FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Título

Árboles inevitables en torneos

Realizado por:
Esther Bermúdez Carvajal

Supervisado por:
Desamparados Fernández Ternero

10 de Septiembre de 2020

Índice general

Resumen / Abstract

En esta memoria trabajaremos con torneos, centrándonos en un estudio de los árboles inevitables en Torneos. La noción de torneo, grafo dirigido completo, es relativamente nueva si la comparamos con otras áreas de la Teoría de Grafos. Las nociones y resultados que presentaremos nos conducirán a encontrar el menor número de vértices de un torneo donde un árbol se encuentra como subgrafo. Consideraremos diferentes tipos de árboles, siendo éstos cada vez menos simples.

In this memory we will work with tournaments, focusing on a study of the inevitable trees in Tournaments. The notion of tournament, complete directed graph, is relatively new if we compare it with other areas of Graph Theory. The notions and results that we will present will lead us to find the fewest vertices of a tournament where a tree is found as a subgraph. We will consider different types of trees, these being less and less simple.

Introducción

En 1966 apareció un estudio por parte de F. Harary y L. Moser, *The theory of round robin tournaments* [3], en el cual se estudian los torneos "round robin". En dichos torneos los jugadores o equipos participan en un juego que no puede terminar en empate y en el que todos los participantes juegan entre sí exactamente una vez. Así, el término Torneo se debe al origen de la noción.

Existe una gran cantidad de fenómenos empíricos con estructuras asimétricas y completas, que pueden representarse gráficamente como torneos. Podemos verlo en experimentos de comparación pareada, donde, por ejemplo, se quiere saber las preferencias de una persona sobre cierto tema de forma que para cada par de datos indique cuál prefiere. La estructura de sus preferencias declaradas puede ser representada por un torneo en el que los vértices representan los datos y las aristas dirigidas la elección. También en estudios sobre dominación en algunas sociedades de animales, de modo que para cada par de individuos, uno domina al otro. En votación por mayoría, el resultado de los votos puede ser representado por un digrafo cuyos vértices son grupos políticos o partidos y cuyas aristas dirigidas indican que partido derrotó al otro.

Los primeros resultados sobre torneos estuvieron motivados por este tipo de aplicaciones, de naturaleza estadística. En las últimas décadas se ha centrado la atención en la estructura combinatoria de los torneos, dando lugar a un área diferenciada dentro de la Teoría de Grafos.

En 1965, F. Harary, R.Z. Norman y D. Cartwright presentaron, en una monografía dedicada a grafos dirigidos [4], un estudio introductorio de los torneos desde el punto de vista de la teoría de grafos, distanciándose de sus aplicaciones. J.W. Moon reunió la mayoría de resultados que existían sobre torneos hasta 1968 [10].

A lo largo de este artículo, trabajaremos con torneos y una de sus propiedades: la inevitabilidad. Se dice que un digrafo (o grafo dirigido) es n-inevitable si todo torneo de orden n contiene a dicho digrafo como subgrafo.

Al principio de este artículo encontraremos un capítulo de preliminares, dónde veremos algunos conceptos básicos sobre teoría de grafos y torneos para poder introducirnos en el tema del trabajo.

En el capítulo 2 estudiaremos la inevitabilidad de las concatenaciones de caminos (unión de caminos disjuntos con un origen común), probando primero que podemos restringirnos a concatenaciones de caminos salientes.

El objetivo del capitulo 3 es encontrar una cota superior para $f(n)$ por inducción, siguiendo el método de Häggkvist y Thomason, donde $f(n)$ el menor entero tal que todo árbol orientado es $f(n)$-inevitable. Para ello definiremos la noción de p-corazón y lo ilustraremos con ejemplos para facilitar su comprensión.

Por último, en el capítulo 4 veremos la inevitabilidad de árboles con pocas hojas. Esto nos servirá para demostrar fácilmente que una cota para $f(n)$ es $\frac{38}{5}n - 6$, es decir, los árboles de orden n son $(\frac{38}{5}n - 6)$-inevitables.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo consta de dos secciones en las que veremos nociones básicas sobre la teoría de grafos y resultados previos sobre torneos.

1.1. Nociones básicas de grafos

En esta sección recordaremos algunas definiciones y resultados básicos de Teoría de Grafos que se han extraído del libro *Handbook of Graph Theory* [1]. Para ampliar conocimientos, se puede consultar el libro *Graph Theory* [2].

Definición 1.1 *Un **grafo simple**, $G = (V, E)$, consta de un conjunto no vacío de vértices V y de un conjunto E de pares no ordenados de elementos distintos de V, a estos pares se les llama aristas.*

Definición 1.2 *Un **subgrafo** de un grafo $G = (V, E)$ es un grafo cuyos conjuntos de vértices y aristas son subconjuntos de los de G.*

Definición 1.3 *Dado un grafo G, un subgrafo H se dice **maximal** verificando una cierta propiedad $\mathcal{P}$ si H verifica la propiedad $\mathcal{P}$ y cualquier subgrafo H' de G tal que $H \subset H'$ no verifica $\mathcal{P}$.*

Definición 1.4 *Un **grafo completo** es un grafo simple que tiene una arista entre cada par de vértices distintos. Denotaremos como K_n el grafo completo de n vértices.*

Definición 1.5 *Se llama **camino** en un grafo a una secuencia de vértices tal que exista una arista entre cada vértice y el siguiente. Se dice que dos vértices están **conectados** si existe un camino que vaya de uno a otro, de lo contrario estarán desconectados. La **longitud** de un camino es el número de aristas o el número de vértices menos una unidad.*

Definición 1.6 *Se llama **subcamino** de un camino C a una secuencia de vértices contenida en la secuencia de vértices de C, de manera que exista una arista entre cada vértice y el siguiente.*

Definición 1.7 *Un **ciclo** es un camino que empieza y acaba en el mismo vértice.*

Definición 1.8 *Un **ciclo hamiltoniano** es un ciclo que recorre todos los vértices exactamente una vez (excepto el vértice del que parte y al cual llega)*

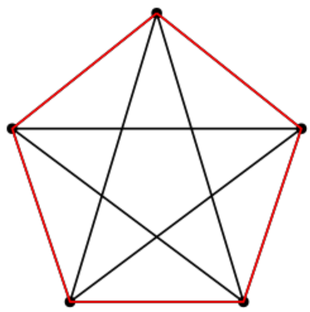


Figura 1.1: En rojo se indica un ciclo hamiltoniano

Definición 1.9 *Sea G un grafo, diremos que:*

- *G es un **grafo conexo** si cualquier par de vértices de G están conectados por un camino.*
- *G es un **árbol** si cualquier par de vértices de G están conectados por exactamente un camino. Equivalentemente, un árbol es un grafo conexo sin ciclos.*

Definición 1.10 *Sea A un árbol en un grafo G, si dice que A es un **árbol generador** de G si $V_A = V_G$.*

Definición 1.11 *Un **isomorfismo** entre dos grafos G y H es un par de biyecciones $\phi_V : V(G) \longrightarrow V(H)$ y $\phi_E : E(G) \longrightarrow E(H)$ tal que para cada par de vértices $u, v \in V(G)$ el conjunto de aristas en $E(G)$ que unen u y v se asigna de forma biyectiva al conjunto de aristas en $E(H)$ que unen $\phi(u)$ y $\phi(v)$.*

Notación 1.12 *Diremos que G y H son **grafos isomorfos** y escribiremos $G \simeq H$ si existe un isomorfismo $G \longrightarrow H$.*

Definición 1.13 *Un* ***grafo dirigido o digrafo*** $G = (V, E)$ *es un grafo donde cada arista* $a \in E$ *tiene una dirección asignada, es decir, está identificada con un par ordenado* (u, v) *de vértices de* V*. En las representaciones gráficas de digrafos, denotaremos la arista* (u, v) *por una flecha de* u *a* v*.*

Definición 1.14 *Un* ***torneo*** T *es un grafo dirigido completo.*

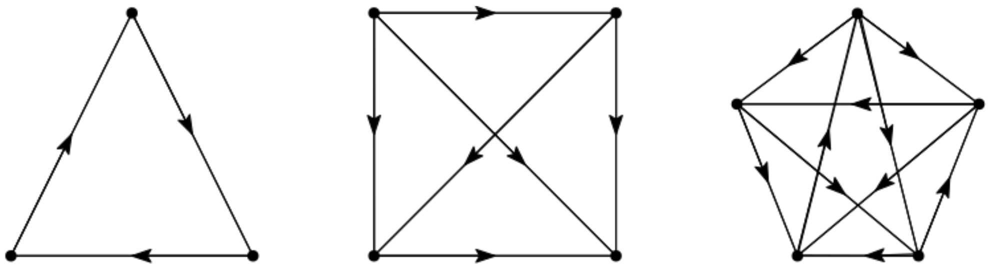


Figura 1.2: Torneos de 3, 4 y 5 vértices

Definición 1.15 *Un* ***subtorneo*** T' *de un torneo* T *es un subgrafo de* T *dirigido y completo. El subtorneo* T' *se dice inducido por un subconjunto de vértices* V' *si* $V(T') = V'$*.*

Definición 1.16 *Un* ***emparejamiento*** *es una función que establece una correspondencia inyectiva entre un subconjunto de* X *y un subconjunto de* Y*. Cuando el emparejamiento es* ***completo****, se define una función inyectiva de* X *en* Y*.*

Observación 1.17 *Para un grafo bipartito* $G = (V, E)$ *con* V *dividido como* $X \cup Y$*, un emparejamiento completo de* X *en* Y *requiere que* $|X| \leq |Y|$*.*

1.2. Definiciones y resultados previos sobre torneos

En esta sección veremos algunas definiciones y resultados sobre torneos, que serán muy útiles para la comprensión de este trabajo. Como referencia hemos usado el libro *Topics on tournaments* [10].

Algunas nociones básicas, como las de camino, subcamino y ciclo, se definirían de forma análoga para torneos.

Definición 1.18 *Se dice que un digrafo D es **n-inevitable** si todo torneo de orden n lo contiene como subgrafo, es decir, todo torneo de orden n contiene un subdigrafo isomorfo a D.*

Ejemplo 1.19 *Sea G el digrafo con $V = \{1, 2, 3\}$ y $E = \{(1, 2), (2, 3)\}$, se puede comprobar en la Figura 1.3 que todos los torneos de orden 3, salvo isomorfismo, contienen un subdigrafo isomorfo a G. Por tanto, diremos que G es 3-inevitable.*

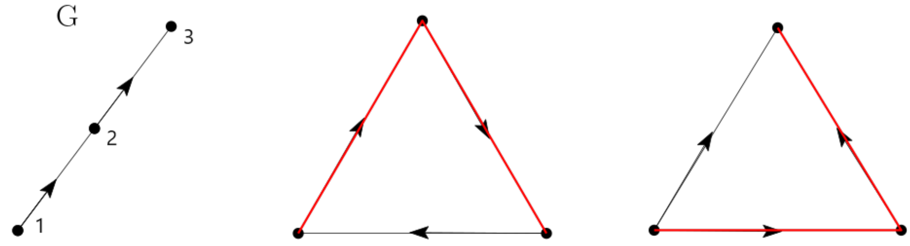


Figura 1.3: G es 3-inevitable

Notación 1.20 *Sea T un torneo y sean x e y dos vértices de T. Escribiremos $x \to y$ si (x, y) es una arista de T. Del mismo modo, dados X e Y dos subdigrafos de T, escribiremos $X \to Y$ si $x \to y$ para todos los pares $(x, y) \in V(X) \times V(Y)$.*

Definición 1.21 *Sea $P = x_1x_2 \cdots x_n$ un camino en un torneo T. Diremos que:*

- *x_1 es el **origen** de P y x_n es el **vértice final** de P.*
- *Si $x_1 \to x_2$, P es un **camino saliente**, en otro caso, P es un **camino entrante**.*
- *El **camino saliente dirigido** de orden n es el camino $P = x_1x_2 \cdots x_n$ en el que $x_i \to x_{i+1}$ para todo i, $1 \leq i < n$. Si la dirección de las aristas es la contraria tenemos un **camino entrante dirigido**. Denotamos el camino $x_2 \cdots x_n$ por $^*P$.*

