EL POLINOMIO DE BERNSTEIN-SATO DE UNA SINGULARIDAD

Adolfo Rendón Rodríguez de Molina

EL POLINOMIO DE BERNSTEIN-SATO DE UNA SINGULARIDAD

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA

Adolfo Rendón Rodríguez de Molina

Trabajo Fin de Grado presentado como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Dirigido por:

Luis Narváez Macarro

18 Junio, 2020

Índice general

Abstract

The Bernstein-Sato polynomial or the *b*-function is an important invariant in singular theory. It is closely related to differentials operators. This polynomial has very useful properties and applications in differents fields of mathematics. It was introduced in the early 1970s simultaneously by Joseph Bernstein and Mikio Sato.

In this Final Degree Project we study the proof of the existence of the Bernstein-Sato polynomial over the Weyl Algebra, in addition, we study some of the libraries and commands in the computational algebra systems Macaulay2 and Singular related to D-modules and some of the algorithms on which these commands are based on.

Finally we conclude the work adding a series of examples of computations of the Bernstein-Sato polynomial and making a small comparison of effectiveness between both programs.

Introducción

La teoría de D-módulos, Módulos sobre anillos de operadores diferenciales, sobre una variedad algebraica lisa sobre un cuerpo de característica cero o sobre una variedad analítica compleja lisa ha sido un área de investigación activa durante los últimos cincuenta años. Sirve como una herramienta poderosa para resolver problemas que surgen en muchas disciplinas matemáticas, desde Análisis hasta Geometría Algebraica, la Topología de Variedades, la teoría de Representaciones y Álgebra Conmutativa. En este texto nos centraremos principalmente en el estudio del polinomio de Bernstein-Sato dentro de esta teoría de D-módulos.

El polinomio de Bernstein-Sato es un polinomio que está estrechamente relacionado con operadores diferenciales. Debe su nombre y origen a dos razones simultáneas a principio de 1970. Por un lado Mikio Sato introdujo las $a-$, $b-$ y $c-$funciones asociadas a los espacios vectoriales prehomogéneos. Los cuales tienen muchas aplicaciones en la Geometría, Teoría de Números y Análisis, así como Teoría de Representaciones [28]. Por otro lado, de forma simultánea, Joseph Bernstein definió el polinomio de Bernstein como parte de la construcción de prolongaciones meromorfas de distribuciones [5, 6]. J. Bernstein probó que todo polinomio tiene un polinomio de Bernstein no nulo asociado. El polinomio de Bernstein-Sato de una función holomorfa o regular f sobre $\mathbb{C}$ es el polinomio mónico $b_f(s)$ en $\mathbb{C}[s]$ de menor grado para la cual existe un operador diferencial $P(s)$ en el parámetro s que satisface la ecuación funcional

$$b_f(s)f^s = P(s)ff^s.$$

La existencia de un polinomio no nulo satisfaciendo la ecuación funcional anterior, como ya hemos dicho, fue probada por Bernstein sobre el anillo de polinomios, y fue extendida por Björk [7, 8] a anillos de series formales y por Kashiwara a anillos de series convergentes [16]. Una prueba unificada se encuentra en [31](ver también [21]). Hoy en día este polinomio también se llama la b-función asociada a f. El primer algoritmo para computar el polinomio de Bernstein-Sato para un polinomio arbitrario fué implementado en 1997 por T. Oaku [22–24]. Desde entonces se han podido estudiar más detalladamente algunos casos especiales.

El objetivo principal de este trabajo es dar la prueba de la existencia del polinomio de Bernstein-Sato para un polinomio arbitrario f. Además estudiaremos brevemente las herramientas necesarias para poder usar algunos de los algoritmos para el cálculo del polinomio de Bernstein-Sato y así poder comparar diferentes sistemas de Álgebra Computacional a la hora de calcular el polinomio de Bernstein-Sato.

El trabajo se va a estructurar de la siguiente forma. En el capítulo uno estudiaremos el álgebra de Weyl. En este peculiar álgebra es donde desarrollaremos toda la teoría en referencia al polinomio de Bernstein-Sato y en particular donde demostraremos la existencia de un operador diferencial y un polinomio que verifiquen la ecuación funcional anterior. Seguidamente en el capítulo dos estudiaremos los módulos graduados y las filtraciones en el álgebra de Weyl. Gracias a estas definiciones podremos construir anillos conmutativos los cuales se comporten de manera similar a los módulos en el álgebra de Weyl. Gracias a ellos se pueden estudiar de forma más sencilla estos módulos. En el capítulo tres, gracias al estudio de los métodos de filtraciones y graduaciones del anterior capítulo, podremos definir la dimensión de un módulo en el álgebra de Weyl. Este invariante tiene una enorme importancia en nuestro estudio y está fuertemente relacionada con otro invariante: la multiplicidad. La definición de dimensión y multiplicidad la daremos usando el polinomio de Hilbert-Samuel y más adelante podremos probar que la dimensión de un módulo en el álgebra de Weyl tiene una cota inferior y una cota superior. En particular, esta cota inferior es muy importante ya que con ella podremos definir los módulos del álgebra de Weyl holónomos. Estos módulos tienen una gran importancia en el álgebra de Weyl y con ellos podremos llegar a la demostración de la existencia del polinomio de Bernstein-Sato asociado a un polinomio arbitrario f. El capítulo cuatro está especialmente dedicado a la demostración de la existencia de la b-función asociada a un polinomio no nulo arbitrario f. Es decir, de la existencia del polinomio de Bernstein-Sato. En el capítulo cinco estudiaremos las herramientas principales para poder dar algoritmos útiles para el cálculo de la b-función asociada a un polinomio. En particular, estudiaremos la teoría de la división, las bases de Groebner, el algoritmo de Buchberger y la teoría de eliminación en el álgebra de Weyl. En el último capítulo del texto estudiaremos dos de los principales sistemas algebraicos computacionales más importantes para el cálculo del polinomio de Bernstein-Sato (Singular y Macaulay2). En particular hablaremos de las librerías y comandos que usaremos para el cálculo de dicho polinomio, así como de sus autores y de los algoritmos en los que se basan dichos comandos. Por último haremos una pequeña comparación de estos programas con ciertos ejemplos, exponiendo el tiempo que tarda cada uno de los programas en dicho cálculo. En estos ejemplos podremos observar que las raíces de las b-funciones asociadas a un polinomio arbitrario son siempre números racionales negativos. El hecho de que las raíces del polinomio de Bernstein-Sato asociado a un polinomio arbitrario f sean números racionales negativos fué probado por M. Kashiwara [16].

Entre las referencias que hemos usado podemos resaltar las siguientes. A Primer of Algebraic de S.C. Coutinho, es un gran libro sobre D-módulos en el que se pueden encontrar muchos resultados usados en este texto. Es un libro fácil de manejar, muy compacto e interesante [10].

Algebraic approach to differential equations, en particular el capítulo correspondiente a Francisco Jesús Jiménez Castro [9] . En ese capítulo podemos encontrar entre otras muchas cosas, qué es el álgebra de Weyl construida a partir de vectores de peso y estudiar sus propiedades. En particular, gracias a esta construcción por vectores de peso, se pueden generalizar al álgebra de Weyl grandes resultados que teníamos en el caso conmutativo. Tales como el teorema de la división, teoría de las bases de Groebner y el algoritmo de Buchberger. Además se puede estudiar el polinomio desde otro punto de vista, el de Malgrange. Gracias a este punto de vista podremos definir los algoritmos de la sección última y en particular para poder definir el algoritmo para el cálculo de la b-función, el cual podemos encontrar en el trabajo de D. Andres [2].

Gracias a esta última referencia de D. Andres y de los algoritmos y ejemplos del cálculo del polinomio de Bernstein-Sato he podido ver la verdadera dificultad que existe en calcular el polinomio de Bernstein-Sato para ciertos polinomios. Y entender cómo funcionan algunos de los algoritmos usados en los programas Singular y Macaulay2 para la obtención de la b-función asociada a un polinomio arbitrario.

Ambos programas y las librerías que he usado en el texto está ampliamente referenciadas por distintos autores. V. Levandowskyy, J. Morales y D. Andres para el programa Singular y su principal paquete para D-módulos, $Plural$, son los autores de las librerías, dentro de este programa, que usaremos en la última sección [3, 17, 18]. Por otra parte, A. Leykin y H. Tsai son los autores del paquete correspondiente a D-módulos del programa Macaulay2, $Dmodules$, [13].

1 El álgebra de Weyl

1.1 El álgebra de Weyl como anillo de operadores.

Comencemos con algo de notación que usaremos a lo largo del texto. K denotará un cuerpo de característica cero y $K[X] = K[x_1, ..., x_n]$ denotará el anillo de polinomios en n variables sobre K, el cual es un anillo de dimensión infinita sobre el cuerpo K.
Denotaremos por $End_K(K[X])$ al anillo de endomorfismos del K-espacio vectorial $K[X]$, donde la operación suma actúa como suma de operadores y la operación producto como composición de operadores. Definiremos la n-ésima álgebra de Weyl sobre el cuerpo K, denotada por $A_{n,K}$, como un subanillo (una K-subálgebra) de $End_K(K[X])$ generada por los operadores:

$$\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n \text{ y } \partial_1, ..., \partial_n$$

sobre $K[X]$. Los cuales se definen sobre un polinomio $f \in K[X]$ por las fórmulas $\widehat{x}_i(f) = x_i f$ y $\partial_i(f) = \partial f / \partial x_i$ respectivamente. Por simplificación a lo largo del texto denotaremos $A_{n,K} \equiv A_n$ si no es necesaria la especificación del cuerpo sobre la que definamos el álgebra en cuestión.
Es decir, los elementos de A_n son combinaciones lineales de los monomios en los generadores $\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n$ y $\partial_1, ..., \partial_n$. Donde el producto "$\cdot$" en A_n está definido usando la regla de Leibniz de la forma:

$$\partial_i \cdot f = f\partial_i + \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

Podemos observar fácilmente que este álgebra no es conmutativa ya que si consideramos el operador $\partial_i \cdot \widehat{x}_i$, donde en este caso este producto es sobre $End_K(K[X])$ y por tanto como hemos dicho antes está definido por la composición de endomorfismos, y lo aplicamos a un polinomio $f \in K[X]$ obtenemos que $\partial_i \cdot \widehat{x}_i(f) = \partial_i(x_i f) = x_i \partial f/\partial x_i + f$. Que visto como una igualdad de operadores tendríamos

$$\partial_i \cdot \widehat{x}_i = \widehat{x}_i \cdot \partial_i + 1$$

Donde 1 representa el operador identidad.
Podemos usar conmutadores para observar mejor como actúan estos operadores. Si tomamos $P, Q \in A_n$ su conmutador es el operador $[P, Q] = P \cdot Q - Q \cdot P$. Entonces los conmutadores de los generadores de A_n vienen dados por:

$$\begin{gathered}[\partial_i, \widehat{x}_i] = 1 \\ [\partial_i, \partial_j] = [\widehat{x}_i, \widehat{x}_j] = 0 \\ [\partial_i, \widehat{x}_j] = \delta_{ij}\end{gathered}$$

Para todo $i, j = 1, ..., n$. Donde δ_{ij} representa la delta de Kronecker, si $i = j$ entonces es el operador identidad y si $i \neq j$ entonces es el operador nulo. A partir de ahora usaremos x_i como variable y como su correspondiente operador a no ser que se tenga que especificar.
También denotaremos por PQ en vez de $P \cdot Q$, para $P, Q \in A_n$. Y por

$$\begin{gathered}x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n} \\ \partial^\beta = \partial_1^{\beta_1} ... \partial_n^{\beta_n}\end{gathered}$$

Diremos que el orden (o grado) del monomio x^α es la longitud de $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, que definiremos como $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Veamos con ciertos ejemplos, como se comporta este producto en A_n.
(1). Sea $f \in K[x]$ y $\beta \in \mathbb{N}^n$. Entonces

$$\partial^\beta f = \sum_{\sigma<\beta} \binom{\beta}{\sigma} \partial^\sigma(f)\partial^{\beta-\sigma}$$

Donde con $\sigma < \beta$ nos referimos a que $\sigma_i \leq \beta_i$, para $i = 1, ..., n$. Y donde $\binom{\beta}{\sigma} = \beta!/\sigma!(\beta - \sigma)!$ y $\beta! = \beta_1!...\beta_n!$. Para el caso $n = 1$ la igualdad

$$\partial_1^j f = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \partial_1^k(f)\partial_1^{j-k}$$

se puede probar por inducción en j. El caso general se sigue de lo anterior usando la propiedad distributiva del producto de A_n sobre la suma.

(2). Sean $\beta, \delta \in \mathbb{N}^n$ entonces

$$\partial^\beta(x^\delta) = \beta! \binom{\delta}{\beta} x^{\sigma-\beta}$$

donde $\binom{\delta}{\beta} = 0$ si no se satisface la relación $\beta < \delta$. De la misma forma se puede probar por inducción sobre n. El caso base $n = 1$ se puede probar por inducción en β_1. obtenemos de esta igualdad que si $\beta = \delta$, entonces $\partial^\beta(x^\delta) = \beta!$.

(3). Usando las igualdades (1) y (2) se puede llegar a que si $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{N}^n$ entonces tenemos que

$$x^\alpha \partial^\beta x^{\alpha'} \partial^{\beta'} = x^{\alpha+\alpha'} \partial^{\beta+\beta'} + \sum_{\sigma<\beta, \sigma<\alpha', \sigma\neq 0} \sigma! \binom{\beta}{\sigma} \binom{\alpha'}{\sigma} x^{\alpha+\alpha'-\sigma} \partial^{\beta+\beta'-\sigma}.$$

Resultado que se obtiene directamente de combinar (1) y (2).

Podemos construir una base para el álgebra de Weyl como K-espacio vectorial, la cual nos facilitará escribir los elementos de A_n y compararlos unos con otros. Ya que para comparar dos elementos en su forma canónica, es decir escrito como combinación lineal de elementos de la base de A_n, bastará comparar los coeficientes de su combinación lineal.

Proposición 1.1. El conjunto de monomios $\mathcal{B} = \{x^\alpha \partial^\beta | \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$ es una base de A_n como K-espacio vectorial.

Demostración. Es fácil ver que $\mathcal{B}$ es un conjunto generador del álgebra de Weyl como K-espacio vectorial. Consideramos un monomio en los generadores de A_n. Usando las relaciones que vimos anteriormente tenemos que si $f \in K[X]$, entonces $\partial_i f - f\partial_i = \partial f / \partial x_i$. Esto nos permite llevar todas las potencias de las $x's$ a la izquierda de todos las de $\partial' s$ y por tanto tendríamos ese monomio escrito como un elemento de $\mathcal{B}$. Luego $\mathcal{B}$ es un conjunto generador de A_n. Veamos que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente. Sea $P = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta$. Veamos que debe ser una combinación lineal no nula de monomios en $\mathcal{B}$. Sea $\beta' \in \mathbb{N}^n$ el exponente de ∂ en P, que verifique que el vector $\beta - \beta'$ tiene su primera componente no nula mayor que 0, para cada β exponente de ∂ en P. Entonces tenemos que $P(x^{\beta'}) = (\beta')!(\sum_\alpha P_{\alpha\beta'} x^\alpha)$ ya que, usando (2), si β' verifica lo anterior, entonces en particular no se satisface la relación $\beta < \beta'$ y por tanto $\partial^{\beta}(x^{\beta'}) = 0$. Por la elección de β' existe un α tal que $p_{\alpha\beta'} \neq 0$ y por tanto $P(x^{\beta'})$ es no nulo. En particular el operador $P \in A_n$ es no nulo.

1.2 Generadores y relaciones.

Otra manera de definir el álgebra de Weyl es mediante generadores y las relaciones que estos mantienen. Podemos describir el álgebra de Weyl como un cociente de un álgebra libre en $2n$ generadores. El ideal por el cual se hace cociente es el generado por las relaciones que definimos por los conmutadores de la anterior sección. El álgebra libre $K\{z_1, ..., z_{2n}\}$ en $2n$ generadores es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las palabras en los símbolos $z_1, ..., z_{2n}$, donde el producto de dos palabras es simplemente la yuxtaposición de ambas. Podemos definir el homomorfismo:

$$\phi : K\{z_1, ..., z_{2n}\} \to A_n \text{ definido por:}$$
$$\phi(z_i) = x_i \text{ y } \phi(z_{i+n}) = \partial_i, \text{ para } i = 1, ..., n.$$

El cual es claramente sobreyectivo, ya que hemos visto que una base de A_n como K-espacio vectorial viene dada por el conjunto de monomios $\mathcal{B} = \{x^{\alpha}\partial^{\beta} | \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$. Entonces si tomamos el ideal bilátero J generado por las relaciones $[z_{i+n}, z_i] - 1$ para $i = 1, ..., n$ y $[z_i, z_j]$ para $j \neq i + n$ y $1 \leq i, j \leq 2n$. Obtenemos, de las relaciones por los operadores que vimos anteriormente, que $J \subseteq \textbf{Ker}\ \phi$. Por lo que ϕ induce un homomorfismo de K-álgebras $\phi' : K\{z_1, ..., z_{2n}\}/J \to A_n$.

Teorema 1.1. *ϕ' es un isomorfismo.*

Demostración. Haciendo algo similar a la prueba de la porposición 1.1, podemos usar las relaciones entre las clases $z_i + J$ para probar que todo elemento de $K\{z_1, ..., z_{2n}\}/J$ se puede escribir como combinación lineal de monomios de la forma $z_1^{m1} ... z_{2n}^{m_{2n}} + J$. Y usando la porposición 1.1, las imágenes de estos monomios bajo la aplicación ϕ' forman una base de A_n como K-espacio vectorial. En particular, los monomios deben ser linealmente independientes en $K\{z_1, ..., z_{2n}\}/J$. Luego ϕ' es un isomorfismo de espacios vectoriales.

1.3 El grado de un operador.

Definición 1.1. *Para un operador no nulo* $P = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta = \sum_\beta p_\beta(x)\partial^\beta$ *el índice máximo de* β *para el cual* $p_\beta(x) \neq 0$*, se llama el grado de* P*, que denotaremos por* $gr(P)$*. El índice máximo de* $\alpha + \beta$ *para el cual* $p_{\alpha\beta} \neq 0$ *se llama el grado total de* P *y se denota por* $grtot(P)$*. Usaremos por convenio que el grado y el grado total del polinomio nulo es* $-\infty$*.*

Esta definición nos permitirá en futuras secciones facilitar las definiciones de los módulos graduados y las filtraciones inducidas.
Estos últimos elementos algebráicos son muy importantes en el estudio de D-módulos ya que los anillos simples son muy dificiles de estudiar debido a que la mayoría de las técnicas en la teoría de anillos se basan en la existencia de ideales no triviales. En nuestro caso, en el álgebra de Weyl, es un anillo simple. Es decir, no nulo y no tiene ideales biláteros propios no triviales. Pero podremos construir a partir de las filtraciones anillos conmutativos los cuales actúan de manera muy parecida a A_n. De esta forma podremos entender y estudiar la estructura de A_n y de sus módulos. Además gracias a la definición anterior, al igual que se demuestra en el caso del anillo de polinomios con la definición natural de grado de un polinomio, se prueba que A_n es un dominio.

Uno se puede preguntar por qué se ha definido anteriormente el álgebra de Weyl de dos maneras diferentes. Esto se debe a un pequeño problema que tiene el álgebra de Weyl cuando el cuerpo K no tiene característica cero. En el caso en el que el cuerpo no tenga característica cero ambas definiciones construyen anillos que no son isomorfos. El álgebra de Weyl sobre un cuerpo de característica positiva se estudia con detalle en la referencia [29]. Por ejemplo veamos que ocurre en el cuerpo $\mathbb{Z}_p$, cuando p es primo, en el caso de una variable. Consideremos primero la primera definición, el álgebra de operadores R_1 generada por $\mathbb{Z}_p[x]$ y su derivación $\partial = dx$. Calculemos $\partial^p(x^k)$. Si $k < p$ se anula por lo visto en (2). Lo mismo ocurre para $k \geq p$ ya que al hacer el cálculo tenemos que $\partial^p(x^k) = p! \binom{k}{p} x^{k-p}$, que se anula ya que el coeficiente es divisible por p. Luego $\partial^p = 0$ como operador sobre $\mathbb{Z}_p[x]$. De donde concluimos que el anillo R_1 tiene elementos nilpotentes. En particular, no es un dominio.
Por otra parte, consideramos el anillo R_2 generado sobre $\mathbb{Z}/(p)$ por z_1, z_2 sujetos a la relación $[z_2, z_1] = 1$. Este anillo es un dominio. Sin embargo no es un anillo simple. Para ver que no es un anillo simple basta encontrar un ideal bilátero propio. Por ejemplo, si tomamos $f \in \mathbb{Z}/(p)[z_1]$ tenemos que $[z_2, f] = \partial f/\partial z_1$. En particular,

$[z_2, z_1^p] = pz_1^{p-1} = 0$. De donde concluimos que z_1^p conmuta con cada elemento de R_2 y por tanto el ideal a la izquierda generado por z_1^p en R_2 es un ideal bilátero propio.

1.4 $K[X]$ como A_n-módulo.

Uno de los ejemplos más importantes de módulo sobre el álgebra de Weyl es el del anillo de polinomios. Este es un A_n-módulo a la izquierda, simple y de torsión. En esta sección vamos a demostrar las afirmaciones anteriores.
En la sección anterior hemos construido el álgebra de Weyl como un subanillo de un anillo de endomorfismos. Si $K[X]$ es el anillo de polinomios, tenemos que $A_n(K)$ es un subanillo de $End_K K[X]$. De aquí se deduce que $K[X]$ es un A_n-módulo a la izquierda. Es decir, existe una acción natural de A_n sobre sobre el anillo de polinomios $K[X]$ ya que cada elemento $P \in A_n$ es un endomorfismo del K-espacio vectorial $K[X]$. Esta acción natural es la que induce sobre $K[X]$ una estructura de A_n-módulo. La acción de los x_i sobre $K[X]$ es simplemente el producto por la variable x_i. Mientras que ∂_i actua como la derivada parcial con respecto de la variable x_i. Antes de probar que es $K[X]$ es un A_n-módulo de torsión vamos a recordar qué es un elemento de torsión de un módulo. Sea M un R-módulo a la izquierda, donde R es un anillo arbitrario. Un elemento $u \in M$ es un elemento de torsión si $\mathbf{ann}_R(u)$ es un ideal a la izquierda no nulo. Donde $\mathbf{ann}_R(u)$ es el conjunto de elementos de M que anulan a u. Es decir, que su producto por la izquierda es nulo. Para probar que $K[X]$ es un A_n-módulo de torsión simple, vamos a usar los siguientes lemas.

