_{n=1}^{m} \left(1+\frac{1}{n}\right).$$

El segundo producto que aparece vale $m+1$. Además, si sacamos el denominador del último término del primer producto e introducimos el factor $\frac{1}{z+1}$, nos queda

$$\Gamma_m(z+1) = \prod_{n=1}^{m} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{n+z} \cdot \frac{m+1}{m+1+z},$$

luego obtenemos

$$\Gamma_m(z+1) = \prod_{n=1}^{m} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{1+\frac{z}{n}} \frac{m+1}{m+1+z} = z \cdot \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{m} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{1+\frac{z}{n}} \frac{m+1}{m+1+z},$$

que es exactamente

$$\Gamma_m(z+1) = z\Gamma_m(z)\frac{m+1}{m+1+z}.$$

Tomando límite cuando $m \to \infty$ deducimos que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

como queríamos ver.

Observación. Otra forma más directa de probar el resultado anterior es notar que la función $z\Gamma(z)$ coincide con $\Gamma(z+1)$ en el eje real, y por el Principio de Prolongación Analítica, también en el resto del plano.

Una vez probada esta propiedad, podemos ver ahora el residuo de Γ en sus correspondientes polos de manera sencilla usando la ecuación funcional. Se tiene que

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}.$$

Como los polos son simples, el residuo $\operatorname{Res}_{-m}\Gamma$ en $-m = -(n-1)$ (para cada $m = 0, 1, 2, \ldots$) es el límite

$$\lim_{z\to-(n-1)} \Gamma(z)(z+n-1) = \lim_{z\to-(n-1)} \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-2)} =$$
$$= \frac{\Gamma(1)}{-(n-1)\cdot-(n-2)\cdots(-1)} = \frac{\Gamma(1)}{(-1)^{n-1}(n-1)!} = \frac{(-1)^m}{m!}.$$

Luego concluimos que el valor del residuo en los polos de la función Gamma es

$$\operatorname{Res}_{-m}\Gamma = \frac{(-1)^m}{m!} \; \forall m = 0, 1, \ldots$$

4.6. Representación integral de Γ en $\mathbb{C}$

En el Capítulo 2 presentamos a Gamma mediante una integral. Vamos a ver ahora, que dicha integral también representa a Gamma en el plano complejo.

Teorema 4.9. *En todo el semiplano $\Re(z) > 0$ se tiene que*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Demostración. Consideramos la función

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

donde la integración se realiza sobre el eje real positivo. Se entiende que t^{z-1} se define como $e^{(z-1)\log t}$. Reescribiendo la integral como

$$f(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

y teniendo en cuenta que

$$\left| e^{-t} t^{z-1} \right| = e^{-t} t^{\Re(z-1)},$$

es claro (al igual que ya se vio en el Capítulo 2) que la primera integral es absolutamente convergente siempre que $\Re(z) > 0$, y la segunda integral converge absolutamente para cualquier $z \in \mathbb{C}$. Debido a ello, la integral es convergente en el semiplano $\Re(z) > 0$. Ahora vamos a probar que la primera integral define una función holomorfa en el citado semiplano, mientras que la segunda define una función entera.

Hemos de ver que $F(z) := \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt$ representa una función holomorfa en el semiplano $\Re(z) > 0$. Es claro que la función $e^{-t} t^{z-1}$ verifica las dos primeras condiciones del Teorema 4.3, ya que como función de z y t es holomorfa y continua (y por tanto medible) respectivamente. Veamos ahora que la tercera condición se verifica en cada banda $0 < \Re(z) < \sigma_0$ para toda $\sigma_0 > 0$. Fijado $\sigma_0 > 0$ se tendrá

$$|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{\Re(z)-1} \leq t^{\Re(z)-1} \leq t^{\sigma_0 - 1}$$

para todo z con $0 < \Re(z) < \sigma_0$ y para todo $0 < t < 1$. Como

$$\int_0^1 t^{\sigma_0 - 1} dt = \left. \frac{t^{\sigma_0}}{\sigma_0} \right|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{\sigma_0} < +\infty,$$

se verifica la tercera condición, luego nuestra función es holomorfa en cada banda $0 < \Re(z) < \sigma_0 < +\infty$ y por tanto, en todo el semiplano $\Re(z) > 0$. Veamos ahora la analiticidad de $G(z) := \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ en todo el plano. De nuevo, la función $e^{-t} t^{z-1}$ verifica las dos primeras condiciones, luego falta ver la tercera. Veamos que esta condición se cumple en cada banda $-\infty < \sigma_0 < \Re(z) < \sigma_1 < +\infty$. Como

$$\lim_{t \to \infty} e^{-t/2} t^{\Re(z)-1} = 0$$

para todo z con $\sigma_0 < \Re(z) < \sigma_1$, se tendrá que

$$e^{-t/2}t^{\sigma_1 - 1} \leq 1$$

para todo $t \geq t_0$. Entonces se tiene que

$$|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t/2}e^{-t/2}t^{\Re(z)-1} \leq e^{-t/2}e^{-t/2}t^{\sigma_1-1} \leq \begin{cases} e^{-t}t^{\sigma_1-1} & \text{si } 1 \leq t \leq t_0, \\ e^{-t/2} & \text{si } t > t_0. \end{cases}$$

Entonces es claro que

$$|e^{-t}t^{z-1}| \leq g(t) := e^{-t}t^{\sigma_1-1}\chi_{[1,t_0]} + e^{-t/2}\chi_{(t_0,+\infty)}$$

para todo z en la banda $\sigma_0 < \Re(z) < \sigma_1$ y para todo $t \geq 1$ y que

$$\int_1^\infty g(t)dt < +\infty,$$

luego $G(z)$ es analítica en toda banda de $\mathbb{C}$, y por tanto, es una función entera.

Vamos a probar ahora que la función $f(z)$ anteriormente definida coincide con $\Gamma(z)$ en el semiplano derecho abierto.

Comenzamos considerando la sucesión de funciones

$$f_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{z}\right)^n t^{z-1}dt.$$

Nuestro primer objetivo es probar que $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ para todo z con $\Re(z) > 0$. Esto es lo mismo que probar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)\right] t^{z-1}dt = 0,$$

ya que, gracias a la integrabilidad de $e^{-t}t^{z-1}$ en $(0, +\infty)$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = 0.$$

Aplicando la desigualdad elemental $\log(1+x) \leq x$, la cual es cierta para todo $x > -1$, se tiene

$$1 + \frac{t}{n} \leq e^{t/n} \leq \frac{1}{1 - t/n},$$

siempre que $|t| < n$. En consecuencia obtenemos las desigualdades

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \quad \text{y} \quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

Usando estas dos últimas desigualdades, se deduce que

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left[1 - e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \leq e^{-t}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right].$$

Ahora, utilizando que la suma parcial de una serie geométrica del tipo r^k, con $n = 0, 1, 2, \dots$ es

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r},$$

y, sustituyendo $r = 1 - \frac{t^2}{n^2}$, obtenemos

$$S_{n-1} = \frac{1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n}{\frac{t^2}{n^2}} = 1 + \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n-1}.$$

Equivalentemente

$$1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n = \frac{t^2}{n^2}\left[1 + \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n-1}\right].$$

Puesto que $|t| < n$, cada sumando de la última suma es menor o igual que 1, luego se deduce que

$$\frac{t^2}{n^2}\left[1 + \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n-1}\right] \leq \frac{t^2}{n}.$$

Juntando todo lo anterior, se tiene la siguiente cota:

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}.$$

Finalmente, gracias a dicha cota, deducimos que

$$\left|\int_0^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)\right] t^{z-1} dt\right| \leq \frac{1}{n}\int_0^n e^{-t} t^{\Re(z)+1} dt \leq \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-t} t^{\Re(z)+1} dt,$$

de donde, sin más que hacer $n \to \infty$, se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ como queríamos probar en primer lugar.

Una vez probado este hecho, basta probar que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \Gamma(z).$$

En efecto, fijemos z con $\Re(z) > 0$. Realizamos el cambio de variable $t = nu$ en la expresión de $f_n(z)$, tras el cual, tenemos que

$$f_n(z) = n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du.$$

Si integramos por partes, tenemos que

$$f_n(z) = n^z \left[\frac{(1-u)^n u^z}{z} \bigg|_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du \right] = \frac{n^z n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du.$$

Si volvemos a realizar integración por partes, se llega a que

$$f_n(z) = \frac{n^z n(n-1)}{z(z+1)} \int_0^1 (1-u)^{n-2} u^{z+1} du,$$

luego, si repetimos este proceso $n-2$ veces más, se obtiene que

$$f_n(z) = \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \int_0^1 u^{z+n-1} du = \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Tomando ahora límite, como probamos anteriormente que el límite del último miembro era precisamente $\Gamma(z)$, se deduce que

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \Gamma(z) \quad (\Re(z) > 0)$$

como queríamos demostrar. □

Gracias a la representación integral de Gamma, podemos dar una nueva expresión de esta función. En ella, se representa a la función Gamma como la suma de una serie y una integral parámetrica. Lo interesante es que en la serie aparecen los residuos de la función Gamma en sus polos y la integral paramétrica representa una función entera. A esta expresión de la función Gamma se la conoce como *desarrollo en serie de Mittag-Leffler.*

Teorema 4.10 (Desarrollo de Γ en serie de Mittag-Leffler)**.** *Se verifica la igualdad*

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

para todo $z \in \mathbb{C} \backslash \{0, -1, -2, \ldots\}$.

Demostración. De la representación integral de Gamma se sigue que

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \quad (\Re(z) > 0).$$

Denotamos por $\varphi(z)$ la primera integral del miembro derecho de la anterior igualdad. Si ahora reescribimos e^{-t} por su desarrollo en serie de potencias, se tiene

$$\varphi(z) = \int_0^1 \sum_{n=0}^\infty \left[(-1)^n \frac{t^n}{n!}\right] t^{z-1}dt.$$

Integrando término a término la expresión anterior, resulta que

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1}dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z+n)},$$

que es válida siempre que $\Re(z) > 0$. Sin embargo, esta serie es absolutamente y uniformemente convergente en compactos de $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. Por ello, $\varphi(z)$ representa una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos en los enteros negativos y el 0.

Es claro que

$$\Gamma(z) - \varphi(z) = \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

en el semiplano $\Re(z) > 0$, por tanto, se obtiene así que

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

en el citado semiplano. Sin embargo, φ es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ y la última integral es una función entera. Se sigue del Principio de Prolongación Analítica que la igualdad anterior es válida en la intersección de los dominios de Γ y φ, es decir, en $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ como queríamos demostrar. $\square$

4.7. La relación entre Gamma y la función Seno en $\mathbb{C}$

Nuestro objetivo en esta sección, será probar que la ecuación (3.8) se extiende a todo $\mathbb{C}$.

Al final del Capítulo 3, se probó que para todo $x \in \mathbb{R}$ se da la igualdad

$$\operatorname{sen}(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

Esta factorización del seno como producto resulta ser válida también para todo $z \in \mathbb{C}$. Para verlo, puesto que $\operatorname{sen}(\pi z)$ y el producto

$$\pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

coinciden para todo $z \in \mathbb{R}$, por el Principio de Prolongación Analítica se tendría que

$$\operatorname{sen}(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, siempre que el producto converja uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$.

Antes de comenzar la prueba, se utilizará la siguiente desigualdad, la cual se da en forma de Lema.

Lema 4.11. *Sea $u \in \mathbb{C}$ tal que $|u| \leq \frac{1}{2}$. Se verifica la desigualdad*

$$|\log(1+u)| \leq 2|u|.$$

Demostración. Puesto que $|u| \leq \frac{1}{2}$, la función $\log(1+u)$ admite el desarrollo en serie de potencias

$$\log(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n}.$$

Ahora, acotando esta expresión, se tiene

$$|\log(1+u)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u|^n}{n} = |u| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u|^n}{n+1} \leq |u| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2|u|,$$

obteniéndose así el resultado deseado. □

De hecho, lo importante para la prueba es que exista una constante $C > 0$ de modo que $|\log(1+u)| \leq C|u|$. La existencia de esta constante se puede deducir fácilmente viendo que $\log(1+u)/u$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$, por lo tanto, dicha función es holomorfa en cualquier compacto de $\mathbb{D}$, en particular en $\frac{1}{2}\overline{\mathbb{D}}$, luego su módulo está acotado en dicha región.

Veamos ahora, que en efecto, el producto mencionado converge unifórmemente en compactos de $\mathbb{C}$, y por tanto, define una función entera.

Demostración. Dado $K \subset \mathbb{C}$ compacto, existe $R > 0$ de modo que $|z| \leq R$ para todo $z \in K$. Sea N_R el menor entero estrictamente mayor que $2R$; tomando $n > N_R$, se tiene

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) = \prod_{k=1}^{N_R} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) \cdot \exp\left(\sum_{k=N_R+1}^{n} \log\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)\right).$$

Para $k > N_R$, se tiene que $|z|^2/k^2 \leq 1/4$, luego aplicando el Lema 4.11 para $u = z^2/k^2$, resulta que

$$\sum_{k=N_R+1}^{n} \left|\log\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)\right| \leq \sum_{k=N_R+}^{n} \frac{|z|^2}{k^2} \leq 2R \sum_{k=N_R+1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Debido a que la suma $\sum 1/k^2 < +\infty$, se sigue que $P_n(z)$ converge uniformemente en K. □

Ya tenemos probado entonces que

$$\operatorname{sen}(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Para relacionar la función Gamma con la función seno, partimos de la representación de Weierstrass de Γ. Consideramos el producto parcial

$$\frac{1}{\Gamma_m(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n},$$

el cual representa una función entera. Se deduce que

$$\frac{1}{\Gamma_m(-z)\Gamma_m(z)} = -z^2 \prod_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Tomando límite en m se obtiene que

$$\frac{1}{\Gamma(-z)\Gamma(z)} = -z^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

El último producto es el mismo que aparece en la factorización del seno como producto infinito, luego, tras una simple manipulación se halla la relación

$$\frac{\pi}{-z\Gamma(-z)\Gamma(z)} = \operatorname{sen}(\pi z),$$

o equivalentemente

$$\frac{\pi}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} = \operatorname{sen}(\pi z),$$

la cual es válida para todo $z \in \mathbb{C}$.

Capítulo 5

La función Zeta de Riemann

La función Zeta de Riemann es quizás la función especial más estudiada en el campo complejo, debido a su relación directa con los números primos. En este capítulo realizaremos un breve estudio de la función Zeta, en el cual, se relacionará dicha función con la Gamma.

5.1. Introducción

Comenzamos dando la definición de la función Zeta junto con algunas de sus propiedades.

Definición. Para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > 1$, se define la **función Zeta de Riemann** como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

entendiéndose n^s como $e^{s \log n}$.

Proposición 5.1. *La serie*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

define una función holomorfa en el semiplano $H_1 = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$.

Demostración. Por el Corolario 4.2, basta ver que la serie converge uniformemente en compactos del semiplano H_1. Sea $K \subset H_1$ compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\Re(s) \geq 1+\varepsilon$

para todo $s \in K$. Puesto que

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \left|\frac{1}{e^{s \log n}}\right| = \frac{1}{e^{\Re(s) \log n}} = \frac{1}{n^{\Re(s)}} \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}, \quad \forall s \in K,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

converge para todo $\varepsilon > 0$, se sigue del Criterio Mayorante de Weierstrass que la serie que define a la función Zeta converge uniformemente en K. $\square$

Mostramos ahora la relación que une a los números primos con la función Zeta de Riemann.

Proposición 5.2. *Se verifica para todo $s \in H_1$ que*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \tag{5.1}$$

donde $\mathbb{P}$ denota el conjunto de los números primos.