Definición 1.22 *Sean $P_1, P_2, \ldots, P_k$ caminos en un torneo T. La **concatenación** de $P_1, P_2, \ldots, P_k$, denotada por $\bigvee_{i=1}^{k} P_i$, es el digrafo $\bigcup_{i=1}^{k} P'_i$, donde P'_i es isomorfo a P_i con origen x y $V(P'_i) \cap V(P'_j) = \{x\}, 1 \leq i < j \leq k$. Diremos que x es el **origen** de $\bigvee_{i=1}^{k} P_i$.*

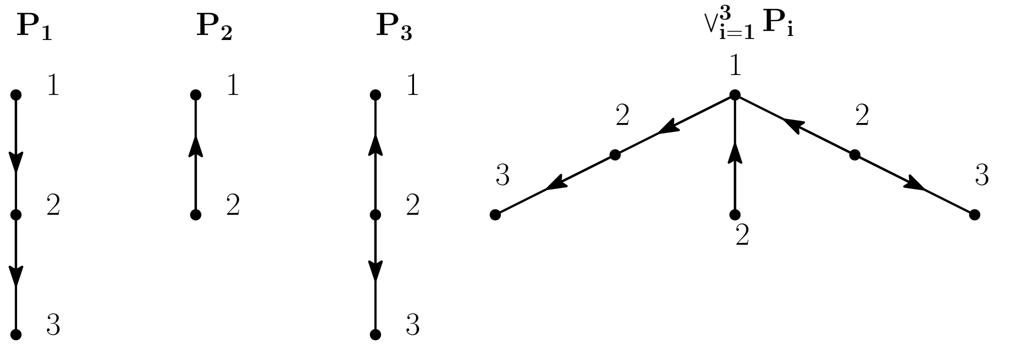


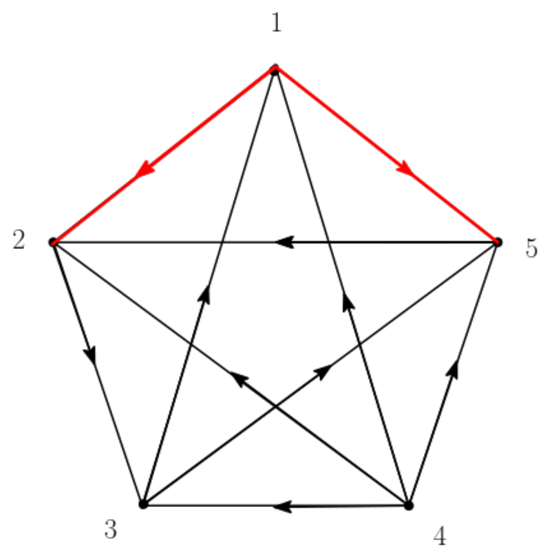
Figura 1.4: Concatenación de los caminos P_1, P_2 y P_3

Definición 1.23 *Sea $A_1, A_2, \ldots, A_k$ una familia de conjuntos de vértices de T, denotamos por $T[A_1, A_2, \ldots, A_k]$ al subtorneo inducido en T por el conjunto de vértices $\bigcup_{1 \leq i \leq k} A_i$ y por $T - [A_1, A_2, \ldots, A_k]$ al subtorneo inducido en T por el conjunto de vértices $V(T) \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq k} A_i$.*

Notación 1.24 *Abreviaremos $T - [A_1]$ por $T - A_1$ y $T - [\{x\}]$ por $T - x$.*

Definición 1.25 *Definimos el **conjunto de salida** de un vértice x como el conjunto $N^+(x) = \{y \in V(T) \ / \ (x, y) \in E(T)\}$. Definimos el **grado de salida** del vértice x como su cardinal, es decir, $d^+(x) = |N^+(x)|$.*

Ejemplo 1.26 *En la siguiente figura podemos observar que el conjunto de salida del vértice 1 está formado por los vértices 2 y 5, es decir, $N^+(1) = \{2, 5\}$. El grado de salida de dicho vértice es $d^+(1) = |N^+(1)| = 2$.*



Teorema 1.27 ([7]) *Una sucesión creciente de n enteros no negativos $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n$ es la sucesión de grados de salida de los vértices de un n-torneo si y sólo si se verifica que*

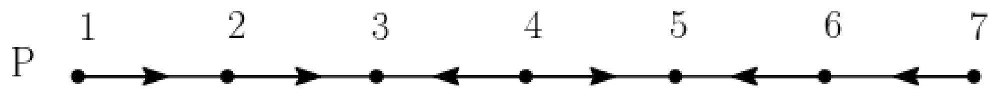
$$\sum_{i=1}^{p} s_i \geq \binom{p}{2}\ , \forall p = 1, \ldots, n-1,\ y\ \sum_{i=1}^{n} s_i = \binom{n}{2}\ .$$

Definición 1.28 *Los* ***bloques*** *de P son los subcaminos dirigidos maximales de P.*

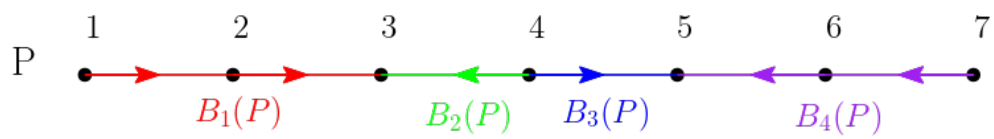
Observación 1.29 *Un subcamino dirigido es maximal si al añadirle uno de los vértices adyacentes a sus extremos deja de ser dirigido.*

Notación 1.30 *Enumeramos los bloques de P desde el origen hasta el vértice final. El primer bloque de P lo denotamos por $B_1(P)$ y su longitud por $b_1(P)$. Igualmente, el bloque i-ésimo de P se denota por $B_i(P)$ y su longitud por $b_i(P)$. El camino P está totalmente descrito por la secuencia signada: $sgn(P)(b_1(P), b_2(P), \ldots,\ b_k(P))$ donde k es el número de bloques de P y $sgn(P)$ es positivo si P es un camino saliente y es negativo si es un camino entrante.*

Ejemplo 1.31 *Sea P el camino*



Representamos los bloques de P con colores diferentes:



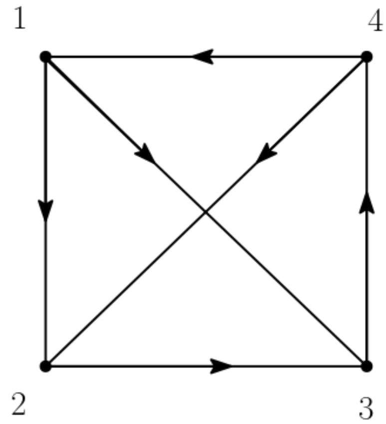
Las longitudes de los bloques de P son:

- $b_1(P) = |B_1(P)| = 2$
- $b_2(P) = |B_2(P)| = 1$
- $b_3(P) = |B_3(P)| = 1$
- $b_4(P) = |B_4(P)| = 2$

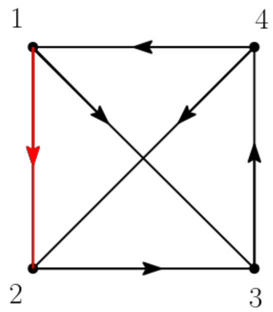
El camino P queda totalmente descrito por la secuencia signada: $+(2, 1, 1, 2)$.

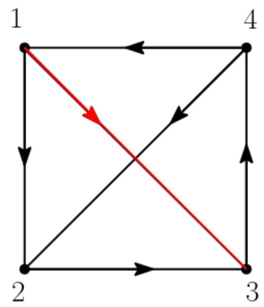
Definición 1.32 *Un torneo es* ***fuerte o fuertemente conexo*** *si para cada par de vértices x e y existe un camino saliente dirigido con origen x y vértice final y. Si un torneo no es fuerte se dice que es* ***reducible****.*

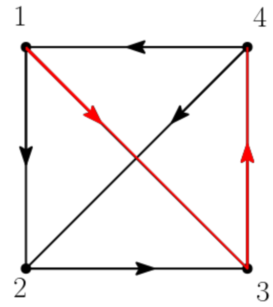
Ejemplo 1.33 *Veamos que el siguiente 4-torneo es fuerte.*



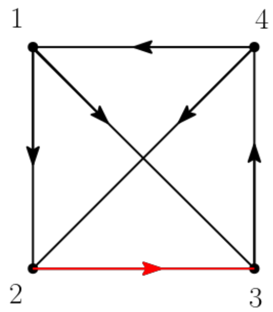
Si tomamos como origen el vértice 1, encontramos que existe un camino saliente dirigido que llega a cada uno de los demás vértices:

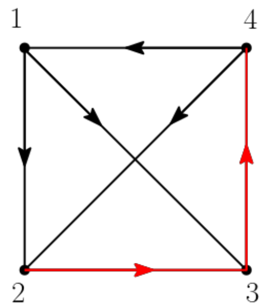


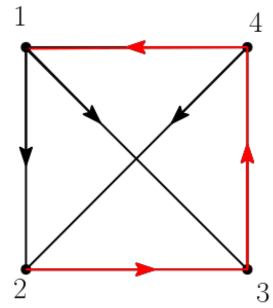




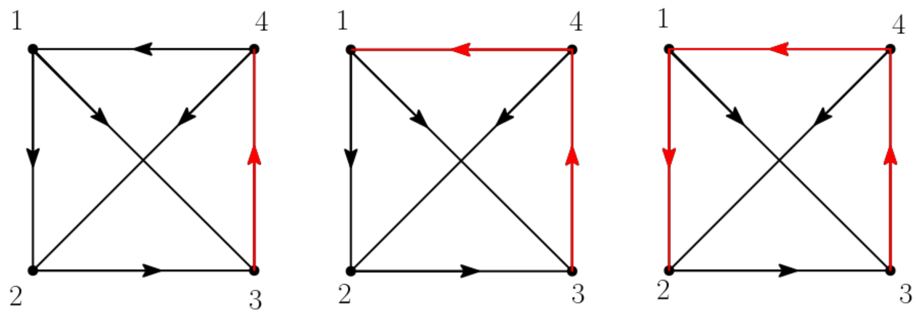
Veamos que tomando como origen el vértice 2, también se cumple:



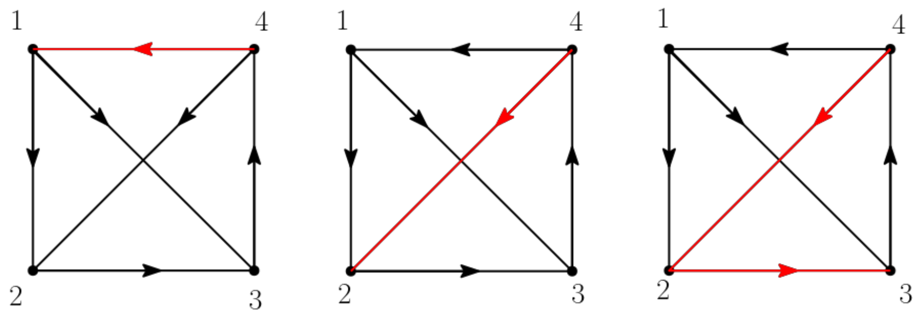




Si tomamos como origen el vértice 3, también se cumple:



Y por último, si tomamos como origen el vértice 4, también se cumple:



Hemos visto que para cada par de vértices x e y existe un camino saliente dirigido con origen x y vértice final y. Por tanto, este 4-torneo es fuerte.

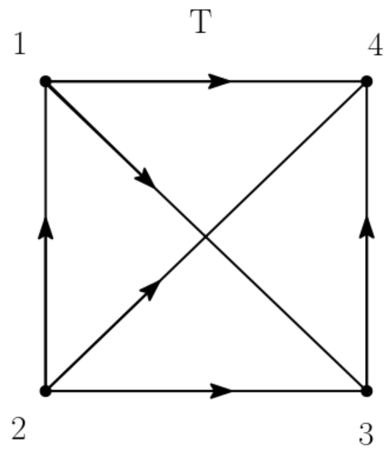
Definición 1.34 *Las* ***componentes fuertes*** *de un torneo son los subgrafos fuertes maximales.*

Los siguientes resultados serán útiles para comprobar si un torneo es o no fuerte.