Lema 1.1. Sea R un anillo, M un R-módulo a la izquierda irreducible (simple). Y sea $u \in M$, con $u \neq 0$, entonces $M \cong R/\mathbf{ann}_R(u)$

Demostración. Sea la función $\phi : R \to M$ definida por $\phi(1) = u$. Es un homomorfismo de R-módulos y además como $u \neq 0$ y M es irreducible (simple), entonces es un homomorfismo de R-módulos sobreyectivo.
Además tenemos que $Ker(\phi) = \mathbf{ann}_R(u)$, de donde se concluye el isomorfismo anterior. ∎

Lema 1.2. Si R no es un anillo de división, (Un anillo de división es un anillo unitario, en el que cualquier elemento no nulo tiene su inverso multiplicativo), entonces M es un módulo de torsión.

Demostración. Supongamos que $\mathbf{ann}_R(u) = 0$ para algún $0 \neq u \in M$. Se sigue del lema 1.1 que $M \cong R$. Como M es irreducible, esto es posible sólo si los ideales a la izquierda de R son triviales. Pero en este caso R sería un anillo de división y llegaríamos a contradicción. Luego $\mathbf{ann}_R(u) \neq 0$ para cada $0 \neq u \in M$. ∎

Teorema 1.2. *$K[X]$ es un A_n-módulo a la izquierda simple de torsión. Además se tiene que*

$$K[X] \cong A_n/A_n(\partial_1, ..., \partial_n)$$

Donde $A_n(\partial_1, ..., \partial_n)$ denota el ideal a la izquierda generado por $\partial_1, ..., \partial_n$.

Demostración. Antes que nada, es claro que 1 es un generador de $K[X]$. Supongamos que $f \neq 0$ es un polinomio y consideramos el submódulo de $K[X]$ dado por: $A_n \cdot f = A_n(f) = \{P(f)|P \in A_n\}$. Tomamos ahora $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ el monomio de mayor grado de entre los monomios de f que tenga coeficiente no nulo. Sea a su coeficiente. Entonces aplicando el operador $D = \partial^i = \partial_1^{i_1} \cdots \partial_n^{i_n}$ a f obtenemos

$$D(f) = \partial^i f = i_1! \cdots i_n! \cdot a$$

que es una constante no nula en el submódulo generado por f. Por lo tanto $A_n \cdot f = K[X]$. Luego $K[X]$ es simple. Como A_n no es un anillo de división, (ya que se puede probar facilmente que los operadores diferenciales no constantes no son invertibles), se sigue del lema 1.2 que $K[X]$ es un módulo de torsión.
Ahora bien, 1 es un elemento de $K[X]$ el cual es anulado por cada $\partial_1, ..., \partial_n$. Por lo que el ideal a la izquierda J generado por $\partial_1, ..., \partial_n$ está contenido en $\mathbf{ann}_{A_n}(1)$. Para la otra inclusión, sea $P \in \mathbf{ann}_{A_n}(1)$. Entonces P puede ser escrito de la forma $f + Q$, donde $Q \in J$ y $f \in K[X]$. Así que $0 = P \cdot 1 = f \cdot 1 + Q \cdot 1 = f$, lo cual implica que $f = 0$. Por lo que $P = Q \in J$ y concluimos que $J = \mathbf{ann}_{A_n}(1)$. El isomorfismo se sigue del lema 1.1.

1.5 El A_n-módulo de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

En esta sección asociaremos un A_n-módulo a la izquierda, finitamente generado, a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de A_n. Donde cada ecuación va a venir dada por un operador diferencial de A_n. Esto nos permite dar una descripción puramente algebraica de las soluciones de cada uno de estos sistemas.

Supongamos entonces que tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales lineal dado por $P_1(f) = ... = P_m(f) = 0$, donde cada P_i, para $i = 1, ..., m$, es un operador diferencial $P_i \in A_n$ y f puede ser un polinomio o si $K = \mathbb{R}$, una función en las variables $x_1, ..., x_n$ de clase C^∞.

El A_n-módulo asociado al sistema de ecuaciones diferenciales anterior es $M = A_n/A_n(P_1, ..., P_m)$. Justificaremos esta definición con el teorema que veremos a continuación.
Una solución polinómica del sistema puede definirse como un polinomio $f \in K[X]$ que verifique $P_i(f) = 0$ para cada $i = 1, ..., m$. El conjunto de soluciones polinómicas del sistema de ecuaciones diferenciales lineales anterior forma un K-espacio vectorial.

Teorema 1.3. *Sea M el A_n-módulo asociado al sistema $P_1(u) = ... = P_m(u) = 0$. El espacio vectorial de soluciones polinomiales del sistema anterior es isomorfo a $Hom_{A_n}(M, K[X])$.*

Demostración. Sea $f \in K[X]$ una solucion polinomial del sistema. Consideremos el homomorfismo $\psi_f : A_n \to K[X]$, definido por $\psi_f(1) = f$. Entonces si $Q \in J = A_n(P_1, ..., P_n)$, se tiene que $Q(f) = 0$. Es decir, $J \subset \mathbf{Ker}(\psi_f)$. Luego ψ_f define un homomorfismo

$$\overline{\psi}_f : M = A_n/J \to K[X]$$

definido por $\overline{\psi}_f(\overline{P}) = P(f)$.
Por lo tanto a un polinomio f que sea solución del sistema, le asociamos $\overline{\psi}_f \in Hom_{A_n}(M, K[X])$. Además esta aplicación, $f \mapsto \overline{\psi}_f$, es una transformación lineal.
Sean $f, g \in K[X]$, $\lambda \in K$. Entonces:

$$\overline{\psi}_{f+\lambda g}(P + J) = P(f + \lambda g) = P(f) + \lambda P(g) = (\overline{\psi}_f + \lambda \overline{\psi}_g)(P)$$

Para la aplicación inversa, si tomamos $\tau \in Hom_{A_n}(M, K[X])$, entonces τ lleva la clase del 1 en M a un polinomio h. Además se puede demostrar con un pequeño cálculo que h es solución del sistema y que $\tau = \overline{\psi}_h$. Luego la regla $\tau \mapsto \tau(\overline{1})$ define la transformación lineal inversa. Si notamos $\tau(\overline{1}) = h \equiv h_\tau$ y a $\mathcal{S}$ como el conjunto de soluciones polinómicas del sistema. Hemos demostrado que las aplicaciones

$$f \in \mathcal{S} \to Hom_{A_n}(M, K[X])$$
$$\tau \in Hom_{A_n}(M, K[X]) \to h_\tau \in \mathcal{S}$$

Son aplicaciones K-lineales y son una la inversa de la otra.

2 Módulos graduados y filtraciones

2.1 Módulos graduados

Como mencionábamos en la sección 1.3 los anillos simples son muy difíciles de tratar, es por eso que para trabajar con este tipo de anillos hay que usar anillos conmutativos especiales, los cuales tienen un comportamiento similar a A_n. Las graduaciones y las filtraciones nos permitirán estudiar la estructura de A_n y de sus módulos de forma más sencilla.

Una característica importante del anillo de polinomios es que este admite una función de grado. El objetivo de este capítulo es generalizar y formalizar qué significa para un álgebra tener una función de grado. Esto nos permitirá definir los anillos graduados. Estos anillos tienen una gran importancia en la Geometría Algebraica, más precisamente en la Geometría Algebraica Proyectiva, para detalles ver [15], Capítulo 1.

En primer lugar para llegar a donde queremos, tenemos que empezar describiendo qué es un álgebra graduada.

Definición 2.1. *Sea R una K-álgebra. Decimos que R es graduada si existen unos K-subespacios vectoriales R_i, $i \geq 0$, tales que*
(1) $1 \in R_0$. Donde 1 es el elemento neutro de R. Por lo que R_0 es un subanillo de R.
(2) $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$,
(3) $R_i \cdot R_j \subseteq R_{i+j}$.
Llamamos componentes homogéneas de R a los R_i. Los elementos de R_i son los elementos homogéneos de grado i.

Un ejemplo muy importante de álgebra graduada es el anillo de polinomios $K[x_1, ..., x_n]$, donde los monomios de la forma $x_1^{k_1} ... x_n^{k_n}$ con $k_1 + ... + k_n = m$ forman una base de las componentes homogéneas de grado m.

Definición 2.2. *Sea R un K-álgebra graduada. Se dice que un ideal bilátero I de R es un ideal graduado si está generado por elementos homogéneos, lo cual es equivalente a que $I = \oplus_{i\geq 0}(I \cap R_i)$.*

Definición 2.3. *Sea ahora $S = \oplus_{i\geq 0} S_i$ otra K-álgebra graduada. Un homomorfismo de K-álgebras $\phi : R \to S$ es graduado si $\phi(R_i) \subseteq S_i$ para cada i. Es decir, un homomorfismo graduado es aquel que respeta el grado.*

Proposición 2.1. Sean $R = \oplus_{i\geq 0} R_i$ y $S = \oplus_{i\geq 0} S_i$ dos álgebras graduadas sobre K, entonces tenemos los siguientes resultados.
(1) Si I es un ideal bilátero graduado de R entonces R/I es un álgebra graduada sobre K.
(2) El núcleo de un homomorfismo graduado de K-álgebras $\phi : R \to S$ es un ideal bilátero graduado de R.

Demostración. En primer lugar tenemos que R/I se puede descomponer como suma directa de K-espacios vectoriales como sigue,

$$R/I \simeq \oplus_{i\geq 0}(R_i/(I \cap R_i))$$

Sean $a_i \in R_i$ y $a_j \in R_j$ entonces $(a_i + I)(a_j + I) = a_i a_j + I$, que corresponde a un elemento de $R_{i+j}/(I \cap R_{i+j})$ bajo este homomorfismo. Concluimos entonces que se cumplen fácilmente las tres propiedades de K-álgebra graduada, (la (1) es trivial) y por tanto R/I es una K-álgebra graduada.
Por otra parte si ϕ es un homomorfismo graduado. Sea $a = a_0 \oplus \ldots \oplus a_m$ un elemento del núcleo de ϕ. Entonces se tiene que

$$\phi(a) = \phi(a_0) + \ldots + \phi(a_m).$$

Ahora bien como ϕ es graduado, esta suma es una suma directa. Y por tanto cada a_i es un elemento del núcleo de ϕ, es decir que el $Ker(\phi)$ está formado por elementos homogéneos y por tanto es un ideal graduado.

Esto nos proporciona una manera de generar ejemplos de anillos graduados, los cuales tienen una gran importancia en la Geometría Algebraica. Por ejemplo, cocientes del anillo de polinomios. Sean $f_1, \ldots, f_k$ polinomios homogéneos en $K[x_1, \ldots, .x_n]$. Entonces el cociente $K[x_1, \ldots, .x_n]/(f_1, \ldots, f_k)$ es un anillo graduado. Ya que el ideal generado por $f_1, \ldots, f_k$ es un ideal bilátero graduado por estar generado por elementos homogéneos y por tanto usando la proposición 2.1(1) tenemos que el cociente anterior es un un anillo graduado.

Definición 2.4. *Sea $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ una K-álgebra graduada. Un R-módulo a la izquierda M es graduado si existen K-espacios vectoriales M_i, para $i \geq 0$. tales que:*
(1) $M = \bigoplus_{i \geq 0} M_i$,
(2) $R_i \cdot M_j \subseteq M_{i+j}$.
Donde como antes, los M_i son las componentes homogéneas de grado i de M.

De la misma forma que antes se pueden definir los submódulos graduados y los homomorfismos graduados de módulos. Tendríamos pues, los mismos resultados que en el caso de anillos graduados las demostraciones se harían de manera análoga.

En la sección 1.3 estudiamos el grado total de un operador en A_n. Pero esta función de grado no sirve para hacer de A_n un anillo graduado. Ya que los elementos como $\partial_t x_t$ deberían de ser homogéneos de grado total 2, pero es igual a $x_t\partial_t + 1$ que no es homogéneo. Para poder usar esta función de grado debemos generalizar los anillos graduados, para obtener anillos filtrados.

Definición 2.5. *Sea R una K-álgebra. Una familia $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \geq 0}$ de K-espacios vectoriales es una filtración de R si:*
(1) $1 \in F_0$.
(2) $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots R$,
(3) $R = \bigcup_{i \geq 0} F_i$,
(4) $F_i \cdot F_j \subseteq F_{i+j}$.
Observamos que de los dos primeros puntos y del último que obtenemos que F_0 es un subanillo de R. Por convenio $F_j = \{0\}$, para $j < 0$ por lo que en estas definiciones hemos tomado $j \geq 0$. Si un álgebra tiene alguna filtración, entonces se dice que es un álgebra filtrada

Se puede probar que toda álgebra graduada es un álgebra filtrada, pero que el recíproco no es cierto en general. Supongamos que $G = \bigoplus_{i \geq 0} G_i$ es un álgebra graduada. Consideramos los espacios vectoriales $F_k = \bigoplus_0^k G_i$. Claramente $F_k \subseteq F_{k+1}$ y la unión de todos ellos es el total G. Además

$$F_k \cdot F_m = \bigoplus_{i+j \leq k+m} G_i G_j$$

Y sabemos que $G_i G_j \subseteq G_{i+j}$, de donde concluimos que $F_k F_m \subseteq F_{k+m}$. Luego $\{F_i\}_{i \geq 0}$ es una filtración de G. Por otra parte hay álgebras filtradas las cuales no provienen de una graduación. Esto ocurre con el álgebra de Weyl, la cual tiene muchas filtraciones distintas.

La filtración que trataremos sobretodo en este texto es la filtración de Bernstein. $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Es la filtración definida usando el grado total que definimos de los

operadores de A_n. Donde B_k el conjunto de todos los operadores de A_n de grado total menor o igual a k. La primera, la segunda y la tercera condición de filtración se satisfacen para los B_k y la cuarta condición se tiene de que el grado total del producto de dos operadores de A_n es la suma de los grados totales de ambos operadores. Por lo tanto $B_i B_j \subseteq B_{i+j}$. Luego $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una filtración de A_n.
La filtración de Bernstein tiene una característica especial, cada B_k es un espacio vectorial de dimensión finita. Una base de B_k está determinada por las combinaciones lineales de monomios $x^\alpha \partial^\beta$ con $|\alpha|+|\beta| \leq k$. En particular $B_0 = K$ y $\{1, x_1, ..., x_n, \partial_1, ..., \partial_n\}$ es una base de B_1.
Para el caso genérico, si tomamos B_k sabemos que su base está generada por los monomios $x^\alpha \partial^\beta$ para los cuales $|\alpha|+|\beta| \leq k$, por tanto el número de elementos de su base está determinado por el número de soluciones no negativas de $\alpha_1+...+\alpha_n+\partial_1+...+\partial_n \leq k$, el cual viene dado por $\binom{2n+k}{k}$. Este número combinatorio cogerá importancia en la siguiente sección cuando definamos la dimensión de un A_n-módulo.

• Nuestro objetivo ahora, es usar una filtración en un álgebra para construir un álgebra graduada de la siguiente forma.
Sea R un K-álgebra. Supongamos que $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una filtración de R. Denotamos por $gr_k^{\mathcal{F}} R = F_k/F_{k-1}$ y sea

$$\sigma_k : F_k \to F_k/F_{k-1}.$$

la proyección canónica a la cual llamaremos función símbolo de orden k. Donde $\sigma_k(d) = d + F_{k-1}$ para $d \in F_k$. Es decir, si d es un operador de F_k, se tiene que $\sigma_k(d)$ no es nulo si y solo si $d \notin F_{k-1}$. Definimos ahora el K-espacio vectorial

$$gr^{\mathcal{F}} R = \bigoplus_{i\geq 0} gr_i^{\mathcal{F}} R = \bigoplus_{i\geq 0} (F_i/F_{i-1}).$$

Podemos definir el producto de dos elementos homogéneos en este K-espacio vectorial. De esta forma obtendremos que con esta función de producto este K-espacio vectorial verificará las propiedades de un anillo graduado.
En primer lugar tenemos que los elementos homogéneos de $gr^{\mathcal{F}} R$ son de la forma $\sigma_k(d)$ para algún $d \in F_k$, definimos pues el producto de dos elementos de $gr^{\mathcal{F}} R$ de la siguiente forma

$$\sigma_k(d)\,\sigma_m(c) = \sigma_{k+m}(dc).$$

Para $d \in F_k$ y $c \in F_m$. El cual está bien definido ya que $F_k \cdot F_m \subseteq F_{k+m}$ y por tanto $\sigma_{k+m}(dc) \in F_{k+m}/F_{k+m-1}$. Con este producto podemos probar que $gr^{\mathcal{F}} R$ es una K-álgebra graduada. Ya que la propiedad (3) de la definición se tiene directamente de la

definición de este producto y las primeras dos propiedades se tienen directamente de las propiedades de la filtración $\mathcal{F}$. Los elementos homogéneos son los F_i/F_{i-1}. A esta K-álgebra se la denomina la álgebra graduada asociada a la filtración $\mathcal{F}$ de R.
Notaremos al álgebra graduada asociada a la filtración de Bernstein del álgebra de Weyl como $S_n = gr^{\mathcal{B}}A_n$, para la cual tenemos el siguiente resultado el cual es muy importante ya que nos facilita en gran medida el estudio de estos elementos.

Teorema 2.1. *El álgebra graduada S_n es isomorfa al anillo de polinomios en $2n$ variables.*

Demostración. Para $i = 1, ..., n$. Sean $y_i = \sigma_1(x_i)$, $y_{i+n} = \sigma_1(\partial_i)$ y sea $K[z_1, ..., z_{2n}]$ el anillo de polinomios en $2n$ variables.
Definimos el homomorfismo de anillos

$$\phi : K[z_1, ..., z_{2n}] \to S_n$$

Por $\phi(z_i) = y_i$. ϕ es un homomorfismo graduado de K-álgebras ya que los elementos z_i son de grado 1 sobre $K[z_1, ..., z_n]$ y los elementos y_i tienen también grado igual a 1 sobre S_n.
Para probar este resultado debemos probar en primer lugar que S_n está generado por los elementos $y_1, ..., y_{2n}$ como K-álgebra y que la aplicación anterior es un isomorfismo graduado de K-álgebras.
Para probar que S_n está generado por esos elementos como K-álgebra basta probar que los elementos $y_1, ..., y_{2n}$ generan a los elementos homogéneos de S_n.
Ahora bien, los elementos homogéneos de S_n son de la forma $\sigma_k(d)$, para algún $d \in A_n$ de grado k. Sabemos que d es una combinación lineal de monomios $x^\alpha\partial^\beta$, con $|\alpha| + |\beta| \leq k$. Al aplicar la función símbolo k buscamos $|\alpha| + |\beta| = k$, entonces

$$\sigma_k(x^\alpha\partial^\beta) = (y_1^{\alpha_1}, ..., y_n^{\alpha_n})(y_{n+1}^{\beta_1}, ..., y_{2n}^{\beta_n})$$

Luego $\sigma_k(d)$ es combinación lineal de monomios en $y_1, ..., y_{2n}$ de grado k.
• S_n es un anillo conmutativo. Para probar esto basta probar que $y_1, ..., y_{2n}$ son conmutativos. Ya que estos generan S_n. Para $i = 1, ..., n$ tenemos que $y_i y_{i+n} = \sigma_2(x_i\partial_i)$ y por otro lado $y_{i+n}y_i = \sigma_2(\partial_i x_i)$. Ahora bien, tenemos que $\partial_i x_i = x_i\partial_i + 1$ y por tanto se tiene la igualdad $\sigma_2(x_i\partial_i) = \sigma_2(\partial_i x_i)$.
De la misma forma usando los conmutadores que vimos al principio del texto podemos probar que y_i conmuta con y_j para $j \neq i + n$. Luego S_n es un anillo conmutativo.
Usando que S_n es generado por $y_1, ..., y_{2n}$ y que además estos elementos conmutan, se tiene fácilmente que ϕ es un homomorfismo sobreyectivo.
• Veamos ahora que ϕ es inyectivo, lo cual concluirá el resultado. Sea $F \in K[z_1, ..., z_{2n}]$ y supongamos que $\phi(F) = 0$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que F es un polinomio homogéneo ya que ϕ es un homomorfismo graduado. Entonces sea

$$0 = \phi(F(z_1, ..., z_{2n})) = F(y_1, ..., y_{2n}) = \sum c_{\alpha\beta} y_1^{\alpha_1} ... y_n^{\alpha_n} \cdot y_{n+1}^{\beta_1} ... y_{2n}^{\beta_n}$$

Donde $\alpha_1 + ... + \alpha_n + \beta_1 + ... + \beta_n = k$. Si definimos un operador $d \in A_n$ dado por la fórmula

$$d = \sum c_{\alpha\beta} x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n} \cdot \partial_1^{\beta_1} ... \partial_n^{\beta_n}$$

Por lo tanto $\sigma_k(d) = F(y_1, ..., y_{2n})$.
Luego tenemos que $\sigma_k(d) = \phi(F) = 0$, esto implica que $d \in B_{k-1}$. Y por lo tanto podemos escribir d como combinación lineal de los monomios $x^\alpha \partial^\beta$ donde $|\alpha| + |\beta| < k$. Pero, por construcción, d es también combinación lineal de monomios de grado exactamente k luego para que se den ambos casos todos los coeficientes $c_{\alpha\beta}$ son nulos. De donde concluimos que F es nulo y que ϕ es inyectiva. ∎

Vamos a definir ahora las filtraciones sobre los A_n-módulos. Definiremos este concepto sobre el álgebra de Weyl con la filtración de Bernstein para simplificar los resultados.

Definición 2.6. *Sea M un A_n-módulo a la izquierda. Una familia de K-espacios vectoriales $\{\Gamma_i\}_{i\geq 0}$ es una filtración respecto de la filtración de Bernstein de M si satisface*
(1) $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq ... \subseteq M$,
(2) $\bigcup_{i\geq 0} \Gamma_i = M$,
(3) $B_i \Gamma_j \subseteq \Gamma_{i+j}$.