Demostración. Para cada $s \in H_1$ consideramos la función $P_s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ dada por

$$P_s(x) = \prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

el cual se evalúa en los primos p menores o iguales que x. Ya que cada término del producto anterior se puede ver como la suma de una serie geométrica de razón $1/p^s$, se puede escribir $P_s(x)$ como

$$P_s(x) = \prod_{p \leq x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}} \right).$$

Ahora bien, $P_s(x)$ es un producto finito, y cada uno de sus términos es una serie que se puede comprobar fácilmente que es absolutamente convergente. Por tanto, podemos reordenar los términos de este producto como queramos sin alterar su valor. Como cada término $1/n^s$ se puede escribir como

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{p_1^{a_1 s}} \cdots \frac{1}{p_r^{a_r s}}$$

de manera única, entonces podemos escribir

$$P_s(x) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^s},$$

siendo A el subconjunto de los números naturales que son producto de primos menores o iguales que x. Se deduce por tanto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - P_s(x) = \sum_{n \in B} \frac{1}{n^s},$$

donde B es el subconjunto de los números naturales que son divisibles por algún primo mayor que x. Se sigue de este hecho que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - P_s(x) \right| \leq \sum_{n \in B} \frac{1}{n^{\Re(s)}} \leq \sum_{n > x} \frac{1}{n^{\Re(s)}}.$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\Re(s)}$ es convergente (ya que $s \in H_1$), se sigue que la serie $\sum_{n>x} 1/n^{\Re(s)}$ tiende a 0 cuando hacemos tender x a infinito. Como el límite cuando x tiende a infinito de $P_s(x)$ es precisamente el producto

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

se sigue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

concluyéndose así el resultado. □

5.2. Relación con la función Gamma

La función Gamma está estrechamente relacionada con la función Zeta, como se verá en esta sección. De hecho, es posible extender la definición de la función Zeta a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con un polo simpe en $s = 1$ gracias a la función Gamma.

En primer lugar, damos la primera ecuación que relaciona a estas funciones.

Proposición 5.3. *Se verifica la siguiente igualdad*

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

para todo $s \in H_1$, donde se entiende que $t^{s-1} = e^{(s-1)\log t}$.

Demostración. Consideramos para cada $n \in \mathbb{N}$ la integral

$$\int_0^\infty t^{s-1} e^{-nt} dt. \tag{5.2}$$

Ya se vio en la sección 4.6 que dicha integral define una función holomorfa siempre que $\Re(s) > 1$. Realizando el cambio de variable $u = nt$ en (5.2), resulta

$$\int_0^\infty t^{s-1} e^{-nt} dt = \frac{1}{n^s} \int_0^\infty u^{s-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(s)}{n^s}.$$

Por esto, sumando (5.2) en cada $n \in \mathbb{N}$, se obtiene

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty t^{s-1} e^{-nt} dt.$$

Podemos intercambiar el orden de la suma y la integral en la anterior expresión por la convergencia absoluta. En efecto, sea $\sigma = \Re(s)$, se tiene que

$$\sum_{n=1}^\infty \left| \int_0^\infty t^{s-1} e^{-nt} dt \right| \leq \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty t^{\sigma-1} e^{-nt} dt = \Gamma(\sigma)\zeta(\sigma),$$

que converge para $\sigma > 1$. Finalmente, se sigue que

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty t^{s-1} \sum_{n=1}^\infty e^{-nt} dt = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

como queríamos demostrar. □

Este último Teorema nos sirve para relacionar la función Zeta de Riemann con la constante γ de Euler-Mascheroni. Antes de dar el resultado, será necesario probar el siguiente Lema, el cual nos da una definición alternativa de la mencionada constante.

Lema 5.4. *La constante γ de Euler-Mascheroni puede ser representada como*

$$\gamma = \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

Demostración. Comenzamos usando la igualdad

$$\int_0^\infty e^{-sx} dx = \frac{1}{s}. \tag{5.3}$$

Integramos la igualdad anterior desde $s = 1$ hasta $s = n \in \mathbb{N}$ para obtener

$$\int_1^n \int_0^\infty e^{-sx} dx ds = \int_1^n \frac{1}{s} ds = \log n.$$

Cambiando el orden de integración en la anterior igualdad e integrando respecto de s, llegamos a

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx = \log n.$$

Sustituyendo $s = 1, s = 2, \ldots, s = n$ en la igualdad (5.3) y sumando obtenemos

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_0^\infty (e^{-x} + e^{-2x} + \cdots + e^{-nx}) dx.$$

Gracias a estas igualdades, tenemos que la sucesión $a_n := \sum_{k=1}^n 1/k - \log n$ se puede escribir como

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n = \int_0^\infty (e^{-x} + e^{-2x} + \cdots + e^{-nx}) dx - \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx.$$

Ahora juntando las integrales y aprovechándonos de que tenemos una serie geométrica podemos rescribir la sucesión a_n como

$$\int_0^\infty \left(e^{-x} + e^{-2x} + \cdots + e^{-(n-1)x}\right) + e^{-nx} - \frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-nx}}{x} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{1 - e^{-x}} + e^{-nx} - \frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-nx}}{x} dx.$$

Tras unas breves manipulaciones y separar la integral en dos llegamos a

$$\int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) dx + \int_0^\infty e^{-nx} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) dx.$$

Las dos integrales anteriores son convergentes, ya que cuando $x \to 0$ ambos integrandos tienden a $1/2$ y las expresiones que quedan entre paréntesis en ambos integrandos están acotadas por una constante M en $[0, +\infty)$, pues cuando $x \to \infty$ estas expresiones tienden a 1 y 0 respectivamente. Con esto se deduce que

$$\int_0^\infty e^{-nx} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) dx \leq \int_0^\infty e^{-nx} M dx = \frac{M}{n},$$

luego tras tomar límite se obtiene

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n = \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) dx$$

concluyendo así la prueba. $\square$

Ahora sí estamos listos para probar el siguiente resultado.

Teorema 5.5. *Se verifica*

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\gamma.$$

Demostración. Usando la representación integral de la función Gamma y teniendo en cuenta que $\Gamma(s)/(s-1)=\Gamma(s-1)$ y la relación entre las funciones ζ y Γ se tiene que

$$\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)\Gamma(s)=\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt-\int_0^\infty e^{-t}t^{s-2}dt=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt.$$

Ahora es claro que tras tomar límite cuando s tiende a 1 se obtiene

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt=\gamma$$

como se quería demostrar. □

5.3. La ecuación funcional

A pesar que la función Zeta está definida para el semiplano $\Re(z)>1$, vamos a ver que es posible extender analíticamente dicha función sobre todo $\mathbb{C}$. Veremos así, que la función Zeta es de hecho una función meromorfa con un único polo en $z=1$. Para ello, hemos de probar primero otra ecuación que relaciona a las funciones Zeta y Gamma que nos será de gran utilidad para alcanzar nuestro objetivo.

Proposición 5.6. *Sea ρ un número real positivo y C_ρ el camino que consiste en recorrer el eje real desde $-\infty$ hasta $-\rho$, luego seguir una circunferencia de radio ρ alrededor del origen hasta volver a $-\rho$ y finalmente recorrer el eje real desde $-\rho$ hasta $-\infty$.*

En estas condiciones se verifica que, para cada $0<\rho<2\pi$, la integral

$$I_\rho(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z}dz$$

define una función entera respecto de s, y además, se verifica

$$\zeta(s)=\Gamma(1-s)I_\rho(s)$$

para todo s con $\Re(s)>1$ y para todo $\rho>0$.

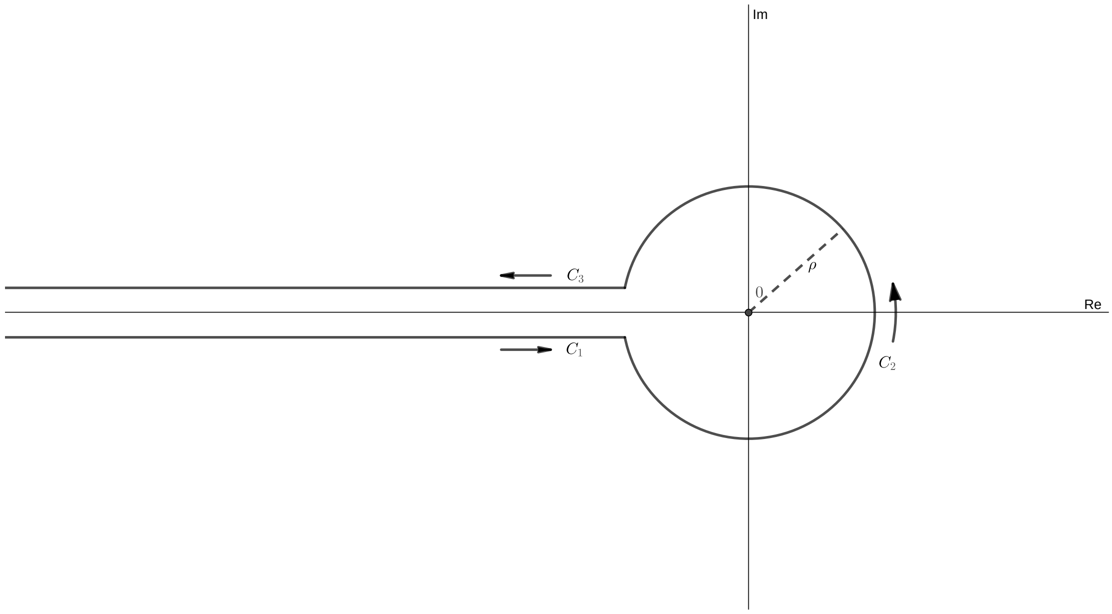

Figura 5.1: Camino de integración. Las semirrectas C_1 y C_3 no se muestran sobre el eje real para mejor comprensión del camino.

Demostración. A partir de ahora notaremos usualmente $s = \sigma + it$ siendo $\sigma = \Re(s)$ y $t = \Im(s)$. Denotaremos por C_1 el primer tramo, es decir, la semirecta que une $-\rho$ con ∞ por el eje real negativo, C_2 la circunferencia de radio ρ, y por C_3 el último tramo. De ahora en adelante se notará usualmente σ para referirnos a $\Re(s)$ y por t a $\Im(s)$. Primero veamos que $I_\rho(s)$ define una función entera. Para cada compacto $K \subset \mathbb{C}$ existe $R > 0$ tal que $|s| \leq R$ para todo $s \in K$.

En C_1 se tiene que $z = re^{-\pi i}$ y en C_3, $z = re^{\pi i}$. Por tanto, tanto en C_1 como en C_3 tenemos que $|z^{s-1}| = r^{\sigma-1}|e^{\pm\pi i(\sigma-1+it)}| = r^{\sigma-1}e^{\pm\pi t} \leq r^{R-1}e^{\pi R}$. Se deduce así que

$$\left|\frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z}\right| \leq \frac{r^{R-1}e^{\pi R}e^{-R}}{1-e^{-r}} = \frac{r^{R-1}e^{\pi R}}{e^r - 1},$$

y puesto que

$$\int_\rho^\infty \frac{r^{R-1}e^{\pi R}}{e^r-1}dr$$

converge siempre que $\rho > 0$, se tiene que las integrales a lo largo de C_1 y C_3 convergen uniformemente en cada compacto de $\mathbb{C}$, y por lo tanto, $I_\rho(s)$ es una función entera si $\rho > 0$.

Para la segunda parte, hemos de probar primero que el valor de $I_\rho(s)$ es independiente del ρ escogido, es decir, hemos de probar que $I_\rho(s) = I_\eta(s)$ para todo $\rho \neq \eta$.

Sin pérdida de generalidad, tomamos $0 < \eta < \rho$. Tenemos que

$$I_\rho(s) - I_\eta(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\eta} \frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda} \frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z}dz,$$

donde Λ es el camino que consiste en recorrer las circunferencias $|z| = \rho$ y $|z| = \eta$ en sentidos opuestos y el segmento que une $-\rho$ y $-\eta$ tanto en un sentido como en el otro.

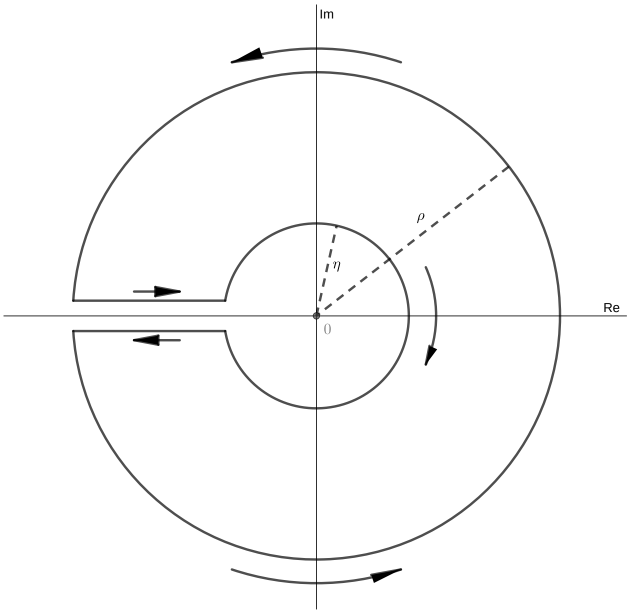

Figura 5.2: Camino de integración Λ.

Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\eta}^{\rho} \frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\rho}^{\eta} \frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z}dz = 0,$$

lo cual no es cierto en el segmento $-\rho \leq t \leq -\eta$ pero sí en $\eta \leq t \leq \rho$ debido a la rama escogida del logaritmo, podemos ver $I_\rho(s) - I_\eta(s)$ como

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda^*} \frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z}dz,$$

donde Λ^* es el camino resultante de añadir el segmento $\eta \leq t \leq \rho$ recorrido en ambos sentidos a Λ. Finalmente, podemos separar la integral como la suma de dos integrales donde los caminos de integración son dos semicoronas.

Del teorema integral de Cauchy se deduce que ambas integrales son nulas y por tanto, que $I_\rho(s) - I_\eta(s)$ es la función constante 0, y de ahí que $I_\rho(s)$ es independiente de ρ.

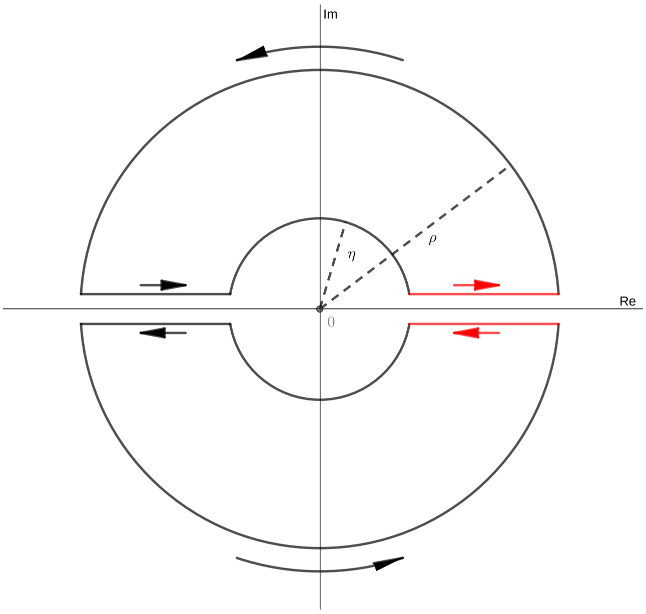

Figura 5.3: Camino de integración Λ^*. En rojo el segmento añadido a Λ, el cual se halla sobre el eje real.