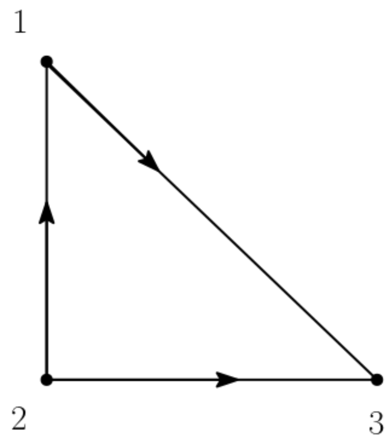
Proposición 1.35 *Un torneo es fuerte si y solo si cada par de vértices está contenido en un ciclo.*

Proposición 1.36 *La componente fuerte C de un torneo T tal que $T - C \to C$ es la componente fuerte maximal de T.*

Ejemplo 1.37 *Sea T el siguiente torneo:*



Si consideramos $C = \{4\}$, tenemos que $T - C$ es el subtorneo generado por $\{1, 2, 3\}$:



Se tiene que $T - C \to C$, luego $C = \{4\}$ es la componente fuerte maximal de T.

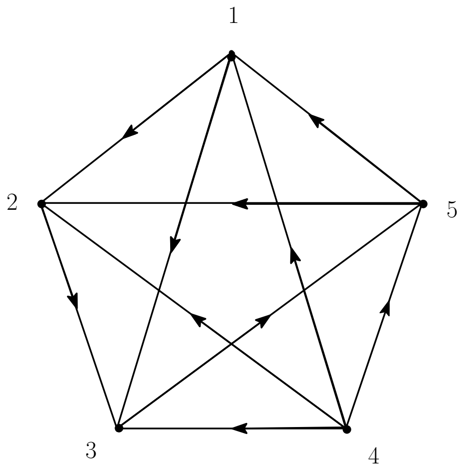
Definición 1.38 *Sea X un subconjunto de vértices de T. La* ***sección exterior generada por X en T*** *es el conjunto de vértices y para los que existe un camino saliente dirigido (que puede estar constituido por un único vértice) desde $x \in X$. Denotaremos este conjunto por $S^+(X)$ y, en particular, por $S^+(x)$, si $X = \{x\}$, y por $S^+(x, y)$, si $X = \{x, y\}$. Escribiremos $s^+(X) = |S^+(X)|$.*

Observación 1.39 *Tengamos en cuenta que $X \subseteq S^+(X)$, ya que un solo vértice x se puede considerar como un camino con origen x y vértice final x.*

Definición 1.40 *La* ***sección interior generada por X en T****, es el conjunto de vértices y para los que existe un camino entrante dirigido desde*

$x \in X$. Denotaremos este conjunto por $S^-(X)$ y, en particular, por $S^-(x)$, si $X = \{x\}$, y por $S^-(x, y)$, si $X = \{x, y\}$). Escribiremos $s^-(X) = |S^-(X)|$.

Ejemplo 1.41 *Consideremos el siguiente 5-torneo.*



Si $X = \{1\}$, entonces su sección exterior es $S^+(X) = \{1, 2, 3, 5\}$, ya que existe un camino saliente dirigido con origen 1 y vértices finales $\{1, 2, 3, 5\}$ y no lo existe para el vértice 4. Tenemos que $s^+(X) = |S^+(X)| = 4$. (Figura 1.5)

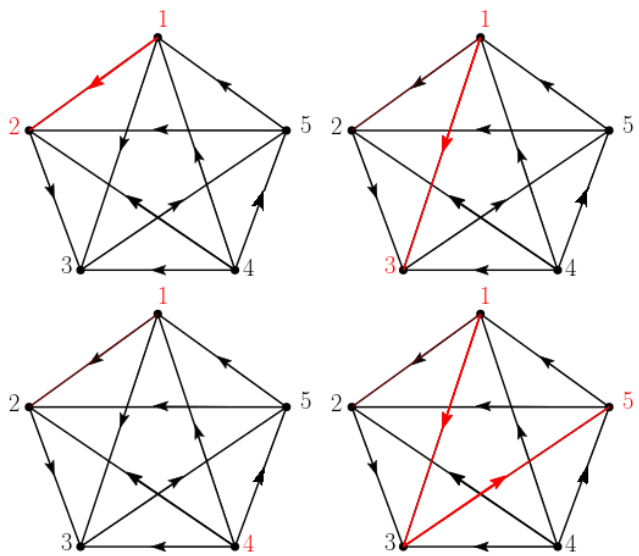


Figura 1.5: Sección exterior

Su sección interior es $S^-(X) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ya que existe un camino entrante dirigido con origen $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y vértice final 1. Tenemos que $s^-(X) = |S^-(X)| = 5$. (Figura 1.6)

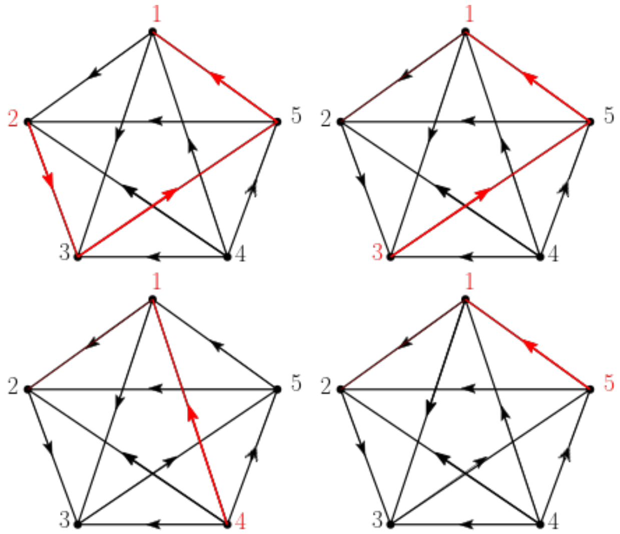


Figura 1.6: Sección interior

Definición 1.42 *Un **generador externo** de un torneo T es un vértice x de T tal que $S^+(x) = V(T)$. La noción dual es la de **generador interno**.*

Ejemplo 1.43 *En el ejemplo anterior, podemos ver que el vértice 1 es un generador interno, ya que $S^-(x) = V(T)$.*

Proposición 1.44 ([11]) *Cualquier torneo contiene un camino hamiltoniano dirigido, luego tiene un generador externo y también un generador interno.*

En la proposición anterior, tenemos que el generador externo de un torneo coincide con el origen del camino hamiltoniano dirigido y, el generador interno, con el vértice final de dicho camino.

A continuación, mostramos varios resultados importantes para el tema de este Trabajo de Fin de Grado.

Teorema 1.45 (Teor. 1.1, [6]) *Sean T un torneo de orden $n+1$, P un camino saliente de orden n y x e y dos vértices distintos de T. Si $s^+(x, y) \geq b_1(P) + 1$, entonces x o y es origen de una copia de P en T.*

Observación 1.46 *Cuando decimos que un torneo T contiene una copia de un camino P, nos referimos a que T contiene un subgrafo dirigido isomorfo a P. En el resto de resultados, abreviaremos "T contiene una copia de P"por "T contiene a P".*

Corolario 1.47 (Cor. 2, [12]) *Sean T un torneo de orden $n+1$ y P un camino de orden n. Al menos dos vértices de T son orígenes de P en T. En particular, T contiene a P.*

Corolario 1.48 *Sean T un torneo de orden $n+1$, P un camino saliente de orden n con $b_1(P) \geq 2$ y x un vértice de T. Si $d^+(x) \geq 2$ y $s^+(x) \geq b_1(P)+1$, entonces x es origen de P en T.*

Demostración: Sea y un generador externo del subtorneo $T[N^+(x)]$ y $z \in N^+(x)$ distinto de y. En $T-x$, $s^+(y,z) = s^+(x)-1 \geq b_1(P) = b_1({}^*P)+1$, así que, por el Teorema 1.45 , y o z es origen de ${}^*P$ en $T-x$. Por tanto, x es origen de P en T.

Teorema 1.49 *Sean T un torneo de orden $n \geq 8$ y P un camino de orden n. Entonces T contiene a P.*

Observación 1.50 *El resultado anterior es consecuencia del hecho de que todo n-torneo T contiene un camino P de orden n si y sólo si el par (T,P) no es una excepción de Grümbaum [6, Cor. 4.1], teniendo en cuenta que no hay ninguna excepción de Grümbaum con $n \geq 8$.*

Capítulo 2

Inevitabilidad de concatenaciones de caminos

En este capítulo, estudiaremos la inevitabilidad de los árboles más simples posibles: las concatenaciones de caminos, que son árboles que se obtienen al identificar el origen de varios caminos.

En particular, las **garras**, una clase especial de concatenaciones de caminos donde todos son caminos salientes dirigidos, se ha estudiado en profundidad.

En [9], X. Lu, D. Wang y C. K. Wong han probado los siguientes resultados, donde el grado de una garra es el número de caminos que la componen.

Teorema 2.1 *Toda garra de orden n y grado al menos $\frac{19}{50}n$ es n-inevitable.*

Teorema 2.2 *Existen garras de orden n y grado $\frac{11}{23}n$ que no son n-inevitables.*

El resultado principal de este capítulo es el Teorema 2.30, que establece que una concatenación de orden n de k caminos es $(n + \frac{3}{2}(k^2 - 3k) + 5)$-inevitable. Para probarlo, primero veremos que es posible restringirnos a concatenaciones de caminos salientes, que en el caso más simple corresponden a garras.

2.1. Reducción a concatenaciones de caminos salientes

En esta sección probaremos una generalización del siguiente lema:

Lema 2.3 (Lema 1.3, [6]) *Sean P un camino saliente de orden n_1, Q un camino entrante de orden n_2, T un torneo de orden al menos $n_1 + n_2$ y x un* *vértice de T. Si x es origen de P y de Q en T, entonces x es origen de la concatenación $P \vee Q$ en T.*

Notación 2.4 *Sea R una concatenación de caminos con origen x. Denotamos por $^*R$ al digrafo $R - x$.*

Definición 2.5 *Un camino es **casi-ascendente** si $x_1 \leftarrow x_2$ y $x_i \rightarrow x_{i+1}$ para cualquier $2 \leq i \leq n-1$.*

Lema 2.6 *Sean R_1 una concatenación de orden n_1 de caminos salientes, R_2 una concatenación de orden n_2 de caminos entrantes y T un torneo de orden al menos $n_1 + n_2$. Si x es origen de R_1 y de R_2 en T, entonces x es origen de $R_1 \vee R_2$ en T.*

Demostración: Sea $R_1 := \bigvee_{i=1}^{l} P_i$ y $R_2 := \bigvee_{j=1}^{k} Q_j$. Por dualidad, podemos suponer que $d^-(x) \geq n_2$. Probaremos por inducción en k, el número de caminos de R_2, que cualquier origen x de R_1 en T tal que $d^-(x) \geq n_2$ es origen de $R_1 \vee R_2$.

- Si $k = 1$ entonces $R_2 = Q$. Probaremos el resultado por inducción en l, el número de caminos de R_1.
  - Si $l = 1$, por el Lema 2.3 obtenemos el resultado.
  - Si $l > 1$, definimos $q_i := |N^-(x) \cap P_i|$, $q := |N^-(x) \cap (T - R_1)|$ y $R_1' := \bigvee_{i=1}^{l-1} P_i$.
    - Si $q + q_1 + q_2 + \cdots + q_{l-1} \geq |Q|$, entonces $d^-_{T-^*P_l}(x) \geq |Q|$. Por tanto, x es origen de $R_1' \vee Q$ en $T -^* P_l$ por hipótesis de inducción. Así que x es origen de $R_1 \vee Q$. Podemos suponer, por lo tanto, que $q_l \neq 0$.
    - Si $b_1(Q) \geq 2$, sea Q' un camino entrante dirigido de longitud $q+q_1+q_2+\cdots+q_{l-1}$. Claramente, x es origen de Q' en $T -^* P_l$, porque su grado de entrada ($d^-(x)$) es $q + q_1 + q_2 + \cdots + q_{l-1}$. Por hipótesis de inducción, en $T -^* P_l$, x es origen de $R_1' \vee Q'$. Por tanto, en $T -^* R_1'$, tenemos $d^-(x) \geq 2$ (un vecino entrante en $^*Q'$ y uno en $N^-(x) \cap P_l$) y $s^-(x) \geq q + q_1 + q_2 + \cdots + q_{l-1} + q_l \geq n_2$. Por tanto, por el Corolario 1.48, x es origen de Q en $T -^* R_1'$. Y como x es origen de P_l, por el Lema 2.3, x es origen de $P_l \vee Q$. Por tanto, x es origen de $R_1 \vee Q$ en T.
    - Si $b_1(Q) = 1$, sea Q' un camino casi-ascendente de longitud $q+q_1+q_2+\cdots+q_{l-1}$. Por hipótesis de inducción, en $T -^* P_l$, x es origen de $R' \vee Q'$. Por tanto, en $T -^* R_1'$, tenemos $d^-(x) \geq 2$

y $s^+(N^-(x)) \geq q + q_1 + q_2 + \cdots + q_{l-1} + q_l - 1 \geq n_2 - 1$. Así, por el Corolario 1.48, x es origen de Q en $T -^* R_1'$ y, como x es origen de P_l, por el Corolario 1.48, x es origen de $P_l \vee Q$. Luego, x es origen de $R_1 \vee Q$ en T.