Se tiene que si $i = 0$, entonces de (3) obtenemos que Γ_j es un K-espacio vectorial. Impondremos una última condición la cual vamos a usar para las filtraciones que usaremos en este texto.
(4) Γ_i es un K-espacio vectorial de dimensión finita. (También supondremos que $\Gamma_k = \{0\}$ para $k < 0$. Aunque existan filtraciones con índices en $\mathbb{Z}$, no las vamos a necesitar en este trabajo).
A partir de ahora diremos de igual forma que, en las condiciones de la definición anterior, la familia de K-espacios vectoriales $\{\Gamma_i\}_{i\geq 0}$ es una filtración de M, o que es una filtración respecto de la filtración de Bernstein, siempre y cuando no exista confusión.
Es claro que con estas condiciones $\mathcal{B}$ es una filtración de A_n como un A_n-módulo.
Otro ejemplo importante que vamos a tratar en esta sección es el A_n-módulo a la izquierda $K[X]$. Los espacios vectoriales Γ_i de todos los polinomios de grado $\leq i$ forman una filtración de $K[X]$ respecto de la filtración de Bernstein.

• De la misma forma que antes podemos tomar una filtración sobre un módulo para construir un módulo graduado.
Sean M un A_n-módulo a la izquierda y sea $\mathcal{T}$ una filtración de M con respecto a $\mathcal{B}$.

Tomamos la suma directa:

$$gr^{\Gamma}M = \bigoplus_{i\geq 0}(\Gamma_i/\Gamma_{i-1}).$$

Para $m \in \Gamma_i$ la clase $m + \Gamma_{i-1} \in \Gamma_i/\Gamma_{i-1}$. Un elemento en $gr^{\Gamma}M$ es una suma finita $\sum_i(m_i + M_{i-1})$ donde m_i pertenece a M_i. Se puede probar que $gr^{\Gamma}(M)$ tiene una estructura natural de S_n-módulo, (ver [9], prop. 1.11).
El S_n-módulo graduado, $gr^{\Gamma}M$, se llama módulo graduado asociado a la filtración Γ. Tomando el ejemplo anterior Γ la filtración de $K[X]$ con respecto a $\mathcal{B}$ tenemos que sus elementos homogéneos Γ_i/Γ_{i-1} son isomorfos al espacio vectorial de los polinomios homogéneos de grado i. Por lo tanto $gr^{\Gamma}M$ es isomorfo a $K[X]$. Ahora bien , anteriormente hemos visto que S_n es isomorfo al anillo de polinomios de 2n variables $y_1, ..., y_{2n}$. Vamos determinar la operación que definen los $y's$ sobre un polinomio homogéneo de grado r, que debe considerarse como un elemento de Γ_r/Γ_{r-1} .
$y_i \cdot f = x_i f$ para $i = 1, ..., n$, ahora bien, para $i = n+1, ..., 2n$ se tiene que, por definición, $y_i \cdot f = \mu_r(\partial_i(f))$. Pero tenemos que $\partial_i(f)$ es un polinomio homogéneo de grado $\leq r-1$. Y por tanto $y_i \cdot f = 0$. En particular se tiene que el anulador del S_n-módulo $gr^{\Gamma}M$, $\mathbf{ann}_{S_n}(gr^{\Gamma}M)$, es el ideal generado por los elementos $y_{n+1}, ..., y_{2n}$.

2.2 Filtraciones inducidas

Sea M un A_n-módulo con una filtración Γ respecto de la filtración $\mathcal{B}$. Sea N un submódulo de M, podemos usar la filtración Γ para construir filtraciones para N y para M/N. A estas filtraciones se las denomina filtraciones inducidas por Γ. Tienen una gran importancia a la hora de poder construir módulos con una dimensión especial a los cuales llamaremos módulos holónomos, los cuales estudiaremos en la siguiente sección.

Proposición 2.2. (1). La familia $\Gamma' = \{N \cap \Gamma_k\}_{k\geq 0}$ es una filtración sobre N. La llamaremos la filtración inducida por Γ sobre N.
(2). La familia $\Gamma'' = \{(\Gamma_k + N)/N\}_{k\geq 0}$ es una filtración sobre M/N. La llamaremos la filtración inducida por Γ sobre M/N.

Esta proposición es fácil de probar directamente usando que Γ es una filtración de M. Por ejemplo para el primer caso (Γ'), tenemos que $\Gamma'_k = \Gamma_k \cap N \subseteq \Gamma_{k+1} \cap N = \Gamma'_{k+1}$ debido a que $\Gamma_k \subseteq \Gamma_{k+1}$ para todo k. De donde se tiene la pripera propiedad de la definición de filtración. Por otra parte es claro que $\bigcup_k(\Gamma_k \cap N) = (\bigcup_k \Gamma_k) \cap N =$

$M \cap N = N$ por tanto también se tiene la segunda propiedad. La tercera es también trivial usando que N es un A_n-submódulo de M y por tanto es invariante bajo el producto en A_n. Por lo que tendríamos $B_i\Gamma'_j \subseteq \Gamma_{i+j} \cap N$.

Proposición 2.3. Sea M un A_n-módulo, $N \subseteq M$ un submódulo de M y $\Gamma = \{\Gamma_k\}_{k\geq 0}$ una filtración de M. Entonces existe una sucesión exacta de módulos graduados

$$0 \to gr^{\Gamma'} N \to gr^{\Gamma} M \to gr^{\Gamma''} M/N \to 0$$

Demostración. Para cada $k \geq 0$ tenemos la sucesión exacta de K-espacios vectoriales

$$0 \to N \cap \Gamma_k \xrightarrow{i_k} \Gamma_k \xrightarrow{\pi_k} (\Gamma_k + N)/N \to 0$$

Donde i_k y π_k son las aplicaciones inclusión y proyección canónica respectivamente. Entonces es claro que $\mathbf{Im}(i_k) = N \cap \Gamma_k$ y por otra parte usando que $(\Gamma_k + N)/N \simeq \Gamma_k/(\Gamma_k \cap N)$ tenemos que $\mathbf{Ker}(\pi_k) = N \cap \Gamma_k$ para cada entero $k \geq 0$. Por tanto para cada $k \geq 0$ la sucesión de K-espacios vectoriales

$$0 \to \frac{N\cap\Gamma_k}{N\cap\Gamma_{k-1}} \to \frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}} \to \frac{\Gamma_k+N}{\Gamma_{k-1}+N} \to 0$$

es también exacta. De donde uniendo para todo $k \geq 0$ estas sucesiones obtenemos la sucesión de módulos graduados anterior. ∎

2.3 Filtraciones buenas

Con completa generalidad, los anillos y los módulos no poseen propiedades "interesantes", pero en la práctica hay anillos particulares de los que se puede obtener mucha más información. Entre ellos están los anillos noetherianos y los anillos artinianos. En particular se puede decir mucho de un anillo que es finitamente generado sobre un cuerpo K. Por ejemplo, el anillo de polinomios en un número finito de variables sobre un cuerpo K es noetheriano. Esto fue probado por D. Hilbert en 1890 y es una de las claves del álgebra conmutativa. Es conocido como el teorema de la base de Hilbert. En esta sección vamos a ver ciertos resultados en relación con este teorema y cómo podemos asociarlo a nuestro estudios de módulos sobre A_n. Es decir cómo podemos asociarlo al caso no conmutativo. Por último definiremos lo que son las filtraciones buenas y daremos un resultado de caracterización de estas, así como algunas de sus propiedades fundamentales.

Un R-módulo a la izquierda es noetheriano si todos sus submódulos son finitamente generados. Y diremos que un anillo R es un anillo noetheriano a la izquierda si R es noetheriano como R-módulo. Otra definición equivalente de R-módulo noetheriano es la siguiente. Un R-módulo M es noetheriano a la izquierda si para toda cadena infinita ascendiente de submódulos a la izquierda $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$ existe un $k \geq 0$ para el cual $N_i = N_k$ para todo $i \geq k$. Es decir satisfacen la cindición de cadena ascendente.

Proposición 2.4. Sea M un R-módulo a la izquierda y sea N un submódulo de M.
(1) M es noetheriano si y solo si M/N y N son noetherianos.
(2) Si N' es otro submódulo de M y suponemos que $M = N + N'$. Si N, N' son noetherianos, entonces M lo es.

La demostración de este resultado se puede encontrar en la referencia [10], en el capítulo 8, correspondiente a los anillos y módulos Noetherianos.
Los dos resultados que vienen a continuación nos servirán para probar que A_n es un anillo noetheriano a la izquierda.

Teorema 2.2. *Sea R un anillo noetheriano conmutativo. El anillo de polinomios $R[X]$ es noetheriano.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que no es noetheriano. Entonces existe algún ideal I de $R[X]$ que no es finitamente generado. Usando ese ideal vamos a construir una cadena ascendiente infinita de ideales en $R[X]$ y por tanto llegaremos a una contradicción.
Escogemos $f_1 \in I$ de menor grado posible. Asumimos por inducción que $f_1, \ldots, f_k$ han sido escogidos. Sea f_{k+1} el polinomio de menor grado posible en $I/(f_1, \ldots, f_k)$. Como I no es finitamente generado, esta construcción produce una sucesión infinita de polinomios $f_1, f_2, \ldots \in I$. Sean n_i el grado y a_i el coeficiente líder de f_i, para cada i. Como R es noetheriano tenemos que la cadena ascendente de ideales

$$(a_1) \subseteq (a_1, a_2) \subseteq \ldots$$

Debe ser estacionaria, pongamos pues que se tiene $(a_1, \ldots, a_k) = (a_1, \ldots, a_{k+1})$. Por lo tanto a_{k+1} es combinación lineal de los $a_1, \ldots, a_k$. Pongamos que $a_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} b_i a_i$, para ciertos $b_i \in R$. Tomamos entonces

$$g = f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} b_i x^{n_{k+1} - n_i} f_i$$

Como, por construcción, los grados satisfacen $n_1 \leq n_2 \leq \ldots$ se tiene que g es de hecho un polinomio. Además por construcción de g estamos cancelando el término líder de f_{k+1} y por tanto g tiene menor grado que f_{k+1}. Ahora bien , $g \in I$ por ser combinación lineal de $f_1, \ldots, f_{k+1}$. Pero $g \notin (f_1, \ldots, f_k)$. Lo cual es absurdo ya que g tiene grado menor que f_{k+1}. Luego I debe ser finitamente generado.

En particular, se sigue del resultado anterior que si tomamos un cuerpo K, entonces el anillo de polinomios $K[x_1, ..., x_n]$ es noetheriano.

Teorema 2.3. *Sea M un A_n-módulo a la izquierda con una filtración Γ con respecto a la filtración de Bernstein $\mathcal{B}$. Si $gr^\Gamma M$ es un S_n-módulo noetheriano, entonces M es noetheriano.*

La demostración de este resultado, que se puede encontrar en la página 69 de [10], se basa en tomar un submódulo N de M y probar que N está finitamente generado. Usando la filtración inducida Γ' de N.

Corolario 2.1. A_n es un anillo noetheriano a la izquierda.

La demostración, se deduce de combinar los dos resultados anteriores. Sabemos que el anillo graduado $S_n = gr^{\mathcal{B}} A_n$ es isomorfo al anillo de polinomios en $2n$ variables y por tanto por teorema 2.2, S_n es noetheriano. Luego usando el teorema 2.3 concluimos que A_n es noetheriano.

Proposición 2.5. Sea R un anillo noetheriano a la izquierda. Los R-módulos a la izquierda finitamente generados son noetherianos.

Demostración. Sea M un R-módulo a la izquierda finitamente generado. Supongamos que M está generado por un conjunto S de k elementos, entonces existe un homomorfismo sobreyectivo $\phi_S : R^k \to M$. Entonces Como R es noetheriano se sigue de la proposición 2.4(2) que R^k es noetheriano. Sabemos del primer teorema de isomorfía que $R^k / \mathbf{Ker}\, \phi_S \simeq M$. Luego M es noetheriano ya que por la proposición 2.4(1) sabemos que $R^k / \mathbf{Ker}\, \phi_S$ es noetheriano por serlo R^k. ❙

Definición 2.7. *Diremos que una filtración Γ respecto de la filtración de Bernstein de un A_n-módulo M, es una filtración buena si verifica que $gr^\Gamma M$ es finitamente generado sobre S_n.*

Sabemos que si $gr^\Gamma M$ es finitamente generado entonces es noetheriano (prop. 2.5) y por tanto M es finitamente generado (teor. 2.3), aunque no es siempre cierto que si M es finitamente generado sobre A_n entonces $gr^\Gamma M$ es finitamente generado sobre S_n respecto a una filtración Γ cualquiera. Es por ello que hemos dado la definición de filtración buena. Por otro lado, es cierto que cada A_n-módulo finitamente generado admite una buena filtración. Por ejemplo, si M está generado por $u_1, ..., u_s$ entonces la filtración Γ de M definida por $\Gamma_k = \sum_{i=1}^{s} B_k u_i$ es buena. El módulo graduado $gr^\Gamma M$ es generado sobre S_n por los símbolos $u_1, ..., u_s$.

Proposición 2.6. Sea M un A_n-módulo a la izquierda. Entonces una filtración Γ de M respecto de la filtración de Bernstein, es buena si y sólo si existe un entero k_0 tal que $\Gamma_{i+k} = B_i\Gamma_k$ para todo $k \geq k_0$ y para todo i.

Este es el resultado de caracterización de una filtración buena respecto de la filtración de Bernstein, cuya demostración tiene cierto parecido a la demostración del teorema 2.3 y se puede encontrar en [10], en la página 71.
Hay filtraciones que no son buenas, para ver un ejemplo de ello basta construir una filtración con respecto a la filtración de Bernstein, de tal forma que al tomar cualquier índice k no se pueda dar nunca la igualdad que caracteriza una buena filtración en la proposición anterior. Sea Ω una filtración del módulo a la izquierda A_n definida por $\Omega_k = B_{2k}$. De esta forma tenemos que $B_i\Omega_k = B_{i+2k}$ está propiamente contenido en $B_{2(i+k)} = \Omega_{i+k}$. Usando la caracterización anterior, Ω no es una buena filtración de A_n respecto de la filtración de Bernstein.
La siguiente proposición es importante ya que nos va a permitir comparar dos filtraciones buenas. Con este resultado podremos ver más adelante que ciertas componentes algebraicas no dependen de la buena filtración que tomemos.

Proposición 2.7. Sea M un A_n-módulo a la izquierda. Supongamos que Γ y Ω son dos filtraciones de M con respecto a la filtración de Bernstein, entonces se verifica lo siguiente.
(1) Si Γ es una filtración buena, entonces existe un k_1 para el cual $\Gamma_j \subseteq \Omega_{j+k_1}$.
(2) Si ambas filtraciones son buenas, entonces existe un k_2 tal que $\Omega_{j-k_2} \subseteq \Gamma_j \subseteq \Omega_{j+k_2}$.
Para cualquier $j \geq 0$.

La prueba de este resultado se obtiene de la caracterización que hemos dado para una filtración buena en la proposición 2.6. Se puede encontrar en [10],(página 72).

3 Dimensión de un A_n-módulo

3.1 El polinomio de Hilbert-Samuel

Definición 3.1. *Sea un polinomio $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$. Se dice que $p(t)$ es un polinomio numérico si $p(n) \in \mathbb{Z}$ para todos los enteros $n >> 0$.*

Definición 3.2. *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función. Definimos la función diferencia como $\Delta f(z) = f(z+1) - f(z)$.*

Proposición 3.1. Sea $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ un polinomio numérico de grado k. Entonces existen unos enteros $c_0, ..., c_k$ tales que

$$p(t) = \sum_{i=0}^{k} c_{k-i} \binom{t}{i}.$$

En particular tenemos que $p(n) \in \mathbb{Z}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Probaremos este resultado por inducción en el grado de $p(t)$. Si $p(t)$ tiene grado 0, entonces por la definición de polinomio numérico debe ser un entero. Supongamos que el resultado se mantiene para todos los polinomios numéricos de grado $\leq k-1$. Sea $p(t)$ un polinomio numérico de grado k. Como el término líder de $\binom{t}{r}$ es $t^r/r!$, existen números racionales $c_0, ..., c_k$ tales que $p(t) = \sum_0^k c_{k-i} \binom{t}{i}$,ver [25] (pág. 320). Hay que probar que $c_i \in \mathbb{Z}$ para cada i. Para ello vamos a usar que
$\Delta \binom{t}{r} = \binom{t}{r-1}$. Lo cual se puede probar fácilmente con un sencillo cálculo que dejamos para el final de la prueba. Usando la igualdad anterior tenemos que

$$\Delta p(t) = \textstyle\sum_1^k c_{k-i} \binom{t}{i-1}.$$

Como $\Delta p(t)$ tiene grado $k-1$, por inducción tenemos que $c_{k-1}, ..., c_0 \in \mathbb{Z}$. Luego $p(t) - c_k = \sum_1^k c_{k-i} \binom{t}{i}$ es entero. Como $p(t)$ es un polinomio numérico, se tiene que para $r >> 0$ ambos $p(r)$ y $p(r) - c_k$ son enteros. Luego $c_k \in \mathbb{Z}$.
Por último si tomamos $f(t) = \binom{t}{r}$ tenemos que $\Delta f(t)$ viene dado por:
$\frac{(t+1)!}{(t+1-r)!r!} - \frac{t!}{(t-r)!r!} = ((t+1) - (t-r+1))(t(t-1)\cdots(t-r+2)) = \frac{t(t-1)\cdots(t-r+2)}{(r-1)!} = \binom{t}{r-1}$.

Con este resultado hemos probado que cualquier polinomio numérico se puede escribir como una combinación lineal entera de binomios. Lo cual nos va a simplificar bastante la definición de dimensión de un A_n-módulo. Ya que esta definición la daremos usando el polinomio de Hilbert, el cual es un polinomio numérico. Además se puede probar que esta combinación lineal es única. Es decir, que los enteros $c_0, ..., c_k$ del resultado anterior son únicos. La prueba de esto se puede encontrar en [25], en la solución del problema 85 en la página 320.

Lema 3.1. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una función. Supongamos que existe un polinomio numérico $q(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tal que $\Delta f(n) = q(n)$, para todo $n >> 0$. Entonces existe un polinomio numérico $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tal que $f(n) = p(n)$, para todo $n >> 0$.

Demostración. Usando la proposición 3.1 tenemos que existen unos enteros $c_0, ..., c_k$ para los cuales podemos escribir $q(t)$ de la forma:

$$q(t) = \sum_0^k c_{k-i} \binom{t}{i},$$

Sea $p(t) = \sum_0^k c_{k-i} \binom{t}{i+1}$. Entonces tenemos que $\Delta p(t) = q(t)$. Para esta igualdad hemos usado que $\Delta \binom{t}{i} = \binom{t}{i-1}$.
Tenemos por lo tanto que $\Delta(f-p)(n) = 0$ para cada $n >> 0$. Pero esto sólo es posible si $(f-p)(n)$ es una constante en $\mathbb{Z}$,la cual llamaremos c_{k+1}, para todo $n >> 0$. Por lo que $f(n) = p(n) + c_{k+1}$, para cada $n >> 0$ como se quería demostrar.

Teorema 3.1. *Sea $M = \oplus_{i\geq 0} M_i$ un módulo graduado finitamente generado sobre el anillo de polinomios $K[x_1, ..., x_n]$. Existe un polinomio numérico $\mathcal{X}(t) \in \mathbb{Q}[t]$ y un entero positivo N tales que $\sum_{i=0}^s \dim_K(M_i) = \mathcal{X}(s)$ para todo $s \geq N$.*

Demostración. La prueba es por inducción en el número n de variables. Si $n = 0$, nos reducimos al cuerpo base K. En este caso el módulo finitamente generado M es un espacio vectorial de dimensión finita. Luego está generado por un número finito de componentes homogéneas. Así

$$\sum_{i=0}^s \dim_K(M_i) = \dim_K M$$

para $s >> 0$, y podemos elegir $\mathcal{X}(t) = \dim_K M$, como una constante.
suponemos, por inducción, que el teorema se mantiene para los módulos graduados finitamente generados sobre el anillo de polinomios $K[x_1, ..., x_{n-1}]$. Sea ahora $M = \oplus_{i\geq 0} M_i$ un módulo graduado finitamente generado sobre el anillo de polinomios $K[x_1, ..., x_n]$. Y definimos la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(s) = \sum_{i=-\infty}^s \dim_K(M_i)$$

donde $M_i = 0$ si $i < 0$. Sea $\phi_i : M_i \to M_{i+1}$ la función lineal de espacios vectoriales definida por el producto por x_n. Los conjuntos $Q_i = Ker(\phi_i)$ y $L_i = CoKer(\phi_i)$ forman la siguiente sucesión exacta de espacios vectoriales:

$$0 \to Q_{i-1} \to M_{i-1} \xrightarrow{\phi_{i-1}} M_i \to L_i \to 0.$$

Ahora bien, tenemos que $Q = \bigoplus_{i\geq 0} Q_i$ y $L = \bigoplus_{i\geq 0} L_i$ son dos módulos graduados finitamente generados sobre $K[x_1, ..., x_n]$. Ya que son respectivamente el Kernel y el CoKernel del endomorfismo de M definido por el producto de x_n. Como los elementos de L y Q son anulados por x_n, entonces son de hecho $K[x_1, ..., x_{n-1}]$-módulos graduados finitamente generados. Así, por inducción, existen polinomios $\mathcal{X}_1(t), \mathcal{X}_2(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tales que

$$\mathcal{X}_1(s) = \textstyle\sum_{i=0}^{s} \dim_K(Q_i) \text{ y } \mathcal{X}_2(s) = \sum_{i=0}^{s} \dim_K(L_i),$$

para $s >> 0$.
Por otro lado, se cumple la siguiente igualdad debido a que la sucesión anterior es exacta.

$$\dim_K Q_{i-1} - \dim_K M_{i-1} + \dim_K M_i - \dim_K L_i = 0$$

Sumando entonces para $0 \leq i \leq s$ y $s >> 0$, se obtiene que

$$\mathcal{X}_1(s-1) + \Delta f(s) - \mathcal{X}_2(s) = 0.$$

Entonces tenemos que $\Delta f(s)$ es un polinomio numérico para $s >> 0$ ya que es diferencia de dos polinomios numéricos. Podemos concluir pues que por el lema anterior $f(s)$ es un polinomio numérico para todo $s >> 0$, como se requería. ∎

Este polinomio es conocido como el polinomio de Hilbert del módulo graduado finitamente generado M.