Ahora, a lo largo de C_1 y C_3 escribimos $z = re^{-\pi i}$ y $z = re^{\pi i}$ respectivamente. Sobre C_2 hacemos $z = \rho e^{i\theta}$. Tras hacer estos cambios obtenemos

$$2\pi i I_\rho(s) = \int_\infty^\rho \frac{r^{s-1}e^{-\pi i(s-1)}e^{-r}}{1-e^{-r}}e^{-\pi i}dr + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho^{s-1}e^{i\theta(s-1)}i\rho e^{i\theta}e^{\rho e^{i\theta}}}{1-e^{\rho e^{i\theta}}}d\theta + \int_\rho^\infty \frac{r^{s-1}e^{\pi i(s-1)}e^{-r}}{1-e^{-r}}e^{\pi}dr.$$

Tras una breve simplificación nos queda

$$2\pi i I_\rho(s) = \int_\infty^\rho \frac{r^{s-1}e^{-\pi is}e^{-r}}{1-e^{-r}}dr + i\rho^s \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta s}e^{\rho e^{i\theta}}}{1-e^{\rho e^{i\theta}}}d\theta + \int_\rho^\infty \frac{r^{s-1}e^{\pi is}e^{-r}}{1-e^{-r}}dr,$$

y teniendo en cuenta ahora que $\operatorname{sen}(\pi s) = (e^{\pi is} - e^{-\pi is})/2i$, la igualdad anterior se puede escribir como

$$2\pi i I_\rho(s) = 2i\operatorname{sen}(\pi s)\int_\rho^\infty \frac{r^{s-1}e^{-r}}{1-e^{-r}}dr + i\rho^s \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta s}e^{\rho e^{i\theta}}}{1-e^{\rho e^{i\theta}}}d\theta.$$

Haciendo tender ρ a 0, es claro que la primera integral queda

$$\lim_{\rho\to 0}\int_\rho^\infty \frac{r^{s-1}e^{-r}}{1-e^{-r}}dr = \int_0^\infty \frac{r^{s-1}e^{-r}}{1-e^{-r}}dr = \Gamma(s)\zeta(s)$$

gracias a la Proposición 5.3 . Veamos ahora que al tomar límite la segunda integral tiende a 0.

Consideramos la función $g(z) = e^{-z}/(1 - e^{-z})$, la cual es meromorfa en el disco $|z| < 2\pi$ con un polo simple en $z = 0$, y por tanto, $g(z)z$ es una función holomorfa en el disco anterior. Al ser $g(z)z$ holomorfa en tal disco, está acotada por una cierta constante, digamos A. El integrando de la segunda integral es $e^{i\theta s}g(\rho e^{i\theta})$, de donde se deduce, siempre que $\rho < 2\pi$, que

$$\left| i\rho^s \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta s}e^{\rho e^{i\theta}}}{1 - e^{\rho e^{i\theta}}} d\theta \right| \leq \rho^\sigma \int_{-\pi}^{\pi} e^{-t\theta} \frac{A}{\rho} d\theta \leq 2\pi A e^{\pi|t|}\rho^{\sigma-1},$$

luego si $\sigma > 1$, tras hacer tender ρ a 0 se deduce que este término tiende a 0, luego se tiene que

$$\lim_{\rho\to 0} \pi I_\rho(s) = \operatorname{sen}(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s)$$

siempre que $\sigma > 1$. Finalmente, usando que $\operatorname{sen}(\pi s)\Gamma(s) = \pi/\Gamma(1-s)$ y que $I_\rho(s)$ es independiente de ρ, se obtiene

$$\zeta(s) = \Gamma(1-s)I_\rho(s)$$

como se quería probar. □

La fórmula anterior probada para $\sigma > 1$ puede usarse para prolongar analíticamente $\zeta(s)$ a $\sigma \leq 1$, ya que al estar bien definida sobre todo $\mathbb{C}$, se deduce tras usar el Prinicipio de Prolongación Analítica que esta definición de $\zeta(s)$ es la única extensión analítica sobre todo el plano.

Como $I_\rho(s)$ define una función entera, podemos ver que los polos de $\zeta(s)$ serán los polos de $\Gamma(1-s)$, los cuales se dan en $s = 1, 2, 3, \ldots$. Sin embargo, ya se probó que para $\sigma > 1$, $\zeta(s)$ era holomorfa, luego el único punto que podría ser polo es $s = 1$. Vamos a ver ahora que en efecto, $\zeta(s)$ posee un polo en $s = 1$, que además tiene residuo 1.

Proposición 5.7. *La función $\zeta(s)$ es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con un único polo, de residuo 1, en $s = 1$.*

Demostración. Primero separamos $I_\rho(s)$ en la suma de tres integrales $I_1(s), I_2(s)$ e $I_3(s)$ como se hizo en la prueba de la anterior proposición. Si tomamos $s = n \in \mathbb{Z}$, los integrandos de $I_1(n)$ y $I_3(n)$ coinciden, por lo que $I_\rho(n)$ se reduce a $I_2(n)$. Entonces para $n = 1$ tenemos

$$I_\rho(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{e^z}{1 - e^z} dz = \operatorname{Res}_0 \frac{e^z}{1 - e^z} = \lim_{z\to 0} \frac{ze^z}{1 - e^z} = \lim_{z\to 0} -\frac{1}{e^z} = -1$$

gracias al Teorema de los Residuos.

Ahora para hallar el residuo de $\zeta(s)$ en $s = 1$ basta evaluar el límite

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = \lim_{s\to 1} -(1-s)\Gamma(1-s)I_\rho(s) = \lim_{s\to 1} -\Gamma(2-s)\cdot(-1) = \Gamma(1) = 1.$$

Se deduce así el resultado deseado. □

Necesitaremos ahora el siguiente Lema antes de proseguir.

Lema 5.8. *Sea $S(r)$ la región de $\mathbb{C}$ que resulta tras quitar los discos de centro $2\pi ni$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ y radio $r \in (0, \pi)$. Entonces la función*

$$g(z) = \frac{e^z}{1-e^z}$$

está acotada uniformemente en $S(r)$.

Demostración. Consideramos el rectángulo agujereado

$$Q(r) = \{z \in \mathbb{C} : |\Re(z)| \leq 1, |\Im(z)| \leq \pi, |z| \geq r\}.$$

Al ser $Q(r)$ un compacto de $\mathbb{C}$ y g es holomorfa en $Q(r)$, $|g|$ es acotado en dicha región. Además, como $g(z)$ es periódica de período $T = 2\pi i$, se deduce que $|g(z)|$ está acotada en la banda $|\Re(z)| \leq 1$ quitando los discos de centro $2\pi ni$, $n \in \mathbb{Z}$ de radio r. Ahora basta probar que $g(z)$ está acotada cuando $|\Re(z)| \geq 1$ para concluir el resultado. Usando la desigualdad triangular inversa se tiene

$$|g(z)| = \left|\frac{e^z}{1-e^z}\right| = \frac{e^{\Re(z)}}{|1-e^z|} \leq \frac{e^{\Re(z)}}{|1-e^{\Re(z)}|}.$$

Si $\Re(z) \geq 1$ entonces $|1-e^{\Re(z)}| = e^{\Re(z)} - 1$ y

$$|g(z)| \leq \frac{e^{\Re(z)}}{e^{\Re(z)}-1} = \frac{1}{1-e^{-\Re(z)}} \leq \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}.$$

Si $\Re(z) \leq -1$ entonces $|1-e^{\Re(z)}| = 1 - e^{\Re(z)}$ y

$$|g(z)| \leq \frac{e^{\Re(z)}}{1-e^{\Re(z)}} \leq \frac{1}{1-e^{\Re(z)}} \leq \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}.$$

Como $S(r)$ es la unión de la banda mencionada anteriormente y la zona $|\Re(z)| \geq 1$, queda probado el resultado ya que $|g(z)|$ está acotada en ambas regiones. □

Gracias a estos dos resultados previos, podremos probar la ecuación funcional que satisface ζ, la cual permite evaluarla en todo el plano en términos de la función Γ, la función seno y la definición de $\zeta(s)$ para $\sigma > 1$.

Teorema 5.9 (Ecuación funcional de la función zeta de Riemann)**.** *La función $\zeta(s)$ verifica para todo $s \in \mathbb{C}$ la ecuación funcional*

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

Demostración. Consideramos ahora la integral

$$I_N(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(N)} \frac{z^{s-1} e^z}{1-e^z} dz, \tag{5.4}$$

donde $C(N), N \in \mathbb{N}$ es el camino siguiente mostrado en la Figura 5.4.

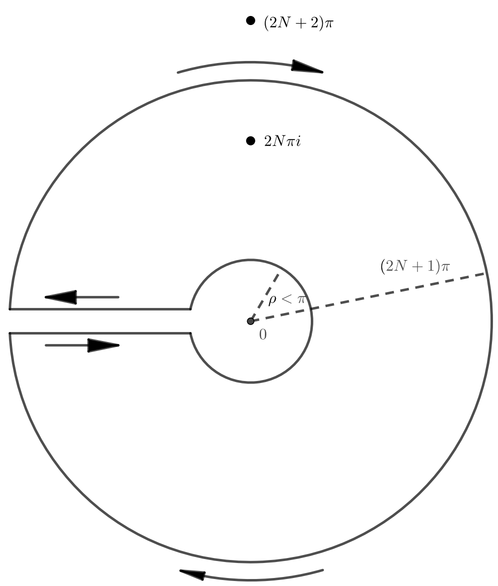

Figura 5.4: Camino de integración.

Hemos de probar que $\lim_{N\to\infty} I_N(s) = I_\rho(s)$, donde $I_\rho(s)$ está definido en la Proposición 5.6. Para ello basta probar que la integral a lo largo de la circunferencia de radio N tiende a 0 cuando N tiende a infinito. En esta circunferencia, tomamos $z = Ne^{i\theta}$, con $\theta \in [-\pi, \pi]$; por tanto

$$|z^{s-1}| = |N^{s-1} e^{i\theta(s-1)}| = N^{\sigma-1} e^{-t\theta} \leq N^{\sigma-1} e^{\pi|t|}.$$

Por el Lema 5.3, $|e^z/(1-e^z)|$ está uniformemente acotado puesto que el camino de integración se encuentra en la región $S(r)$. Sea $A > 0$ la cota de $|e^z/(1-e^z)|$; entonces el integrando está acotado por $AN^{\sigma-1}e^{\pi|t|}$. Por tanto se tiene

$$\left|\int_{|z|=N} \frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z}dz\right| \leq \int_{pi}^{\pi} AN^{\sigma-1}e^{\pi|t|}|dz| = 2\pi AN^{\sigma}e^{\pi|t|}.$$

Si añadimos la restricción $\sigma < 0$, es claro que la integral a lo largo de la curva tiende a 0 cuando N tiende a infinito. Cambiando s por $s-1$, se deduce que $\lim_{N\to\infty} I_N(1-s) = I_\rho(1-s)$ siempre que $\sigma > 1$. Podemos evaluar $I_N(s)$ gracias al Teorema de los Residuos, ya que los polos del integrando se dan en los puntos $z = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{N}$, luego resulta

$$I_N(1-s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(N)} \frac{z^{-s}e^z}{1-e^z}dz = -\sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} \operatorname{Res}_{2\pi in} \frac{z^{-s}e^z}{1-e^z},$$

donde el signo negativo se debe a que la curva está recorrida en sentido negativo. Ya que los polos del integrando son simples, podemos hallar el residuo en cada polo de la siguiente manera:

$$\operatorname{Res}_{2\pi in} \frac{z^{-s}e^z}{1-e^z} = \lim_{z\to 2\pi in}(z-2\pi in)\frac{z^{-s}e^z}{1-e^z} = \frac{e^{2\pi in}}{(2\pi in)^s}\lim_{z\to 2\pi in}\frac{z-2\pi in}{1-e^z} = -\frac{1}{(2\pi in)^s},$$

luego teniendo en cuenta que $i^{-s} = e^{-\pi is/2}$ e $(-i)^{-s} = e^{\pi is/2}$, obtenemos el valor de la integral

$$I_N(1-s) = \frac{e^{-\pi is/2}}{(2\pi)^s}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} + \frac{e^{\pi is/2}}{(2\pi)^s}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}.$$

Como estamos asumiendo que $\sigma > 1$, es claro que tras hacer tender N a infinito, y habida cuenta que $2\cos(\pi s/2) = e^{\pi s/2} + e^{-\pi is/2}$, se tiene que

$$I_\rho(1-s) = \frac{\zeta(s)}{(2\pi)^s}2\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right). \tag{5.5}$$

Ahora, por la Proposición 5.6 tenemos que $I_\rho(1-s) = \Gamma(1-s)/\zeta(s)$, luego tras realizar esta sustitución en (5.5), se obtiene

$$\frac{\zeta(1-s)}{\Gamma(s)} = \frac{\zeta(s)}{(2\pi)^s}2\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right).$$

Aunque la anterior ecuación ha sido probada para $\sigma > 1$, se extiende analíticamente para todo $s \in \mathbb{C}$. Finalmente, cambiando s por $1-s$, y teniendo en cuenta que $\cos(\pi(1-s)/2) = \operatorname{sen}(\pi s/2)$, se tiene el resultado deseado

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

□

5.4. Relación con $\pi(x)$

La función Zeta de Riemann juega un papel fundamental en el estudio de los números primos, en concreto, con la función contadora de primos $\pi(x)$ que cuenta el número de primos menores o iguales que x. El siguiente resultado muestra esta relación.

Teorema 5.10. *Se verifica*

$$\log \zeta(s) = s \int_2^\infty \frac{\pi(x)}{x(x^s-1)} dx$$

para todo $s \in H_1$.

Demostración. Recordamos que H_1 era el semiplano formado por los $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > 1$. Tomando logaritmos en (5.1) se tiene que

$$\log \zeta(s) = -\sum_{p\in\mathbb{P}} \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Teniendo en cuenta que $\pi(n) - \pi(n-1) = 1$ si y solo si n es primo, podemos escribir la última serie como

$$-\sum_{p\in\mathbb{P}} \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = -\sum_{n=2}^{\infty} [\pi(n) - \pi(n-1)] \log\left(1 - \frac{1}{n^s}\right)$$

ya que si n no es primo, entonces $\pi(n) - \pi(n-1) = 0$. Por este mismo motivo, la última serie puede ser expresada como

$$-\sum_{p\in\mathbb{P}} \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = -\sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) \left[\log\left(1 - \frac{1}{n^s}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{(n+1)^s}\right)\right].$$

La expresión que queda dentro de los corchetes es la diferencia entre la función $f(x) = -\log(1 - 1/x^s)$ evaluada en $x = n+1$ y $x = n$. Gracias a esto y teniendo en cuenta que $f'(x) = \frac{s}{x(x^s-1)}$, llegamos a

$$-\sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) \left[\log\left(1 - \frac{1}{n^s}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{(n+1)^s}\right)\right] = \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) \int_n^{n+1} \frac{s}{x(x^s-1)} dx.$$

Finalmente, usando que $\pi(x) = \pi(n)$ si $n \leq x < n+1$, se deduce que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) \int_n^{n+1} \frac{s}{x(x^s-1)} dx = s \int_2^\infty \frac{\pi(x)}{x(x^s-1)} dx,$$

y en consecuencia el resultado. □

De este resultado es posible probar el Teorema de los Números Primos, que es debido a De la Vallée-Poussin y Hadamard, el cual afirma que $\pi(x) \sim x/\log x$ cuando $x \to \infty$. Una prueba que usa este hecho puede verse en [17, 51-54].

5.5. Los números de Bernoulli

En esta sección vamos a calcular algunos valores de la función Zeta de Riemann. Para ello, hemos de introducir lo que se conoce como números de Bernoulli.

Definición. La función $\frac{z}{e^z-1}$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$, y por tanto, posee un desarrollo centrado en $z = 0$:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

En estas condiciones, se definen los **números de Bernoulli** como los elementos de la sucesión $B_n = a_n n!$ $(n = 1, 2, \ldots)$, es decir,

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

De manera más general, podemos definir los polinomios de Bernoulli.

Definición. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el **polinomio de Bernoulli** de orden n como la función $B_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que verifica

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$$

para todo z con $|z| < 2\pi$. De esta definición se sigue que $B_n(0) = B_n$.

A simple vista, los $B_n(x)$ no tendrían que ser polinomios. Vamos a probar ahora que, en efecto, son polinomios y cómo calcularlos de forma recursiva.

Proposición 5.11. *Las funciones $B_n(x)$ son polinomios y además se verifica:*

1.

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y

2.
$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$
para todo $n \geq 2$.

Demostración. Por definición tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n = \frac{z}{e^z - 1} e^{xz} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^n \right).$$

Multiplicando el último miembro e igualando término a término la serie de potencias, se obtiene por la unicidad de los coeficientes de Taylor que

$$\frac{B_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!},$$

luego sin más que multiplicar $n!$ en ambos términos obtenemos

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$$

como queríamos probar.