- Si $k \geq 2$, sea $R_2' := \bigvee_{j=1}^{k-1} Q_j$. Por el caso anterior, x es origen de $R_1 \vee Q_k$ en T. En $T -^* Q_k$, x es origen de R_1 y $d^-(x) \geq |R_2| - |^*Q_k| = |R_2'|$. Así, por hipótesis de inducción, x es origen de $R_1 \vee R_2'$ en $T -^* Q_k$. Luego, x es origen de $R_1 \vee R_2$ en T.

□

Aplicando este lema, probaremos el siguiente lema, que nos será de gran utilidad.

Lema 2.7 *Sean R_1 una concatenación de orden n_1 de caminos salientes tal que todo torneo de orden $f_1(n_1)$ contiene a_1 orígenes de R_1 y R_2 una concatenación de orden n_2 de caminos entrantes tal que todo torneo de orden $f_2(n_2)$ contiene a_2 orígenes de R_2. Se tiene que, $R = R_1 \vee R_2$ es m-inevitable, donde $m = max\{f_1(n_1) + f_2(n_2) - a_1 - a_2 + 1; n_1 + n_2\}$.*
En particular, si R_1 es $(n_1 + l_1)$-inevitable y R_2 es $(n_2 + l_2)$-inevitable con $l_1 + l_2 \geq 1$, entonces R es $(n_1 + n_2 + l_1 + l_2 - 1)$-inevitable.

Demostración: Consideramos T un torneo de orden m.

Sea O_1 el conjunto de vértices de T que son orígenes de R_1 en T. Supongamos, por reducción al absurdo, que $|O_1| < m - f_1(n_1) + a_1$ y tomamos $k = |T - O_1| - f(n_1) + a_1$. Sea O_2 un subconjunto de $a_1 - k$ vértices de O_1 si $k < a_1$ y el conjunto vacío, en otro caso. Observemos que $|O_2| < a_1$ si $k \geq 1$. Ahora en $T - (O_1 - O_2)$ hay al menos a_1 orígenes de R_1. Así, uno de ellos no está en O_2 y, por lo tanto, no está en O_1. Esto contradice la definición de O_1.

Así que hay $m - f_1(n_1) + a_1$ orígenes de R_1 en T. Del mismo modo, hay $m - f_2(n_2) + a_2$ orígenes de R_2 en T. Si $m \geq f_1(n_1) + f_2(n_2) - a_1 - a_2 + 1$, hay un vértice x que es origen de R_1 y de R_2. Por el Lema 2.6, si $m \geq n_1 + n_2$, x es origen de $R_1 \vee R_2$ en T. □

Este lema nos permite limitar nuestro estudio a concatenaciones de caminos salientes. En efecto, si probamos que cada concatenación de orden n_1 de k_1 caminos salientes es $(n_1 + l(k_1))$-inevitable, para cualquier función l, por dualidad tendremos que, toda concatenación de orden n_2 de k_2 caminos entrantes es $(n_2+l(k_2))$-inevitable. Por el Lema 2.7, la concatenación de orden n de k_1 caminos salientes y k_2 caminos entrantes es $(n+l(k_1)+l(k_2))$-inevitable.

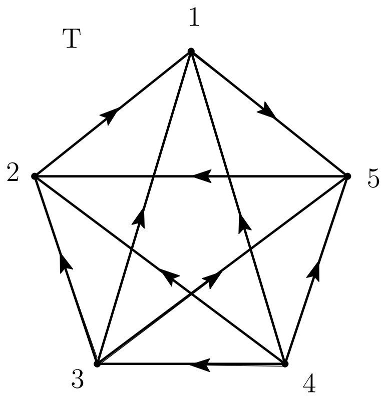
Del Lema 2.7 se deducen directamente los siguientes corolarios:

Corolario 2.8 *La concatenación de orden n de dos caminos salientes y un camino entrante es $(n+1)$-inevitable.*

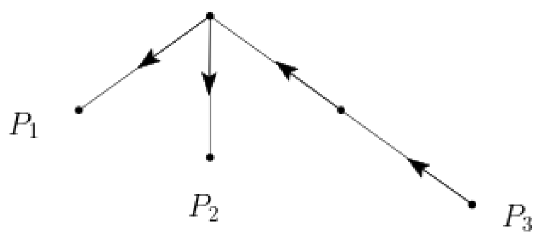
Demostración: Sea $R = P_1 \vee P_2 \vee P_3$ con P_1 y P_2 dos caminos salientes de orden n_1 y n_2 y P_3 un camino entrante de orden n_3. El Corolario 1.47 establece que en cada torneo de orden $n_3 + 1$ hay dos orígenes de P_3. Por otra parte, $P_1 \vee P_2$ es un camino de orden $n_1 + n_2 - 1$ y, por tanto, es $(n_1 + n_2)$-inevitable por el Corolario 1.47, en otras palabras, hay un origen de $P_1 \vee P_2$ en todo torneo de orden $n_1 + n_2$. Finalmente, del Lema 2.7 se deduce el resultado. $\square$

La cota $n+1$ de este lema es la mejor posible: un torneo reducible de orden n en el que la componente fuerte maximal es un 3-ciclo, no contiene la concatenación $P_1 \vee P_2 \vee P_3$, donde P_1 y P_2 son caminos salientes de longitud 1 y P_3 un camino entrante dirigido de longitud $n-3$.

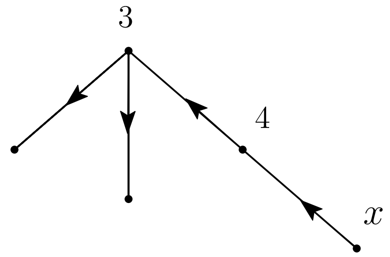
Ejemplo 2.9 *Sea T el siguiente 5-torneo*



Su componente fuerte maximal es el 3-ciclo definido por los vértices $C = \{1, 2, 5\}$ ya que $T - C \longrightarrow C$. Consideremos la concatenación $P_1 \vee P_2 \vee P_3$, donde P_1 y P_2 son caminos salientes de longitud 1 y P_3 un camino entrante dirigido de longitud 2.



Observamos que los vértices 1, 2 y 5 no pueden ser el origen de la concatenación, ya que no hay dos caminos salientes con origen en uno de ellos. Si *consideramos el vértice 3 como el origen de la concatenación, el único camino entrante que tiene es el que proviene del vértice 4. Por tanto, podemos identificar el siguiente vértice del camino entrante con el vértice 4. Observamos que dicho vértice no tiene ningún camino entrante, por lo que no podemos identificar el siguiente vértice, llamémoslo x, con ninguno.*



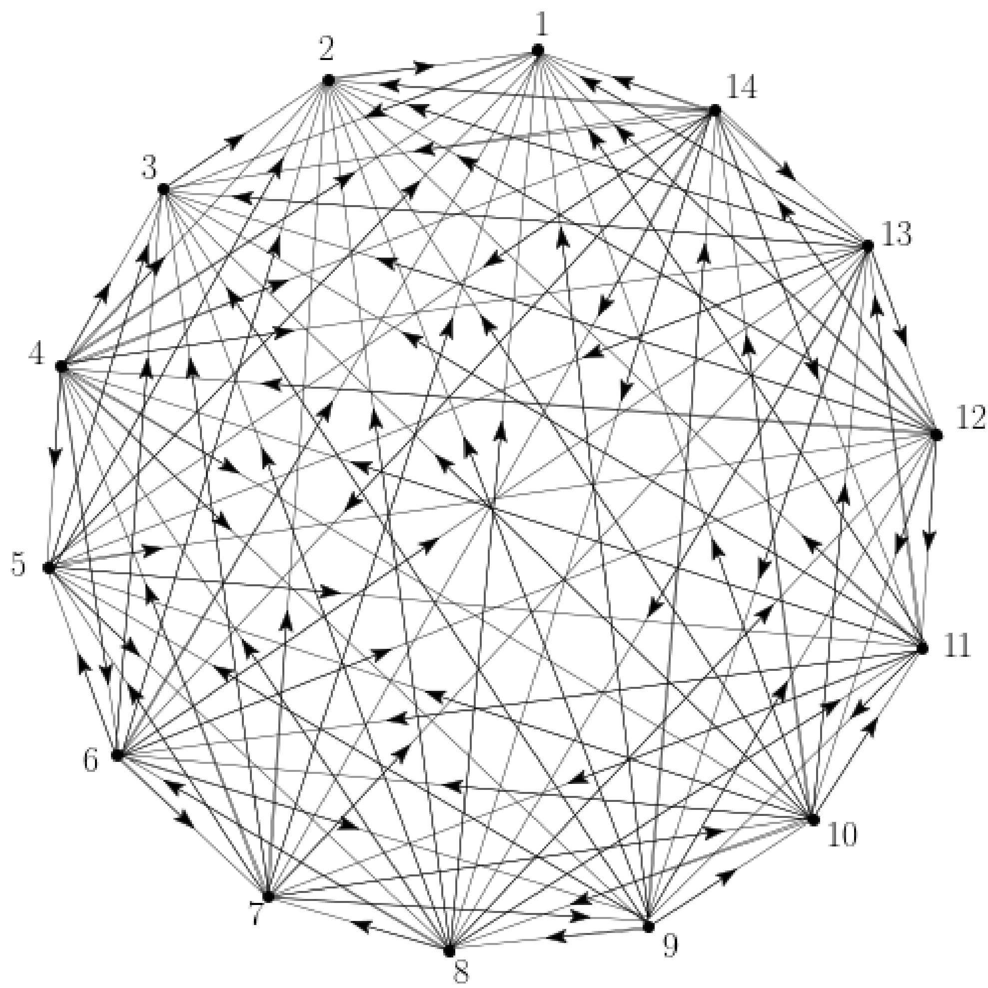
Tampoco podemos considerar el vértice 4 como origen de la concatenación, ya que no tiene ningún camino entrante. Por tanto, T no contiene la concatenación $P_1 \vee P_2 \vee P_3$.

Corolario 2.10 *Una concatenación de orden $n \geq 14$ de dos caminos salientes y dos caminos entrantes es (n+1)-inevitable.*

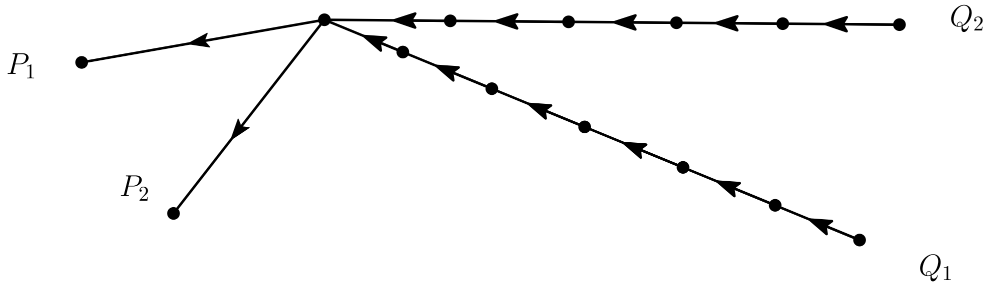
Demostración: Sea $R = P_1 \vee P_2 \vee Q_1 \vee Q_2$ con P_1 y P_2 dos caminos salientes y Q_1 y Q_2 dos caminos entrantes. Sea $R_1 = P_1 \vee P_2$ y $R_2 = Q_1 \vee Q_2$ y sean n_1 el orden de R_1 y n_2 el orden de R_2. Tenemos $n_1 + n_2 = n+1$. Al ser $n \geq 14$ y por dualidad, podemos suponer que $n_1 \geq 8$. Entonces, por el Teorema 1.49, R_1 es n_1-inevitable, y por el Corolario 1.47, R_2 es $(n_2 + 1)$-inevitable. Aplicando el Lema 2.7 se deduce el resultado. □

La cota $n + 1$ de este lema es la mejor posible: un torneo reducible de orden n en el que la componente fuerte maximal es un 3-ciclo, no contiene la concatenación $P_1 \vee P_2 \vee Q_1 \vee Q_2$, donde P_1 y P_2 son dos caminos salientes de longitud 1 y Q_1 y Q_2 son dos caminos entrantes dirigidos de orden n_3 y n_4, respectivamente, con $n_3 + n_4 = n - 1$.

