Normas de multiplicadores de Schur y truncación triangular de matrices

Álvaro Aguilar Reyes

Un trabajo de fin de grado presentado con
la supervisión de Miguel Lacruz Martín

Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla
18 de Junio de 2020

Abstract

A main topic in matrix analysis is the computation of the norms of Schur multipliers in the algebra of square matrices.

The object of this work is to survey classical results of Schur about the multiplier norm of any matrix, for example, the Schur inequality, that it is very useful for delimit the Schur multipliers norm. Also, we study the Schur multiplier norm of a positive definite matrix, and furthermore, some properties of the determinants of this matrix product.

Then we apply them to the study of those matrices that have extremal multiplier norms, where unitary matrices stand out. Finally, we make use of the results to estimate the norm of the triangular truncation operator in the algebra of square matrices.

Resumen

Un tema principal en el análisis matricial es el cálculo de las normas de multiplicadores de Schur en el álgebra de las matrices cuadradas.

El objetivo de este trabajo es examinar los resultados clásicos de Schur sobre la norma de multiplicador de cualquier matriz, por ejemplo, la desigualdad de Schur, que es muy útil para acotar la norma de multiplicadores. También estudiaremos la norma de multiplicador de Schur de una matriz definida positiva, además de algunas propiedades de los determinantes de este producto matricial.

Luego, aplicaremos los resultados al estudio de las matrices que tienen norma de multiplicador extremal, donde sobresalen las matrices unitarias. Por último, haremos uso de los resultados para estimar la norma del operador de truncanción triangular en el álgebra de las matrices cuadradas.

Índice

Capítulo 1

Introducción

El *producto de Schur* de dos matrices $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, digamos $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$, se define como la matriz $A \cdot B = (a_{ij}b_{ij})$. Esta definición de apariencia tan ingenua fue considerada primero por Hadamard, a quien se le atribuye frecuentemente en la literatura, aunque fue Schur [8] quien después llevó a cabo un estudio sistemático de esta noción. Cualquier matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ induce en el álgebra $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ un operador $B \mapsto A \cdot B$, cuya norma se llama *norma de multiplicador* y viene dada por la expresión

$$\|A\|_m = \sup\{\|A \cdot B\| \colon B \in M_{n\times n}(\mathbb{C}), \|B\| \leq 1\}$$

Veamos con un fácil ejemplo como actúa este producto de matrices. Para ellos daremos dos matrices cuadradas de dimensión 3 y veremos la diferencia entre su producto de Schur y su producto ordinario.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Se puede ver claramente la diferencia en los dos productos. El objetivo de este trabajo será el estudio de las normas de multiplicadores de Schur, así como de algunas propiedades de este producto, y su aplicación a la estimación de la norma del operador de truncación triangular.

El capítulo 2 está dedicado a los resultados clásicos de Schur [8] acerca de la norma de multiplicador de una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ en términos de productos de las normas columna de posibles factores respecto a las posibles factorizaciones $A = R^*S$, es decir,

$$\|A\|_m \leq \min\{c(R)c(S)\colon A = R^*S\}$$

A partir de este resultado, que será útil a lo largo de todo el trabajo, se deducirán varios, de los cuales el más importante sería la famosa desigualdad de Schur

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

O escrito de otra forma

$$\|A\|_m \leq \|A\|$$

El capítulo 3 prosigue con otro teorema clásico de Schur, que enuncia que el producto de dos matrices semidefinidas positivas es también semidefinida positiva. Continuará con el cálculo de las normas de los multiplicadores de Schur inducidos por matrices semidefinidas positivas $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, de acuerdo con la exposición del artículo de Horn [4], que conduce al clásico resultado de que tales matrices tienen como norma de multiplicador a su mayor coeficiente diagonal, es decir,

$$\|A\|_m = \max\{a_{jj}\colon 1 \leq j \leq n\}$$

También se obtiene en este capítulo una desigualdad para el determinante del producto de Schur de dos matrices semidefinidas positivas, la cual se obtendrá gracias a los resultados de Horn y Johnson [5]

$$\det(A)\det(B) \leq \det(A \cdot B)$$

El capítulo 4 está destinado al estudio de las matrices $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ cuya norma de multiplicador es extremal en el sentido de que $\|A\|_m = \|A\|$. Este problema fue considerado por Ong [7], quien demostró que una matriz que tenga esta propiedad debe ser, salvo permutaciones de filas y columnas, un múltiplo escalar de la suma directa de una matriz unitaria y una contracción. Antes de dicha prueba, veremos que se puede probar fácilmente que las matrices unitarias también son extremales con respecto a la desigualdad de Schur, además de ver el caso de matrices extremales con respecto a la desigualdad dada por una conjugación unitaria de A, es decir, si U es una matriz unitaria cualquiera, entonces

$$\|U^*AU\|_m \leq \|A\|$$

El capítulo 5 constituye la segunda parte de este trabajo, y consiste en la aplicación de los resultados anteriores a la estimación de la norma $\|T_n\|_m$ del operador de truncación triangular de matrices, es decir, del multiplicador inducido por la matriz T_n, definida como

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Kwapien y Pelczynski [6] probaron que $\|T_n\|_m = O(\log n)$. Davidson [2] obtuvo posteriormente la estimación inferior

$$\frac{4}{5\pi} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\|T_n\|_m}{\log n}$$

Estos resultados fueron mejorados posteriormente por Angelos, Cowen y Narayan [1], quienes obtuvieron el resultado óptimo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|T_n\|_m}{\log n} = \frac{1}{\pi}$$

Este capítulo ofrece una demostración del resultado anterior basándonos en su artículo [1], aunque no nos apoyaremos en resultados tan profundos como ellos, cosa que veremos en detalle cuando lleguemos a dicha sección.