Para la segunda parte, observamos que

$$z = \frac{ze^z}{e^z - 1} - \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1) - B_n(0)}{n!} z^n.$$

Por lo tanto, $B_n(0) = B_n(1)$ para todo $n \geq 2$. Con esto en cuenta y sustituyendo $x = 1$ en la primera igualdad se obtiene directamente la segunda parte. □

De la proposición anterior se sigue la siguiente fórmula que nos permite hallar el n-ésimo número de Bernouilli.

Corolario 5.12. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$B_n = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k}{n+1}.$$

Por tanto, los números de Bernouilli son racionales.

n	B_n	$B_n(x)$
0	1	1
1	$-\frac{1}{2}$	$x-\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$	$x^2-x+\frac{1}{6}$
3	0	$x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$
4	$-\frac{1}{30}$	$x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}$
5	0	$x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x$
6	$\frac{1}{42}$	$x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42}$
7	0	$x^7-\frac{7}{2}x^6+\frac{7}{2}x^5-\frac{7}{6}x^3+\frac{x}{6}$

Cuadro 5.1: Tabla de los 7 primeros números y polinomios de Bernoulli.

Gracias a esta fórmula es suficiente conocer B_0 para calcular el resto de números de Bernouilli. Para calcular B_0 basta calcular $\lim_{z\to 0}\dfrac{z}{e^z-1}$. Usando la regla de L'Hôpital es fácil ver que este límite vale 1, por lo que $B_0 = 1$.

Según se puede observar en el Cuadro 5.1, podríamos pensar que los términos impares mayores que 1 de la sucesión B_n son todos nulos. Esto es de hecho cierto.

Lema 5.13. *Se cumple que $B_{2n+1} = 0$ para todo $n \geq 1$.*

Demostración. Puesto que $B_0 = 1$ y $B_1 = -1/2$, se tiene que

$$\frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{1}{2}z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{z^n} z^n,$$

es decir,

$$\frac{z}{e^z-1} + \frac{1}{2}z = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{z^n} z^n.$$

Si denotamos por $f(z)$ a la función que aparece en el miembro izquierdo de la anterior igualdad, vemos que

$$f(z) = \frac{z}{2}\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}\right) = \frac{-z}{2}\left(\frac{e^{-z}+1}{e^{-z}-1}\right).$$

De esta última igualdad es fácil ver que $f(z)$ es una función par, y por tanto, su desarrollo en serie de potencias en torno al origen sólo posee términos de grado par, probándose así el resultado. □

Una vez vistas algunas de las propiedades de los números de Bernoulli, vamos a ver ahora qué tienen que ver con la función Zeta de Riemann. Para ello, atendemos a la integral $I_\rho(s)$ previamente definida, la cual, abusando de notación nombraremos simplemente por $I(s)$ puesto que ya se vio que su valor era independiente de ρ. Por la Proposición 5.6, teníamos que $\zeta(s) = \Gamma(1-s)I(s)$. Tomando $s = -n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que $\zeta(-n) = \Gamma(n+1)I(-n) = n!I(-n)$. En la prueba de la Proposición 5.7, vimos que cuando $s = n \in \mathbb{Z}$, la integral $I(s)$ se reducía a

$$I(-n) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=\rho} \frac{z^{-n-1}e^z}{1-e^z} dz = \operatorname{Res}_0 \frac{z^{-n-1}e^z}{1-e^z}.$$

Esto último lo podemos escribir como

$$-\operatorname{Res}_0 z^{-n-2} \frac{ze^z}{e^z-1} = -\operatorname{Res}_0 z^{-n-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(1)}{k!} z^k,$$

y como el residuo es por definición el coeficiente a_1 en el desarrollo en serie de Laurent, se deduce que

$$I(-n) = -\frac{B_{n+1}(1)}{(n+1)!}$$

para todo $n \geq 0$.

Gracias a esto, se sigue inmediatamente que

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}(1)}{n+1}.$$

El desarrollo anterior muestra la estrecha relación entre la función Zeta de Riemann y los números de Bernoulli, ya que nos permiten evaluar la función Zeta en los enteros no positivos. Este hecho lo plasmamos en forma de teorema.

Teorema 5.14. *Para todo $n \geq 0$ se verifica*

$$\zeta(-n) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si } n = 0, \\ -\frac{B_{n+1}}{n+1} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Demostración. El resultado es claro para $n \geq 1$, ya que en este caso se tenía que $B_n(1) = B_n(0)$. Para $n = 0$, basta evaluar $B_1(x)$ en $x = 1$, y, habida cuenta que $B_1(x) = x - 1/2$, se sigue el resultado. □

Una consecuencia inmediata del Teorema anterior junto con el Lema 5.13 es que $\zeta(-2n) = 0$ para todo $n \geq 1$. Estos ceros son los denominados ceros triviales de la función Zeta de Riemann. Otra forma de ver estos ceros es simplemente sustituir en la ecuación funcional. Hemos de notar que el desarrollo de la ecuación funcional y el Teorema 5.14 han sido obtenidos de forma independiente. Esto nos da otra prueba del Lema 5.13.

Ya conocemos los valores de la función Zeta en los enteros negativos y el cero. Gracias a la ecuación funcional, vamos a ser capaces de conocer también qué ocurre para ciertos enteros positivos. Nos referimos en concreto a los enteros pares positivos. Si tomamos $s = -2n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) en la ecuación funcional, obtenemos

$$\zeta(-2n+1) = 2^{-2n+1}\pi^{-2n} \operatorname{sen}\left(-n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\Gamma(2n)\zeta(2n).$$

Teniendo en cuenta que $\zeta(-2n+1) = -B_{2n}/2n$, que $\Gamma(2n) = (2n-1)!$ y que $\operatorname{sen}(-n\pi + \pi/2) = (-1)^n$, se llega a

$$-\frac{B_{2n}}{2n} = 2(2\pi)^{-2n}(-1)^n(2n-1)!\zeta(2n).$$

Esto nos da la prueba del siguiente resultado que enunciamos en forma de teorema.

Teorema 5.15. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1}\frac{(2\pi)^{2n}B_{2n}}{2(2n)!},$$

es decir,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = (-1)^{n+1}\frac{(2\pi)^{2n}B_{2n}}{2(2n)!}.$$

Y por tanto, $\zeta(2n)$ es un número racional por una potencia de π.

Corolario 5.16. *La sucesión formada por los términos pares de los números de Bernoulli, es decir, la sucesión $\{B_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, es una sucesión alternada.*

Al final del Capítulo 3 se dio una solución del problema de Basilea usando propiedades de la función Gamma. El teorema anterior, no sólo nos da la solución al problema de Basilea, sino que nos da la suma de todos los recíprocos de las potencias pares. Algunos de estos valores son:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \qquad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}.$$

Capítulo 6

La función Zeta y las funciones aritméticas

En este capítulo vamos a relacionar la función Zeta de Riemann con las denominadas funciones aritméticas. Estas constituyen uno de los pilares principales de la teoría analítica de números. Gracias a ellas seremos capaces de dar expresiones que satisface la función Zeta de manera sencilla aprovechándonos principalmente de las propiedades de grupo. Primero se verá la definición de función aritmética junto con algunas de las principales funciones aritméticas y sus propiedades. Despúes se estudiará brevemente la convolución de Dirichlet y finalmente se verá la conexión de esta con las series de Dirichlet.

6.1. Funciones aritméticas

Definición. Una función real o compleja se dice que es una **función aritmética** cuando el dominio de esta es el conjunto de los números naturales.

Ahora se presenta un breve estudio sobre las principales funciones aritméticas.

6.1.1. La función φ de Euler

Definición. Se define la **función** $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ **de Euler** o **función indicatriz de Euler** a la función que a cada $n \in \mathbb{N}$ le asocia el número de naturales menores o iguales que n que son coprimos con n, es decir,

$$\varphi(n) = \#\{k \in \mathbb{N} : \mathrm{mcd}(n, k) = 1,\ k \leq n\}.$$

Primero vamos a tratar de encontrar una expresión cerrada para $\varphi(n)$. En primer lugar, de la definición se tiene que $\varphi(1) = 1$. También es claro que si n es primo, entonces $\varphi(n) = n - 1$. Veamos qué ocurre con la potencia de un primo.

Proposición 6.1. *Si $p \in \mathbb{N}$ es primo y $r \in \mathbb{N}$ entonces*

$$\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1} = p^{r-1}(p-1).$$

Demostración. La idea es contar los números que no son coprimos con p^r y restárselos. Como p es primo, los números que no son coprimos con p^r solo pueden ser los múltiplos de p, es decir, $p, 2p, \dots, p^{r-1}p$. Es claro entonces que hay p^{r-1} múltiplos de p, y de ahí se sigue que $\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1}$, como se quería demostrar. □

Ahora veamos qué ocurre con $\varphi(mn)$, donde $\operatorname{mcd}(m,n) = 1$.

Proposición 6.2. *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{mcd}(m,n) = 1$. Entonces*

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Demostración. Definimos U_{mn} como el conjunto de números coprimos con mn menores o iguales que mn, y de igual manera, U_m y U_n. Lo que tenemos que ver es que $\#U_{mn} = \#U_m \times U_n$. Pero esto lo tenemos ya que el Teorema Chino del Resto nos garantiza que existe una biyección entre U_{mn} y $U_m \times U_n$ porque m y n son coprimos. Con esto finaliza la prueba. □

Con estas dos últimas proposiciones ya somos capaces de dar una expresión cerrada para $\varphi(n)$, ya que todo número natural posee una única representación, salvo orden y producto por unidades, de números primos. Se tiene así que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi(n) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{r_j-1}(p_j - 1),$$

siendo $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$.

Para finalizar, mostramos la siguiente igualdad que verifica la función φ de Euler. Dicha igualdad resultará de gran utilidad en las secciones venideras.

Proposición 6.3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica*

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

La prueba de esta proposición se dará más adelante.

6.1.2. La función de Möbius μ

Definición. Se define la **función de Möbius** $\mu(n)$ como sigue:

$$\mu(n)=\begin{cases} 1 & \text{si } n=1,\\ 1 & \text{si } n \text{ es producto de un número par de primos distintos,}\\ -1 & \text{si } n \text{ es producto de un número impar de primos distintos,}\\ 0 & \text{en otro caso,}\end{cases}$$

es decir, si $n=p_1p_2\cdots p_k$ entonces $\mu(n)=(-1)^k$.

Una de las propiedades que satisface $\mu(n)$ es la siguiente.

Proposición 6.4. *Para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica*

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)=\begin{cases} 1 & si\ n=1,\\ 0 & si\ n>1.\end{cases}$$

Demostración. El resultado es trivial para $n=1$. Supongamos que $n>1$ y que $n=p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$. Los únicos términos que contribuyen en la suma $\sum_{d\mid n}\mu(d)$ son los $\mu(d)$ con d libre de cuadrados, ya que si d no es libre de cuadrados entonces $\mu(d)=0$. Ahora bien, los números libres de cuadrados que dividen a n son todos los posibles productos que se pueden formar con $p_1,\ldots,p_k$. De estos, es claro que hay $\binom{k}{1}$ formados por un único primo, $\binom{k}{2}$ formados por dos primos y así sucesivamente. Como $\mu(d)$ valdrá 1 si d está formado por un número par de primos y -1 si d está formado por un número impar de primos, se deduce que

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)=1+\binom{k}{1}(-1)+\binom{k}{2}(1)+\cdots+\binom{k}{k}(-1)^k=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j=(1-1)^k=0$$

por la fórmula del binomio de Newton. □

Finalmente vamos a ver una igualdad que relaciona a las funciones μ y φ y que nos será de gran utilidad cuando veamos la convolución de Dirichlet.

Proposición 6.5. *Para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene*

$$\varphi(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)\frac{n}{d}.$$

Demostración. Una de las formas en las que podemos escribir $\varphi(n)$ es como

$$\varphi(n)=\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor\frac{1}{\mathrm{mcd}(n,k)}\right\rfloor,$$

donde $\lfloor\cdot\rfloor$ denota la parte entera. Como

$$\left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n > 1, \end{cases}$$

tenemos gracias a la proposición previamente probada que $\lfloor 1/\operatorname{mcd}(n,k)\rfloor = \sum_{d \mid \operatorname{mcd}(n,k)} \mu(d)$, y en consecuencia, se obtiene

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{d \mid \operatorname{mcd}(n,k)} \mu(d) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \mid k}} \mu(d).$$

Ahora bien, fijado un divisor d de n, hemos de sumar sobre los enteros k que sean múltiplos de d con $k \leq n$. Entonces, escribimos $k = qd$, y $k \leq n$ si y solo si $q \leq n/d$. Teniendo esto en cuenta, podemos escribir

$$\varphi(n) = \sum_{d \mid n} \sum_{q=1}^{n/d} \mu(d) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \sum_{q=1}^{n/d} 1 = \sum_{d \mid n} \mu(d) \frac{n}{d},$$

como se quería probar. □

6.1.3. La función de Mangoldt Λ

Definición. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define la función $\Lambda(n)$ **de Mangoldt** como

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^m \text{ para algún primo } p \text{ y algún natural } m, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La función de Mangoldt satisface varias igualdades interesantes por sí mismas que a su vez son de gran importancia en el estudio de la distribución de los números primos.

Proposición 6.6. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$\log n = \sum_{d \mid n} \Lambda(d).$$

Demostración. Para $n = 1$ el resultado es trivial. Para $n > 1$, escribimos $n = \prod_{j=1}^{k} p_j^{r_j}$ y tomamos logaritmos para obtener

$$\log n = \sum_{j=1}^{k} r_j \log p_j.$$

En la suma $\sum_{d|n} \Lambda(d)$, los únicos sumandos no nulos se dan para los divisores d de la forma $p_j^m, m = 1, 2, \ldots, r_j$, y $j = 1, 2, \ldots, k$. Con esto en cuenta se puede escribir

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{r_j} \Lambda(p_j^m) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{r_j} \log p_j = \sum_{j=1}^{k} r_j \log p_j = \log n,$$

completándose así la prueba. □

Para finalizar tenemos también el siguiente resultado, el cual será probado más adelante.

Proposición 6.7. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{n}{d} = -\sum_{d|n} \mu(d) \log d.$$

6.1.4. La función de Liouville λ

Definición. Se define la **función de Liouville** $\lambda(n)$ como

$$\lambda(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^{r_1 + \cdots + r_k} & \text{si } n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}. \end{cases}$$

La principal propiedad que posee la función de Liouville es la siguiente.

Proposición 6.8. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & \textit{si } n \textit{ es un cuadrado perfecto}, \\ 0 & \textit{en otro caso}. \end{cases}$$

La prueba de esta proposición se dará más adelante. La función de Liouville está también relacionada con la función de Möbius como se muestra a continuación.

Proposición 6.9. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$\sum_{d|n} \lambda(d) |\mu(n/d)| = \begin{cases} 1 & \textit{si } n = 1, \\ 0 & \textit{si } n > 1. \end{cases}$$

La demostración de esta proposición se dará más adelante.

6.1.5. La función divisor σ_α

Definición. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cualquier valor α real o complejo se define la **función divisor** $\sigma_\alpha(n)$ como

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha,$$

es decir, la suma de la α-ésima potencia de los divisores de n.

Algunos casos particulares se dan cuando $\alpha = 0$ ó $\alpha = 1$. En el primer caso, $\sigma_0(n)$ indica el número de divisores de n, y en el segundo caso, $\sigma_1(n)$ da la suma de los divisores de n.

Podemos dar una fórmula cerrada para $\sigma_\alpha(n)$. La demostración de esta fórmula se dará en la sección siguiente.

Proposición 6.10. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $\alpha \neq 0$ se tiene*

$$\sigma_\alpha(n) = \prod_{j=1}^{k} \frac{p_j^{\alpha(r_j+1)} - 1}{p_j^\alpha - 1},$$

donde $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$. Si $\alpha = 0$, entonces

$$\sigma_0(n) = \prod_{j=1}^{k} (r_j + 1).$$

6.2. La convolución de Dirichlet

A lo largo de la sección anterior, han aparecido en numerosas ocasiones sumas realizadas sobre los divisores de un número natural. Este tipo de sumas son claves para estudiar las funciones aritméticas. Gracias a las propiedades que veremos que poseen, seremos capaces de demostrar resultados que pueden parecer tediosos, de una manera mucho más sencilla.