Ejemplo 2.11 *Consideremos el siguiente 14-torneo*



Su componente fuerte maximal está formada por el conjunto de vértices $C = \{1, 2, 3\}$ que forma un 3-ciclo. Sea la concatenación $P_1 \vee P_2 \vee Q_1 \vee Q_2$, donde P_1 y P_2 son dos caminos salientes de longitud 1 y Q_1 y Q_2 dos caminos entrantes de órdenes 7 y 6, respectivamente, observemos que la concatenación no está contenida en el torneo T.



Observamos que los vértices 1, 2 y 3 no pueden ser el origen de la concatenación, ya que no tienen dos caminos salientes. Veamos que tampoco es *posible para cualquier otro vértice. Si consideramos, por ejemplo, el vértice 4 como origen de la concatenación, los vértices 1, 2 y 3 pueden identificarse como los vértices de P_1 y P_2 pero no como vértices de los caminos entrantes ya que ninguno de ellos tiene un camino saliente hacia los demás vértices. Por tanto, nos queda por identificar 11 vértices de los caminos entrantes y sólo tenemos 10 vértices para asignar. Deducimos así que la concatenación no está contenida en el torneo T.*

Definición 2.12 *Una **garra de grado d** es una concatenación de d caminos donde todos son caminos salientes dirigidos. Una **antigarra de grado d** es el dual de una garra de grado d, es decir, la concatenación de d caminos entrantes dirigidos.*

Corolario 2.13 *Una concatenación de orden n de una garra de orden n_1 y grado a lo sumo $\frac{19}{50}n_1$ y de un antigarra de orden n_2 y grado a lo sumo $\frac{19}{50}n_2$, es (n+1)-inevitable.*

La prueba del corolario anterior es consecuencia inmediata del Teorema 2.1.

2.2. Concatenaciones de caminos salientes

En primer lugar, consideraremos concatenaciones de caminos salientes con primeros bloques de longitud al menos dos. Seguidamente, veremos las concatenaciones de caminos salientes con primeros bloques de longitud uno. Por último, veremos el caso general, que está compuesto por concatenaciones de caminos con primeros bloques de diferentes longitudes.

2.2.1. Concatenaciones de caminos salientes con primeros bloques de longitud al menos dos

Empezaremos estudiando las concatenaciones de caminos salientes con primeros bloques de longitud mayor o igual que 2. Para ello, veremos primero algunas nociones necesarias.

Definición 2.14 *El **tenedor** $F = [x, y, \{u, v\}]$ es el digrafo definido por $V(F) = \{x, y, u, v\}$ y $E(F) = \{(x, y), (y, u), (y, v)\}$. Llamamos a x el **origen** de F y a u y v los llamamos **puntas** de F. La concatenación de tenedores se define de forma similar a la concatenación de caminos.*

Definición 2.15 *Un árbol es **casi-adecuado** (resp. **adecuado**) si es una concatenación de k_1 tenedores, k_2 caminos salientes dirigidos de longitud 2 y k_3 caminos salientes dirigidos de longitud 1 (resp. con $k_1 \leq k_3$)*

Teorema 2.16 (Teorema 3, [8]) *Sea T un torneo. Cada vértice con grado de salida máximo es origen de un árbol generador casi-adecuado.*

Definición 2.17 *Una **arborescencia** es un árbol dirigido tal que un único vértice, llamado raíz, tiene grado de entrada cero y los restantes vértices tienen grado de entrada 1. Una **2-arborescencia** es una arborescencia en la que cada vértice distinto a la raíz tiene grado de salida a lo sumo 2. Podemos definir la **profundidad** de un vértice x en una arborescencia como la longitud del camino que tiene como origen la raíz y vértice final x.*

El Teorema 2.16 es equivalente al Teorema de Lu en términos de arborescencia:

Teorema 2.18 *(Teorema de Lu) En todo torneo, cada vértice con grado de salida máximo es la raíz de una 2-arborescencia generadora de profundidad a lo sumo dos.*

Demostración: Sea T un torneo y v un vértice con grado de salida máximo en T. Sea $Y := N^+(v)$ y $X := V \backslash (Y \cup \{v\})$, denotamos por $B(X, Y)$ el grafo bipartito definido por:

"$x \in X$ es adyacente a $y \in Y$ si y sólo si y domina a x en T."

Para $S \subseteq X$, denotamos por $N(S)$ el conjunto de vecinos de S en $B(X, Y)$. Una variante del Teorema de Hall establece que, T tiene una 2-arborescencia generadora con raíz en v, de profundidad a lo sumo 2, si y solo si, $|N(S)| \geq \frac{1}{2}|S|$, para todo $S \subseteq X$. Verifiquemos esta condición.

Sea $S \subseteq X$. Algún vértice $x \in S$ domina al menos $\frac{1}{2}(|S| - 1)$ vértices de S. Sin embargo, x domina a v. Por otro lado, por la elección de v, x no domina en T a más de $d^+(v) = |Y|$ vértices en total. Luego, x domina a lo sumo $|Y| - \frac{1}{2}(|S| + 1)$ vértices de Y, y por tanto es dominado por al menos $\frac{1}{2}(|S| + 1)$ vértices de Y. Por lo tanto, $|N(S)| \geq \frac{1}{2}(|S| + 1) \geq \frac{1}{2}|S|$. $\square$

Observación 2.19 *(Teorema de Hall) Sea $G = (V, E)$ un grafo bipartito en X e Y, existe un emparejamiento completo de X en Y si y solo si $|N(S)| \geq |S|$.*

Lema 2.20 *Sea $R = \bigvee_{i=1}^{k} P_i$ una concatenación de orden n de $k \geq 2$ caminos salientes con primeros bloques de longitud al menos 2 y T un torneo de orden $n + k - 1$. Todo vértice que sea origen de un árbol generador adecuado es origen de R en T.*

En particular, todo vértice con grado de salida máximo en T es origen de R en T.

Demostración: Probaremos el resultado por inducción en k. Sea A un árbol adecuado generador con origen x, que es, la unión de k_1 tenedores $F_1, \cdots, F_{k_1}$, k_2 caminos salientes dirigidos de longitud dos $R_1, \cdots, R_{k_2}$ y k_3 caminos salientes dirigidos de longitud uno $Q_1, \cdots, Q_{k_3}$. Pretendemos encontrar un subtorneo T_1 de T tal que $|T_1| = |P_1| + 1$, x sea origen de P_1 en T y el árbol $A_2 = A - V_1$ sea adecuado y genere $T - V_1$, donde V_1 es el conjunto de vértices de $T_1 - x$. Entonces, por hipótesis de inducción, x es origen de $\bigvee_{i=1}^{k} P_i$ en $T - V_1$, así que x es origen de R en T.

Sea T_1 el subtorneo de T definido como sigue:

- Si $3k_1 + 1 \geq |P_1|$, sea i el menor entero tal que $3i + 1 \geq |P_1|$.
  - Si $3i + 1 = |P_1| + 1$, $T_1 := T[F_1, F_2, \cdots, F_i]$
  - Si $3i + 1 = |P_1|$, $T_1 := T[F_1, F_2, \cdots, F_i, Q_{k_3}]$
  - Si $3i + 1 = |P_1| + 2$, $T_1 := T[F_1, F_2, \cdots, F_{i-1}, Q_{k_3}, y]$, con y un punto de F_i.
- Si no, $3k_1 + 1 < |P_1|$.
  - Si $3k_1 + 2k_2 + 1 \geq |P_1|$, sea i el menor entero tal que $3k_1 + 2i + 1 \geq |P_1|$.
    - Si $3k_1 + 2i + 1 = |P_1| + 1$, $T_1 := T[F_1, \cdots, F_{k_1}, R_1, \cdots, R_i]$.
    - Si $3k_1 + 2i + 1 = |P_1|$, $T_1 := T[F_1, F_2, \cdots, F_{k_1}, R_1, \cdots, R_i, Q_{k_3}]$.
  - Si no, $3k_1 + 2k_2 + 1 < |P_1|$. Sea i el entero tal que $3k_1 + 2k_2 + i = |P_1|$, $T_1 := T[F_1, F_2, \cdots, F_{k_1}, R_1, \cdots, R_{k_2}, Q_1, \cdots, Q_i]$.

Ahora, sea A' el árbol inducido sobre A por los vértices de $V(T - T_1) \cup \{x\}$. Es fácil comprobar que A' es un árbol generador adecuado de orden $|\bigvee_{j=2}^{k} P_j| + k - 2$.
Sin embargo, tenemos $|T_1| = |P_1| + 1$ y $s_{T_1}^{+}(x) \geq |P_1|$.

Si $|P_1| \geq 4$, $d_{T_1}^{+} \geq 2$ y por el Corolario 1.48 , x es origen de P_1 en T_1.

Si $|P_1| = 3$, P_1 es el camino saliente dirigido de longitud 2 y x (el cuál es un generador externo de T_1) es origen de P_1 en T_1.

Si $k = 2$, $T_2 = T -^{*} P_1$. Tenemos $|T_2| = |P_2| + 1$.

Si $|P_2| \geq 4$, entonces $d_{T_2}^{+}(x) \geq 2$ y por el Corolario 1.48, x es origen de P_2 en T_2.

Si $|P_2| = 3$, P_1 es el camino saliente dirigido de longitud 2 y x es origen de P_2 en T_2. Por tanto, x es origen de $P_1 \vee P_2$ en T.

Si $k \geq 3$, por la hipótesis de inducción, x es origen de $\bigvee_{j=1}^{k-1} P_j$ en $T[A']$. En consecuencia, x es origen de R. $\square$

El lema anterior, junto con el Lema 2.7, dan lugar al siguiente corolario.

Corolario 2.21 *Una concatenación de orden n de k caminos con los primeros bloques de longitud al menos dos es $(n+k-1)$-inevitable.*

Podemos probar el siguiente lema con un procedimiento similar al de la demostración del Lema 2.20.

Lema 2.22 *Sea $R = \bigvee_{i=1}^{k} P_i$ una concatenación de orden n de $k \geq 2$ caminos salientes con primeros bloques de longitud al menos dos y T un torneo de orden $n+2k-2$. Todo origen de un árbol generador casi-adecuado es origen de R en T.*

2.2.2. Concatenaciones de caminos salientes con primeros bloques de longitud uno

A continuación, estudiaremos las concatenaciones de caminos salientes con primeros bloques de longitud uno, usando la función $h(k)$.

Definición 2.23 *Definimos la función $h(k) := \frac{1}{2}(k^2+k+2)$.*

Observación 2.24 *La función h satisface la siguiente igualdad:*

$$h(k) = 2h(k-1) - h(k-2) + 1$$

Observamos que $h(1) = 2$ y $h(0) = 1$.

Lema 2.25 *Sea T un torneo de orden $n+h(k)-1$ y $P_1, P_2, \ldots, P_k$ k caminos de orden $n_1, n_2, \ldots, n_k$, respectivamente, tal que $\sum_{i=1}^{k} n_i = n+k-1$ y $b_1(P_i) = 1$, $1 \leq i \leq k$. Sea K un conjunto de $h(k)$ vértices. Se verifica que existe un origen en K de $R = \bigvee_{i=1}^{k} P_i$ en T tal que $|K \backslash V(R)| \geq h(k-1)-1$.*

Demostración: Por inducción en k.