3.2 Dimensión y Multiplicidad

Ahora estamos preparados para definir la dimensión de un módulo sobre A_n usando el polinomio de Hilbert que acabamos de ver. Sea M un A_n-módulo a la izquierda finitamente generado. Supongamos que Γ es una buena filtración de M con respecto a la filtración de Bernstein $\mathcal{B}$, que además sabemos que cualquier A_n-módulo admite una buena filtración. Denotamos por $\mathcal{X}(t, \Gamma, M)$ el polinomio de Hilbert del S_n-módulo graduado $gr^{\Gamma} M = \bigoplus_{i\geq 0}(\Gamma_i/\Gamma_{i-1})$ sobre el anillo de polinomios S_n, el cual es finitamente generado debido a que Γ es una filtración buena. Por el teorema anterior, tenemos que, para $t >> 0$,

$$\mathcal{X}(t,\Gamma,M) = \sum_{i=0}^{t} \dim_K(\Gamma_i/\Gamma_{i-1}) = \dim_K(\Gamma_t).$$

Esta última igualdad se tiene de que la sucesión de espacios vectoriales

$$0 \to \Gamma_{k-1} \xrightarrow{i_k} \Gamma_k \xrightarrow{\pi_k} \Gamma_k/\Gamma_{k-1} \to 0$$

donde i_k y π_k son las aplicaciones inclusión y proyección canónica respectivamente, es una sucesión exacta. Y por tanto se tiene que $\dim_K(\Gamma_k) - \dim_K(\Gamma_{k-1}) = \dim_K(\Gamma_k/\Gamma_{k-1})$. Por tanto en el sumatorio anterior se cancelan todos los términos excepto $dim_K(\Gamma_t)$.

Definición 3.3. *Sea M un A_n-módulo cumpliendo lo anterior, entonces La dimensión de M es el grado del polinomio $\mathcal{X}(t,\Gamma,M)$ denotado por $d = d(M)$. Sea $a_{d(M)}$ el coeficiente líder de $\mathcal{X}(t,\Gamma,M)$ como polinomio en la variable t. Definimos la multiplicidad de M como $m(M) = d!a_{d(M)}$.*

Aparentemente estas definiciones de dimensión y multiplicidad pueden depender de la filtración buena que tomemos para la construcción del polinomio de Hilbert, pero esto no es así. Sean Γ y Ω dos filtraciones buenas para M. Usando la proposición 2.7 que vimos en la sección de filtraciones buenas, con la cual podíamos relacionar dos filtraciones buenas. Tenemos que existe un entero k tal que $\Omega_{j-k} \subseteq \Gamma_j \subseteq \Omega_{j+k}$. En particular se tiene que, $\dim_K \Omega_{j-k} \leq \dim_K \Gamma_j \leq \dim_K \Omega_{j+k}$. Usando el teorema 3.1 del polinomio de Hilbert tenemos que para $j >> 0$

$$\mathcal{X}(j-k,\Omega,M) \leq \mathcal{X}(j,\Gamma,M) \leq \mathcal{X}(j+k,\Omega,M).$$

como el comportamiento de un polinomio en valores muy grandes viene determinado por su término líder y podemos tomar $j >> 0$ suficientemente grande, podemos concluir de las desigualdades anteriores que $\mathcal{X}(j,\Gamma,M)$ y $\mathcal{X}(j,\Omega,M)$ tienen mismo grado y coeficiente líder. Y por tanto $d(M)$ y $m(M)$ son independientes de la filtración buena tomada para M.

• Estudiemos estas definiciones con varios ejemplos. El primero es la filtración de Bernstein $\mathcal{B}$ la cual hemos visto que es una buena filtración para un A_n-módulo. Tomemos $M = A_n$ que obviamente es un A_n-módulo. Calculemos $\mathcal{X}(t,\mathcal{B},M) = \dim_K(B_t)$. Los monomios $x^\alpha\partial^\beta$ para $|\alpha| + |\beta| \leq t$ forman una base como K-espacio vectorial de las componentes homogéneas , de grado menor o igual que t, B_t de la filtración de Bernstein. Por tanto, es suficiente calcular el número de elementos de esta base para saber su dimensión y para ello es suficiente contar las soluciones no negativas de la ecuación $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \beta_1 + \ldots + \beta_n \leq t$, por un cálculo rápido de combinatoria, obtenemos que el número de soluciones es $\binom{t+2n}{2n}$. Luego obtenemos que el polinomio de Hilbert correspondiente es $\mathcal{X}(t,\mathcal{B},M) = \binom{t+2n}{2n} = \frac{(t+2n)(t+2n-1)\cdots(t+1)}{(2n)!}$. Visto como un polinomio en la variable t, tiene grado $2n$ y coeficiente líder $1/(2n)!$, luego $d(A_n) = 2n$ y $m(A_n) = 1$. Como mencionábamos en la anterior sección, estos números combinatorios empiezan a tener importancia, ya que nos dan la información necesaria de la dimensión y multiplicidad de un A_n-módulo.

• Otro buen ejemplo para visualizar esto es el A_n-módulo, $K[x_1, ..., x_n]$ con la filtración $\{\Gamma_k\}_{k\geq 0}$, donde Γ_t es el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual que t. Es fácil comprobar que es una buena filtración de este A_n-módulo. De la misma forma que antes tenemos que $\dim_K \Gamma_t = \binom{n+t}{n}$, ya que en este caso buscamos las soluciones no negativas de $\alpha_1 + ... + \alpha_n \leq t$. Y por tanto el polinomio de Hilbert viene dado por $\mathcal{X}(t, \Gamma, K[x_1, ..., x_n]) = \binom{n+t}{n}$ el cual es un polinomio de grado n y coeficiente líder $1/n!$. Luego $d(K[x_1, ..., x_n]) = n$ y $m(K[x_1, ..., x_n]) = 1$.

• Sea M un A_n-módulo a la izquierda y Γ una buena filtración de M respecto de $\mathcal{B}$ Sea N un submódulo de M. Y sean Γ' y Γ'' las filtraciones inducidas por Γ en N y en M/N, respectivamente. Vimos en el apartado de filtraciones inducidas que la sucesión de S_n-módulos

$$0 \to gr^{\Gamma'} N \to gr^{\Gamma} M \to gr^{\Gamma''} M/N \to 0$$

es exacta, además Γ es una filtración buena, por lo que $gr^{\Gamma} M$ es finitamente generado. Y se tiene que S_n es un anillo Noetheriano. Luego $gr^{\Gamma'} N$ y $gr^{\Gamma''} M/N$ son finitamente generados y por lo tanto las filtraciones inducidas son filtraciones buenas de M respecto de $\mathcal{B}$.

• Por otra parte tenemos que la sucesión de espacios vectoriales

$$0 \to \Gamma'_k/\Gamma'_{k-1} \to \Gamma_k/\Gamma_{k-1} \to \Gamma''_k/\Gamma''_{k-1} \to 0$$

es exacta, (ver prop. 2.3). Luego las dimensiones verifican

$$\dim_K \Gamma'_k/\Gamma'_{k-1} + \dim_K \Gamma''_k/\Gamma''_{k-1} = \dim_K \Gamma_k/\Gamma_{k-1}.$$

Sumando estos términos en $k = 0, 1, 2, ..., s$ y asumiendo que $s >>$ se obtiene que

$$\mathcal{X}(s, \Gamma', N) + \mathcal{X}(s, \Gamma'', M/N) = \mathcal{X}(s, \Gamma, M).$$

Este punto nos proporciona dos resultados que van a ser muy útiles a la hora de calcular la dimensión de algunos módulos.

Teorema 3.2. *Sea M un A_n-módulo a la izquierda finitamente generado y N un submódulo de M, entonces se verifica.*

(1) $d(M) = max\{d(N), d(M/N)\}$.
(2) si $d(N) = d(M/N)$ *entonces* $m(M) = m(N) + m(M/N)$.

La prueba se obtiene trivialmente usando la igualdad entre polinomios de Hilbert anterior

$$\mathcal{X}(s, \Gamma', N) + \mathcal{X}(s, \Gamma'', M/N) = \mathcal{X}(s, \Gamma, M).$$

por una parte $d(M)$ corresponde al grado del polinomio de la derecha de la igualdad, y como estamos sumando polinomios de coeficientes líderes positivos, ya que estos son polinomios numéricos, entonces se tiene que $d(M) = \max\{d(N), d(M/N)\}$. (1) Por otra parte si $d(N) = d(M/N)$ entonces todos los polinomios de la igualdad anterior tienen el mismo grado por (1), luego de la igualdad obtenemos que el coeficiente líder de $\mathcal{X}(s, \Gamma, M)$ es la suma de los coeficientes líderes de los otros dos polinomios y de ahí se concluye (2).

Corolario 3.1. Sean $M_1, .., M_k$ unos A_n-módulos a la izquierda finitamente generados, y $M = M_1 \oplus ... \oplus M_k$, entonces se verifican.
(1) $d(M) = \max\{d(M_1), ..., d(M_k)\}$.
(2) si $d(M) = d(M_i)$ para $1 \leq i \leq k$, entonces $m(M) = \sum_{i=1}^{k} m(M_i)$.

La demostración de este resultado se sigue por inducción aplicando el teorema anterior en la sucesión exacta

$$0 \to M_k \to M \to M_1 \oplus ... \oplus M_{k-1} \to 0.$$

Gracias a este corolario podemos acotar superiormente la dimensión de un A_n-módulo finitamente generado por $2n$.

Corolario 3.2. Sea M un A_n-módulo finitamente generado. Entonces $d(M) \leq 2n$.

Demostración. Supongamos que M es finitamente generado por un conjunto S que consta de r elementos, entonces existe un homomorfismo sobreyectivo $\phi_S : A_n^r \to M$. Se sigue del teorema anterior que como $\mathbf{Ker}(\phi_S)$ es un submódulo de A_n^r, entonces $d(A_n^r) = \max\{d(A_n^r/\,\mathbf{Ker}\ \phi_S), d(\mathbf{Ker}\ \phi_S)\}$. Donde por el primer teorema de isomorfia tenemos que $A_n^r/\,\mathbf{Ker}\ \phi_S \simeq M$ y además como $d(A_n^r) = 2n$, concluimos que $d(M) = d(A_n^r/\,\mathbf{Ker}\ \phi_S) \leq 2n$. ∎

Hemos obtenido una cota superior para la dimensión de un A_n-módulo finitamente generado. Pero la dimensión de un A_n-módulo se puede afinar todavía un poco más. A continuación veremos que la dimensión de un A_n-módulo tiene también una cota inferior.

3.3 Desigualdad de Bernstein

Para determina la cota inferior de un A_n-módulo vamos a comenzar con un resultado de álgebra lineal.

Lema 3.2. Sea M un A_n-módulo a la izquierda finitamente generado con una filtración Γ respecto de $\mathcal{B}$. Supongamos que $\Gamma_0 \neq 0$. Entonces la transformación K-lineal

$$\phi : B_i \rightarrow Hom_K(\Gamma_i, \Gamma_{2i})$$

que lleva cada elemento $a \in B_i$ a la transofrmación lineal $\phi_a(u) = au$ es inyectiva.

La demostración de este lema técnico se puede encontrar en [10], pág. 82.

Teorema 3.3. *Sea M un A_n-módulo a la izquierda finitamente generado y no nulo, entonces $d(M) \geq n$.*

Demostración. Sea $S = \{u_1, ..., u_r\}$ un conjunto de generadores de M y sea Γ la filtración definida por $\Gamma_k = \sum_{i=1}^{r} B_k u_i$. Ya vimos que esta filtración era buena respecto de la filtración de Bernstein ya que el módulo graduado $gr^{\Gamma}M$ es generado sobre S_n por los símbolos $u_1, ..., u_r$. Como $B_0 = K$ entonces $\Gamma_0 \neq 0$. Sea $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}(t, \Gamma, M)$ el polinomio de Hilbert correspondiente. Usando el lema anterior tenemos que la transformación K-lineal $\phi : B_i \rightarrow Hom_K(\Gamma_i, \Gamma_{2i})$ es inyectiva, en particular

$$\dim_K B_i \leq \dim_K(Hom_K(\Gamma_i, \Gamma_{2i}))$$

Donde el espacio $Hom_K(\Gamma_i, \Gamma_{2i})$ tiene dimensión $\dim_K \Gamma_i \cdot \dim_K \Gamma_{2i}$. De aquí, tomando $i >> 0$ tenemos que $\dim_K B_i \leq \mathcal{X}(i)\mathcal{X}(2i)$. Por otra parte tenemos que $\dim_K B_i = \binom{i+2n}{2n}$ que es un polinomio de grado $2n$. Entonces como polinomio en i, $\mathcal{X}(i)\mathcal{X}(2i)$, debe tener grado $\geq 2n$. Pero el grado del polinomio $\mathcal{X}(i)\mathcal{X}(2i)$ es $2d(M)$. Por tanto $d(M) \geq n$.

Esta desigualdad fue probada en primer lugar por I. N.Bernstein en [4] y se le llama desigualdad de Bernstein. Hemos visto con dos ejemplos claros como el de A_n y el de $K[X]$ que ambas cotas inferior y superior se alcanzan. De hecho se puede probar que existen A_n-módulos de dimensión k, para cada k un entero cualquiera entre estas dos cotas. Si tomamos el ideal $J = A_n(\partial_{k+1}, ..., \partial_n)$ para un $k \geq 1$ tenemos que el A_n-módulo A_n/J tiene dimensión $n + k$. Para probar esto basta tomar la filtración inducida por la filtración de Bernstein Γ'' dada por $\Gamma''_j = B_j/(B_j \cap A_n(\partial_{k+1}, ..., \partial_n))$. De esta forma tenemos que $dim_K(A_n/J) = \mathcal{X}(t, \Gamma'', A_n/J)$ donde el polinomio de hilbert asociado viene dado por el número combinatorio que se obtiene al contar las soluciones no negativas de la desigualdad $\alpha_1 + ... + \alpha_n + \beta_1 + ... + \beta_k \leq t$ que es $\binom{n+k+t}{n+k}$. Que visto como polinomio en la variable t tiene dimensión $n + k$. De esta forma podemos alcanzar ambas cotas.

3.4 Módulos holónomos

Un A_n-módulo es holónomo si es cero o si tiene dimensión n. Hemos visto ya un ejemplo de este tipo de A_n-módulos como es el de $K[X]$. Existen algoritmos que son capaces de decirnos si un A_n-módulo es o no es holónomo. Hablaremos de ello en la última sección.
En esta sección vamos a ver diferentes ejemplos de construcción de módulos holónomo y propiedades básicas de estos, en particular, vamos a probar que los A_n-módulos holónomos son de torsión, Artinianos y son cíclicos. Tres grandes propiedades que hacen muy interesante el estudio de estos módulos y a su vez hacen que estos sean más manejables algorítmicamente.

Proposición 3.2. Sea n un entero positivo.
(1) Submódulos y cocientes de un A_n-módulo holónomo son también A_n-módulos holónomos.
(2) Las sumas finitas de A_n-módulos holónomos son holónomos.

Para la demostración de esta proposición basta usar primero que si N es un submódulo de M, entonces la dimensión de N y de M/N es menor o igual que la de M y por tanto usando la desigualdad de Bernstein, como la dimensión de M es n, la menor posible, entonces $d(N) = d(M/N) = n$. Esto demuestra (1).
Por otro lado usando que si $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ entonces $d(M) = \max\{d(M_1), \ldots, d(M_n)\}$ donde cada M_i es holónomo, entonces $d(M) = n$ y por tanto M es holónomo.(2).

Proposición 3.3. Los A_n-módulos holónomos son módulos de torsión.

Demostración. Tomamos M un A_n-módulo a la izquierda holónomo y tomamos un elemento $u \in M$ no nulo cualquiera. definimos la función $\phi : A_n \to M$ definida por $\phi(a) = au$, de esta forma $\mathbf{Ker}(\phi) = \mathbf{ann}_{A_n}(u)$. Por el teorema 3.2 tenemos que $2n = d(A_n) = \max\{d(\mathbf{Ker}\, \phi), d(\mathbf{Im}\, \phi)\}$. Por otra parte $\mathbf{Im}\, \phi \subseteq M$ y este último es holónomo por tanto $d(\mathbf{Im}\, \phi) = n$. Luego de la igualdad anterior se tiene que $d(\mathbf{Ker}\, \phi) = 2n$, en particular $\mathbf{Ker}\, \phi \neq \emptyset$ y por tanto u es un elemento de torsión de M. Luego M es de torsión. ∎

Además cuando tratamos A_1-módulos se tiene el recíproco de lo anterior, es decir, que sea holónomo es equivalente a que sea de torsión. El hecho de que un A_1-módulo de torsión finitamente generado es holónomo está demostrado en la página 87 de [10]. En cambio para n entero mayor que 1, esta equivalencia no es cierta para todos los A_n-módulos de torsión. Como por ejemplo si tomamos el operador diferencial ∂_n y tomamos el A_n-módulo dado por $M = A_n/A_n(\partial_n)$. Tenemos que la filtración de Bernstein induce en M una filtración definida por

$$\Gamma_i = B_i/(B_i \cap A_n(\partial_n))$$

donde tenemos que Γ_i es isomorfo al espacio vectorial generado por los monomios en $x_1, \ldots, x_n$ y $\partial_1, \ldots, \partial_{n-1}$ de grado $\leq i$. Que como ya vimos anteriormente su dimensión, la cual viene dada por el polinomio de Hilbert asociado, se puede calcular directamente por combinatoria, ya que buscamos las posibles soluciones de

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \beta_1 + \ldots + \beta_{n-1} \leq i$$

y por tanto el polinomio de Hilbert de M viene dado por $\binom{2n+i-1}{2n-1}$, el cual como polinomio en i, tiene grado $2n-1$. De aquí concluimos que si $n \geq 2$ entonces es claro que $d(M) = 2n - 1 > n$ y por tanto no es holónomo.

Teorema 3.4. *Los A_n-Módulos holónomos son artinianos. Es decir, los submódulos a la izquierda de M verifican la propiedad de cadena descendente.*

Demostración. Sea M un A_n-módulo a la izquierda, no nulo, holónomo y supongamos que existe una cadena descendente de submódulos de M.

$$M = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots$$

Supondremos por reducción al absurdo que esta cadena no es estacionaria. Por la porposición 3.2(1) se puede concluir que, Como cada N_i es un submódulo de M entonces son a su vez holónomos. Tenemos que existe una sucesión exacta

$$0 \to N_{i+1} \to N_i \to N_i/N_{i+1} \to 0$$

por lo que $m(N_i) = m(N_{i+1}) + m(N_i/N_{i+1})$. Luego uniendo cada término tenemos

$$m(M) = \sum_{i=0}^{r} m(N_i/N_{i+1}) + m(N_{r+1}) \geq r + 1.$$

Para cada $r \geq 0$. Lo cual es absurdo. Esta última desigualdad se debe a que la multiplicidad de un A_n-módulo es un entero estrictamente positivo, (ver [9], pág. 83). Luego la cadena anterior debe ser estacionaria y por tanto M es artiniano. ▮

Un corolario inmediato de de la prueba anterior es que un A_n-módulo holónomo de multiplicidad 1 es irreducible.
Para la prueba simplemente usamos que si M es un módulo a la izquierda holónomo de multiplicidad 1, entonces como N y M/N son también holónomos por ser submódulo y cociente de M, se tiene que $m(M) = m(N) + m(M/N)$. Ahora bien, como $m(M) = 1$ y $N \neq \emptyset$ entonces $M/N = \emptyset$. Y por tanto $M = N$ y M es irreducible.

Un dato interesante es que hasta 1985, se creía que todo A_n-módulo simple tenía que ser holónomo. Pero entonces Stafford ([30]) probó que si $n > 2$ y $\lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$, entonces el operador

$$s = \partial_1 + (\textstyle\sum_{i=2}^n \lambda_i x_1 x_i \partial_i) + \sum_{i=2}^n (x_i - \partial_i)$$

genera un ideal maximal a la izquierda de A_n. Y al tomar, $M = A_n/A_n s$. Entonces M es simple y $d(M) = 2n - 1 > n$, ya que $n > 2$.

Teorema 3.5. *Sea R un anillo noetheriano simple a la izquierda y M un R-módulo finitamente generado a la izquierda. Si M es artiniano pero R no lo es (como R-módulo a la izquierda), entonces M es un módulo cíclico.*

La prueba de este resultado se puede encontrar en la página 90 de [10]. A partir de este resultado se sigue que los módulos holónomos son, en particular, cíclicos.

Corolario 3.3. Los A_n-módulos holónomos son cíclicos.

Sabemos que un A_n-módulo holónomo es artiniano. Por otra parte A_n no es artiniano como A_n-módulo a la izquierda. Por lo tanto la prueba de este corolario se sigue del resultado anterior. Para demostrar que A_n no es artiniano como un módulo sobre si mismo basta construir una cadena descendiente infinita. Tomando pues

$$A_n x_n \supseteq A_n x_n^2 \supseteq A_n x_n^3 \supseteq \ldots$$

De donde concluimos que A_n no es artiniano como módulo sobre si mismo.

3.5 Variedades características

En esta sección vamos a ver que lo que definimos como dimensión de un A_n-módulo usando el polinomio de Hilbert se puede definir geométricamente. Para ello usaremos muchos resultados de geometría algebraica, los cuales se pueden encontrar en el capítulo uno de [15]. A lo largo de este capítulo supondremos que estamos sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.

Definición 3.4. *Sea M un A_n-módulo finitamente generado a la izquierda, y sea Γ una buena filtración de M respecto de la filtración de Bernstein. Denotamos por $\mathbf{ann}(M,\Gamma)$ al conjunto anulador de $gr^\Gamma M$ en S_n, el cual es un ideal de S_n. ($\mathbf{ann}_{S_n}(gr^\Gamma M)$).*

Definición 3.5. *Sea M un A_n-módulo a la izquierda finitamente generado. El ideal $\mathcal{I}(M) = \sqrt{\mathbf{ann}(M,\Gamma)}$ se llama el ideal característico de M.*

Definición 3.6. *Sea M un A_n-módulo finitamente generado a la izquierda. la variedad característica de M se define como la variedad afín*

$$\mathrm{Ch(M)} = \mathcal{V}(\sqrt{\mathbf{ann}(M,\Gamma)})$$

Donde si I es un ideal polinomial en $2n$ variables, entonces $\mathcal{V}(I)$ es el conjunto de puntos en K^{2n} que anula a todos los polinomios en I.