6.2.1. El grupo de las funciones aritméticas

Definición. Se define la **convolución de Dirichlet** o **producto de Dirichlet** de dos funciones aritméticas f y g como la función arítmetica

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Usaremos el símbolo $*$ para denotar esta operación. Por tanto, $h = f * g$.

Esta operación guarda sorprendentes propiedades, las cuales nos permitirán construir un grupo bajo $*$ con una parte de las funciones aritméticas.

Proposición 6.11. *El producto de Dirichlet es conmutativo y asociativo. Es decir, dadas f, g, h funciones aritméticas, se verifica:*

- $f * g = g * f$
- $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Demostración. La conmutativad es evidente si nos fijamos en que

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{ab=n} f(a)g(b).$$

Para la asociatividad tenemos

$$(f * (g * h)) = \sum_{ab=n} f(a)(g * h)(b) = \sum_{ab=n} f(a) \left(\sum_{rs=b} g(r)h(s)\right) = \sum_{ars=n} f(a)g(r)h(s).$$

Repitiendo el mismo proceso pero para $((f * g) * h)$ se llega a la misma expresión, quedando así probado el resultado. □

Ya tenemos conmutatividad y asociativad. Nos falta encontrar un elemento neutro y ver si es posible construir el inverso de una función aritmética para poder definir un grupo abeliano.

Por la definición del producto de Dirichlet, si f, g son dos funciones aritméticas, sabemos que una de las sumas que aparece siempre en la definición de $(f * g)(n)$ es $f(n)g(1)$. Con esto en cuenta, podemos definir nuestro elemento neutro como la función $I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $I(1) = 1$ y $I(n) = 0$ en otro caso. Con estos argumentos es clara la vericidad del siguiente resultado.

Proposición 6.12. *Sea $I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función aritmética definida como*

$$I(n) = \begin{cases} 1 & si\ n = 1, \\ 0 & si\ n > 1. \end{cases}$$

*Se verifica para toda función aritmética f que $I * f = f * I = f$. A esta función la llamaremos **función identidad**.*

Ahora vamos a ver un resultado que nos permitirá establecer la inversa de una función aritmética bajo la multiplicación de Dirichlet. Lo único que hemos de exigir es que la función no se anule cuando $n = 1$.

Proposición 6.13. *Sea f una función aritmética con $f(1) \neq 0$. Entonces existe una única función f^{-1} , a la que llamaremos inversa de Dirichlet de f, tal que*

$$f * f^{-1} = f^{-1} * f = I.$$

Demostración. Vamos a proceder a construir f^{-1} de forma recursiva. Para $n = 1$ hemos de resolver $(f*f^{-1})(1) = I(1) = 1$. Por tanto tenemos que resolver $f(1)f^{-1}(1) = 1$, de lo que se deduce que $f^{-1}(1) = 1/f(1)$. Es por este motivo que debemos exigir que $f(1) \neq 0$. Supongamos ahora que hemos hallado $f^{-1}(k)$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Para hallar ahora $f^{-1}(n)$ hemos de resolver $(f * f^{-1})(n) = I(n) = 0$. Esto es, resolver

$$\sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) = 0.$$

Esto último lo podemos escribir como

$$f(1)f^{-1}(n) + \sum_{\substack{d|n \\ d\neq n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) = 0.$$

Ahora basta despejar $f^{-1}(n)$, teniéndose así

$$f^{-1}(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d\neq n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d).$$

□

Gracias a todos estos resultados, tenemos que el conjunto de funciones aritméticas que no se anulan en $n = 1$ forman un grupo abeliano bajo la multiplicación de Dirichlet. Con esto, la prueba de la Proposición 6.3 surge de manera sencilla.

Demostración de la Proposición 6.3. Si denotamos por $u(n)$ a la función aritmética que vale constantemente 1, la Proposición 6.4 nos dice en términos de la multiplicación de Dirichlet que $\mu * u = I$. Es decir, que u es la inversa de Dirichlet de μ. Por otra parte, la Proposición 6.5 nos muestra que $\varphi = \mu * N$, donde $N(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Con esto en cuenta se deduce que

$$\varphi * u = u * \mu * N = N,$$

es decir, que

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

como se quería demostrar. $\square$

La misma idea que hemos usado para la demostración anterior, se puede usar para dar el resultado general. A este se le conoce como *fórmula de Inversión de Möbius.*

Teorema 6.14 (Fórmula de inversión de Möbius)**.** *Para todo par f, g de funciones aritméticas y para todo n natural se tiene que*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right),$$

o en términos de la convolución de Dirichlet,

$$f = g * u \Leftrightarrow g = f * \mu.$$

Demostración. El resultado es claro teniendo en cuenta que $u = \mu^{-1}$. Algo importante a tener en cuenta es que esta fórmula es válida aunque $f(0) = 0$ ó $g(0) = 0$. $\square$

Este resultado nos da una prueba muy sencilla de la Proposición 6.7.

Demostración de la Proposición 6.7. La Proposición 6.6 nos viene a decir que $\Lambda * u = \log n$. Aplicando la fórmula de inversión de Möbius se obtiene $\Lambda = \mu * \log n$, y teniendo en cuenta tambíen que $\log(n) \cdot I(n) = 0$ y $\sum_{d|n} \mu(d) = I(n)$ para todo n natural se llega

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{n}{d} = \log(n) \sum_{d|n} \mu(d) - \sum_{d|n} \mu(d) \log(d) = -\sum_{d|n} \mu(d) \log(d)$$

como se quería demostrar. $\square$

6.2.2. El subgrupo de las funciones multiplicativas

Ahora vamos a considerar un subconjunto de las funciones aritméticas de gran interés. Nos referimos al subconjunto de funciones multiplicativas que se introduce a continuación.

Definición. Una función aritmética f se dice que es **multiplicativa** si no es idénticamente nula y verifica que

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$ con $\operatorname{mcd}(m, n) = 1$. Si además f verifica la propiedad anterior para todo $m, n \in \mathbb{N}$, se dirá que es **completamente multiplicativa**.

Ya hemos visto varios ejemplos de funciones multiplicativas. La función φ de Euler es multiplicativa como puede verse en una de sus propiedades. Es fácil comprobar también que las funciones μ de Möbius y λ de Liouville son multiplicativas. En concreto, la función de Liouville es completamente multiplicativa. Veamos ahora algunas de las propiedades que poseen las funciones multiplicativas.

Proposición 6.15. *Si f es una función multiplicativa entonces $f(1) = 1$.*

Demostración. Sea f una función multiplicativa. Para todo n natural se tiene que $\mathrm{mcd}(n, 1) = 1$, por lo tanto, $f(n) = f(n)f(1)$. Como f no es idénticamente nula, existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) \neq 0$. Por tanto, podemos cancelar en la expresión $f(n) = f(n)f(1)$ para llegar a que $f(1) = 1$. $\square$

Esta condición necesaria de función multiplicativa es de gran utilidad para identificar funciones no multiplicativas. Por ejemplo, la función de Mangoldt no es multiplicativa ya que $\Lambda(1) = 0$.

La siguiente proposición nos servirá en numerosas ocasiones para encontrar expresiones para funciones multiplicativas y completamente multiplicativas. La prueba de esta proposición se sigue directamente de las definiciones de funcion multiplicativa y completamente multiplicativa.

Proposición 6.16. *Si $f(1) = 1$ entonces f es multiplicativa si y solo si verifica*

$$f(p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}) = f(p_1^{r_1}) \cdots f(p_k^{r_k})$$

para todo primo p_j y para todo natural r_j.

Si f es multiplicativa, entonces f es completamente multiplicativa si y solo si verifica

$$f(p^r) = f(p)^r$$

para todo primo p y para todo natural r.

Para poder garantizar que el conjunto de las funciones multiplicativas forman un subgrupo de las funciones aritméticas que no se anulan en $n = 1$ hemos de ver que el producto de Dirichlet de dos funciones multiplicativas también es multiplicativa. Esto nos lo garantiza el siguiente teorema.

Teorema 6.17. *Sea f, g dos funciones multiplicativas, entonces $f * g$ también es multiplicativa.*

Demostración. Sean f, g dos funciones y multiplicativas y sea $h = f * g$ y $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{mcd}(m, n) = 1$. Tenemos que

$$h(mn) = \sum_{c|mn} f(c)g\left(\frac{mn}{c}\right).$$

Como m y n son primos relativos entre sí, podemos escribir cada divisor d de n como $d = ab$ donde $a|m$ y $b|n$. Además, necesariamente $\mathrm{mcd}(a,b) = 1$ y $\mathrm{mcd}(m/a, n/b) = 1$, por lo que podemos escribir $h(mn)$ como

$$h(mn) = \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(ab) g\left(\frac{mn}{ab}\right) = \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(a) f(b) g\left(\frac{m}{a}\right) g\left(\frac{n}{a}\right).$$

Finalmente, podemos reordenar la última suma para llegar a

$$\sum_{a|m} f(a) g\left(\frac{m}{a}\right) \sum_{b|n} f(b) g\left(\frac{n}{b}\right) = \left(\sum_{a|m} f(a) g\left(\frac{m}{a}\right)\right) \left(\sum_{b|n} f(b) g\left(\frac{n}{b}\right)\right) = h(m)h(n)$$

como se quería demostrar. □

Una utilidad inmediata de estas dos últimas Proposiciones es la facilidad que dan para demostrar las Proposiciones 6.8 y 6.9.

Demostración de las Proposiciones 6.8 y 6.9. Sea $g(n) = \sum_{d|n} \lambda(d)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notamos que $g = \lambda * u$, y al ser tanto $\lambda(n)$ como $u(n)$ funciones multiplicativas se deduce que $g(n)$ también lo es. Por ello, basta evaluar $g(p^r)$ para p primo y r natural. Tenemos

$$g(p^r) = \sum_{d|p^r} \lambda(d) = 1 + \lambda(p) + \lambda(p^2) + \cdots + \lambda(p^r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ es impar,} \\ 1 & \text{si } r \text{ es par.} \end{cases}$$

Por tanto, si $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ se tiene por ser g multiplicativa que $g(n) = g(p_1^{r_1}) \cdots g(p_k^{r_k})$. Por ello, si algún r_j es impar, entonces $g(n) = 0$, mientras que si todos los r_j son pares, entonces n es un cuadrado perfecto y $g(n) = 1$, concluyéndose así el primer resultado.

Para el segundo, hemos de probar en términos de la convolución de Dirichlet que $\lambda * |\mu| = I$. El resultado es claro para $n = 1$. Para $n > 1$ basta probarlo para $n = p^r$, pero es inmediato ver que

$$\sum_{d|p^r} |\mu(d)| \lambda(p^r/d) = \sum_{j=0}^{r} |\mu(p^j)| \lambda(p^{r-j}) = (-1)^r + (-1)^{r-1} = 0,$$

probándose así el resultado. □

De la misma manera podemos probar la Proposición 6.10. Para ello introducimos la función aritmética N^α para cualquier α real o complejo tal que $N^\alpha(n) = n^\alpha$.

Demostración de la Proposición 6.10. Es claro que N^α es una función multiplicativa (de hecho, es completamente multiplicativa). De la definición de $\sigma_\alpha(n)$ vemos que $\sigma = u * N^\alpha$; por tanto $\sigma(n)$ es una función multiplicativa por ser producto de Dirichlet de dos funciones multiplicativas. Por ello tan sólo nos hace falta computar $\sigma_\alpha(p^r)$ para cada primo p y cada natural r. Tenemos entonces

$$\sigma_\alpha(p^r) = \sum_{d|p^r} d^\alpha = 1 + p^r + p^{2\alpha} + \cdots + p^{r\alpha} = \begin{cases} \frac{p^{\alpha(r+1)}-1}{p^\alpha - 1} & \text{si } \alpha \neq 0, \\ r+1 & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

El resultado sigue tomando $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$. □

6.3. La función Zeta y las funciones aritméticas

En este apartado vamos a desarrollar numerosas expresiones en las que se ven involucradas la función Zeta y las funciones aritméticas vistas anteriormente. Todo esto es posible gracias a la conexión que poseen las funciones aritméticas con las series de Dirichlet, las cuales son introducidas a continuación.

Definición. Las series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s},$$

donde $s \in \mathbb{C}$ y f es una función aritmética, son conocidas como **series de Dirichlet**.

La función Zeta de Riemann es, en el semiplano en el que la serie es convergente, la serie de Dirichlet en la cual $f = u$ (recordamos que u es la función aritmética que vale constantemente 1). Una característica de las series de Dirichlet es la región de convergencia absoluta. Esta región es siempre un semiplano del tipo $\Re(s) > \sigma_a$. Esto es fácil de ver notando que $|f(n)/n^s| = |f(n)|/n^\sigma$, y que si la serie converge absolutamente en algún $s_0 \in \mathbb{C}$, entonces converge absolutamente en el semiplano $\Re(s) > s_0$. El siguiente Teorema nos muestra la relación entre las funciones aritméticas y las series de Dirichlet. Como siempre, denotamos $\sigma = \Re(s)$.

Teorema 6.18. *Sean $F(s), G(s)$ las funciones definidas por*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad y \quad G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}.$$

Supongamos además que las series que definen a F y G convergen absolutamente en los semiplanos $\sigma > a$ y $\sigma > b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, respectivamente. Entonces, en el semiplano

$\sigma > \text{máx}(a, b)$, *es decir, el semiplano donde ambas series convergen absolutamente, se tiene que*

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

donde $h = f * g$.

Demostración. En el semiplano en el que ambas series convergen absolutamente tenemos que

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(n)g(m)}{(nm)^s}.$$

Como la serie converge absolutamente, podemos reordenar la serie sin cambiar su valor. Para cada $k \in \mathbb{N}$ tomamos los términos tales que $mn = k$, obteniendo así

$$F(s)G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sum_{mn=k} f(n)g(m)}{k^s}.$$

Y como $\sum_{mn=k} f(n)g(m)$ es otra forma de escribir $(f * g)(k)$, se deduce finalmente que

$$F(s)G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(k)}{k^s}.$$

□

Gracias a este teorema podemos establecer ciertas relaciones entre la función Zeta y las funciones aritméticas previamente vistas. A continuación se muestran algunos de estos resultados.

6.3.1. La función Zeta y la función φ de Euler

Proposición 6.19. *En el semiplano* $\sigma > 2$ *se tiene*

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}.$$

Demostración. Como la función Zeta de Riemann es la serie de Dirichlet asociada a la función u, hemos de buscar relaciones entre esta función y φ. De la Proposición 6.3 tenemos que $\varphi * u = N$, por lo que, usando ahora el teorema anterior, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}} = \zeta(s-1).$$

Teniendo en cuenta que $\varphi(n) \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es fácil ver que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)/n^s$ converge absolutamente en el semiplano $\sigma > 2$. Por tanto, se concluye que para todo s con $\sigma > 2$ se tiene que

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}.$$

□

Observación. Aunque la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)/n^s$ no sea convergente en todo el plano complejo, se puede extender a una función meromorfa gracias al resultado anterior.