- Si $k=1$, el resultado se tiene por el Corolario 1.47.
- Si $k \geq 2$, sea $R' = \bigvee_{i=1}^{k-1} P_i$. Tenemos $R = R' \vee P_k$. Sea (A_1, A_2) una partición de $V(T-K)$ tal que $|A_1| = \sum_{i=1}^{k-1}(n_i - 1)$ y $|A_2| = n_k - 1$. Sea K_1 un subconjunto de $h(k-1)$ vértices de K.

  Por la hipótesis de inducción, hay un vértice x de K_1 que es origen de R' en $T[K_1, A_1]$, con $K_3 := K_1 \backslash V(R')$ de tamaño al menos $h(k-2)-1$.

Sea $K_2 := K_3 \cup (K \backslash K_1)$. Como $h(k) = 2h(k-1) - h(k-2) + 1$, tenemos $|K_2| \geq h(k-1)$. Por lo tanto, por la hipótesis de inducción, hay un vértice y de K_2 que es origen de R' en $T[K_2, A_1]$ con $K_4 := K_2 \backslash V(R')$ de tamaño al menos $h(k-2) - 1$. Ahora, por el Teorema 1.45, en $T[K_1 \backslash K_3, y, A_1, A_2]$, x es origen de $R' \vee P_k = R$. Además, $K_2 \backslash \{y\} \subseteq K \backslash V(R)$, así que $|K \backslash V(R)| \geq h(k-1) - 1$. $\square$

2.2.3. Caso general

Por último, consideraremos las concatenaciones de caminos con primeros bloques de diferentes longitudes.

Lema 2.26 *Sea R una concatenación de orden n de $k \geq 2$ caminos salientes P_i con primeros bloques de longitud uno y un camino saliente Q con primer bloque de longitud al menos dos. Entonces R es ($n + 2h(k) - k - 1$)-inevitable.*

Demostración: Sea T un torneo de orden $n + 2h(k) - k - 1$. Sea R_1 la concatenación de $h(k)$ caminos salientes de longitud uno y $R_2 := R_1 \vee^* Q$. Tenemos que R_1 es $2h(k)$-inevitable.

Si $b_1(Q) \geq 2$, ${}^*Q$ es un camino saliente y, por el Corolario 1.47, en un torneo de orden $|Q|$ hay dos orígenes de ${}^*Q$. Por lo tanto, por el Lema 2.7, R_2 es ($|{}^*Q| + 2h(k) - 1$)-inevitable.

Si $n + 2h(k) - k - 1 \geq |Q| + 2h(k)$, hay un origen x de R_2 en T. Sea $T' := T -^* Q$ y $R' := \bigvee_{i=1}^{k} P_i$, y sean $x_1, \ldots, x_{h(k)}$ los vértices de $R_2 -^* Q$. Tenemos $|T'| \geq |R'| + h(k) - 1$, así que por el Lema 2.25, uno de los x_i, digamos x_1, es origen de R' en T'.
Por tanto, x_1 es origen de $R' \vee (x, {}^* Q) = R$ en T. $\square$

Proposición 2.27 *Si x es origen de un árbol casi-adecuado de orden n en T entonces, para todo $y \in V(T) \backslash \{x\}$, x es origen de un árbol casi-adecuado de orden $n - 3$ en $T - y$.*

Demostración: Sea A un árbol adecuado de orden n en T y $S := N_A^+(y) \cup \{y\}$. S tiene cardinal a lo sumo tres. Por tanto, $T - S$ es un árbol adecuado de orden $n - 3$ en $T - y$ con origen x. $\square$

Lema 2.28 *Sea R una concatenación de orden n de k_1 caminos salientes P_i, $1 \leq i \leq k_1$, con primeros bloques de longitud uno y $k_2 \geq 2$ caminos salientes con primeros bloques de longitud al menos dos. Entonces R es ($n + 3h(k_1) + 2k_2 - 5$)-inevitable.*

Demostración: Sea $R_1 := \bigvee_{i=1}^{k_1} P_i$ y $R_2 := \bigvee_{i=1}^{k_2} Q_i$, y n_1 y n_2 sus órdenes respectivos. Sea T un torneo de orden $n + 3h(k_1) + 2k_2 - 5$, T' un subtorneo de T de orden $n_2 + 3h(k_1) + 2k_2 - 5$ y T'' el torneo $T - T'$. Consideremos los vértices x_i, $1 \leq i \leq h(k_1)$, tal que x_i es origen de un árbol generador casi-adecuado A_i en $T - [x_1, \cdots, x_{i-1}]$.

Aplicando la Proposición 2.27, x_i es origen de un árbol casi-adecuado de orden al menos $(n_2 + 2k_2 - 2)$ en $T' - [\bigcup_{j \neq i} x_j]$. Por tanto, por el Lema 2.22, x_i es un origen de R_2 en $T' - [\bigcup_{j \neq i} x_j]$. Además, $T_1 = T[V(T''), \bigcup_{i=1}^{h(k_1)} x_i]$ tiene orden $n_1 + h(k) - 1$.
Por tanto, por el Lema 2.25, uno de los x_i, digamos x_1, es origen de R_1 en T_1. Luego, x_1 es origen de R en T. $\square$

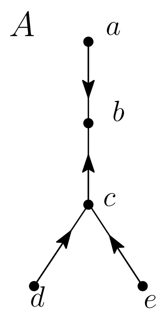
Con la ayuda de los cuatro lemas anteriores, podemos probar el siguiente resultado general para cualquier concatenación de caminos salientes:

Teorema 2.29 *Una concatenación de orden n de k caminos salientes es $(n + 3h(k-2) - 1)$-inevitable.*

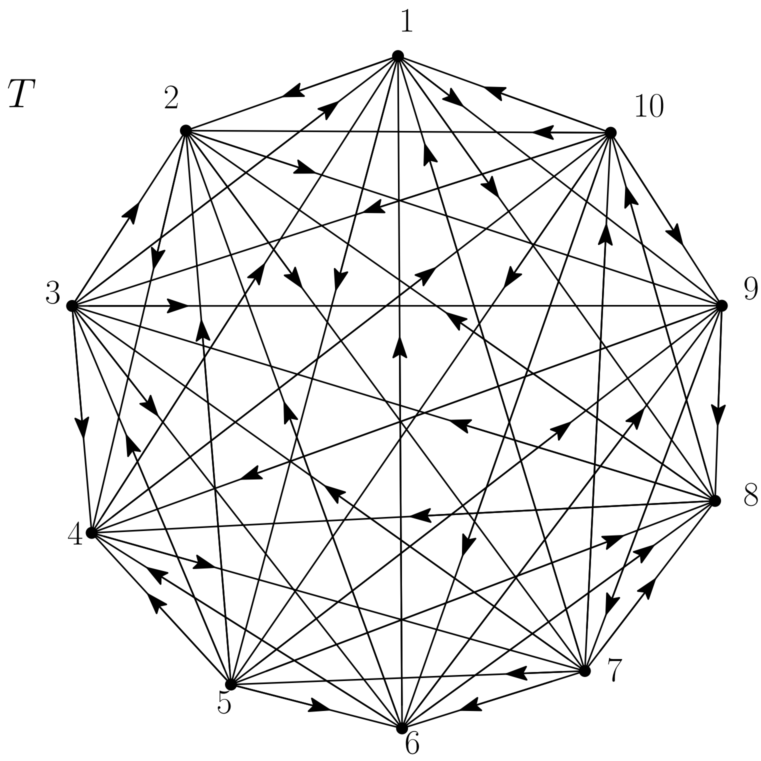
Si $h(k-2) = \frac{1}{2}(k^2 - 3k) + 2$, este teorema, junto con el Lema 2.7, da lugar al siguiente resultado:

Teorema 2.30 *Una concatenación de orden n de $k \geq 3$ caminos es $(n + \frac{3}{2}(k^2 - 3k) + 5)$-inevitable. En particular, un árbol con tres hojas es (n+5)-inevitable.*

Ejemplo 2.31 *Consideremos el siguiente árbol A con tres hojas, de orden $n = 5$.*



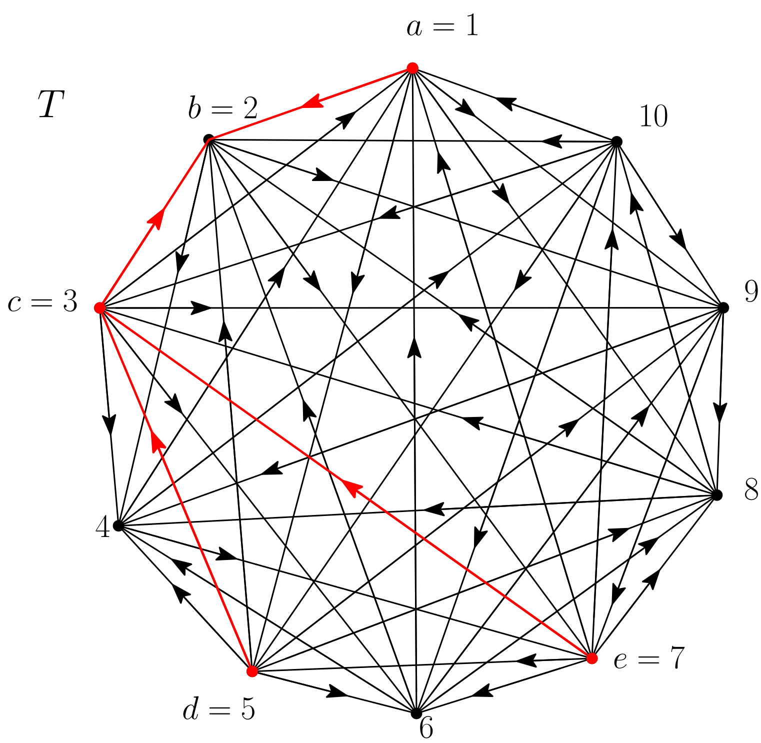
Por el teorema anterior, es (n+5)-inevitable y vamos a mostrar que es posible encontrarlo en un 10-torneo concreto. Consideraremos el siguiente torneo T:



Tendremos que comprobar que A está contenido como subgrafo en el torneo T. Si identificamos, por ejemplo, el vértice 1 de T con el vértice a de A, tendremos que elegir un vértice de $N^{+}(1) = \{2, 5, 8, 9\}$ para identificarlo con el vértice b de A. Probaremos a tomar b como el vértice 2 de T. De igual forma, deberemos escoger un vértice de $N^{-}(2) = \{1, 3, 5, 6, 8, 10\}$ para tomarlo como c, pero el 1 ya está identificado con a, así que no podremos elegirlo. Escogeremos el vértice 3 por ejemplo. Por último, para identificar d y e tendremos que elegir dos vértices de $N^{-}(3) = \{5, 7, 8, 10\}$. Identificaremos d con 5 y c con 7. Por tanto, nos quedará:

$$a = 1, b = 2, c = 3, d = 5, e = 7$$

Representaremos el árbol A, en rojo, contenido como subgrafo del torneo T:


T
a = 1
b = 2
c = 3
4
d = 5
6
e = 7
8
9
10

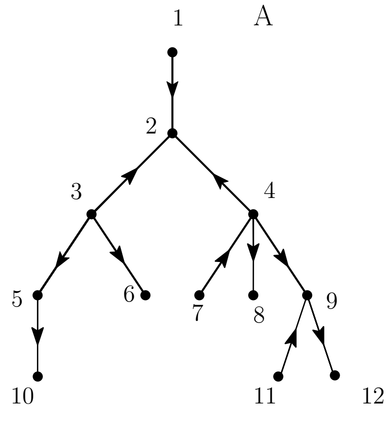
Capítulo 3

El método de Häggkvist y Thomason

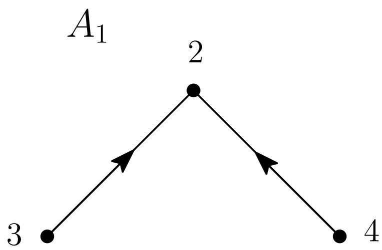
El enfoque de Häggkvist y Thomason pretende establecer una cota superior en $f(n)$ por inducción. Su método para encontrar un árbol A en un torneo T consiste, en primer lugar, en encontrar el p-corazón $h_p(A)$ de A en el subtorneo inducido por los vértices con grados de salida y de entrada suficientemente grandes. En segundo lugar, por hipótesis de inducción, se encontrarían las componentes de $A - h_p(A)$ en el subtorneo correspondiente, estas componentes están unidas en T a las hojas de $h_p(A)$ formando A.