Vamos a probar que el ideal característico de un A_n-módulo M no depende de la filtración buena usada. De esta forma tendremos que $\mathrm{Ch}(M)$ tampoco dependerá de la filtración buena escogida.

Lema 3.3. Sean Γ y Σ dos filtraciones buenas de M. Entonces

$$\sqrt{\mathbf{ann}(M,\Gamma)} = \sqrt{\mathbf{ann}(M,\Sigma)}$$

Demostración. En primer lugar se puede probar que los ideales $\mathbf{ann}(M,\Gamma)$ y $\mathbf{ann}(M,\Sigma)$ son ideales homogéneos de un álgebra graduada y por tanto coinciden con sus radicales. Sea f un elemento homogéneo de grado s en $\sqrt{\mathbf{ann}(M,\Gamma)}$. Existe $d \in B_s$, la componente de grado $\leq s$ de la filtración de Bernstein, tal que $f = \sigma_s(d)$. Ahora bien, como $f \in \sqrt{\mathbf{ann}(M,\Gamma)}$, existe un entero positivo m para el cual $f^m \in \mathbf{ann}(M,\Gamma)$. Por lo que $d^m\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+ms-1}$, para todo $i \geq 0$. Iterando q veces tenemos que

$$d^{mq}\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+msq-q}$$

Por otra parte, por la proposición 2.5, existe un $k \geq 0$ tal que

$$\Gamma_{i-k} \subseteq \Sigma_i \subseteq \Gamma i + k$$

para todo $i \geq 0$. Tomando $q = 2k + 1$ en $d^{mq}\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+msq-q}$ y junto a lo anterior, tenemos que

$$d^{m(2k+1)}\Sigma_i \subseteq d^{m(2k+1)}\Gamma_{i+k} \subseteq \Gamma_{i+ms(2k+1)-k-1} \subseteq \Sigma_{i+ms(2k+1)-1}$$

Luego $d^{m(2k+1)}\Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+ms(2k+1)-1}$ para todo $i \geq 0$. De donde concluimos que $f^{m(2k+1)} \in \mathbf{ann}(M,\Sigma)$ y entonces $\sqrt{\mathbf{ann}(M,\Gamma)} \subseteq \sqrt{\mathbf{ann}(M,\Sigma)}$. La otra inclusión es análoca cambiando los papeles de Γ y Σ. ▮

Proposición 3.4. Sea M un A_n-módulo finitamente generado a la izquierda y sea N un submódulo de M. Entonces

$$\mathrm{Ch}(M) = \mathrm{Ch}(N) \cup \mathrm{Ch}(M/N)$$

Demostración. Para demostrar esta proposición hacemos uso de las buenas filtraciones inducidas Γ' y Γ'' en N y M/N respectivamente, las cuales definimos anteriormente en el apartado de filtraciones inducidas.
En ese mismo apartado vimos la existencia de una sucesión exacta de S_n-módulos finitamente generados,

$$0 \to gr^{\Gamma'} N \to gr^{\Gamma} M \to gr^{\Gamma''} M/N \to 0$$

Debido a esta sucesión exacta tenemos que $\mathbf{ann}(M,\Gamma) \subseteq \mathbf{ann}(N,\Gamma') \cap \mathbf{ann}(M/N,\Gamma'')$. Podemos aplicar a ambos lados radicales sin que varíe la contención. También podemos aplicar a ambos lados $\mathcal{V}$ pero en este caso la contención se invierte.

$$\mathcal{V}(\sqrt{\mathbf{ann}(M,\Gamma)}) \supseteq \mathcal{V}(\sqrt{\mathbf{ann}(N,\Gamma')} \cap \sqrt{\mathbf{ann}(M/N,\Gamma'')}\,)$$

Debido a las propiedades de $\mathcal{V}$ se tiene que la contención anerior es equivalente a

$$\mathcal{V}(\sqrt{\mathbf{ann}(M,\Gamma)}) \supseteq \mathcal{V}(\sqrt{\mathbf{ann}(N,\Gamma')}) \cup \mathcal{V}(\sqrt{\mathbf{ann}(M/N,\Gamma'')}))$$

Es decir, $\mathrm{Ch}(M) \supseteq \mathrm{Ch}(N) \cup \mathrm{Ch}(M/N)$. Por otra parte la otra inclusión se tiene de que

$$\mathbf{ann}(N,\Gamma') \cdot \mathbf{ann}(M/N,\Gamma'') \subseteq \mathbf{ann}(M,\Gamma)$$

Luego tomando radicales y aplicando de nuevo $\mathcal{V}$ se tiene que

$$\mathcal{V}(\sqrt{\mathbf{ann}(N,\Gamma')} \cdot \sqrt{\mathbf{ann}(M/N,\Gamma'')}) \subseteq \mathcal{V}(\sqrt{\mathbf{ann}(M,\Gamma)})$$

Usando que el producto de dos ideales radicales es equivalente a la intersección de ambos ideales radicales bajo la función $\mathcal{V}$ y usando la misma propiedad de $\mathcal{V}$ que usamos para la contención anterior

$$\mathcal{V}(\sqrt{\mathbf{ann}(N,\Gamma')}) \cup \mathcal{V}(\sqrt{\mathbf{ann}(M/N,\Gamma'')}) \subseteq \mathcal{V}(\sqrt{\mathbf{ann}(M,\Gamma)})$$

Que es equivalente a $\mathrm{Ch}(M) \subseteq \mathrm{Ch}(N) \cup \mathrm{Ch}(M/N)$. ∎

Podemos definir la dimensión de un A_n-módulo finitamente generado, de una manera diferente a como la definimos usando el polinomio de Hilbert.

Teorema 3.6. *Sea M un A_n-módulo a la izquierda finitamente generado. Entonces* $\dim(\mathrm{Ch(M)}) = d(M)$.

Donde $\dim(\mathrm{Ch}(M))$ es la dimensión de Krull de $\mathrm{Ch}(M)$. Este resultado es consecuencia directa del hecho de que si tenemos un S_n-módulo graduado $gr^{\Gamma} M$ entonces el grado de su polinomio de Hilbert es $\dim(\mathcal{V}(\mathbf{ann}_{S_n}(gr^{\Gamma} M)) = \dim(\mathrm{Ch}(M))$. Podemos encontrar este resultado en la referencia [15], capítulo 1 Teorema 7.5.
Por tanto podemos definir la dimensión de un A_n-módulo a la izquierda finitamente generado M, como la dimensión de Krull de la variedad característica de M.

4 El polinomio de Bernstein-Sato

El polinomio de Bernstein-Sato es un polinomio relacionado con los operadores diferenciales en los D-módulos. Como comentamos en la introducción, este polinomio tiene dos orígenes paralelos. Por un lado el origen analítico por Mikio Sato y por otra parte el origen algebraico por Joseph Bernstein. Por este último, también es conocido por el nombre de b-función. En esta sección veremos la demostración de la existencia de este polinomio. Veremos que para cualquier polinomio $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ existe un polinomio no nulo asociado $b(s)$ y un operador diferencial $P(s)$ tales que se tiene la ecuación funcional

$$b(s)f^s = P(s)f^{s+1}$$

En particular, se puede generalizar este concepto a un conjunto de polinomios $f_1, \ldots, f_r$. Para ello se necesitan más herramientas las cuales no abordaremos en este texto.
Por otra parte, como ya hemos comentado, existen algoritmos capaces de calcular el polinomio de Bernstein-Sato. Estos cálculos son difíciles y casi imposibles en papel. Veremos varios ejemplos de las computaciones de estos polinomios en los programas $Macaulay2$ o $Singular$.

Antes de demostrar la existencia del polinomio de Bernstein-Sato vamos a ver una serie de resultados que tienen una gran relación con la existencia de este polinomio.

Proposición 4.1. Sea M un A_n-módulo con una filtración Γ respecto de la filtración de Bernstein $\mathcal{B}$ de A_n. Supongamos que existen dos números racionales c_1, c_2 satisfaciendo

$$\dim_K \Gamma_j \leq c_1 j^n/n! + c_2(j+1)^{n-1}$$

para $j \in \mathbb{N}$, suficientemente grande. Entonces M es holónomo y $m(M) \leq c_1$. En particular M está finitamente generado.

Demostración. En primer lugar vamos a probar que cualquier submódulo finitamente generado no nulo N de M es holónomo y $m(N) \leq c_1$. supongamos que N es

finitamente generado. Entonces sabemos que admite una filtración buena $\Omega = (\Omega_k)_k$. Sabemos que existe un entero positivo r tal que $\Omega_j \subseteq \Gamma_{j+r} \cap N$. En particular, $\dim_K \Omega_j \leq \dim_K \Gamma_{j+r}$.
Sea $\mathcal{X}(t)$ el polinomio de Hilber de N asociado a la filtración Ω. Usando la cota de la hipótesis, tenemos que, para un j lo suficientemente grande

$$\mathcal{X}(j) \leq c_1(j+r)^n/n! + c_2(j+r)^{n-1}.$$

En particular, obtenemos que el grado del polinomio de Hilbert de N no supera a n. $d(N) \leq n$. Luego usando la desigualdad de Bernstein concluimos que $d(N) = n$. Además de la desigualdad anterior podemos observar que la multiplicidad $m(N)$ es $\leq c_1$. Vamos a probar ahora que M es finitamente generado. Suponemos por reducción que M no es finitamente generado (suponiendo M no nulo). Consideramos un elemento no nulo $m_1 \in M$. Sea $M_1 = A_n m_1$. Si $M \neq M_1$ consideramos un elemento no nulo $m_2 \in M \setminus M_1$ y sea $M_2 = A_n(m_1, m_2)$.
De esta forma podemos construir una cadena creciente infinita

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_i \subset \ldots$$

de submódulos finitamente generados de M. De la primera parte de la prueba deducimos que cada M_i es holónomo y que $m(M_i) \leq c_1$. Pero por otro lado, al igual que hicimos en la prueba del teorema 3.4, tenemos que $m(M_k) = \sum_2^k (M_i/M_{i-1}) + m(M_1) \geq k$, para cada k. Luego para que se cumpla esto, la cadena no debe de ser de longitud mayor que c_1, por lo que llegamos a contradicción. Por tanto existe un conjunto generador finito $m_1, \ldots, m_r$ de M. ∎

Sea f un polinomio no nulo en $K[X]$ y sea $K[X]_f$ el localizado de $K[X]$ con respecto al conjunto multiplicativo $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Es decir, es el conjunto de funciones racionales de la forma g/f^k, donde g es un polinomio. La acción de x_i sigue actuando como producto por la variable x_i. Y la acción de ∂_i sobre g/f^k es de la forma

$$\partial_i(gf^{-k}) = \partial_i(g)f^{-k} + (-k)\partial_i(f)f^{-k-1}g.$$

Por lo que estas funciones racionales se preservan por las derivadas parciales y por el producto por un polinomio. Por tanto, $K[X]_f$ es un A_n-módulo a la izquierda.

Teorema 4.1. *Para cualquier $f \in K[X]$ no nulo, $K[X]_f$ es holónomo. En particular, es finitamente generado como A_n-módulo.*

Demostración. tomamos $N = K[X]_f$ y $\deg(f) = d \geq 0$. Donde $\deg(f)$ denota el grado del polinomio f en $K[X]$. Definimos para cada $k \in \mathbb{N}$

$$N_k = \{g/f^k \mid \deg(g) \leq (d+1)k\}$$

• Vamos a probrar primero que la familia $\Gamma = (N_k)_k$ es una filtración sobre N respecto de la filtración de Bernstein.
Claramente verifica la primera propiedad $N_k \subset N_l$ para $k < l$. Ya que $(d+1)k < (d+1)l$ para $k < l$.
Supongamos que $g/f^k \in N_k$. Tenemos que $\deg(x_i g) = \deg(g) + 1 \leq (d+1)k + 1 \leq (d+1)(k+1)$. Esto prueba la inclusión $x_i N_k \subset N_{k+1}$. Además tenemos que

$$\partial_i(\tfrac{g}{f^k}) = \tfrac{\partial_i(g)f - kg\partial_i(f)}{f^{k+1}}$$

y $\deg(\partial_i(g)f - kg\partial_i(f)) \leq d + \deg(g) - 1 \leq d - 1 + (d+1)k \leq (d+1)(k+1)$.
Esto prueba la inclusión $\partial_i N_k \subset N_{k+1}$. Entonces $B_1 N_k \subset N_{k+1}$. Como $B_l = (B_1)^l$ tenemos que $B_l N_k \subset N_{k+l}$.
Nos queda por último probar que $N = \bigcup_k N_k$ para tener probado que $(N_k)_k$ es una filtración de N respecto de la filtración de Bernstein. Sea $g/f^k \in N$. Supongamos que $\deg(g) = m$. Entonces tenemos que

$$\tfrac{g}{f^k} = \tfrac{gf^m}{f^{k+m}}$$

y $\deg(gf^m) = m + dm \leq (d+1)(k+m)$. Luego $g/f^k \in N_{m+k}$. La otra inclusión $\bigcup_k N_k \subseteq N$ es trivial, por lo que $N = \bigcup_k N_k$. Concluimos así que $(N_k)_k$ es una filtración de $N = K[X]_f$ respecto de la filtración de Bernstein.
• La seguna parte de la prueba trata de buscar unos c_1, c_2 convenientes para que la filtración anterior satisfaga las condiciones del resultado anterior. (Proposición 4.1).
La dimensión del K-espacio vectorial N_k está acotada por el numero de monomios x^α en $K[X]$ con grado $|\alpha| \leq (d+1)k$. Este número es

$$\tbinom{(d+1)k+n}{n} = \tfrac{1}{n!}(d+1)^n k^n + p(k)$$

Donde $p(t)$ es un polinomio con coeficientes racionales de grado $\leq n-1$. Entonces existe un número entero $c_2 > 0$ para el cual

$$\dim_K(N_k) \leq \tbinom{(d+1)k+n}{n} = \tfrac{1}{n!}(d+1)^n k^n + p(k) \leq \tfrac{1}{n!}(d+1)^n k^n + c_2(k+1)^{n-1} \quad (1).$$

para un k lo suficientemente grande. Esta constante c_2 se puede afinar más observando que el segundo miembro de mayor grado en k de $\tbinom{(d+1)k+n}{n}$ es $\frac{(d+1)^{n-1}(n+1)nk^{n-1}}{2(n!)}$. Luego podemos tomar en (1), $c_2 = \frac{(d+1)^{n-1}(n+1)n}{n!}$ y la constante $c_1 = (d+1)^n$. Por lo que usando la proposición anterior tenemos que $K[X]_f$ es holónomo. Además podemos añadir que la multiplicidad del A_n-módulo a la izquierda $K[X]_f$ para un polinomio no nulo f de grado d, es $\leq (d+1)^n$. ∎

Sea f un polinomio no nulo en $K[X]$, s una nueva variable y $K(s)$ el cuerpo de funciones racionales en s. Tomamos $A_n(s)$ el álgebra de Weyl sobre el anillo $K(s)$ y sea el anillo de polinomios en la variable s con coeficientes en A_n, que se puede expresar como $A_n[s] := A_n \bigotimes_K K[s]$ el producto tensorial de A_n con $K[s]$ sobre el cuerpo K. Tomamos el anillo de funciones racionales $K(s)[X]_f$ y sea $K(s)[x]_f f^s$ el $K(s)[x]_f$-módulo libre de rango 1 generado por el símbolo formal f^s. Además $K(s)[x]_f f^s$ es un $A_n(s)$-módulo a la izquierda, ya que la acción de ∂_i sobre el símbolo formal f^s viene dada por

$$\partial_i f^s = (s\partial_i(f)f^{-1})f^s$$

De esta operación se sigue que $A_n(s)f^s$ es un $A_n(s)$-submódulo de $K(s)[X]_f f^s$.

Proposición 4.2. El $A_n(s)$-módulo $K(s)[X]_f f^s$ es holónomo.

Demostración. Tomamos $N = K(s)[X]_f f^s$ y supongamos que $\deg(f) = d \geq 0$. Definimos para cada $k \in \mathbb{N}$

$$N_k = \{ \tfrac{g(s,x)}{f^k} \in N \,|\, \deg(g) \leq (d+1)k \}$$

De la misma forma que probamos el resultado anterior, se puede probar que la familia $\Gamma = (N_k)_k$ es una filtración sobre N respecto de la filtración de Bernstein.
Vamos a probar ahora que para esta filtración existen c_1, c_2 satisfaciendo la proposición que vimos al principio de esta sección.(Proposición 4.1).
La dimensión del $K(s)$-espacio vectorial N_k está acotada por el número de monomios $x^\alpha \in K(s)[X]$ de grado $|\alpha| \leq (d+1)k$. Como ya vimos antes este número es

$$\binom{(d+1)k+n}{n} = \frac{1}{n!}(d+1)^n k^n + p(k)$$

donde $p(t)$ es un polinomio con coeficientes racionales de grado $\leq n-1$. Por lo tanto existe un entero positivo c_2 tal que

$$\dim_{K(s)}(N_k) \leq \binom{(d+1)k+n}{n} = \frac{1}{n!}(d+1)^n k^n + p(k) \leq \frac{1}{n!}(d+1)^n k^n + c_2(k+1)^{n-1}$$

para k lo suficientemente grande. Por tanto concluimos de la proposición que mencionábamos antes que, el $A_n(s)$-módulo $N = K(s)[X]_f f^s$ es holónomo. ∎

Estamos preparados para demostrar la existencia del polinomio de Bernstein-Sato asociado a un polinomio $f \in K[x_1, ..., x_n]$.

Sea el automorfismo t de $K(s)$ que envía "s" en "$s+1$". Y sea P un elemento de $K(s)[X]_f f^s$, que se podría escribir de la forma $P = (\sum_\alpha a_\alpha(s)X^\alpha)f^{-k}f^s$, con $a_\alpha(s) \in K(s)$ y con $k \geq 0$. Entonces podemos extender el automorfismo anterior a $K(s)[X]_f f^s$ de la forma:

$$t((\textstyle\sum_\alpha a_\alpha(s)X^\alpha)f^{-k}f^s) = (\textstyle\sum_\alpha t(a_\alpha(s))X^\alpha)f^{-k}ff^s$$

Que en particular tiene inversa que viene definida por $t^{-1}(s) = s-1$, donde $t^{-1}(f^s) = f^{-1}f^s$ está bien definido debido a que f^{-1} lo está sobre $K(s)[X]_f f^s$. Se puede probar que t es A_n-lineal, pero que no es $A_n(s)$-lineal, ([10],pág. 96, ej. 4.8).

Teorema 4.2. *Sea $f \in K[X]$, un polinomio no nulo. Entonces existe un polinomio no nulo $b(s) \in K[X]$ y un operador diferencial $P(s) \in A_n[s]$ tal que la igualdad*

$$P(s)ff^s = b(s)f^s$$

se da en el $A_n(s)$-módulo a la izquierda $K(s)[x]_f f^s$.

Demostración. En primer lugar de la proposición 4.2 tenemos que $N = K(s)[X]_f f^s$ es holónomo. Como $A_n(s)f^s \subset N$ como $A_n(s)$-módulo, entonces también es holónomo (prop. 3.2(1)). Por tanto es finitamente generado sobre $A_n(s)$ (teor. 3.4). Entonces la cadena descendente

$$A_n(s)f^s \supset A_n(s)ff^s \supset \ldots \supset A_n(s)f^k f^s \supset \ldots$$

debe ser estacionaria. Es decir, existe un $l > 0$ para el cual

$$f^l f^s \in A_n(s)f^{l+1}f^s$$

Y por tanto existe un operador $Q(s) \in A_n(s)$ para el cual se tiene la igualdad

$$f^l f^s = Q(s)f^{l+1}f^s$$

Aquí podemos aplicar t^{-l} en ambos lados de la igualdad, de esta forma obtenemos que $f^s = Q(s-l)ff^s$. Tomando $b(s) \in K[s]$ un polinomio no nulo tal que $P(s) := b(s)Q(s-l) \in A_n[s]$, tenemos que $b(s)f^s = P(s)ff^s$.

La familia de polinomios $b(s)$ satisfaciendo la ecuación $b(s)f^s = P(s)ff^s$ para algún $P(s) \in A_n[s]$ es un ideal no nulo en $K[s]$.
Además como $K[s]$ es un dominio de ideales principales, tenemos que el ideal anterior tiene un único generador mónico que denotaremos por $b_f(s)$. Llamaremos a este generador $b_f(s)$ el polinomio de Bernstein-Sato asociado a f.

5 Cálculo de la b-función global

T. Oaku ha usado la teoría de las bases de Groebner para desarrollar e implementar el primer algoritmo para la computación del polinomio de Bernstein-Sato para un polinomio arbitrario en 1997, ver [22–24] . Hoy en día, programas como Macaulay2 o Singular tienen paquetes y comandos que permiten la computación del polinomio de Bernstein-Sato.
A lo largo de este capítulo abordaremos las herramientas necesarias para poder estudiar algunos algoritmos para el cálculo del polinomio de Bernstein-Sato y veremos más adelante varios ejemplos del cálculo de dichos polinomios.

5.1 Teorema de la división en el álgebra de Weyl

En esta sección estudiaremos cómo se dividen los operadores diferenciales en A_n. En particular, veremos el correspondiente teorema de la división, el cual es muy parecido al del caso conmutativo que podemos encontar en [11].

Definición 5.1. *Sea M un conjunto.*
(1). Un orden $\prec$ sobre M se dice orden total, si $m \prec m'$ o $m' \prec m$ se mantiene para cada $m, m' \in M$, para $m \neq m'$
(2). Un orden total $\prec$ sobre M se llama un buen orden si todo subconjunto no vacío de M tiene un elemento menor con respecto a $\prec$.
(3). Sean n variables $x_1, ..., x_n$ y sea el conjunto de monomios $\mathcal{M} = \{x_{i1}^{\alpha_1} x_{i2}^{\alpha_2} \cdots x_{im}^{\alpha_m} | 1 \leq i_1, ..., i_m \leq n, m$,con $\alpha_j \in \mathbb{N}$ para cada $j\}$. Entonces decimos que un orden total $\prec$ sobre el conjunto anterior se llama orden monomial si es compatible con el producto en el siguiente sentido. Para todo $f, g \in \mathcal{M}$ se mantiene lo siguiente
(i). $f \prec g$ implica $p \cdot f \cdot p' \prec p \cdot g \cdot p'$ para cualesquiera $p, p' \in \mathcal{M}$.
(ii). Si $f = p \cdot g \cdot p'$ y $f \neq g$, entonces $g \prec f$.