6.3.2. La función Zeta y la función μ de Möbius

Proposición 6.20. *En el semiplano $\sigma > 1$ se tiene*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Demostración. Basta usar la Proposición 6.4, la cual nos dice que $\mu * u = I$, y usar el Teorema sobre el producto dos series de Dirichlet para llegar a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \zeta(s) = 1.$$

La convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ en el semiplano $\sigma > 1$ es trivial teniendo en cuenta que $|\mu(n)| \leq 1$. □

6.3.3. La función Zeta y la función Λ de Mangoldt

Proposición 6.21. *En el semiplano $\sigma > 1$ se tienen las igualdades*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

y

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \frac{1}{n^s}.$$

Demostración. Por la Proposición 6.6 tenemos que $\log n = \Lambda * u$, de lo que se deduce que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Por otra parte, derivando término a término la serie que define a la función Zeta en el semiplano $\sigma > 1$ se tiene que

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}.$$

Es fácil ver que la anterior serie es absolutamente convergente si $\sigma > 1$. Se deduce entonces de las dos últimas expresiones que

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Integrando ahora término a término se deduce también que

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \frac{1}{n^s},$$

donde la convergencia absoluta de la serie en el semiplano $\sigma > 1$ es clara debido a que $\Lambda(n) \leq \log n$. □

6.3.4. La función Zeta y la función de Liouville λ

Proposición 6.22. *En el semiplano $\sigma > 1$ se tiene*

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}.$$

Demostración. De la Proposición 6.8 tenemos que $(\lambda * u)(n)$ vale 1 si $n = m^2$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y 0 en otro caso. De esto se deduce que

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \sum_{\substack{n=1 \\ n=m^2}} \frac{1}{n^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2s}} = \zeta(2s).$$

La convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)/n^s$ en el semiplano $\sigma > 1$ es trivial debido a que $|\lambda(n)| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

6.3.5. La función Zeta y la función divisor σ_α

Proposición 6.23. *Para todo $\sigma > \text{máx}(1, 1 + \Re(\alpha))$ se tiene*

$$\zeta(s)\zeta(s-\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s}.$$

Demostración. Por definición, $\sigma_\alpha = N^\alpha * u$, de lo se deduce que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s} = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-\alpha).$$

Ya se probó que la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ se daba cuando $\Re(s) > 1$; por lo tanto, cambiando $s \mapsto s - \alpha$, la serie convergerá asbolutamente siempre que $\Re(s-\alpha) > 1$, es decir, siempre que $\Re(s) > 1 + \Re(\alpha)$, teniéndose así el resultado deseado. □

6.3.6. Otras igualdades

Usando igualdades entre funciones aritméticas se pueden encontrar numerosas fórmulas que relacionan la función Zeta de Riemann con series de Dirichlet. Para concluir el capítulo, vamos a mostrar unas cuantas fórmulas de este tipo. Estas son:

$$\begin{aligned}
\zeta^2(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}, \\
\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s}, \\
\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}}{n^s}, \\
\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s}, \\
\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)^2}{n^s}.
\end{aligned}$$

La función $\omega(n)$ es la función aritmética que indica el número de primos distintos que dividen a n y $d(n)$ es la función aritmética que cuenta el número de dvisores de n, es decir, $d(n) = \sigma_0(n)$. La primera igualdad es un caso particular de la Proposición 6.23. Las segunda igualdad se obtiene aplicando el Teorema 6.18 a la igualdad

$$(\lambda * u) * |\mu| = u,$$

que sigue de la Proposición 6.9 y la asociatividad de la convolución de Dirichlet.

Las tres últimas igualdades se obtienen de nuevo usando el Teorema 6.18 y las igualdades

$$u * |\mu| = 2^\omega, \quad u(n) * 2^{\omega(n)} = d(n^2) \quad \text{y} \quad u(n) * d(n^2) = d(n)^2.$$

Estas tres últimas pueden probarse fácilmente usando el mismo argumento que en la demostración de la Proposición 6.8, ya que todas las funciones aritméticas que intervienen son multiplicativas. Además, no es complicado ver que todas las igualdades son válidas en el semiplano $\sigma > 1$.

Capítulo 7

La hipótesis de Riemann

La hipótesis de Riemann es quizás el problema abierto más conocido en la actualidad. El matemático Bernhard Riemann publicó en 1859 su famoso artículo *Uber die Anzahl der Primzahlem unter einer gegebenen Grösse*, que se traduce como *Sobre el número de primos menores que una cantidad dada.* En este artículo Riemann comenta que parece muy probable que todos los ceros no triviales de la función Zeta de Riemann se encuentren sobre la recta $\Re(s) = 1/2$, pero que ha sido incapaz de probarlo. Este enunciado es precisamente lo que se conocce como Hipótesis de Riemann.

Figura 7.1: Bernhard Riemann en 1863.

7.1. Localización de los ceros de la función Zeta

La ecuación funcional que satisface la función Zeta de Riemann

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

nos permite encontrar los denominados ceros triviales como ya se vio en el Capítulo 5. Basta ver que sustituyendo los valores $s = -2n$ ($n \in \mathbb{N}$) en la ecuación funcional, se obtiene inmediatamente que $\zeta(-2n) = 0$. Para el resto de valores enteros pares esto no era cierto, pues, a pesar de que la función seno que aparece en la ecuación funcional tiene ceros simples en estos valores, la función $\zeta(1-s)$ tiene un polo simple en $s = 0$ al igual que la función $\Gamma(1-s)$ en $s = 2n$.

La cuestión ahora es localizar el resto de ceros, es decir, los ceros no triviales. El resto de términos de la ecuación funcional no nos ayuda a localizar más ceros debido a que ninguno de los términos distintos de la función seno y $\zeta(1-s)$ poseen ceros. Lo que sí que nos va ayudar a detectar dónde pueden encontrarse el resto de ceros es la expresión de la función Zeta como producto funcional.

Recordamos que la función Zeta de Riemann satisface la igualdad

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

cuando $\sigma > 1$ (recordemos que $\sigma = \Re(s)$). Esta expresión en forma de producto funcional nos muestra que la función Zeta de Riemann no se anula en el anterior semiplano. Pero entonces, la función Zeta tampoco puede anularse (a excepción de los ceros triviales) en el semiplano $\sigma < 0$ debido a la ecuación funcional, ya que para que $\zeta(1-s)$ se anulara cuando $\sigma > 1$ también debería hacerlo $\zeta(s)$. Esto muestra que los ceros no triviales están localizados en la banda $0 \leq \sigma \leq 1$. De hecho, es posible probar que la función Zeta tampoco se anula en la recta $\sigma = 1$ como vamos a ver a continuación. Para ello hemos de ver dos resultados previos.

Lema 7.1. *Para todo $t \in \mathbb{R}$ se verifica la desigualdad*

$$3 + 4\cos(t) + \cos(2t) \geq 0.$$

Demostración. Desarrollando la desigualdad

$$(1 + \cos(t))^2 \geq 0$$

se obtiene que

$$1 + 2\cos(t) + \cos^2(t) \geq 0.$$

Ahora basta usar la identidad trigonométrica $\cos^2(t) = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$ y multiplicar por 2 la desigualdad para obtener el resultado. □

Ahora vemos una proposición que es clave para nuestro objetivo.

Proposición 7.2. *En el semiplano $\sigma > 1$ se verifica*

$$|\zeta(\sigma)^3\zeta(\sigma+it)^4\zeta(\sigma+2it)| \geq 1. \tag{7.1}$$

Demostración. Por la Proposición 6.21 tenemos que

$$\log\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\log n}\frac{1}{n^s}$$

en el semiplano $\sigma > 1$. Ahora, como $n^s = n^\sigma e^{it\log n}$, se sigue que

$$\log|\zeta(s)| = \Re(\log\zeta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\log n}\frac{1}{n^\sigma}\cos(t\log n).$$

Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}
&3\log|\zeta(\sigma)| + 4\log|\zeta(\sigma+it)| + \log|\zeta(\sigma+2it)| = \\
=&3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\log n}\frac{1}{n^\sigma} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\log n}\frac{1}{n^\sigma}\cos(t\log n) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\log n}\frac{1}{n^\sigma}\cos(2t\log n) = \\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\log n}\frac{1}{n^\sigma}(3 + 4\cos(t\log n) + \cos(2t\log n).
\end{aligned}$$

Pero por el lema anterior, el último término es mayor o igual que cero, y por ello se deduce que

$$3\log|\zeta(\sigma)| + 4\log|\zeta(\sigma+it)| + \log|\zeta(\sigma+2it)| \geq 0.$$

Ahora bien, esto es equivalente a la desigualdad

$$|\zeta(\sigma)^3\zeta(\sigma+it)^4\zeta(\sigma+2it)| \geq 1,$$

probándose así el resultado deseado. □

Con los dos resultados anteriores resulta sencillo probar que la función Zeta no se anula en la recta $\sigma = 1$.

Teorema 7.3. *Se tiene que $\zeta(1+it) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Dividiendo por $\sigma - 1$ en (7.1) se obtiene la desigualdad

$$|(\sigma-1)\zeta(\sigma)|^3\left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4|\zeta(\sigma+2it)| \geq \frac{1}{\sigma-1}.$$

Ahora bien, si la función Zeta se anulara en el punto $s = 1 + i\alpha$ ($\alpha \neq 0$), entonces tomando límite cuando σ tiende a 1 por la derecha, resultaría que

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \frac{\zeta(\sigma + i\alpha)}{\sigma - 1} = \lim_{\sigma \to 1^+} \frac{\zeta(\sigma + i\alpha) - \zeta(1 + i\alpha)}{\sigma - 1} = \zeta'(1 + i\alpha).$$

El término $|(\sigma - 1)\zeta(\sigma)|^3$ tiende a 1 cuando σ tiende a 1 puesto que $\zeta(s)$ tenía un polo simple de residuo 1 en $s = 1$. El término $|\zeta(\sigma + 2i\alpha)|$ tendería a $|\zeta(1 + 2i\alpha)|$ tras tomar límite, luego resultaría que

$$\lim_{\sigma \to 1^+} |(\sigma - 1)\zeta(\sigma)|^3 \left| \frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1} \right|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| = |\zeta'(1 + i\alpha)|^4 \, |\zeta(1 + 2i\alpha)|,$$

el cual es finito. Sin embargo,

$$\lim_{\sigma \to 1^+} \frac{1}{\sigma - 1} = +\infty,$$

lo que no es posible. Por tanto, la función Zeta de Riemann no se anula en la recta $\sigma = 1$. $\square$

Como consecuencia, se deduce que $\zeta(it) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y por tanto, que los ceros no triviales de la función Zeta de Riemann están localizados en la banda crítica $0 < \sigma < 1$.

En la Figura 7.2 se muestra la función Zeta de Riemann usando una coloración de dominio. Esta técnica de representación consiste en asignar un color al argumento y un brillo determinado al módulo de cada $z \in \mathbb{C}$, de manera que cada punto del plano complejo queda determinado por un color y una intensidad. Luego cada punto del plano se colorea con su imagen mediante esta coloración. En la representación que usamos, los tonos claros indican módulos grandes mientras que los oscuros indican módulos pequeños. Hemos escogido una gama cromática de colores para representar el argumento principal, donde los $z \in \mathbb{C}$ con argumentos principales cercanos a 0 están representados por colores rojizos mientras que los que tienen argumentos principales cercanos a π ó $-\pi$ están coloreados con tonos azules.

En la representación se pueden apreciar los ceros triviales de la función Zeta de Riemann, los cuales se ven como puntos negros. También se ven como puntos negros los dos primeros ceros no triviales sobre la recta crítica (donde uno es el conjugado del otro), los cuales, usando un software de cálculo averiguamos que son $s \approx 1/2 + 14,1347i$ y $s \approx 1/2 - 14,1347i$. También se puede observar el polo que tiene la función Zeta en $s = 1$, el cual se ve como un punto blanco.

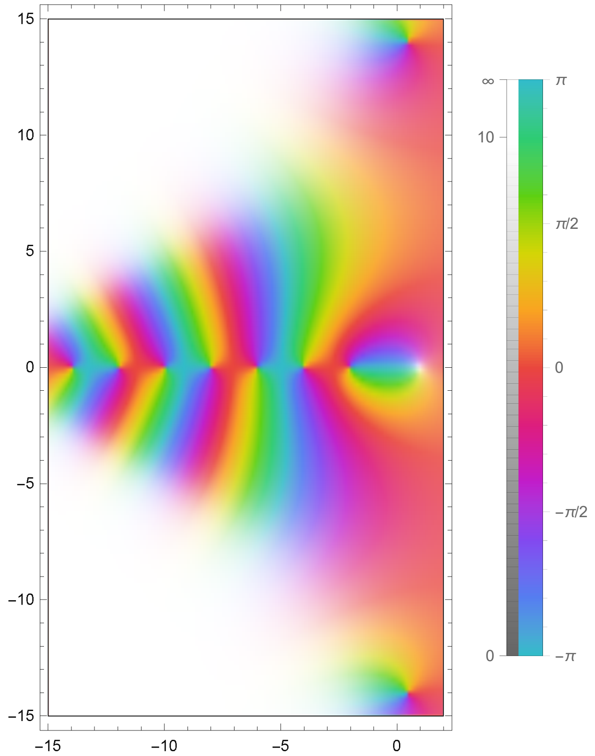

Figura 7.2: Representación de $\zeta(s)$ en el rectángulo de bordes $s = -15 - 15i$ y $s = 2 + 15i$.

7.2. La función Zeta en la banda crítica

Fuera de la banda crítica es más o menos sencillo computar la función Zeta de Riemann, pues cuando $\sigma > 1$, se tiene una expresión concreta de $\zeta(s)$, y cuando $\sigma < 0$, basta usar la ecuación funcional, la cual estaba formada por funciones bien conocidas. El problema surge al intentar evaluar $\zeta(s)$ en la banda crítica, ya que la ecuación funcional no nos sirve, pues si s está en la banda crítica, entonces $1 - s$ también lo está. En esta sección vamos a ver cómo podemos extender la función Zeta de Riemann en la banda crítica de una manera razonable. Para ello, necesitamos antes ver un resultado sobre la convergencia uniforme de las series de Dirichlet.

Teorema 7.4. *Si la serie de Dirichlet* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ *converge en un punto* $s = s_0$, *entonces converge uniformemente en el cono* $C_\alpha(s_0) = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s-s_0) \geq 0, \, |\arg(s-s_0)| \leq \alpha\}$ *para cada* $0 < \alpha < \pi/2$.

Demostración. Podemos suponer que $s_0 = 0$, ya que en otro caso basta hacer una traslación. Si la serie converge en $s = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, por tanto, el resto $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ tiende a 0, y por ello, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|r_n| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Dados ahora $s \in C_\alpha(0)$ y $M, N \in \mathbb{N}$ con $n_0 < M < N$, podemos escribir

$$\sum_{n=M}^{N} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=M}^{N} \frac{r_{n-1} - r_n}{n^s} = \frac{r_{M-1}}{M^s} - \frac{r_N}{(N+1)^s} + \sum_{n=M}^{N} r_n \left(\frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s} \right).$$

Por otro lado tenemos que

$$\left| \frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s} \right| = \left| s \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} \right| \le |s| \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{\sigma+1}} = \frac{|s|}{\sigma} \left(\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma} \right).$$

Juntando todo lo anterior, obtenemos por la desigualdad triangular y teniendo en cuenta que $\sigma \ge 0$ que

$$\left| \sum_{n=M}^{N} \frac{a_n}{n^s} \right| \le \frac{\varepsilon}{M^\sigma} + \frac{\varepsilon}{(N+1)^\sigma} + \frac{\varepsilon |s|}{\sigma} \sum_{n=M}^{N} \left(\frac{1}{n^\sigma} - \frac{1}{(n+1)^\sigma} \right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{M^\sigma} + \frac{\varepsilon}{(N+1)^\sigma} + \frac{\varepsilon |s|}{\sigma} \left(\frac{1}{M^\sigma} - \frac{1}{(N+1)^\sigma} \right) \le 2 \frac{\varepsilon |s|}{\sigma} + 2\varepsilon = 2\varepsilon \left(1 + \frac{|s|}{\sigma} \right).$$

Ahora, si $|\arg s| \le \alpha < \pi/2$, entonces $t/\sigma \le \tan(\alpha)$ (donde recordamos que $t = \Im(s)$). Como $|s| = \sqrt{t^2 + \sigma^2}$, se deduce que

$$\frac{|s|}{\sigma} = \sqrt{1 + \frac{t^2}{\sigma^2}} \le \sqrt{1 + \tan^2(\alpha)} = \frac{1}{\cos(\alpha)}.$$

Se sigue entonces que

$$\sum_{n=M}^{N} \frac{a_n}{n^s} \le 2\varepsilon \left(1 + \frac{1}{\cos(\alpha)} \right).$$

Como ε no depende de s, se sigue que la convergencia de la serie es uniforme en el cono $C_\alpha(0)$. □

Ahora vamos a presentar una nueva función, la cual viene dada por una serie de Dirichlet. A esta función se la conoce como función Eta de Dirichlet.

Definición. Para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > 0$ se define la *función Eta de Dirichlet* como

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}.$$

Proposición 7.5. *La serie*

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

define una función holomorfa en el semiplano derecho $\Re(s) > 0$.