Definición 3.1 *Sea A_1 un subárbol de un árbol A. Denotamos por $A^+(A_1)$ (resp. $A^-(A_1)$), el bosque unión de las componentes del bosque $A - A_1$ que está unido positivamente (resp. negativamente) a A_1, i.e. el conjunto de los subárboles maximales A_2 de $A - A_1$ para el cual existe $x \in A_1$ e $y \in A_2$ tal que x domina a (resp. es dominado por) y en A.*

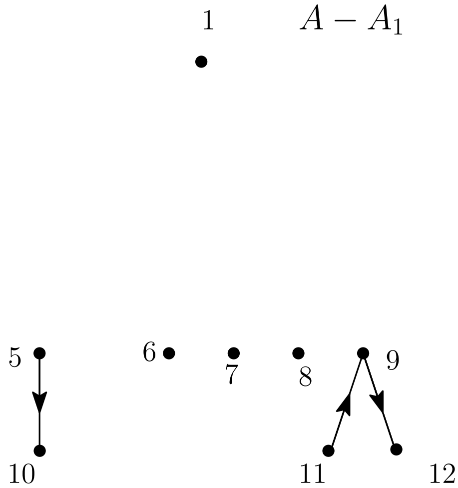
Ejemplo 3.2 *Consideremos el árbol A representado a continuación:*



Si consideramos el subárbol A_1 formado por las aristas $(3,2)$ *y* $(4,2)$.



Tenemos que $A - A_1$ es lo siguiente:

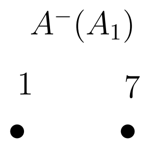


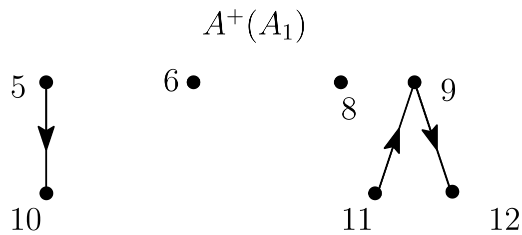
Sabemos que:

- $A^+(A_1)$*: bosque unión de los A_2 tales que existe $x \in A_1$ e $y \in A_2$ tal que $x \longrightarrow y$.*

- $A^-(A_1)$*: bosque unión de los A_2 tales que existe $x \in A_1$ e $y \in A_2$ tal que $y \longrightarrow x$.*

Luego, $A^-(A_1)$ es el bosque formado por la unión de los vértices 1 y 7, ya que están unidos negativamente a A_1. $A^+(A_1)$ es el resto de las componentes de $A - A_1$, ya que están unidas positivamente a A_1:

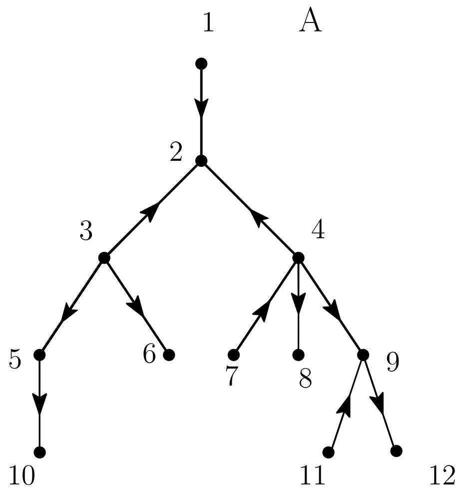




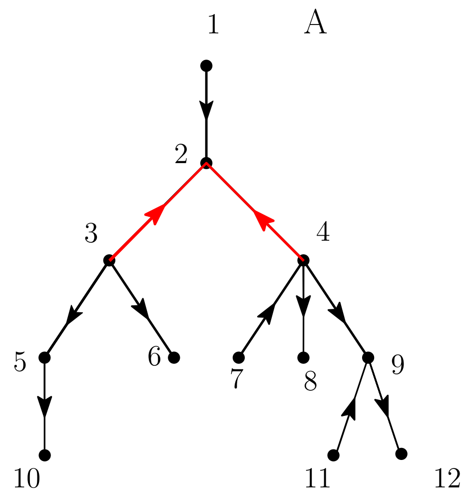
Definición 3.3 *Sea p un entero mayor que dos. El* ***p-corazón*** $h_p(A)$ *de un árbol A de orden n es el subárbol generado por aquellas aristas $e \in E(A)$ para las que cada una de las dos componentes de $A-e$ tienen orden al menos n/p.*

Observación 3.4 *Si no existen tales aristas, $h_p(A)$ denotará el único vértice de A cuya eliminación deja componentes de orden menor que n/p. Nótese que $h_p(A)$ es conexo, por lo que es un árbol. Además, $h_p(A)$ tiene a lo sumo $p-1$ hojas. De hecho, la eliminación en A de una arista de $h_p(A)$ adyacente a una hoja l de $h_p(A)$ deja una componente de orden al menos n/p cuya intersección con $h_p(A)$ es l. Por tanto, si $h_p(A)$ tiene k hojas, $h_p(A)$ es de orden a lo sumo $n - k\lceil n/p \rceil + k$. Obsérvese además, que todas las componentes de $A - h_p(A)$ son de orden menor que n/p, esto es, de orden a lo sumo $\lceil n/p \rceil - 1$.*

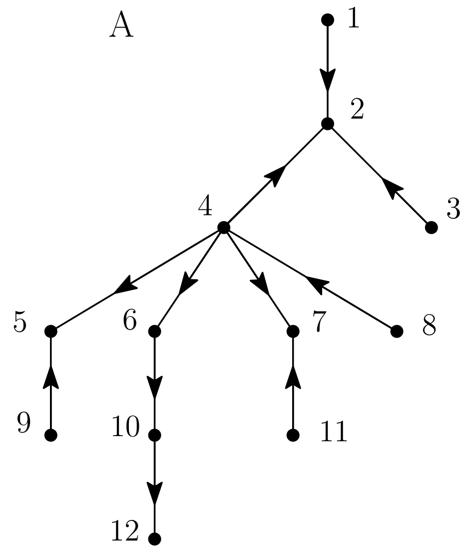
Ejemplos 3.5 *1. Consideremos el árbol A del ejemplo anterior:*



Tenemos que A es un árbol de orden $n = 12$. Si queremos encontrar el 3-corazón, debemos considerar las aristas $e \in E(A)$ para las que ambas componentes de $A-e$ tengan orden al menos 4. Las aristas que cumplen esta condición son (3,2) y (4,2). Luego, el 3-corazón de A, $h_3(A)$, lo representamos en rojo:



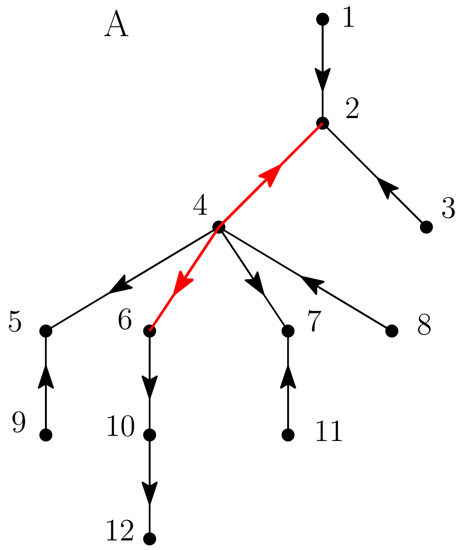
2. *Veamos ahora un árbol donde no exista p-corazón. Consideremos el siguiente árbol A:*



Tenemos que A es un árbol de orden $n = 12$. Si queremos encontrar el 3-corazón, debemos considerar las aristas $e \in E(A)$ para las que ambas componentes de $A - e$ tengan orden al menos 4. Observamos que ninguna arista cumple esta condición. Luego, el 3-corazón de A denotará el único vértice cuya eliminación deja componentes de orden menor que $n/p = 12/3 = 4$. Por tanto, el 3-corazón será el vértice 4.

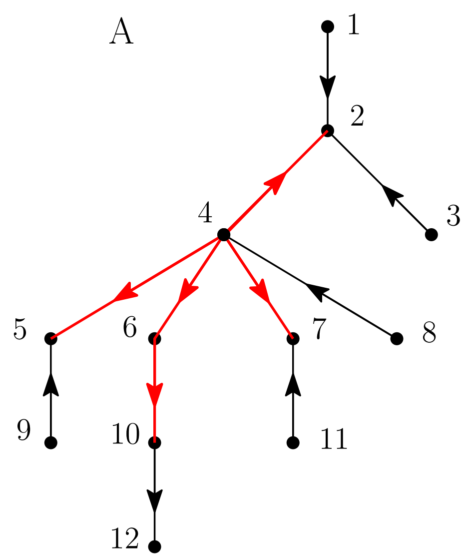
Veamos ahora si existe el 4-corazón. Debemos considerar las aristas $e \in E(A)$ para las que ambas componentes de $A - e$ tengan orden al menos $n/p = 12/4 = 3$. Las aristas que cumplen esta condición son

(4,2) y (4,6). Luego, el 4-corazón de A, $h_4(A)$, lo representamos en rojo:



Para calcular el 5-corazón, debemos considerar las aristas $e \in E(A)$ para las que ambas componentes de $A-e$ tengan orden al menos $n/p = 12/5 = 2'4$, es decir, de orden al menos 3. Por lo que tenemos que el 5-corazón coincide con el 4-corazón.

Calculemos su 6-corazón. Para ello, tenemos que considerar las aristas $e \in E(A)$ para las que ambas componentes de $A-e$ tengan orden al menos $n/p = 12/6 = 2$. Las aristas que cumplen esta condición son (4,2), (4,5), (4,6), (6,10) y (4,7). Luego, el 6-corazón de A, $h_6(A)$, lo representamos en rojo:



Observación 3.6 *Podemos observar en los ejemplos anteriores que $h_p(A)$ tiene a lo sumo $p-1$ hojas.*

En el primer ejemplo, $h_3(A)$ tiene 2 hojas. En el segundo, $h_4(A)$ y $h_5(A)$ tienen 2 hojas, y $h_6(A)$ tiene 4 hojas.

Como el p-corazón tiene pocas hojas, el objetivo, siguiendo el enfoque de Häggkvist y Thomason, es encontrar funciones (pequeñas) $\alpha_k(n)$ tal que todo árbol de orden n con k hojas sea $\alpha_k(n)$-inevitable. Para garantizar que los vértices del torneo que constituyen el p-corazón tengan grados de entrada y de salida grandes, consideramos el siguiente resultado.

Proposición 3.7 *Sea T un torneo. A lo sumo $2k-1$ vértices de T tienen grado de salida menor que k.*

Demostración: Sea n el orden de T y supongamos que

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_{n-1} \leq s_n$$

es la sucesión de los grados de salida de los vértices de T.

Para cada $k \geq 1$, sea i_k el mayor i tal que $s_i < k$, tenemos que probar que $i_k \leq 2k-1$.

Por reducción al absurdo, supongamos que $i_k < 2k-1$, es decir; que existen al menos 2k vértices con grado de salida menor que k, o equivalentemente, con grado de salida menor o igual a $k-1$. Entonces tenemos que

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_{2k} \leq 2k(2k-1).$$

Por otra parte, aplicando el Teorema 1.27, tenemos que

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_{2k} \geq \binom{2k}{2} = k(2k-1).$$

Uniendo las dos desigualdades llegamos a una contradicción. Por tanto, $i_k \leq 2k-1$, como queríamos probar. $\square$

Supongamos que, para $2 \leq k \leq p$, existe una función $\alpha_k(n)$ tal que todo árbol con k hojas es $\alpha_k(n)$-inevitable. Supongamos también que cualquier árbol de orden $m < n$ es $\alpha(m)$-inevitable. Entonces pretendemos encontrar condiciones para $\alpha(n)$ que garanticen que los árboles de orden n sean $\alpha(n)$-inevitables.

Sea A un árbol de orden n, $h_p(A)$ su p-corazón y k el número de hojas de $h_p(A)$. El orden t de $h_p(A)$ es a lo sumo $n - k\lceil n/p \rceil + k$.