En nuestro caso, en el álgebra de Weyl A_n podemos dar una definición más específica de orden monomial.

Definición 5.2. *Diremos que un orden $\prec$ sobre el conjunto de monomios que forma una base del álgebra de Weyl, es un orden monomial si satisface las siguientes condiciones:*
(1). $1 \prec x_i\partial_i$ *para* $i = 1, .., n$.
(2). $x^{\alpha}\partial^{\beta} \prec x^{a}\partial^{b}$ *implica que* $x^{\alpha+s}\partial^{\beta+t} \prec x^{a+s}\partial^{b+t}$.

también usaremos la notación $(\alpha, \beta) \prec (a, b)$,con $(\alpha, \beta), (a, b) \in \mathbb{N}^{2n}$,para referirnos a que el monomio $x^{\alpha}\partial^{\beta}$ es menor que el monomio $x^{a}\partial^{b}$ respecto al orden monomial $\prec$ si no hay confusión. A partir de ahora para los resultados y definiciones que siguen usaremos un orden monomial fijado $\prec$.

Por ejemplo, el orden lexicográfico y el orden inverso lexicográfico sobre el anillo de polinomios $K[X]$ vienen dados por:
• X^a es menor que X^b respecto al orden lexicográfico, $X^a \prec_{lex} X^b$, si y sólo si la primera componente no nula de $b - a$, (de izquierda a derecha), es no nula.
• X^a es menor que X^b respecto al orden inverso lexicográfico graduado, $X^a \prec\prec X^b$, si y sólo si $\sum_i a_i < \sum_i b_i$ ó si son iguales, la primera coordenada no nula de $b - a$, (de derecha a izquierda), es positiva.

Los resultados que prosiguen en esta sección y en la sección 5.2 se pueden encontrar en la referencia [9].

Definición 5.3. *Sea* $P = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta}x^{\alpha}\partial^{\beta}$ *un operador de* A_n*. Definimos por diagrama de Newton de* P *al conjunto*

$$\mathcal{N}(P) := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n} | p_{\alpha\beta} \neq 0\}.$$

Definición 5.4. *Llamamos exponente líder con respecto a* $\prec$ *de un operador no nulo* P*, denotado por* $exp_{\prec}(P)$*, al máximo de* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$*, con respecto a* $\prec$*, tal que* $p_{\alpha\beta} \neq 0$*. Es decir*

$$exp_{\prec}(P) = \text{máx}_{\prec} \mathcal{N}(P)$$

Escribiremos por simplificación $exp(P)$ *si no hay confusión.*

Proposición 5.1. Sean $P, Q \in A_n$. Tenemos que:
(1). $exp(PQ) = exp(P) + exp(Q)$.
(2). Si $exp(P) \neq exp(Q)$ entonces $exp(P + Q) = \text{máx}_{\prec}\{exp(P), exp(Q)\}$.

La demostración es trivial usando que el grado total del producto de dos operadores es la suma de los grados totales de los operadores.
En general para $P_1, ..., P_m \in A_n$ tal que $exp(P_i) \neq exp(P_j)$ para todo $i \neq j$ tenemos

que $exp(\sum_i^m P_i) = \text{máx}_{\prec}\{exp(P_i) | i = 1, ..., m\}$.

• Para cada m-upla $((\alpha^1, \beta^1), ..., (\alpha^m, \beta^m))$ de elementos de $\mathbb{N}^{2n}$, asociamos la partición

$$\{\Delta^0, \Delta^1, ..., \Delta^m\}$$

de $\mathbb{N}^{2n}$ de la siguiente forma.

$$\Delta^1 = (\alpha^1, \beta^1) + \mathbb{N}^{2n}$$
$$\Delta^{i+1} = ((\alpha^{i+1}, \beta^{i+1}) + \mathbb{N}^{2n}) \setminus (\Delta^1 \cup ... \cup \Delta^i) \text{ si } i \geq 1.$$
$$\Delta^0 = \mathbb{N}^{2n} \setminus (\cup_{i=1}^m \Delta^i)$$

El siguiente teorema generaliza el teorema de la división que tenemos en $K[X]$.

Teorema 5.1. *(Teorema de la división en A_n). Sea $(P_1, ..., P_m)$ elementos no nulos de A_n y sea $\{\Delta^0, ..., \Delta^m\}$ una partición de $\mathbb{N}^{2n}$ asociada con la m-upla $(exp(P_1), ..., exp(P_m))$ construida como acabamos de ver. Entonces, para cualquier $P \in A_n$, existe una única $(m + 1)$-upla $(Q_1, ..., Q_m, R)$ de operadores en A_n, tales que*
(1). $P = Q_1 P_1 + ... + Q_m P_m + R$.
(2). $exp(P_i) + \mathcal{N}(Q_i) \subset \Delta^i$, $i = 1, ..., m$.
(3). $\mathcal{N}(R) \subset \Delta^0$.

Demostración. • Para la unicidad, supongamos que existen dos $(m+1)$-uplas que satisfacen las condiciones del teorema $(Q_1, ..., Q_m, R)$ y $(Q'_1, ..., Q'_m, R')$. De (1) tenemos que

$$\sum_{i=1}^m (Q_i - Q'_i)P_i = R' - R$$

Si $Q_i \neq Q'_i$ entonces $exp((Q_i - Q'_i)P_i) \in \Delta^i$. Por otro lado si $R \neq R'$ entonces $exp(R' - R) \in \Delta^0$. Ahora bien, como $\Delta^0, ..., \Delta^m$ es una partición de $\mathbb{N}^{2n}$, la igualdad anterior se tiene únicamente si $Q_i = Q'_i$ para cualquier $i = 1, ..., m$ y si $R = R'$. ya que en caso contrario tenemos que existe un j en el conjunto de índices $\{1, ..., m\}$ tal que $exp((Q_j - Q'_j)P_j) = exp(R' - R)$, (ver proposición 5.1). Lo cual es una contradicción con la condición de partición en $\mathbb{N}^{2n}$. De donde concluimos la unicidad.
• Para probar la existencia basta probarla para los monomios $x^\alpha \partial^\beta \in A_n$ ya que sabemos que forman una base de A_n como K-espacio vectorial.
Lo probaremos por inducción sobre (α, β) respecto al orden monomial que estemos usando. Si tomamos $(\alpha, \beta) = (0, ..., 0)$, tenemos que $x^\alpha \partial^\beta = 1$.
Entonces o bien, $exp(P_i) \neq 0 \in \mathbb{N}^{2n}$ para cada i, por lo cual es suficiente escribir $1 = \sum_{i=1}^m 0 P_i + 1$. O bien, existe algún entero j para el cual $exp(P_j) = 0 \in \mathbb{N}^{2n}$. En este caso P_j es una constante no nula, ya que 0 es el primer elemento de $\mathbb{N}^{2n}$ con respecto al buen ordenamiento $\prec$ y, además, $\Delta^0 = \emptyset$. Por lo que bastaría escribir

$$1 = \sum_{i \neq j} 0 \cdot P_i + (1/P_j)P_j$$

De esta forma queda probada la existencia para el primer caso de inducción. Supongamos que el resultado está probado para cualquier (α', β') estrictamente menor que algún $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$ respecto al orden monomial usado. Sea $j \in \{0, 1, ..., m\}$ tal que $(\alpha, \beta) \in \Delta^j$. Si $j = 0$ entonces escribimos

$$x^\alpha \partial^\beta = \sum_{i=1}^m 0 \cdot P_i + x^\alpha \partial^\beta$$

Si $j \geq 1$ entonces existe un $(\gamma, \delta) \in \mathbb{N}^{2n}$ para el cual $(\gamma, \delta) + exp(P_j) = (\alpha, \beta)$. Es decir, $(\gamma, \delta) = (\alpha, \beta) - exp(P_j) \in \mathbb{N}^{2n}$. Podemos escribir

$$x^\alpha \partial^\beta = \frac{1}{c_j} x^\gamma \partial^\delta P_j + G_j$$

donde c_j es el coeficiente del monomio de P_j cuyo exponente es el exponente líder de P_j y todos los monomios de G_j son menores (con respecto de $\prec$) que (α, β). Por hipótesis de inducción existe $(Q'_1, ..., Q'_m, R')$ satisfaciendo las condiciones del teorema para $P = G_j$. En particular tenemos:

$$x^\alpha \partial^\beta = \sum_{i \neq j} Q'_i P_i + (\frac{1}{c_j} x^\gamma \partial^\delta + Q'_j)P_j + R'.$$

Esto prueba el resultado para (α, β) y por tanto queda probada la existencia para cualquier $P \in A_n$.

Definición 5.5. *Llamamos al operador diferencial Q_i del teorema anterior el i-ésimo cociente y R es el resto de la división de P por $(P_1, ..., P_m)$. A este resto también se le llama "residuo"y lo denotaremos por $R(P; P_1, ..., P_m)$.*

• Al igual que ocurre en los anillos de polinomios, tenemos que al hacer esta división, los cocientes y el resto tienen menor "grado" que el operador que se divida. En particular, obtenemos de la prueba del teorema anterior que para cualquier división $P = Q_1 P_1 + ... + Q_m P_m + R$ se tiene $\text{máx}\{\text{máx}_i\{exp_\prec(Q_i P_i)\}, exp_\prec(R)\} = exp_\prec(P)$. Como mencionamos antes, el teorema 5.1 es una generalización del resultado del teorema de división en $K[X]$. (Th. 1.5.9 de [1]).

5.2 Bases de Groebner en el álgebra de Weyl

La teoría de las bases de Groebner sobre el anillo de polinomios en varias variables $\mathbb{C}[X]$ se puede extender al álgebra de Weyl A_n. Además esta teoría es muy importante ya que hay muchas aplicaciones y algoritmos que utilizan bases de Groebner.

Definición 5.6. *Fijado un orden monomial $\prec$. Para cada ideal no nulo I de A_n definimos $Exp_\prec(I)$ el conjunto*

$$Exp_\prec(I) = \{exp_\prec(P)|P \in I\backslash\{0\}\}$$

Y escribiremos en caso de que no haya confusión $Exp(I)$.

Proposición 5.2. Sea $m > 0$ un entero y $E \subset \mathbb{N}^m$ tal que $E + \mathbb{N}^m = E$. Entonces existe un subconjunto finito $F \subset E$ tal que

$$E = \bigcup_{\alpha \in F}(\alpha + \mathbb{N}^m).$$

Demostración. La prueba es por inducción en m. Para el caso base de $m = 1$, sea α_{min} el menor elemento de E (con respecto del orden usual en $\mathbb{N}$). Es claro que si $E = E+\mathbb{N}$ entonces E está generado por α_{min}. Suponiendo que $m > 1$ y que se tiene el resultado anterior para $m - 1$. Sea $E \subset \mathbb{N}^m$ tal que $E + \mathbb{N}^m = E$. Podemos suponer que E es no vacío. Sea $\alpha \in E$. Para cada $i = 1, ..., m$ y $j = 0, ..., \alpha_i$ consideramos la aplicación biyectiva

$$\phi_{i,j} : \mathbb{N}^{i-1} \times \{j\} \times \mathbb{N}^{m-i} \to \mathbb{N}^{m-1}$$

Definida por $(\beta_1, ..., \beta_{i-1}, j, \beta_{i+1}, ..., \beta_m) \mapsto (\beta_1, ..., \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, ..., \beta_m)$. Y denotamos

$$E_{ij} = \phi_{ij}(E \cap (\mathbb{N}^{i-1} \times \{j\} \times \mathbb{N}^{m-i})).$$

Es claro que $E_{ij} + \mathbb{N}^{m-1} = E_{ij}$ y que por la hipótesis de inducción existe un subconjubnto finito $F_{ij} \subset E_{ij}$ que genera E_{ij}. El conjunto finito

$$F = \{\alpha\} \bigcup (\bigcup_{i,j}(\phi_{ij})^{-1}(F_{ij}))$$

genera E. Esta prueba se puede encontrar en [9] y en [12], lema 1.1.8.

La proposición anterior nos quiere decir que cualquier ideal monomial I en $\mathbb{C}[X]$ es finitamente generado. Más generalmente, cualquier ideal monomial I en un anillo de polinomios $K[X]$ con coeficientes en K es finitamente generado. Es un caso particular del teorema de la base de Hilbert ([11], pág. 77, Th. 4). En particular este resultado nos sirve para afirmar que $Exp_\prec(I)$ es finitamente generado para cualquier ideal $I \in A_n$. De donde la siguiente definición cobra sentido.

Definición 5.7. *Sea I un ideal no nulo de A_n. llamaremos a cualquier familia $P_1, ..., P_m$ de elementos de I tales que*

$$Exp_\prec(I) = \bigcup_{i=1}^{m}(exp_\prec(P_i) + \mathbb{N}^{2n})$$

una base de Groebner del ideal I, con respecto a $\prec$. (o una $\prec$-base de Groebner).

Esta definición viene a decir casi lo mismo que la definición de base de Groebner en el caso conmutativo ([11], pág. 78, def. 5). Donde se define por base de Groebner de un ideal no nulo $I \in K[x_1, .., x_n]$ como el conjunto finito de polinomios $G = \{g_1, ..., g_m\}$ tales que verifican $< LT(g_1), ..., LT(g_m) > = < LT(I) >$. Donde $LT(g)$ es el término líder del polinomio g de $K[x_1, ..., x_n]$ y $LT(I) = \{LT(f) | f \in I\}$.
Por la propia definición de $Exp_{\prec}(I)$ tenemos que $Exp_{\prec}(I) = Exp_{\prec}(I) + \mathbb{N}^{2n}$. Por lo que debido a la proposición 5.2, tenemos que para cualquier ideal $I \in A_n$ existe una base de Groebner.

Corolario 5.1. Sea I un ideal no nulo de A_n y sean $P_1, ..., P_m$ una familia de elementos de I. Las siguientes condiciones son equivalentes:
(1). $P_1, ..., P_m$ es una base de Groebner de I.
(2). Para cualquier $P \in A_n$, tenemos que $P \in I$ si y sólo si $R(P; P_1, ..., P_m) = 0$.

Corolario 5.2. Sea I un ideal no nulo a la izquierda de A_n y sea $P_1, ..., P_m$ una base de Groebner de I. Enonces $P_1, ..., P_m$ es un sistema de generadores de I.

Las pruebas de estos corolarios son similares a las que se tienen para el caso conmutativo que se pueden encontrar en [11].

5.3 Algoritmo de Buchberger en el álgebra de Weyl

Definición 5.8. *Sea $\prec$ un orden monomial. Y sea $P \in A_n$ un operador diferencial, $P = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta} x^{\alpha}\partial^{\beta}$. Definimos el* ***monomio líder*** *de P con respecto al orden $\prec$, denotado por $in_{\prec}(P)$, al monomio $x^{\alpha}\partial^{\beta}$ de P con $(\alpha, \beta) = exp_{\prec}(P)$. Es decir, el monomio de P cuyo exponente sea el* ***exponente líder*** *respecto de $\prec$.*

Definición 5.9. *Sea $\prec$ un orden monomial y sean $f, g \in A_n$. Podemos escribir*

$$f = f_{\alpha\beta} x^{\alpha}\partial^{\beta} + \textit{términos de menor orden respecto de } \prec.$$
$$g = g_{ab} x^{a}\partial^{b} + \textit{términos de menor orden respecto de } \prec.$$

Donde a los $f_{\alpha\beta}, g_{ab} \neq 0$ se les llama los ***coeficientes líderes*** *de f y de g respectivamente. Definimos el S-polinomio de f y g por:*

$$Sp(f, g) = x^{\alpha'}\partial^{\beta'} f - (\frac{f_{\alpha\beta}}{g_{ab}}) x^{a'}\partial^{b'} g$$

Con $\alpha'_i = \text{máx}(\alpha_i, a_i) - \alpha_i$, $\beta'_i = \text{máx}(\beta_i, b_i) - \beta_i$, $a'_i = \text{máx}(\alpha_i, ai) - a_i$, $b'_i = \text{máx}(\beta_i, b_i) - b_i$.

Al igual que en el caso conmutativo, hacemos los productos de tal forma que usando la regla de Leibniz los términos iniciales de f y de g respecto del orden monomial $\prec$ se anulen. El siguiente algoritmo nos va a servir para dar un algoritmo con el que poder calcular una base de Groebner. Este algoritmo se puede encontrar en la referencia [27].

$Input : f \in A_n, \{g_1, ..., g_m\} \subset A_n.$
$Output : r$, "forma normal" de f respecto del conjunto $G = \{g_1, ..., g_m\}$.
normalForm$_\prec(f, \{g_1, ..., g_m\}) :=$
$r := f$
$while$ $(in_\prec(r)$ **sea divisible** por algún $in_\prec(g_i))$ do
$\{r :=$Sp$(r, g_i)\}$
$r := in_\prec(r) + normalForm_\prec(r - in_\prec(r), \{g_1, ..., g_m\})$
$return(r)$

Donde diremos que $x^\alpha \partial^\beta$ **es divisible** por $x^a \partial^b$ si $\alpha_i \geq a_i$ y $\beta_i \geq b_i$ para todo i.
La función de salida f', de este algoritmo se llama la forma normal de f respecto de $G = \{g_1, ..., g_m\}$. la forma normal de f por lo general no es única sobre un conjunto G cualquiera. En cambio, si G es una base de Groebner con respecto al orden monomial $\prec$, entonces la forma normal es única. En particular tenemos que si $f \in I$, con I un ideal de A_n y sea G una base de Groebner de I, entonces la forma normal de f respecto de G es 0. Esto ocurre para cualquier base de Groebner de I. El algoritmo de Buchberger para obtener una base de Groebner en el álgebra de Weyl puede describirse como sigue cuando $\prec$ es un orden monomial.

$Input : F = \{f_1, ..., f_m\}$: un subconjunto de A_n, $\prec$ un orden monomial.
$Output : G :$ una base de Groebner para $A_n(F)$ con respecto a $\prec$.
$pair := \{(f_i, f_j) | 1 \leq i < j \leq m\}$
$G := F$
$while$ $(pair \neq \emptyset)$ do
$\{$coge un elemento (f, f') del conjunto $pair$.
$pair := pair \setminus \{(f, f')\}$
$h :=$Sp(f, f')
$r :=$normalForm$_\prec(h, G)$
if $(r \neq 0)$ do
$\{pair := pair \cup \{(g, r) | g \in G\}$
$G := G \cup \{r\}$ $\}\}$; $return(G)$

Se puede probar que este algoritmo termina y devuelve una base de Groebner del conjunto F. (Ver [27], teorema 1.1.10). Aunque la demostración es totalmente análoga a la del caso conmutativo.

Teorema 5.2. *Sea $F = \{f_1, ..., f_m\}$ un subconjunto finito de A_n. Sea $\prec$ un orden monomial fijado. Entonces el algoritmo de Buchberger anterior termina y devuelve una base de Groebner para el ideal I de A_n generado por el conjunto de polinomios F, que denotábamos por $A_n(F)$.*

5.4 b-función global

Definición 5.10. *Sea P un operador diferencial de A_n, $P = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta$. Y sea $0 \neq w \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Definimos el exponente líder de P respecto a w, denotado como $exp_w(P)$, como*

$$exp_w(P) = max_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^{2n}}\{\textstyle\sum_{i=1}^n(-w_i\alpha_i + w_i\beta_i)|p_{\alpha\beta} \neq 0\}.$$

Donde al vector w lo llamaremos vector de pesos.

Definición 5.11. *Sea $0 \neq w \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Para un operador no nulo $P \in A_n$, $P = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta$. llamamos a*

$$in_w(P) := \sum_{\alpha,\beta:-w\alpha+w\beta=exp_w(P)} p_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta$$

La forma inicial de P con respecto al vector de pesos w. Esta definición se puede extender de forma natural a un conjunto de operadores $F \subseteq A_n$ de la siguiente forma

$$in_w(F) := \{in_w(P)|P \in F\}$$

Se le llama la forma inicial de F respecto del vector de pesos w. De igual forma se puede extender esta definición a un ideal $I \subset A_n$.

Definición 5.12. *Sea $0 \neq w \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ y sea I un ideal de A_n. Consideremos el elemento $s := \sum_{i=1}^n w_i x_i \partial_i$ y consideramos la intersección $in_w(I) \cap K[s]$, la cual es un ideal de $K[s]$ y por tanto un ideal principal. Su generador mónico $b_{I,w}(s)$ se llama b-función global de I respecto del vector de peso w.*

En la siguiente sección veremos cómo tratar la intersección anterior. Y en particular veremos un algoritmo para calcular el polinomio mónico generador de dicha intersección.

Sea la n-ésima álgebra de Weyl sobre el anillo de polinomios $K[x_1, ..., x_n]$ y sea la nueva variable t, entonces vamos a denotar por $A_{n+1} \simeq A_n < t, \partial_t >$ la $(n+1)$-ésima álgebra de Weyl. Entonces el $K(s)[X]_f$-módulo libre generado por f^s, $K(s)[X]_f f^s$ tiene estructura de $A_n < t, \partial_t >$-módulo con la operación producto "$\cdot$" definida por:
$t \cdot (\sum_\alpha a_\alpha(s)x^\alpha)f^{-k}f^s = (\sum_\alpha a_\alpha(s+1)x^\alpha)f^{-k+1}f^s$, con $a_\alpha(s) \in K(s)$ y $k \geq 0$.
$\partial_t \cdot (\sum_\alpha a_\alpha(s)x^\alpha)f^{-k}f^s = -s(\sum_\alpha a_\alpha(s-1)x^\alpha)f^{-k-1}f^s$, con $a_\alpha(s) \in K(s)$ y $k \geq 0$.
Donde x_i actúa como multiplicación y ∂_i como derivación como hasta ahora. De esta forma tenemos que $\partial_t \cdot t$ actúa como "$-s$". Además se puede observar de la relación $\partial_t \cdot t = t \cdot \partial_t + 1$ que $t \cdot \partial_t$ actúa como "$-s-1$".