Demostración. Para probar el resultado hemos de ver que la serie converge uniformemente en compactos del semiplano derecho. Sea K un compacto de tal semiplano, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\Re(s) \geq \varepsilon$ para todo $s \in K$. La serie de Dirichlet que define a la función Eta es convergente en el punto $s = \varepsilon/2$ por el criterio de Leibniz, y como K es acotado, podemos encontrar $\alpha \in (0, \pi/2)$ de modo que $K \subset C_\alpha(\varepsilon/2)$. Se sigue del Teorema 7.4 que la serie converge uniformemente en K, probándose así el resultado deseado. □

Con este resultado ya podemos ver de qué manera se relacionan la función Zeta de Riemann y la función Eta, y como esta relación nos sirve para extender el dominio de definición a la banda crítica.

Teorema 7.6. *En el semiplano derecho $\Re(s) > 0$ se da la igualdad*

$$\eta(s) = \left(1 - \frac{2}{2^s}\right)\zeta(s).$$

Demostración. Comenzamos probando la igualdad en el semiplano $\Re(s) > 1$. En dicho semiplano, hemos de probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = \left(1 - \frac{2}{2^s}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Se tiene que

$$\left(1 - \frac{2}{2^s}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s}.$$

Teniendo en cuenta ahora que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^s}$$

el resultado es claro. Entonces tenemos probada la igualdad

$$\eta(s) = \left(1 - \frac{2}{2^s}\right)\zeta(s)$$

en el semiplano $\Re(s) > 1$, pero, la función $(1-2/2^s)\zeta(s)$ es una función entera ya que el término $(1-2/2^s)$ tiene un cero simple en $s = 1$. Se sigue del Principio de Prolongación Analítica que las funciones $\eta(s)$ y $(1 - 2/2^s)\zeta(s)$ coinciden en la intersección de sus regiones de holomorfía, siendo esta el semiplano derecho. □

Una consecuencia inmediata, es que la función Zeta de Riemann no se anula en el segmento $(0,1)$ y además, en dicho segmento es real y negativa. Esto es debido a que si $s \in (0,1)$, el término $(1-2/2^s)$ es negativo y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^s} - \frac{1}{(2n)^s},$$

lo que muestra que el valor de $\eta(s)$ es estrictamente positivo, y en consecuencia, que $\zeta(s) < 0$ cuando $0 < s < 1$.

Es más, sabiendo que la función Zeta toma valores reales en todo el segmento $(0,1)$, podemos deducir del Principio de Reflexión de Schwarz que $\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)}$ para todo s en la banda crítica (de hecho es cierto en todo $\mathbb{C} \setminus \{1\}$). Esto nos muestra que si en un punto $s = s_0$ de la banda crítica fuera $\zeta(s_0) = 0$, entonces también $\zeta(\overline{s}) = 0$. Más aún, por la ecuación funcional que satisface la función Zeta de Riemann, si se tuviera que $\zeta(s_0) = 0$, con s_0 en la banda crítica, entonces también $\zeta(1-s_0) = 0$. Lo notable de este hecho es que, el punto $1-s_0$ es el simétrico respecto del punto $s = 1/2$ de s_0, lo que muestra la simetría de los ceros de la función Zeta de Riemann. Estos dos hechos anteriores muestran que si hubiera un cero fuera de la recta crítica, entonces se obtendrían inmediatamente otros tres ceros fuera de la recta crítica, siendo uno de ellos el simétrico respecto de $s = 1/2$ y los otros dos los conjugados de los ceros anteriores. Obviamente, en el caso en el que $\Re(s) = 1/2$, el conjugado y el simétrico de s coinciden. Por ello, a la hora de buscar ceros en la recta crítica, basta buscarlos en el semiplano superior.

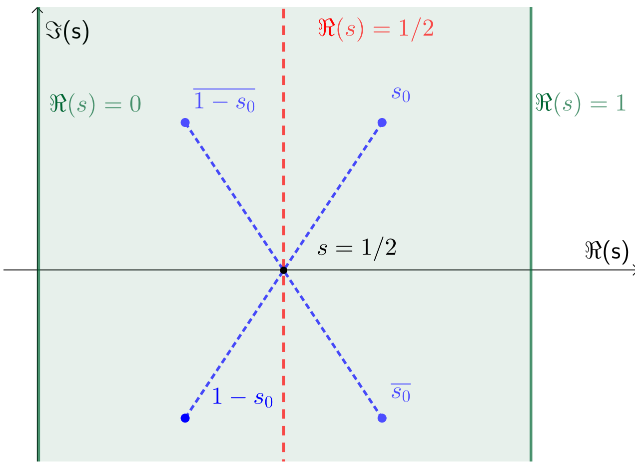

Figura 7.3: La imagen muestra la simetría que tendría un cero de la función Zeta que estuviera fuera de la recta crítica.

7.3. Conjeturas que implican la Hipótesis de Riemann

En esta sección veremos alguna hipótesis que de ser ciertas probarían la Hipótesis de Riemann. Para poder probarlo primero hemos de estudiar el método de sumación de Abel.

7.3.1. El método de sumación de Abel

El resultado que vamos a ver a continuación, el cual es conocido como *Fórmula de Abel* es de gran utilidad a la hora de encontrar igualdades entres series y expresiones integrales.

Teorema 7.7 (Fórmula de sumación de Abel). *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos. Dado $x > 0$, denotamos*

$$A(x) = \sum_{n\leq x} a_n,$$

con el convenio $A(x) = 0$ si $x < 1$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ con derivada continua en el intervalo $[y, x]$ con $0 < y < x$. Entonces se verifica

$$\sum_{y<n\leq x} a_n f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt.$$

Demostración. Usando que $a_n = A(n) - A(n-1)$, podemos escribir

$$\sum_{y<n\leq x} a_n f(n) = \sum_{n=\lfloor y\rfloor+1}^{\lfloor x\rfloor} a_n f(n) = \sum_{n=\lfloor y\rfloor+1}^{\lfloor x\rfloor} (A(n) - A(n-1))f(n),$$

donde $\lfloor\cdot\rfloor$ denota la parte entera. Ahora, tras separar la anterior suma en dos y cambiar índices se obtiene

$$\sum_{n=\lfloor y\rfloor+1}^{\lfloor x\rfloor} (A(n) - A(n-1))f(n) =$$

$$= \sum_{n=\lfloor y\rfloor+1}^{\lfloor x\rfloor} A(n)f(n) - \sum_{n=\lfloor y\rfloor}^{\lfloor x\rfloor-1} A(n)f(n+1) =$$

$$= A(\lfloor x\rfloor)f(\lfloor x\rfloor) - A(\lfloor y\rfloor)f(\lfloor y\rfloor + 1) + \sum_{n=\lfloor y\rfloor+1}^{\lfloor x\rfloor-1} A(n)(f(n) - f(n+1)). \tag{7.2}$$

Con estas manipulaciones hemos conseguido que aparezca el término $f(n) - f(n+1)$, el cual podemos escribir como una integral. Por tanto, se puede escribir

$$\sum_{n=\lfloor y\rfloor+1}^{\lfloor x\rfloor-1} A(n)(f(n) - f(n+1)) = -\sum_{n=\lfloor y\rfloor+1}^{\lfloor x\rfloor-1} A(n)\int_n^{n+1} f'(t)dt.$$

Como el valor de $A(n)$ es constante en el intervalo $(n, n+1)$, podemos introducirlo dentro de la integral, de manera que

$$\sum_{n=\lfloor y\rfloor+1}^{\lfloor x\rfloor-1} A(n)(f(n) - f(n+1)) = -\sum_{n=\lfloor y\rfloor+1}^{\lfloor x\rfloor-1}\int_n^{n+1} A(t)f'(t)dt = -\int_{\lfloor y\rfloor+1}^{\lfloor x\rfloor} A(t)f'(t)dt.$$

Gracias a esto, podemos escribir (7.2) como

$$A(\lfloor x\rfloor)f(\lfloor x\rfloor) - A(\lfloor y\rfloor)f(\lfloor y\rfloor+1) - \int_{\lfloor y\rfloor+1}^{\lfloor x\rfloor} A(t)f'(t)dt.$$

Si sumamos y restamos las integrales correspondientes, la expresión anterior queda como

$$-\int_y^x A(t)f'(t)dt + A(\lfloor x\rfloor)f(\lfloor x\rfloor) - A(\lfloor y\rfloor)f(\lfloor y\rfloor+1) + \int_{\lfloor x\rfloor}^x A(t)f'(t)dt + \int_y^{\lfloor y\rfloor+1} A(t)f'(t)dt.$$

Ahora basta usar la regla de Barrow y tener en cuenta que $A(t) = A(x)$ en el intervalo $(\lfloor x\rfloor, x)$ y que $A(t) = A(y)$ en el intervalo $(y, \lfloor y\rfloor+1)$ para obtener

$$A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt$$

como queríamos probar. □

Un caso particular del teorema anterior que usaremos con frecuencia se da tomando $y \leq 1$.

Corolario 7.8. *En las condiciones del teorema anterior se tiene*

$$\sum_{n\leq x} a_n f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt,$$

siendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función con derivada continua en el intervalo $[1, x]$.

Veamos ahora cómo podemos usar la fórmula de sumación de Abel para encontrar igualdades que involucren a la función Zeta de Riemann. Comenzamos considerando la función $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(x) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s},$$

siendo $x > 0$ la variable y $s \in \mathbb{C}$ fijo. Si consideramos ahora la sucesión $a_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $f(s) = 1/n^s$, entonces resulta que

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} = \sum_{n \leq x} a_n f(n),$$

luego podemos aplicar la fórmula de sumación de Abel. Esto nos conduce a

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{\sum_{n \leq x} 1}{x^s} + s \int_1^x \frac{\sum_{n \leq t} 1}{t^{s+1}} dt = \frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} + s \int_1^x \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} dt,$$

ya que $f'(s) = -s/t^{s+1}$. Si ahora imponemos que $\Re(s) > 1$, entonces haciendo tender x a infinito se deduce que

$$\zeta(s) = \lim_{x \to \infty} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} + s \int_1^x \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} dt \right) = s \int_1^\infty \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} dt,$$

puesto que $\lfloor x \rfloor / x^\sigma \leq 1/x^{\sigma - 1}$, que tiende a cero si $\sigma > 1$. Es sencillo comprobar utilizando el Teorema 4.3 que la función definida mediante la integral paramétrica

$$s \int_1^\infty \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} dt$$

representa una función analítica en el semiplano $\sigma > 1$. Se sigue por tanto del Principio de Prolongación Analítica que

$$\zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} dt$$

en el semiplano previamente citado. Este resultado se enuncia como proposición.

Proposición 7.9. *En el semiplano $\sigma > 1$ se da la igualdad*

$$\zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} dt.$$

De la proposición anterior podemos encontrar otra expresión similar que será válida en el semiplano derecho $\sigma > 0$. Para ello, notamos que

$$s\int_1^\infty \frac{-t+1/2}{t^{s+1}}dt = -\frac{1}{2} - \frac{1}{s-1},$$

siempre que $\sigma > 1$. Sumando y restando en la igualdad de la proposición anterior se deduce que

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{\lfloor t\rfloor - t + 1/2}{t^{s+1}}dt + \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} \tag{7.3}$$

en el semiplano $\sigma > 1$. Sin embargo, es fácil ver que la función que define la integral anterior es una función holomorfa en el semiplano derecho $\sigma > 0$, y $1 + 1/(s-1)$ es una función meromorfa con un polo simple en $s = 1$. Por el Principio de Prolongación Analítica se deduce que la igualdad se da en todo el semiplano derecho.

Otro hecho interesante, es que, la fórmula anterior da una demostración alternativa del Teorema 5.5.

Demostración alternativa del Teorema 5.5. Restando $1/(s-1)$ en la fórmula (7.3) se deduce que

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = s\int_1^\infty \frac{\lfloor t\rfloor - t + 1/2}{t^{s+1}}dt + \frac{1}{2},$$

luego tomando límites se obtiene

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \lim_{s\to 1} s\int_1^\infty \frac{\lfloor t\rfloor - t + 1/2}{t^{s+1}}dt + \frac{1}{2} = \int_1^\infty \frac{\lfloor t\rfloor - t + 1/2}{t^2}dt + \frac{1}{2}$$

por la convergencia absoluta de la integral. Teniendo ahora en cuenta que $\int_1^\infty dt/2t^2 = 1/2$, se sigue que

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \int_1^\infty \frac{\lfloor t\rfloor - t}{t^2}dt + 1 = \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{\lfloor t\rfloor - t}{t^2}dt + 1.$$

Finalmente, es claro que

$$\int_1^n \frac{\lfloor t\rfloor}{t^2}dt = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{k}{t^2}dt = \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k},$$

y

$$\int_1^n \frac{-t}{t^2}dt = -\int_1^n \frac{dt}{t} = -\log n.$$

De esto se deduce que

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{\lfloor t\rfloor - t}{t^2}dt + 1 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n = \gamma,$$

probándose así el resultado deseado. □

7.3.2. La conjetura de Mertens

A lo largo del resto de la sección se usará la notación $\mathcal{O}$ de Landau, la cual se define a continuación.

Definición. Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$$

si existen unas constantes $a \in \mathbb{R}$ y $C > 0$ tales que $|f(x)| \leq Cg(x)$ para todo $x \geq a$. La función $g(x)$ debe ser positiva para todo $x \geq a$.

A continuación, se define la función de Mertens.

Definición. Para todo $x > 0$ se define la **función de Mertens** como

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n).$$

Lo que conecta a esta función con la Hipótesis de Riemann en su crecimiento. Veamos su gráfica.

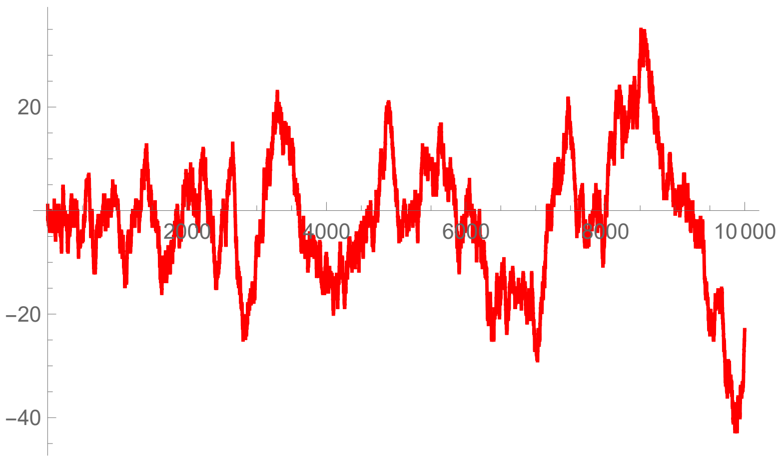

Figura 7.4: La función de Mertens desde $x = 0$ hasta $x = 10000$.

Como se puede observar, la función de Mertens es bastante irregular, debido principalmente a que la definición de la función μ de Möbius depende de la factorización de cada natural. Sin embargo, parece que la función tiene un crecimiento estable. Veamos qué ocurre al compararla con la función $\sqrt{x}$.

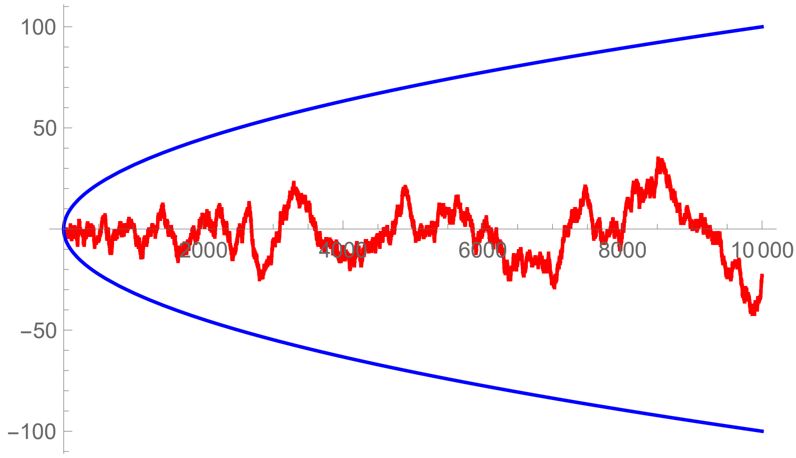

Figura 7.5: La función de Mertens y las funciones $\sqrt{x}$ y $-\sqrt{x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 10000$.