Sean a^+ y a^- los órdenes de $A^+(h_p(A))$ y $A^-(h_p(A))$. Por dualidad, podemos suponer que $a^+ \leq a^-$. Como $a^+ + a^- = n - t$, tenemos $a^+ \leq (n-t)/2$

Vamos a demostrar que podemos encontrar A en un torneo si y solo si encontramos $\alpha_k(t)$ vértices v tales que

$$d^+(v) \geq t - 1 + a^+ + \alpha(n/p) - n/p \tag{3.1}$$

y

$$d^-(v) \geq t - 1 + a^+ + a^- + \alpha(n/p) - n/p. \tag{3.2}$$

En el subtorneo inducido por los $\alpha_k(t)$ vértices que satisfacen las desigualdades de arriba, podemos encontrar $h_p(A)$. Sea $A_1^+, A_2^+, \cdots, A_r^+$ las componentes unidas positivamente a $h_p(A)$ y $a_1, a_2, \cdots, a_r$ los vértices de $h_p(A)$ que están unidos a ellas, respectivamente. Construiremos las componentes A_j^+ sucesivamente. Queremos encontrar A_j^+ en el subtorneo inducido por los $z \in N^+(a_j)$ que no están en el árbol ya construido: $h_p(A) \cup \bigcup_{1 \leq l < j} A_l^+$. Como $|A_j^+| < n/p < n$, por hipótesis de inducción, podemos encontrar A_j^+ en todo torneo de orden $\alpha(|A_j^+|)$. Para garantizar la existencia de un subárbol A_j^+, unido correctamente a $h_p(A)$, es suficiente que a_j tenga grado de salida al menos $t - 1 + \sum_{1 \leq l < j} |A_l^+| + \alpha(|A_j^+|)$. Lo que se obtiene de la condición (3.1), al ser $\sum_{1 \leq l \leq r} |A_l^+| = a^+$ y $|A_j^+| < n/p$.

Sea $A_1^-, A_2^-, \cdots, A_s^-$ las componentes unidas negativamente a $h_p(A)$ y $b_1, b_2, \cdots, b_s$ los vértices de $h_p(A)$ que están unidos a ellas, respectivamente. Construiremos las componentes A_m^- sucesivamente. Queremos encontrar A_m^- en el subtorneo inducido por los $z \in N^+(b_j)$ que no están en el árbol ya construido: $h_p(A) \cup \bigcup_{1 \leq l \leq r} A_l^+ \cup \bigcup_{1 \leq l < m} A_l^-$. Como $|A_m^-| < n/p < n$, por hipótesis de inducción, podemos encontrar A_m^- en todo torneo de orden $\alpha(|A_m^-|)$. Para garantizar la existencia de un subárbol A_m^-, unido correctamente a $h_p(A)$, es suficiente que b_j tenga grado de entrada al menos $t-1+a^+ + \sum_{1\leq l<m} |A_l^-| + \alpha(|A_m^-|)$. Lo que se obtiene de la condición (3.2), al ser $\sum_{1\leq l\leq s} |A_l^-| = a^-$ y $|A_m^-| < n/p$.

De acuerdo a la Proposición 3.7, hay $\alpha_k(t)$ vértices con grados de entrada y de salida verificando las condiciones (3.1) y (3.2) en todo torneo de orden $\alpha(n)$ tal que:

$$\alpha(n) \geq \alpha_k(t) + 4t - 5 - 4a^+ + 2a^- + 4\alpha(n/p) - 4n/p.$$

Como $a^+ + a^- = n - t$ y $a^+ \leq \frac{1}{2}(n-t)$, esta desigualdad se mantiene si

$$\alpha(n) \geq \alpha_k(t) + 4t - 5 + 3(n-t) + 4\alpha(n/p) - 4n/p.$$

Y como $t \leq n - k\lceil n/p \rceil + k$, esto se verifica si

$$\alpha(n) - 4\alpha(n/p) \geq \alpha_k(n - k\lceil n/p\rceil + k) + (n - k\lceil n/p\rceil + k) + 3n - 4n/p - 5. \quad (\bigstar_k)$$

Como $h_p(A)$ tiene al menos dos y a lo sumo $p-1$ hojas, si α satisface $(\bigstar_k)$ para $2 \leq k \leq p-1$, todo árbol de orden n es $\alpha(n)$-inevitable. Así que, para encontrar la función más pequeña posible α, debemos encontrar la función más pequeña posible α_k.

Al probar que $\alpha_k(n) \leq 2^k n$, Häggkvist y Thomason obtuvieron el siguiente resultado.

Teorema 3.8 *Un árbol de orden n es 12n-inevitable*

Demostración: Para el 10-corazón de un árbol con $\alpha_k(n) = 2^k n$ y $\alpha(n) = 12n$, todas las desigualdades $(\bigstar_k)$ se verifican para $2 \leq k \leq 9$.

Capítulo 4

Árboles con pocas hojas

En esta sección, para valores pequeños de k, encontraremos cotas superiores $\alpha_k(n)$ para el orden de un torneo que contiene todos los árboles de orden n con k hojas.

Usando el método de Häggkvist y Thomason, obtenemos la cota superior $f(n) \leq \frac{38}{5}n - 6$.

El Corolario 1.47 establece que un árbol de orden n con 2 hojas es $(n+1)$-inevitable (i.e. $\alpha_2(n) = n + 1$) y el Teorema 2.30 establece que un árbol de orden n con 3 hojas es $(n + 5)$-inevitable (i.e. $\alpha_3(n) \leq n + 5$)

Lema 4.1 *Un árbol de orden n con 4 hojas es $(2n + 9)$-inevitable.*

Demostración: Sea A un árbol de orden n con 4 hojas. Existe un vértice v de A tal que $A - v$ es un bosque cuyas componentes son caminos, junto con un árbol con a lo sumo 3 hojas. Podemos suponer que este árbol está contenido en $A^+(v)$; la demostración es dual en el otro caso. Si hay un vértice x tal que $d^+(x) \geq |A^+(v)| + 5$ y $d^-(x) \geq |A^-(v)| + 1$, podemos encontrar $A^+(v)$ en $N^+(x)$ y $A^-(v)$ en $N^-(x)$, y por tanto, tenemos A en T. Y podemos encontrar tal vértice en cada torneo de orden $2(|A^+(v)|+5)+2(|A^-(v)|+1)-1 = 2n+9$.
□

Lema 4.2 *Un árbol de orden n con 5 hojas es $(2n + 15)$-inevitable.*

Demostración: Sea A un árbol de orden n con 5 hojas. Existe un vértice v de A tal que $A - v$ es un bosque cuyas componentes consisten en un camino y árboles con a lo sumo 3 hojas. Podemos suponer que este árbol está contenido en $A^-(v)$; la demostración es dual en el caso contrario. Si hay un vértice x tal que $d^+(x) \geq |A^+(v)| + 5$ y $d^-(x) \geq |A^-(v)| + 4$, podemos encontrar $A^+(v)$ en $N^+(x)$ y $A^-(v)$ en $N^-(x)$, y por tanto, tenemos A en T. Y podemos encontrar tal vértice en cada torneo de orden $2(|A^+(v)|+5)+2(|A^-(v)|+4)-1 = 2n+15$.
□

Lema 4.3 *Un árbol de orden n con 6 hojas o 7 es $(4n+8)$-inevitable.*

Demostración: Sea A un árbol de orden n con 6 o 7 hojas. Existe un subárbol de A, A_1, con a lo sumo 4 hojas tal que $A - A_1$ es un bosque cuyas componentes están todas unidas del mismo modo, digamos positivamente, a A_1, satisfaciendo adicionalmente una de las dos condiciones siguientes:

1. $A - A_1$ es de orden al menos 4 y sus componentes son árboles con a lo sumo 3 hojas.

2. $A - A_1$ es de orden al menos 3 y sus componentes son caminos.

Veamos que si se cumple una de las dos condiciones obtenemos la cota $(4n+8)$.

Si se cumple la condición (1), por el Lema 4.1, si existe $2|A_1|+9$ vértices x tal que $d^+(x) \geq |A^+(A_1)| + |A_1| + 4$, podemos encontrar A en T. Y podemos encontrar muchos vértices en todo torneo de orden $2|A_1| + 9 + 2(|A^+(A_1)| + |A_1| + 4) - 1 \leq 4n - 2|A^+(A_1)| + 8 \leq 4n + 8$.

Si se cumple la condición (2), por el Lema 4.1, si existe $2|A_1| + 9$ vértices x tal que $d^+(x) \geq |A^+(A_1)| + |A_1|$, podemos encontrar A en T. Y podemos encontrar muchos vértices en todo torneo de orden $2|A_1| + 9 + 2(|A^+(A_1)| + |A_1|) - 1 \leq 4n - 2|A^+(A_1)| + 8 \leq 4n + 8$. $\square$

Lema 4.4 *Un árbol A de orden n con 8, 9 o 10 hojas es $5n$-inevitable.*

Demostración: Sea A un árbol de orden n con 8, 9 o 10 hojas. Se cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. Existe un subárbol A_1 de A con a lo sumo 3 hojas tal que $A - A_1$ es un bosque de orden al menos 9 cuyas componentes son árboles con a lo sumo 3 hojas.

2. Hay un camino A_1 tal que $A - A_1$ es un bosque cuyas componentes son caminos.

Supongamos que se cumple la condición (1). Si existen $|A_1| + 5$ vértices de grado de salida al menos $|A^+(A_1)| + |A_1| + 5$ y grado de entrada al menos $|A^-(A_1)| + |A^+(A_1)| + |A_1| + 4$, podemos encontrar A en T. Y podemos encontrar muchos vértices en todo torneo de orden $|A_1| + 5 + 2(|A^+(A_1)| + |A_1| + 4) + 2(|A^-(A_1)| + |A^+(A_1)| + |A_1| + 4) - 1 \leq 5n + 20 - |A^+(A_1)| - 2|A^-(A_1)| \leq 5n$.

Supongamos ahora que se cumple la condición (2). Si existen $|A_1| + 1$ vértices de grado de salida al menos $|A^+(A_1)| + |A_1|$ y grado de entrada al menos $|A^-(A_1)| + |A^+(A_1)| + |A_1|$, podemos encontrar A en T. Y podemos encontrar muchos vértices en todo torneo de orden $|A_1| + 1 + 2(|A^+(A_1)| + |A_1|) + 2(|A^-(A_1)| + |A^+(A_1)| + |A_1|) - 1 \leq 5n$. $\square$

Teorema 4.5 *Un árbol de orden n es $(\frac{38}{5}n - 6)$-inevitable.*

Demostración: Aplicando el método de Häggkvist y Thomason al 9-corazón, se satisface $(\bigstar_k)$ para todo $2 \leq k \leq 8$, con $\alpha(n) = \frac{38}{5}n - 6$. $\square$

Bibliografía

[1] J.L. Gross, J. Yellen and P. Zhang, *Handbook of Graph Theory*, Discrete Mathematics and its Aplications, CRC Press, 2014.

[2] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1969.

[3] F. Harary and L. Moser, The theory of round robin tournaments, *Amer. Math. Monthly*, **73**(3) (1966), 231–246.

[4] F. Harary, R. Z. Norman y D. Cartwright, *Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs*, John Wiley and Sons, New York, 1965

[5] F. Havet, Trees in tournaments, *Discrete Math.* **243**(1-3) (2002), 121–134.

[6] F. Havet and S. Thomassé, Oriented hamiltonian paths in tournaments: A proof of Rosenfeld's conjecture, *J. Combin. Theory, Series B* **78**(2) (2000), 243–273.

[7] H. G. Landau, On dominance relations and the structure of animal societies: III, The condition for a score structure, *Bull. Math. Biophysics* **15** (1953), 143–148.

[8] X. Lu, On avoidable and unavoidable trees, *J. Graph Theory* **22**(4) (1996), 335–346.

[9] X. Lu, D. Wang y C. K. Wong, On avoidable and unavoidable claws, *Discrete Math.* **184**(1-3) (1998), 259–265.

[10] J. W. Moon, *Topics on Tournament*, University of Alberta, 1968.

[11] L. Rédei, Ein kombinatorischer Satz, *Acta Litt. Szeged* **7** (1934), 39–43.

[12] A.G. Thomason, Paths and cycles in tournaments, *Trans. Amer. Math. Soc.* **296** (1) (1986), 167–180.