Definición 5.13. *Para un polinomio $f \in K[x_1, ..., x_n]$ el ideal*

$$I_f := < t - f, \partial_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1}\partial_t, ..., \partial_n + \frac{\partial f}{\partial x_n}\partial_t >$$

En el $(n+1)$-ésimo álgebra de Weyl $A_n < t, \partial_t >$ se llama el ideal de Malgrange de f.

Este ideal tiene unas propiedades interesantes. Una de ellas es que el ideal de Malgrange de un polinomio f es en particular el ideal anulador de f^s en el $n+1$-ésimo álgebra de Weyl. Es decir

$$I_f = \mathbf{ann}_{A_n<t,\partial_t>}(f^s) = \{P \in A_n < t, \partial_t > | Pf^s = 0\}$$

Para la prueba basta observar que los elementos que generan el ideal de Malgrange en $A_n < t, \partial_t >$ son $t - f$ y $\partial_i + \frac{\partial f}{\partial x_i}\partial_t$ para cada $i = 1, ..., n$, los cuales anulan a f^s sobre $A_n < t, \partial_t >$ con la operación de producto que vimos antes. $(t-f) \cdot f^s = f^{s+1} - f^{s+1} = 0$ y $(\partial_i + \frac{\partial f}{\partial x_i}\partial_t) \cdot f^s = s\frac{\partial f}{\partial x_i}f^{s-1} - \frac{\partial f}{\partial x_i}sf^{s-1} = 0$. De donde concluimos que $I_f \subseteq \mathbf{ann}_{A_n<t,\partial_t>}(f^s)$. Para terminar la prueba se usa que el ideal de Malgrange es maximal y que el ideal $\mathbf{ann}_{A_n<t,\partial_t>}(f^s)$ es un ideal propio, (ver [2], lema 4.10).
Otra demostración completa de este resultado se puede encontrar en [19], (lema 4.1.2).

Otra propiedad interesante del ideal de Malgrange que se usa para la demostración del resultado anterior es que es un ideal a la izquierda maximal. Además el ideal de Malgrange también es holónomo y propio. Las pruebas de estos resultados se pueden encontrar en la sección 4 de [2].

• Con este ideal se puede construir el polinomio de Bernstein-Sato de un polinomio f cualquiera. Podemos decir de alguna forma que hay dos puntos de vista para definir el polinomio de Bernstein-Sato. Por un lado el que hemos construido teóricamente en las primeras 4 secciones y por otro lado la construcción del polinomio de Bernstein-Sato desde el punto de vista de Malgrange usando este peculiar ideal.

Proposición 5.3. Sea $f \in K[x_1, ..., x_n]$, I_f el ideal de Malgrange de f y $w = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que el peso de ∂_t es 1. Entonces

$$b_f(s) = (-1)^{deg(b_{I_f,w})} b_{I_f,w}(-s-1)$$

coincide con el polinomio de Bernstein-Sato asociado al polinomio f también conocida por la b-función del polinomio f.

Una prueba de la existencia del polinomio de Bernstein-Sato usando el ideal de Malgrange y vectores de peso se puede encontrar en [2], teor. 4.13.

5.5 Teoría de eliminación en el álgebra de Weyl

En esta sección estudiaremos principalmente el problema de la intersección que vimos en la definición 5.12, la cual es una intersección de un ideal del álgebra de Weyl con $K[s]$. Nuestro problema en particular es calcular la intersección del ideal $J = in_w(I)$, para un ideal I y un vector de pesos w, con $K[s]$. Notar que en la definición 5.12 dijimos que esta intersección es un ideal de $K[s]$ y por tanto tenía un único generador mónico que denominamos por b-función global de I respecto del vector de peso w. Luego podemos resumir nuestro problema a obtener $b \in K[s]$ tal que $< b >= J \cap K[s]$.
Para hallar dicha intersección se puede extender el teorema de eliminación que tenemos en el caso conmutativo al caso no conmutativo, (ver [2], pág. 33). De esa forma se podría calcular dicha intersección calculando una base de Groebner del ideal con respecto de un orden monomial de eliminación apropiado. Aunque esto tiene un pequeño problema. Por lo general el cálculo de una base de Groebner de un ideal de A_n respecto de un orden de eliminación es muy costoso computacionalmente hablando. Incluso puede ocurrir que no existe dicho orden monomial de eliminación, al contrario que en el caso conmutativo donde el orden lexicográfico, por ejemplo, es siempre un orden de eliminación.
De igual forma vimos en la sección 5.2 que en el álgebra de Weyl tenemos que para cualquier ideal $I \subseteq A_n$ existe una base de Groebner. Luego suponiendo que G es la base de Groebner de I respecto de algún orden monomial $\prec$ se pueden probar los siguientes resultados.

Lema 5.1. Si no existe ningún $g \in G$ tal que $in_{\prec}(g)$ divida a s^k para algún $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces $I \cap K[s] = \{0\}$

Donde definimos por $in_{\prec}(g)$ al monomio líder de g respecto del orden monomial que estemos usando. La demostración se tiene directamente de que si suponemos por reducción al absurdo que exite un elemento $0 \neq b \in I \cap K[s]$ entonces en particular $b \in K[s]$, luego existe un $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ para el cual $in_{<}(b) = s^k$. Como $b \in J$ entonces por el corolario 5.1(2) tenemos que el resto de dividir b por la base de Groebner G es nulo. Por tanto existe un $g \in G$ para el cual se tiene en particular que $in_{<}(g)$ divide a $in_{<}(b) = s^k$. Lo cual es absurdo. El recíproco del lema anterior no siempre se tiene. Por ejemplo sea $I =< y^2 + x >\in K[x, y]$. Entonces $I \cap K[y] = \{0\}$ ya que $\{y^2 + x\}$ es una base de Groebner de I para cualquier orden monomial.

Teorema 5.3. *Sea $J \in A_n$ y supongamos que $J \cdot s \subseteq J$ y $\dim_K(End_{A_n}(A_n/J)) < \infty$. Entonces $J \cap K[s] \neq \{0\}$.*

Demostración. Consideremos la aplicación $\phi : A_n/J \to A_n/J$ definida por el producto a la izquierda de s, $\phi(p) = sp$. Esta aplicación está bien definida y es un endomorfismo del A_n-módulo A_n/J ya que para cada $a, a' \in J$ se tiene que $(a - a') \in J$ implica que $(a - a')s \in J \cdot s \subseteq J$. Como $\mathrm{End}_{A_n}(A_n/J)$ es de dimensión finita sabemos de álgebra lineal que existe un conjunto de polinomios $I_\phi = \{P \in K[t] | P(\phi) = 0\}$. Donde I_ϕ es un ideal propio de $K[t]$ y por tanto, como $K[t]$ es un dominio de ideales principales, existe un único generador mónico de I_ϕ caracterizado por ser el polinomio que verifique $\mu(\phi) = \mu(s) = 0$ de menor grado. A este polinomio se le denomina polinomio mínimo del endomorfismo ϕ. Más aún, μ es precisamente el generador mónico de $J \cap K[s]$. Como $\mu(s) = 0$ en A_n/J entonces $\mu(s) \in J$, por tanto $\mu(s) \in J \cap K[s]$. Y además el grado de μ es minimal por la definición de polinomio minimo.

• En particular, $\dim_K(\mathrm{End}_{A_n}(A_n/J))$ es finita si A_n/J tiene dimensión finita como A_n-módulo. Además si J es holónomo entonces $\dim_K(\mathrm{End}_{A_n}(A_n/J))$ es finita (ver [27]).

Gracias a la prueba del teorema anterior podemos reducir nuestro problema de la intersección de un ideal con una subálgebra a un problema de álgebra lineal. Este problema es el de encontrar el polinomio mínimo de un endomorfismo.

Teorema 5.4. *La b-función global $b_{I,w}$ de un ideal holónomo $I \subseteq A_n$ es un polinomio no nulo para cualquier vector de peso $0 \neq w \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$.*

Demostración. sea $J := in_w(I)$ y $s := \sum_{i=1}^n w_i x_i \partial_i$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $0 \neq P = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta \in J$ es w-homogéneo.Esto es, para cualquier par de monomios distintos de P cuyos exponentes pongamos que sean (α, β) y (α', β') se verifica $-w\alpha + w\beta = -w\alpha' + w\beta'$. Entonces usando la regla de Leibniz, obtenemos para cualquier monomio de P

$$\begin{aligned} x^\alpha \partial^\beta x_i \partial_i = x^{\alpha+e_i} \partial^{\beta+e_i} + \beta_i x^\alpha \partial^\beta =& (\partial_i x_i^{\alpha_i+1} - (\alpha_i + 1) x_i^{\alpha_i}) \frac{x^\alpha}{x_i^{\alpha_i}} \partial^\beta + \beta_i x^\alpha \partial^\beta \\ =& (\partial_i x_i - (\alpha_i + 1) + \beta_i) x^\alpha \partial^\beta = (x_i \partial_i - \alpha_i + \beta_i) x^\alpha \partial^\beta \end{aligned}$$

Tomemos ahora $m := deg_w(P)$. Que como hemos supuesto que P es w-homogéneo, entonces $m = -w\alpha + w\beta$ para cada término no nulo $p_{\alpha\beta}x^\alpha\partial^\beta$ de P. Entonces,

$$\begin{aligned} P \cdot s = P \textstyle\sum_{i=1}^n w_i x_i \partial_i = \sum_{i=1}^n w_i P x_i \partial_i = \sum_{i=1}^n w_i \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta x_i \partial_i \\ = \textstyle\sum_{i=1}^n w_i \sum_{\alpha,\beta}(x_i\partial_i - \alpha_i + \beta_i) p_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta \\ = (\textstyle\sum_{i=1}^n w_i x_i \partial_i)(\sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta) + \sum_{i=1}^n w_i \sum_{\alpha,\beta}(-\alpha_i + \beta_i) p_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta \\ = s \cdot P + \textstyle\sum_{\alpha,\beta}(\sum_{i=1}^n(-w_i\alpha_i + w_i\beta_i)) p_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta = s \cdot P + \sum_{\alpha,\beta}(-w\alpha + w\beta) p_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta. \\ = s \cdot P + m \cdot P = (s+m) \cdot P \in J \end{aligned}$$

Por lo que $J \cdot s \subseteq J$ se mantiene. Además A_n/J es de dimensión finita. Esto se debe a que $J = in_w(I)$ es holónomo cuando I es holónomo ([27]. Th. 2.2.1). luego por el teorema 5.3 y el punto de observación posterior tenemos probado el resultado. ▮

El siguiente algoritmo se puede usar para obtener el generador mónico de dicha intersección, sabiendo que esta intersección es no nula. ([2], algoritmo 3.12).

PrincipalIntersect(s, J).
Input : $s \in A_n$, $J \subseteq A_n$ un ideal a la izquierda tal que $J \cap K[s] \neq \{0\}$.
Output : $b \in K[s]$ mónico tal que $J \cap K[s] =< b >$.
G := Una base de Groebner finita a la izquierda de J
$i := 1$
loop
if existen $a_0, ..., a_{i-1} \in K$ tales que
NormalForm$(s^i, G) + \sum_{j=0}^{i-1} a_j$ NormalForm$(s^j, G) = 0$ **then**
return $b := s^i + \sum_{j=0}^{i-1} a_j s^j$
else $i := i + 1$
end if
end loop

Notar que como $0 =$NormalForm$(s^i, G) + \sum_{j=0}^{i-1} a_j$ NormalForm$(s^j, G) =$ NormalForm$(s^i + \sum_{j=0}^{i-1} a_j s^j)$, entonces $s^i + \sum_{j=0}^{i-1} a_j s^j \in J$. Luego lo que hace este algoritmo es encontrar un polinomio mónico en $K[s]$ que también está en J. Esto lo consigue aumentando la potencia de s grado a grado hasta que encuentra la dependencia lineal. Por lo que de esta forma también tendremos la minimalidad del grado que buscábamos en el polinomio mónico de salia del algoritmo en caso de que exista dicha dependencia lineal. El algoritmo termina si y sólo si $J \cap K[s] \neq 0$.
En el caso de que $J = in_w(I)$ para I holónomo, hemos visto que $J \cdot s \subseteq J$ y que $\dim_K(\mathrm{End}_{A_n}(A_n/J))$ es finita. Por tanto la dependencia lineal anterior existe y se dá en el polinomio mínimo del endomorfismo que vimos en la demostración del teorema 5.3.

6 Programas para el cálculo del polinomio de Bernstein Sato y ejemplos

Vamos a dividir este capítulo en dos partes. En la primera estudiaremos brevemente los programas que vamos a usar.
• MACAULAY2, por D. Grayson y M. Stillman y su librería para trabajar sobre $\boldsymbol{D}$-módulos "Dmodules" por A. Leykin y H. Tsai, ref. [13].
• SINGULAR desarollado bajo la dirección de W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister y H. Schönemann y su subsistema PLURAL para trabajar en $\boldsymbol{D}$-módulos en el la que nos centraremos en algunas de las librerías escritas por V. Levandovskyy, J. Martín-Morales y Daniel Andres, ref. [3, 17, 18]

Usaremos ambos programas principalmente para el cálculo del polinomio de Bernstein y comentar algunos de los comandos principales. Y la seguda parte constará de ejemplos de estos cálculos en ambos programas y algunas comparaciones de eficacia.

6.1 Paquetes y comandos principales para computar el polinomio de Bernstein-Sato

6.1.1 Singular/plural

Singular es un sistema de Álgebra Computacional para cálculos polinomiales, con especial énfasis en Álgebra Conmutativa y no conmutativa, Geometría Algebraica y Teoría de Singularidad. En este sistema podemos encontrar más de 90 librerías. Nos centraremos principalmente en las siguientes librerías y comandos:

bfun.lib. Escrita por Daniel Andres y Viktor Levandovskyy, ref. [3]. En esta librería tenemos varios algoritmos para el cálculo del polinomio de Bernstein-Sato de un polinomio $f \in K[x_1, ..., x_n]$. En particular, obtendremos las raíces del polinomio de Bernstein-Sato $b_f(s)$ y las multiplicidades de las mismas. Hay principalmente tres comandos para el cálculo del polinomio de Bernstein-Sato de un polinomio $f \in K[x_1, ..., x_n]$.

- "bfctIdeal". Computa la b-función global de un ideal holónomo con respecto a un vector de peso, $0 \neq w \in \mathbb{R}^n_{>0}$. Este comando sigue el siguiente algoritmo:

bfctIdeal(I, w).
Input: $I \subseteq A_n$ un ideal holónomo, $0 \neq w \in \mathbb{R}^n_{>0}$ un vector de peso.
Output: La b-función global $b_{I,w}(s) \in K[s]$ de I respecto del vector de pesos w.
$J := in_w(I)$ (algoritmo 2.3.2 de la referencia [2])
$s := \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \partial_i$
return $b_{I,w}(s) :=$ PrincipalIntersect(s, J).

- "bfct". Computa el polinomio de Bernstein-Sato de $f \in K[x_1, ..., x_n]$, $b_f(s)$, como ya hemos visto, aplicando el concepto de b-función global en ideales sobre el ideal de Malgrange de f y una elección específica del vector de peso. Este comando se basa en el siguiente algoritmo:

bfct(f).
Input : $f \in K[x_1, ..., x_n]$.
Output : El polinomio de Bernstein-Sato $b_f(s) \in K[s]$ de f.
$I_f := < t - f, \partial_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1}\partial_t, ..., \partial_n + \frac{\partial f}{\partial x_n}\partial_t > \subseteq A_n < t, \partial_t >$ el ideal de Malgrange de f.
$w := (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ de forma que el peso de ∂_t sea 1.
$b_{I,w}(s) :=$ bfctIdeal(I_f, w).
return $b_f(s) := b_{I,w}(-s - 1)$.

- "bfctOneGB". Computa el polinomio de Bernstein-Sato de f usando una única base de Groebner.

dmod.lib. Escrita por Jorge Martin Morales y Viktor Levandovskyy, ref. [18]. En esta librería podemos encontrar ciertos algoritmos para el cálculo del polinomio de Bernstein-Sato de un polinomio $f \in K[x_1, ..., x_n]$, pero en estos casos, para la compu-

tación de dicho polinomio se usa prioritariamente el anulador de f^s en $A_n < t, \partial_t >$ el cual hemos mencionado anteriormente que se puede probar que coincide con el ideal de Malgrange del polinomio f. En la referencia de D. Andres [2] se puede encontrar el algoritmo que calcula el polinomio de Bernstein-Sato de un polinomio f usando el conjunto $Ann_{A_n<t,\partial_t>}(f^s)$ y varios algoritmos para la computación del ideal anulador anterior.
Por otra parte en la misma librería podemos encontrar el comando "isHolonomic", el cual nos confirma si un módulo del Álgebra de Weyl es o no es holónomo, que como hemos visto durante el texto es una propiedad muy importante entre los A_n-módulos.

dmodapp.lib. Escrita por Daniel Andres y por Viktor Levandovskyy, ref. [17]. De esta librería podemos sacar varios comandos los cuales nos sirven mucho en nuestro estudio, tales como:
- "GBWeight". Computa una base de Groebner de un ideal I respecto de unos vectores de peso.
- "initialIdealW". Computa el ideal inicial de un ideal I respecto de unos vectores de peso.
- "charVariety". Computa la variedad característica de un ideal I.
- "fourier" y "inverseFourier". Aplican el automorfismo de Fourier y el inverso del automorfismo de Fourier respectivamente a un ideal I. (El automorfismo de Fourier está definido por $x_i \mapsto -\partial_i$, $\partial_i \mapsto x_i$).
- "initialMalgrange". Computa una base de Groebner del ideal inicial de Malgrange.

A parte de estos comandos hay muchos otros y entre ellos podemos encontrar varios relacionados con lo que hablamos anteriormente del conjunto anulador de un polinomio f.

Dentro de PLURAL hay una gran cantidad de librerías que no hemos mencionado, debido a que nuestro objetivo principal es computar el polinomio de Bernstein-Sato y por lo tanto nos hemos reducido a comentar aquellas librerias y aquellos comandos que podamos usar con las herramientas previamente definidas. Todas las librerías se pueden encontrar en el manual online de PLURAL donde también se puede encontrar una gran cantidad de referencias muy útiles para comprender los algoritmos en los que se basan estos comandos.

6.1.2 Macaulay2/Dmodules

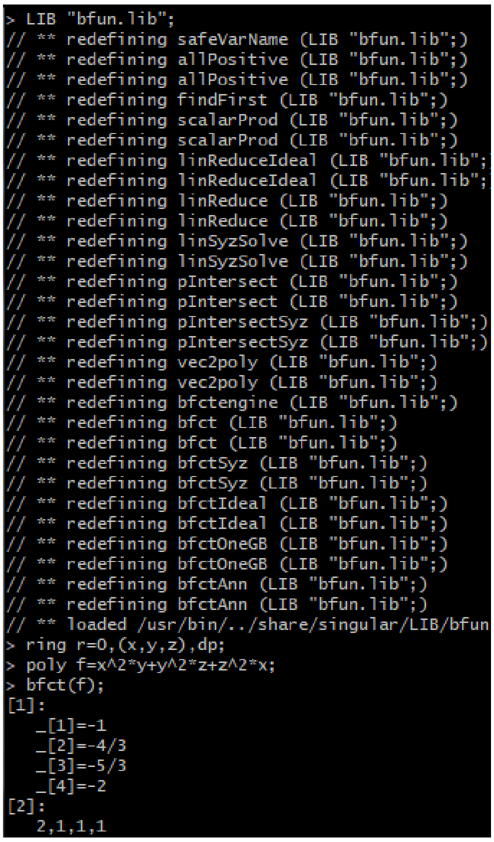
Macaulay2 es otro sistema de software dedicado a apoyar la investigación en Geometría Algebraica y Álgebra Conmutativa. Creado principalmente por Daniel R. Grayson y Michael E. Stillman. Macaulay2 incluye comandos para calcular entre otras muchas cosas el polinomio de Bernstein-Sato de un polinomio $f \in K[x_1, ..., x_n]$, que es nuestro objetivo en esta sección. Para poder aplicar dichos comandos en Macaulay2 podemos cargar el paquete "Dmodules", cuyos autores son Anton Leykin y Harrison Tsai. Este paquete contiene una gran variedad de comandos relacionados con los objetos matemáticos que hemos estado estudiando a lo largo del texto. Daremos y explicaremos brevemente alguno de ellos y los compararemos con los del programa Singular.

- Para computar el ideal anulador de f^s o de una lista de polinomios $f_1^{s_1} ... f_r^{s_r}$ sobre $A_n < t, \partial_t >$ usaremos el comando "AnnFs".
- Para computar la b-función global de un ideal I con respecto a un vector de pesos podemos usar el comando "bFunction(I,w)".
- El cálculo de las variedades características ya sea para un ideal I o para un D-módulo se puede hacer con los comandos "charIdeal". Cuando aplicamos este comano a un ideal I, nos devuelve la variedad característica correspondiente al módulo D/I donde D es, en nuestro caso, el álgebra de Weyl con la que estemos trabajando.
- De la misma forma funciona el comando "Ddim" que calcula la dimensión de un módulo sobre el álgebra de Weyl y podemos aplicarselo directamente a un módulo o a un ideal I, en este segundo caso calculará la dimensión del módulo D/I.
- Al igual que en Singular el comando "Fourier" computa la transformación por el automorfismo de Fourier de un ideal o de un anillo y "FourierInverse" calcula la inversa de este automorfismo.
- Para computar una base de Groebner de un ideal podemos usar el comando "gbw" de la forma "gbw(I, w)" donde w es un vector de pesos.
- Para el cálculo del polinomio de Bernstein-Sato en Macaulay2 hay varios comandos pero el que usaremos principalmente es el comando ."globalBFunction(f)" calcula el polinomio de Bernstein-Sato de f siguiendo un algoritmo muy similar al del comando **bfct** en Singular. Primero calcula el ideal de Malgrange de f, después toma el vector de pesos $w = (1, 0, ..., 0)$ de forma que el peso de ∂_t sea 1. Después hace $B(s) =$ bFunction(I, w) y por último hace $b_f(s) = B(-s-1)$. Donde el comando "bFunction" es el que mencionamos anteriormente que calcula la b-función global de un ideal I respecto de un vector de pesos w.
- "inw(I, w)" computa el ideal inicial de un ideal I del álgebra de Weyl con respecto al vector de pesos w.