La gráfica anterior sugiere que $|M(x)| < \sqrt{x}$ para todo $x > 1$. Este enunciado es precisamente lo que se conoce como *conjetura de Mertens*. Gracias a la fórmula de sumación de Abel seremos capaces de probar que de ser cierto el resultado anterior, entonces la Hipótesis de Riemann es cierta.

Teorema 7.10. *La conjetura de Mertens implica la Hipótesis de Riemann. Es decir, si para todo $x > 1$ se tiene que $M(x) < \sqrt{x}$, entonces todos los ceros no triviales de la función Zeta de Riemann se encuentran en la recta crítica.*

Demostración. En el capítulo anterior, vimos en la Proposición 6.20 que se daba la igualdad

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

en el semiplano $\sigma > 1$. Usando la fórmula de sumación de Abel para la sucesión $a_n = \mu(n)$ y la función $f(x) = 1/x^s$, se deduce que

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{M(x)}{x^s} + s\int_1^x \frac{M(t)}{t^{s+1}}dt.$$

Es claro que $|M(x)| \leq x$ para todo $x > 0$, puesto que $|\mu(n)| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, si $\Re(s) > 1$, entonces el término $M(x)/x^s$ tiende a cero cuando x tiende a infinito. Esto nos conduce a la igualdad

$$\frac{1}{\zeta(s)} = s\int_1^{\infty} \frac{M(t)}{t^{s+1}}dt$$

en el semiplano $\sigma > 1$, siempre que la integral sea convergente. Las dos primeras hipótesis del Teorema de analiticidad de integrales paramétricas (4.3) son inmediatas. Si suponemos cierta la conjetura de Mertens, entonces se tiene que

$$\left|\frac{M(t)}{t^{s+1}}\right| = \frac{|M(t)|}{t^{\sigma+1}} \leq \frac{\sqrt{t}}{t^{\sigma+1}} = \frac{1}{t^{\sigma+1/2}}.$$

Ahora bien, la integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^{\sigma+1/2}} dt$$

es finita siempre que $\sigma > 1/2$. Esto prueba que la función definida por

$$s\int_1^\infty \frac{M(t)}{t^{s+1}} dt$$

es analítica en todo el semiplano $\sigma > 1/2$. Se sigue del Principio de Prolongación Analítica que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = s\int_1^\infty \frac{M(t)}{t^{s+1}} dt$$

en el semiplano anterior, luego la función $1/\zeta(s)$ es analítica a la derecha de la recta $\Re(s) = 1/2$ y por tanto su valor es finito. Esto muestra que $\zeta(s) \neq 0$ para todo s con $\Re(s) > 1/2$, y por la simetría de los ceros de la función Zeta, también $\zeta(s) \neq 0$ si $0 < \Re(s) < 1/2$, probándose así que los ceros no triviales de la función Zeta se encuentran sobre la recta $\Re(s) = 1/2$. □

Lamentablemente, la conjetura de Mertens ha sido probada falsa (ver [9]). Sin embargo, es posibe debilitar las hipótesis de la conjetura de Mertens de manera que siga implicándose la Hipótesis de Riemann.

Teorema 7.11. *Si para todo $\delta > 0$ existen $a, C > 0$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que*

$$|M(x)| \leq Cx^{1/2+\delta}(\log x)^n,$$

es decir,

$$M(x) = \mathcal{O}(x^{1/2+\delta}(\log x)^n)$$

para todo $\delta > 0$, entonces la Hipótesis de Riemann es cierta.

Demostración. La demostración es análoga a la anterior. La diferencia está en ver que bajo estas hipótesis la integral

$$s\int_1^\infty \frac{M(t)}{t^{s+1}} dt$$

sigue definiendo una función analítica en el semiplano $\sigma > 1/2$. Para verlo, nos basta con que sea analítica en cada semiplano $\sigma > 1/2+\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Entonces, fijado $\varepsilon > 0$ y $\delta = \varepsilon/2$, existen $a, C > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$|M(x)| \leq Cx^{1/2+\delta}(\log x)^n = Cx^{1/2+\varepsilon/2}(\log x)^n$$

para todo $x \geq a$. Se tiene entonces que

$$\left|\frac{M(t)}{t^{s+1}}\right| \leq C\frac{t^{1/2+\varepsilon/2}(\log t)^n}{t^{\sigma+1}} = C\frac{(\log t)^n}{t^{\sigma+1/2-\varepsilon/2}}$$

siempre que $t \geq a$. La integral

$$\int_a^\infty \frac{dt}{t^{\sigma+1/2-\varepsilon}}$$

es finita siempre que $\sigma > 1/2+\varepsilon$, y como

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(\log t)^n}{t^{\sigma+1/2-\varepsilon/2}} : \frac{1}{t^{\sigma+1/2-\varepsilon}} = \lim_{t\to\infty} \frac{(\log t)^n}{t^{\varepsilon/2}} = 0,$$

se sigue del criterio de comparación por paso al límite que la integral

$$\int_a^\infty C\frac{(\log t)^n}{t^{\sigma+1/2-\varepsilon/2}}dt$$

es finita, y por ello, que la función

$$s\int_1^\infty \frac{M(t)}{t^{s+1}}dt$$

define una función analítica en cada semiplano $\sigma > 1/2+\varepsilon$. Usando el mismo argumento que en el teorema anterior se concluye la demostración. $\square$

Observación. Se pueden debilitar las hipótesis del teorema anterior cambiando $(\log x)^n$ por cualquier función $f(x)$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t^{\varepsilon}} = 0$$

para todo $\varepsilon > 0$, ya que esa es la única propiedad de $(\log x)^n$ que se ha usado.

7.3.3. La conjetura de Pólya

Para comenzar, hemos de introducir la función $L(x)$, la cual es la homóloga a la función de Mertens pero cambiando μ por λ.

Definición. Para todo $x > 0$ se define la función $L(x)$ como

$$L(x) = \sum_{n \leq x} \lambda(n).$$

La función de Liouville $\lambda(n)$ es la función aritmética que vale 1 si n tiene un número par de factores primos y -1 si tiene un número impar de factores primos, ya que

$$\lambda(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^{r_1 + \cdots + r_k} & \text{si } n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}. \end{cases}$$

Entonces, la función $L(x)$ lo que hace es contar la diferencia entre los naturales con un número par e impar de factores primos. Veamos la gráfica de $L(x)$.

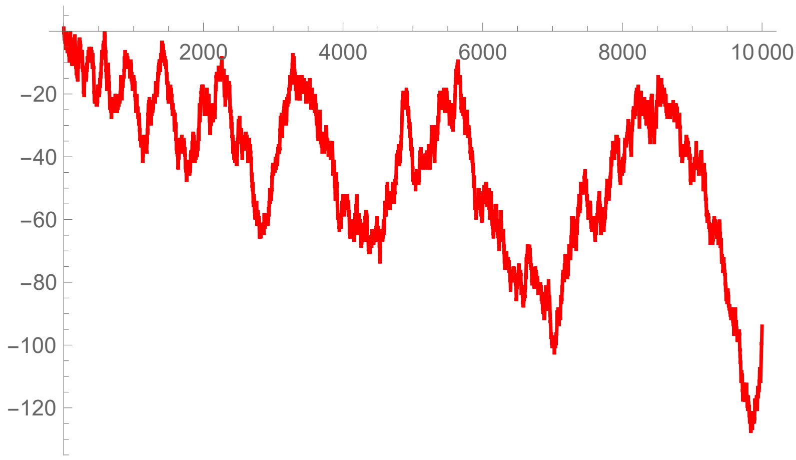

Figura 7.6: Gráfica de la función $L(x)$ mostrada desde $x = 0$ hasta $x = 10000$.

A la vista de la gráfica parece que $L(x) \leq 0$ para todo $x \geq 2$. Esto es equivalente a decir que dado $x \geq 2$, hay más números naturales menores o iguales que x que son producto de un número impar de primos que de un número par de primos. Esto es lo que se conoce como la *conjetura de Pólya*.

Al igual que ocurría con la conjetura de Mertens, la fórmula de sumación de Abel nos muestra cómo podemos relacionar la conjetura de Pólya con la Hipótesis de Riemann.

Teorema 7.12. *La conjetura de Pólya implica la Hipótesis de Riemann. Es decir, si para todo $x \geq 2$ se tiene que*

$$L(x) \leq 0,$$

entonces todos los ceros no triviales de la función Zeta de Riemann se encuentran sobre la recta crítica.

Demostración. Por la Proposición 6.22 tenemos que

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}$$

para todo s en el semiplano $\sigma > 1$. Usando la fórmula de sumación de Abel para $a_n = \lambda(n)$ y $f(x) = 1/x^s$ se deduce que

$$\sum_{n \leq x} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{L(x)}{x^s} + s \int_1^x \frac{L(t)}{t^{s+1}} dt.$$

Como $|L(x)| \leq x$ para todo $x > 0$, es claro que si $\sigma > 1$, se tiene que

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \lim_{x \to \infty} \sum_{n \leq x} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \lim_{x \to \infty} \frac{L(x)}{x^s} + s \int_1^x \frac{L(t)}{t^{s+1}} dt = s \int_1^{\infty} \frac{L(t)}{t^{s+1}} dt.$$

Veamos que el último miembro define una función analítica en el semiplano $\sigma > 1/2$ si suponemos la conjetura de Pólya. Denotamos

$$g(s) = \int_1^2 \frac{L(t)}{t^{s+1}} dt,$$

la cual es una función entera. Tenemos entonces la igualdad

$$\frac{\zeta(2s)}{s\zeta(s)} - g(s) = \int_2^{\infty} \frac{L(t)}{t^{s+1}} dt \tag{7.4}$$

en el semiplano $\sigma > 1$. Es claro que la integral del miembro derecho cumple las dos primeras hipótesis del Teorema de analiticidad de integrales paramétricas. Para ver la tercera, asumiendo la conjetura de Pólya se tiene que

$$\left| \frac{L(t)}{t^{s+1}} \right| = -\frac{L(t)}{t^{\sigma+1}}$$

para todo $t \geq 2$. De la igualdad (7.4) se deduce que

$$\int_2^{\infty} \left| \frac{L(t)}{t^{s+1}} \right| dt = \int_2^{\infty} -\frac{L(t)}{t^{\sigma+1}} dt = g(\sigma) - \frac{\zeta(2\sigma)}{\sigma\zeta(\sigma)}.$$

El miembro derecho de la igualdad anterior es un valor finito si $\sigma > 1/2$, ya que, como vimos, $\zeta(\sigma)$ no se anula en la semirrecta $\sigma > 0$ y $\zeta(2\sigma) < +\infty$ puesto que si $\sigma > 1/2$ entonces $2\sigma > 1$. Por esto, el Principio de Prolongación Analítica nos muestra que

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = s\int_1^{\infty} \frac{L(t)}{t^{s+1}}dt$$

en el semiplano $\sigma > 1/2$, y por tanto, que la función $\zeta(2s)/\zeta(s)$ es analítica en dicho semiplano, luego $\zeta(s) \neq 0$ si $\Re(s) > 1/2$, y por la simetría de la función Zeta en la banda crítica, también $\zeta(s) \neq 0$ si $0 < \Re(s) < 1/2$, por lo que todos los ceros no triviales de la función Zeta deben encontrarse en la recta crítica. $\square$

Notamos que en realidad, tan sólo nos haría falta que la función $L(x)$ tuviera signo constante a partir de cierto $x > 0$. Sin embargo, al igual que ocurre con la conjetura de Mertens, también la conjetura de Pólya es falsa. Esto fue probado por Haselgrove en 1958 viendo que $L(x)$ cambia de signo infinitas veces (ver [7]). A pesar de esto, podemos dar otros resultados relacionados con la función $L(x)$ que implican la Hipótesis de Riemann. Elegimos a título de ejemplo el siguiente teorema, con el que concluimos el presente trabajo.

Teorema 7.13. *Si para todo $\delta > 0$ existe $f(x)$ tal que*

$$L(x) = \mathcal{O}(x^{1/2+\delta}f(x)),$$

siendo $f(x)$ una función que verifica

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{\epsilon}} = 0$$

para todo $\epsilon > 0$, entonces la Hipótesis de Riemann es cierta.

Demostración. Nos basta ver que con estas condiciones se da la igualdad

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = s\int_1^{\infty} \frac{L(t)}{t^{s+1}}dt$$

en cada semiplano $\sigma > 1/2 + \varepsilon$. Dado $\varepsilon > 0$, fijamos $\delta = \varepsilon/2$. Entonces se tiene que existen $a, C > 0$ y $f(x)$ tales que

$$|L(x)| \leq Cx^{1/2+\varepsilon/2}f(x)$$

para todo $x \geq a$. Se deduce entonces que

$$\left|\frac{L(t)}{t^{s+1}}\right| \leq C\frac{t^{1/2+\varepsilon/2}f(t)}{t^{\sigma+1}} = C\frac{f(t)}{t^{\sigma+1/2-\varepsilon/2}}$$

para todo $t \geq a$. La integral

$$\int_a^\infty \frac{dt}{t^{\sigma+1/2-\varepsilon}}$$

es finita siempre que $\sigma > 1/2 + \varepsilon$. Entonces, como

$$\lim_{t\to\infty} C\frac{f(t)}{t^{\sigma+1/2-\varepsilon/2}} : \frac{1}{t^{\sigma+1/2-\varepsilon}} = \lim_{t\to\infty} C\frac{f(t)}{t^{\varepsilon/2}} = 0,$$

se sigue del criterio de comparación por paso al límite que la integral

$$\int_a^\infty C\frac{f(t)}{t^{\sigma+1/2-\varepsilon/2}}dt$$

es finita siempre que $\sigma > 1/2 + \varepsilon$. Esto prueba que la función

$$s\int_1^\infty \frac{L(t)}{t^{s+1}}dt$$

es analítica en cada semiplano $\sigma > 1/2+\varepsilon$, y por el Principio de Prolongación Analítica, se deduce que

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = s\int_1^\infty \frac{L(t)}{t^{s+1}}dt$$

en cada semiplano $\sigma > 1/2 + \varepsilon$. Usando el mismo razonamiento que en el teorema anrterior se concluye la demostración. □

Bibliografía

[1] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd Edition, McGraw Hill Education, India, 2013.

[2] T.M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, 1976.

[3] E. Artin, *The Gamma Function*, Dover Edition, 2015.

[4] L. Bernal, G. López, *Análisis de Variable Compleja*, Publicaciones de la Universidad de Sevilla, Sevilla, 2010.

[5] G. Boros, V.H. Moll, *Irresistible Integrals*, Cambridge, 2004.

[6] H.M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Dover Publications, 2018.

[7] C. Haselgrove (1958), *A disproof of a conjecture of Pólya*, Mathematika, 5(2), 141-145.

[8] A.I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable*, vols 1 y 2, AMS Chelsea Publishing, 2005.

[9] A.M. Odlyzko, H.J.J. te Riele, *Disproof of the Mertens conjecture*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 357 (1985), 138–160.

[10] R. Remmert, *Wielandt's Theorem about the* Γ*-function*, American Mathematical Monthly, 103 (1996), No.3, 214-220.

[11] W. Rudin, *Principios de Análisis Matemático*, 3ª Edición, McGraw Hill, México, 1980.

[12] S. Saks, A. Zygmund, *Analytic functions*, 3rd Edition, Elsevier, Amsterdam, 1971.

[13] M. Sautoy, *La Música de los Números Primos*, Acantilado, 2007.

[14] E.M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton Lectures in Analysis, Princeton, 2003.

[15] E.M. Stein, R. Shakarchi, *Real Analysis*, Princeton Lectures in Analysis, Princeton, 2005.

[16] E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, 2nd Edition, Oxford Science Publications, 1986.

[17] E.C. Titchmarsh, *TheTheory of functions*, 2nd Edition, Oxford University Press, New York, 1986.