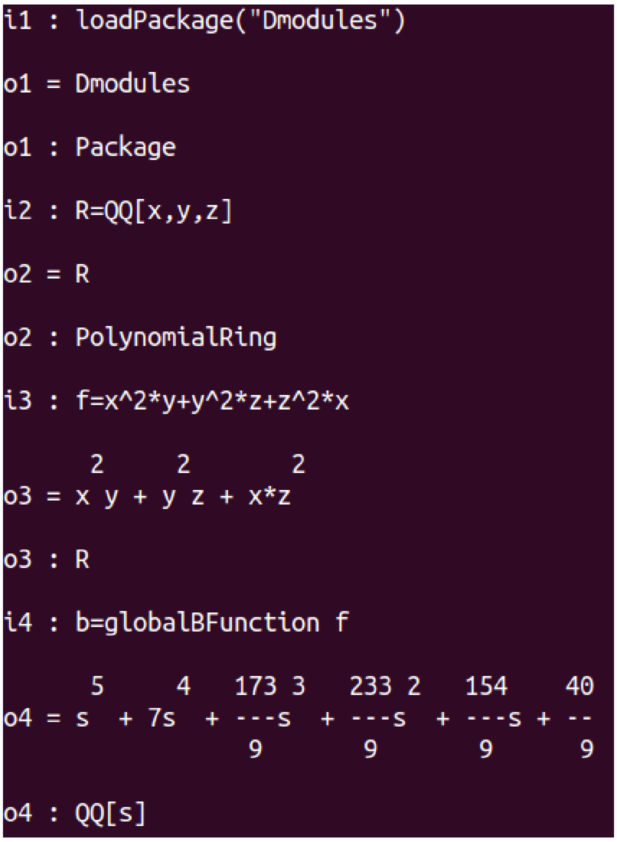
- De la misma forma que en Singular el comando "isHolonomic" sobre un módulo M o sobre un ideal I nos verifica si es holónomo. En el caso de aplicarlo sobre un ideal I, nos verifica si el módulo A_n/I es holónomo. El algoritmo en el que se basa este comando se puede encontrar en la página 8 de la referencia [14]. En la misma referencia podemos encontrar otro algoritmo para caluclar el polinomio de Bernstein-Sato mediante el cálculo del conjunto anulador de f^s en $A_n < t, \partial_t >$.

6.2 Ejemplos del cálculo del polinomio Bernstein

El cálculo del polinomio de Bernstein-Sato de un polinomio $f \in K[x_1, ..., x_n]$ es muy complicado de hacer a mano, hasta cuando tratamos un número considerablemente pequeño de variables. Es por ello que se utilizan estos programas para su cálculo. Incluso usando programas especialmente enfocados en estos cálculos veremos en esta sección que el cálculo del polinomio de Bernstein-Sato de ciertos polinomios requiere una gran cantidad de tiempo debido al enorme coste computacional que tiene. Por otra parte hay ciertos polinomios, de los cuales hablaremos muy brevemente, en los que podemos obtener directamente su polinomio de Bernstein-Sato debido a ciertos resultados que comentaremos posteriormente.
Por último antes de empezar a escribir ejemplos y representarlos en tablas vamos a implementar dos scripts correspondientes a los cálculos de un polinomio de Bernstein-Sato de un polinomio f fijado, para mostrar como hemos realizado los ejemplos y las tablas que daremos a continuación.



```
> LIB "bfun.lib";
// ** redefining safeVarName (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining allPositive (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining allPositive (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining findFirst (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining scalarProd (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining scalarProd (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining linReduceIdeal (LIB "bfun.lib";
// ** redefining linReduceIdeal (LIB "bfun.lib";
// ** redefining linReduce (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining linReduce (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining linSyzSolve (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining linSyzSolve (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining pIntersect (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining pIntersect (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining pIntersectSyz (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining pIntersectSyz (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining vec2poly (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining vec2poly (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining bfctengine (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining bfct (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining bfct (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining bfctSyz (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining bfctSyz (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining bfctIdeal (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining bfctIdeal (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining bfctOneGB (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining bfctOneGB (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining bfctAnn (LIB "bfun.lib";)
// ** redefining bfctAnn (LIB "bfun.lib";)
// ** loaded /usr/bin/../share/singular/LIB/bfun
> ring r=0,(x,y,z),dp;
> poly f=x^2*y+y^2*z+z^2*x;
> bfct(f);
[1]:
   _[1]=-1
   _[2]=-4/3
   _[3]=-5/3
   _[4]=-2
[2]:
   2,1,1,1
```



```
i1 : loadPackage("Dmodules")

o1 = Dmodules

o1 : Package

i2 : R=QQ[x,y,z]

o2 = R

o2 : PolynomialRing

i3 : f=x^2*y+y^2*z+z^2*x

      2     2       2
o3 = x y + y z + x*z

o3 : R

i4 : b=globalBFunction f

      5     4   173 3   233 2   154    40
o4 = s  + 7s  + ---s  + ---s  + ---s + --
                 9       9       9      9

o4 : QQ[s]
```

La imagen de la izquierda corresponde al cálculo del polinomio de Bernstein-Sato del polinomio $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$ en el programa Singular usando el comando **bfct**, que es el que usaremos en este programa. Para poder usar este comando debemos de cargar la libreria **bfun.lib**.

Por otro lado la segunda imagen corresponde al cálculo del polinomio de Bernstein-Sato del mismo polinomio f en Macaulay2 usando el comando **globalBFunction**. Para poder usar ese comando debemos cargar la librería correspondiente, **Dmodules**. Podemos factorizar el polinomio obtenido por el comando **globalBFunction**, sobre el polinomio f, usando el comando **factor**. De esta forma obtendremos el polinomio de Bernstein-Sato asociado a f de forma factorizada y por tanto podremos obtener las raíces del polinomio tal y como se obtiene directamente en Singular y así poder compararlos con más eficacia.

Ejemplo 1. El siguiente resultado se puede encontrar en [20]. Sea $f \in K[x_1, ..., x_n]$, de la forma $f(x_1, ..., x_n) = x_1^{m_1} \cdots x_k^{m_k}$. Entonces tenemos que el operador diferencial $P(s) \in A_n[s]$ que satisface

$$P(s) \cdot f^{s+1} = b(s) \cdot f^s, \text{ con } b(s) \text{ el polinomio de Bernstein-Sato de } f.$$

viene dado por $P(s) = c \cdot \partial_1^{m_1} \cdots \partial_k^{m_k}$, con c constante. Y el polinomio de Bernstein-Sato de f viene dado por

$$b_f(s) = \prod_{i_1=1}^{m_1}(s + \frac{i_1}{m_1}) \cdots \prod_{i_k=1}^{m_k}(s + \frac{i_k}{m_k})$$

Representaremos los cálculos que se obtengan en este ejemplo en una tabla de dos columnas, la primera de ellas con el polinomio f del cual queramos calcular el polinomio de Bernstein-Sato y la otra columna con las ráices de este polinomio, multiplicadas por (-1) ya que sabemos que las raíces del polinomio de Bernstein-Sato asociado a un polinomio $f \in K[X]$ arbitrario son siempre números racionales negativos (ver [16]). Con respecto a las raíces usaremos la expresión $(a)^m$ para expresar que a es una raíz de multiplicidad m del polinomio de Bernstein-Sato asociado al polinomio f. Por otra parte notar que en estos ejemplos no haremos una comparativa de los tiempos transcurridos en los dos programas al ejecutar los comandos correspondientes, ya que el tiempo que han necesitado ambos programas para realizar los cálculos ha sido insignificante.

Input	Negativo de las raíces
xyz	$(1)^3$
$x^4y^4z^4u^4$	$(1)^4,(\frac{1}{2})^4,(\frac{1}{4})^4,(\frac{3}{4})^4$
x^5yz^5	$(1)^3,(\frac{4}{5})^2,(\frac{3}{5})^2,(\frac{2}{5})^2,(\frac{1}{5})^2$
$x^5y^{10}z^{15}$	$(1)^3,\frac{14}{15},\frac{9}{10},\frac{13}{15},(\frac{4}{5})^3,\frac{11}{15},\frac{7}{10},\frac{2}{3},(\frac{3}{5})^3,\frac{8}{15},\frac{1}{2},\frac{7}{15},(\frac{2}{5})^3,\frac{1}{3},\frac{3}{10},\frac{4}{15},(\frac{1}{5})^3,\frac{2}{15},\frac{1}{10},\frac{1}{15}$
$x^2y^4z^6u^8$	$(1)^4,\frac{7}{8},\frac{5}{6},(\frac{3}{4})^2,\frac{2}{3},\frac{5}{8},(\frac{1}{2})^4,\frac{3}{8},\frac{1}{3},(\frac{1}{4})^2,\frac{1}{6},\frac{1}{8}$
$x^3y^5z^7u^{11}$	$(1)^4,\frac{10}{11},\frac{6}{7},\frac{9}{11},\frac{4}{5},\frac{8}{11},\frac{5}{7},\frac{2}{3},\frac{7}{11},\frac{3}{5},\frac{4}{7},\frac{6}{11},\frac{5}{11},\frac{3}{7},\frac{2}{5},\frac{4}{11},\frac{1}{3},\frac{2}{7},\frac{3}{11},\frac{1}{5},\frac{2}{11},\frac{1}{7},\frac{1}{11}$

Como podemos observar en este último polinomio $f = x^3y^5z^7u^{11}$ obtenemos que en el polinomio de Bernstein-Sato asociado a f, $b(s)$, sólo se repite la raíz $s = 1$. Esto es obvio cuando observamos el resultado anterior ya que todos los exponentes del polinomio f son primos y por tanto en cada uno de los productos el único i_j que divide a m_j es el propio $i_j = m_j$.

Ejemplo 2. Aquí vamos a tomar diferentes tipos de polinomios con los que poder obtener una pequeña comparación de los tiempos necesarios para la obtención del polinomio de Bernstein-asociado. Primero representaremos en una primera tabla los polinomios que vamos a tratar en ambos programas y las raíces del polinomio de Bernstein-Sato asociado, al igual que antes, multiplicadas por (-1). Después en una segunda tabla daremos la comparación de tiempos necesarios. Se pueden encontrar más ejemplos en las referencias [2, 26].

Input	Negativo de las raíces
$x^4+y^6+xy^5$	$\frac{7}{16},\frac{9}{16},\frac{5}{8},\frac{11}{16},\frac{13}{16},\frac{7}{8},\frac{15}{16},(1)^2,\frac{17}{16},\frac{9}{8},\frac{19}{16},\frac{21}{16},\frac{11}{8}$
$x^8+y^8+xy^7$	$\frac{1}{4},\frac{3}{8},\frac{1}{2},\frac{5}{8},\frac{3}{4},\frac{7}{8},(1)^2,\frac{9}{8},\frac{5}{4},\frac{11}{8},\frac{3}{2},\frac{13}{8},\frac{7}{4}$
$x^{11}+y^{11}+xy^{10}$	$\frac{2}{11},\frac{3}{11},\frac{4}{11},\frac{5}{11},\frac{6}{11},\frac{7}{11},\frac{8}{11},\frac{9}{11},\frac{10}{11},(1)^2,\frac{12}{11},\frac{13}{11},\frac{14}{11},\frac{15}{11},\frac{16}{11},\frac{17}{11},\frac{18}{11},\frac{19}{11},\frac{20}{11}$
$x^4+y^4+z^4-(xyz)^2$	$\frac{3}{4},(1)^2,\frac{5}{4},\frac{3}{2},\frac{7}{4},2,\frac{9}{4}$
$x^5+y^9+xy^8$	$\frac{14}{45},\frac{19}{45},\frac{22}{45},\frac{23}{45},\frac{8}{15},\frac{26}{45},\frac{28}{45},\frac{29}{45},\frac{31}{45},\frac{32}{45},\frac{11}{15},\frac{34}{45},\frac{37}{45},\frac{38}{45},\frac{13}{15},\frac{41}{45},\frac{14}{15},\frac{43}{45},\frac{44}{45},1,\frac{46}{45},$ $\frac{47}{45},\frac{16}{15},\frac{49}{45},\frac{17}{15},\frac{52}{45},\frac{53}{45},\frac{56}{45},\frac{19}{15},\frac{58}{45},\frac{61}{45},\frac{62}{45},\frac{22}{15}$
$x^4+y^4-(xyz)^2$	$\frac{3}{4},(1)^2,\frac{5}{4},\frac{3}{2},\frac{7}{4},2$
$x+y^3+z^{10}$	1
$x^2+y^3+z^{10}$	$1,\frac{11}{10},\frac{6}{5},\frac{13}{10},\frac{7}{5},\frac{3}{2},\frac{8}{5},\frac{17}{10},\frac{9}{5},\frac{19}{10},$
$x^3+y^3+z^{10}$	$\frac{23}{30},\frac{13}{15},\frac{29}{30},1,\frac{16}{15},\frac{11}{10},\frac{7}{6},\frac{6}{5},\frac{19}{15},\frac{13}{10},\frac{41}{30},\frac{7}{5},\frac{43}{30},\frac{22}{15},\frac{3}{2},\frac{23}{15},\frac{47}{30},\frac{8}{5},\frac{49}{30},\frac{17}{10},\frac{26}{15},\frac{9}{5},$ $\frac{11}{6},\frac{19}{10},\frac{29}{15},\frac{61}{30},\frac{32}{15},\frac{67}{30}$

La siguiente tabla es la tabla de tiempos correspondientes a los polinomios anteriores en ambos programas. Los tiempos vienen dado con el formato "miutos:segundos".

Input	Singular	Macaulay2
$x^4+y^6+xy^5$	0:03	0:17
$x^8+y^8+xy^7$	0:02	0:12
$x^{11}+y^{11}+xy^{10}$	0:10	3:43
$x^4+y^4+z^4-(xyz)^2$	0:07	0:22
$x^5+y^9+xy^8$	0:59	26:17
$x^4+y^4-(xyz)^2$	0:02	0:01
$x+y^3+z^{10}$	0:01	0:01
$x^2+y^3+z^{10}$	0:02	0:01
$x^3+y^3+z^{10}$	0:04	0:01

Algunos de los ejemplos que se han probado no se han podido implementar ya que en

alguno de los dos porgramas la operación no finalizaba. Esto nos indica como ya se venía diciendo que este polinomio es difícil de calcular incluso computacionalmente con unos programas algebraicos fuertes. De los ejemplos que he hecho en general se pueden sacar varias conclusiones. El tiempo del cálculo claramente depende del algoritmo. Por otra parte se puede observar que cuando el polinomio es homogéneo el tiempo del cálculo es mucho menor que cuando no lo es, en la mayoría de los casos. Por ejemplo tomando el polinomio $f = x^8 + y^8 + xy^7$ hemos observado que el polinomio de Bernstein-Sato asociado a f no tiene un gran número de raíces y además ninguno de los programas que hemos usado requiere de mucho tiempo para calcularlo (2 segundos en Singular y 12 segundos en Macaulay). En cambio, si cambiamos algún exponente con tal de que no sea homogéneo, el resultado varía muchísimo. Por ejemplo tomando ahora $g = x^8 + y^8 + xy^6$ obtenemos que el polinomio de Bernstein-Sato asociado a g tiene 42 raíces, en cambio el de f tenía unas 14 raíces. No sólo eso, el cálculo del polinomio de Bernstein-Sato asociado a g tardó aproximadamente 1:35 minutos en Singular, mientras que en Macaulay2 acabé cancelando la operación.
Podemos observar también que en la mayoría de los ejemplos Singular realiza la operación considerablemente más rápido que Macaulay2. Es más, la mayoría de ejemplos que no he implementado es debido a que en el programa Macaulay2 no finalizaba la operación pasada media hora. Por lo que yo diría que el programa Singular es mejor a la hora de calcular el polinomio de Bernstein-Sato que el programa de Macaulay2.
Dejando en un segundo lugar qué programa sea mejor que el otro, la principal conclusión que saco es que el cálculo del polinomio de Bernstein-Sato para un polinomio arbitrario f tiene un enorme coste computacional incluso para un número considerablemente pequeño de variables. Aunque estoy seguro de que estos algoritmos tienen variables las cuales pueden mejorar considerablemente el cálculo de estos polinomios en casos particulares. Es decir, creo que la dificultad de obtener un algoritmo con el que se obtenga un resultado en un tiempo pequeño para el cálculo del polinomio de Bernstein-Sato sobre cualquier polinomio f es muy difícil. No obstante algunos de estos algoritmos pueden modificarse para agilizar el cálculo en determinados casos, (ver [2]).
De todas formas no es para nada raro que el cálculo de b-funciones sea muy costoso computacionalmente, pues la b-función de una singularidad es un invariante muy fino que contiene una gran información. Hoy en día se dista mucho de conocerse bien el comportamiento de la b-función por deformaciones y otras operaciones geométricas. Se trata de un aspecto de la Teoría de Singularidades muy activo en la actualidad y para el que este trabajo debe considerarse simplemente como un "aperitivo".

Bibliografía

[1] Adams, W. W., and Loustaunau, P. *An introduction to Gröbner bases*, Graduate Studies in Mathematics, 3. American Mathematical Society (1994).

[2] Andres, D. *Algorithms for the computation of Sato's b-functions in algebraic D-module theory.*

[3] Andres, D., and Levandowskyy, V. **bfun.lib**. *A Singular 3-1-1 library for computations of applications of algebraic D-modules* (2010).

[4] Bernstein, I. N. *Modules over a ring of differential operators: study of the fundamental solutions of equations with constant coefficients*, Funct. Anal. Appl. **5**,89-101 (1971).

[5] Bernstein, J. *Modules over a ring of differential operators. An investigation of the fundamental solutions of equations with constant coefficients.*, Functional Anal. Appl., 5(2):89–101 (1971).

[6] Bernstein, J. *The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter.*, Funct. Anal. appl., 6(4):26–40 (October 1972).

[7] Björk, J. *Dimensions of modules over algebras of differential operators. In Fonctions analytiques de plusieurs variables et analyse complexe.*, (Colloq. Internat. CNRS, No. 208, Paris, 1972), pages 6–11. "Agora Mathematica", No. 1. Gauthier-Villars, Paris (1974).

[8] Björk, J. *Rings of differential operators.*, volume 21 of North-Holland Mathematical Library. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York (1979).

[9] Castro Jiménez, F. Modules over the weyl algebra. In *Algebraic approach to differential equations.* World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2010, pp. 52–118.

[10] Coutinho, S. C. *A Primer of Algebraic D-modules*, London Mathematical Society Student Text 33, Cambridge Univ. Press. (1995).

[11] Cox, D., Little, J., and O'Shea, D. *Ideals, Varieties, and Algorithms*, Undergraduate Texts in Mathematics,Springer, Fourth Edition (2015).

[12] Gallingo, A. *Théorème de division et stabilité en Géométrie Analytique locale*, Ann. Inst. Fourier, 29,2:107–184 (1979).

[13] Grayson, D., and Stillman, M. **Macaulay2**. *a software system for research in algebraic geometry*, available at `http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2` A. Leykin and H. Tsai. D-module package for Macaulay 2. `http://www2.macaulay2.com/Macaulay2/doc/Macaulay2-1.12/share/doc/Macaulay2/Dmodules/html/index.html` (2010).

[14] Hartillo, M., and Ucha, J. *Computational Aspects of D-Modules*, Minicourse at COCOA VIII, Universidad de Cádiz (Spain), 2-7 June (2003).

[15] Hartshorne, R. *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics,GTM, Springer, volume 52 (1977).

[16] Kashiwara, M. *B-functions and holonomic systems: rationality of roots of b-functions*, Invent. Math.**38**,33-35 (1976).

[17] Levandowskyy, V., and Andres, D. **dmodapp.lib**. *A Singular 3-1-1 library for computations of applications of algebraic D-modules* (2010).

[18] Levandowskyy, V., and Morales, J. M. **dmod.lib**. *A Singular 3-1-1 library for computations of applications of algebraic D-modules* (2010).

[19] Lohara, K., Malbos, P., Saito, M.-H., and Takayama, N. *Two Algebraic Byways from Differential Equations: Gröbner Bases and Quivers*, Algorithms and Computation in Mathematics 28, Springer, AG (2020).

[20] Martin Morales, J. *Introduction to D-module Theory. Algorithms for Computing Bernstein-Sato Polynomials*, Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza, Academia Militar (2010).

[21] Nuñez-Betancourt, L. *On certain rings of differentiable type and finiteness properties of local cohomology*, J. Algebra. Vol. 379, 1-10 (2013).

[22] Oaku, T. *An algorithm of computing b-functions*, Duke Math. J., 87(1):115–132 (1997).

[23] Oaku, T. *Algorithms for b-functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of D-modules*, Adv. in Appl. Math., 19(1):61–105 (1997).

[24] Oaku, T. *Algorithms for the b-function and D-modules associated with a polynomial.*, J. Pure Appl. Algebra, 117/118:495–518 (1997).

[25] Polya, G., and Szegö, G. *Problems and Theorems in Analysis II: Theory of Functions. Zeros. Polynomials. Determinants. Number Theory. Geometry*, Springer Science and Business Media, 11 dic. (1997).

[26] Rouchdi, B., and Toshinori, O. *Algorithm for computing local Bernstein-Sato ideals* (2008).

[27] Saito, M., Sturmfels, B., and Takayama, N. *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations,(2000), Noro: An Efficient Modular Algorithm for Computing the Global b-function(2002).*

[28] Sato, M., and Shintani, T. *On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces.*, Proc. Nat. Acad. Sci., 69:1081-1082 (May 1979).

[29] Smith, S. P. *Differential operators on* $\mathbf{A}^1$ *and* $\mathbf{P}^1$ *in charp>0*, in Séminaire Bubreil-Malliavin 1985, ed. M.-P. Mallaivin, Lecture Notes in Mathematics 1220, Springer-verlag, Berlin- New York, 157-177. (1986).

[30] Stafford, J. T. *Non-holonomic modules of Weyl algebras*, J. London Math. Soc., 18,429-442 (1985).

[31] Z. Mebkhout et Narváez Macarro, L. *La théorie du polynôme de Bernstein-Sato pour les algèbres de Tate et de Dwork-Monsky-Washnitzer*, Ann. Sci. l'Ecole Norm. Sup. (4) Vol. 24(2), 227-256 (1991).