Finalmente, el apéndice contiene resultados que se utilizan en el trabajo y que no necesitan demostración porque ya fueron estudiados en el grado.

Capítulo 2

Multiplicadores de Schur

En primer lugar, desarrollaremos a lo largo de este capítulo algunos resultados clásicos de Schur [8], que nos serán muy útiles en todo el trabajo. Comenzaremos definiendo el producto de Schur y la norma columna de una matriz. Recordemos primero la norma de operador de una matriz. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ y $x \in \mathbb{C}^n$

$$
\begin{aligned}
\|A\| &= \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}
\end{aligned}
$$

Definición 2.1. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, definimos el producto de Schur de $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ por

$$A \cdot B = (a_{ij}b_{ij})$$

Cada matriz A define un operador de multiplicación del espacio de las matrices cuadradas de dimensión n con coeficientes en $\mathbb{C}$ en sí mismo, y tiene una norma de operador asociada, que llamaremos norma de multiplicador y notaremos $\|A\|_m$, definida como, si $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ y O es la matriz nula

$$
\begin{aligned}
\|A\|_m &= \sup_{\|B\|=1} \|A\cdot B\| \\
&= \sup_{\|B\|\leq 1} \|A\cdot B\| \\
&= \sup_{B\neq O} \frac{\|A\cdot B\|}{\|B\|}
\end{aligned}
$$

Definición 2.2. Llamamos norma columna de una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ y notamos $c(A)$ a

$$c(A) = \max_{1\leq j\leq n} \|Ae_j\|$$

donde e_j es el vector j-ésimo de la base canónica.

Podemos pasar ahora a enunciar uno de los resultados más importantes del trabajo, ya que nos será de gran utilidad. Después de la prueba, daremos una serie de anotaciones sobre el teorema.

Teorema 2.3. *Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. La norma del operador de multiplicación de Schur por A verifica que*

$$\|A\|_m \leq \min\{c(R)c(S) : A = R^*S\}$$

donde $c(\cdot)$ representa la norma por columnas.

Demostración. Sabemos que existen factorizaciones de este tipo, ya que podemos tomar $R^* = I$ y $S = A$. Por lo tanto, sean R y S verificando lo anterior y sea $B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Vamos a calcular un coeficiente cualquiera de la matriz asociada al operador $A \cdot B$. Denotamos $A = (a_{jk})$ y $B = (b_{jk})$, con $1 \leq j, k \leq n$.

$$(A\cdot B)_{jk} = a_{jk}b_{jk} = (Ae_k|e_j)(Be_k|e_j) = (R^*Se_k|e_j)(Be_k|e_j) = (Se_k|Re_j)(Be_k|e_j)$$

Sea $x \in \mathbb{C}^n$, con $x = \sum_{k=1}^{n}(x|e_k)e_k$. Por la identidad de Parseval (Proposición 6.10 del apéndice), sabemos que

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x|e_k)|^2$$

Veamos cuál es la columna k-ésima de $A\cdot B$. Para ello, multiplicamos por el vector de la base canónica e_k con 0 en todas sus componentes, menos en la posición k, que tiene un 1

$$(A\cdot B)e_k = \sum_{j=1}^{n}(A\cdot B)_{jk}e_j = \sum_{j=1}^{n}(Se_k|Re_j)(Be_k|e_j)e_j$$

Ahora calculamos cuanto vale $(A \cdot B)(x)$

$$\begin{aligned}(A \cdot B)(x) &= (A \cdot B)\left(\sum_{k=1}^{n}(x|e_k)e_k\right) = \sum_{k=1}^{n}(x|e_k)(A \cdot B)e_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}(x|e_k)\sum_{j=1}^{n}(Se_k|Re_j)(Be_k|e_j)e_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x|e_k)(Se_k|Re_j)(Be_k|e_j)e_j = \sum_{j=1}^{n}((A \cdot B)(x))_j e_j\end{aligned}$$

donde $((A \cdot B)(x))_j = \sum_{k=1}^{n}(x|e_k)(Se_k|Re_j)(Be_k|e_j)$.

Finalmente, vamos a calcular la norma de $(A \cdot B)(x)$. Para ello usaremos

- $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n}|(x|e_k)|^2$
- $\sum_{j=1}^{n}|(Be_k|e_j)|^2 = \|Be_k\|^2 \leq \|B\|^2\|e_k\|^2 = \|B\|^2$, (porque $\|e_k\| = 1, \forall k \in \{1, ..., n\}$)
- $|(Se_k|Re_j)|^2 \leq \|Se_k\|^2\|Re_j\|^2$, (por la desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Con esto, podemos finalmente probar que

$$\begin{aligned}\|(A \cdot B)(x)\|^2 &= \sum_{j=1}^{n}|((A \cdot B)(x))_j|^2 = \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(x|e_k)(Se_k|Re_j)(Be_k|e_j)\right|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|(x|e_k)|^2|(Se_k|Re_j)|^2|(Be_k|e_j)|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\|Se_k\|^2\|Re_j\|^2|(x|e_k)|^2|(Be_k|e_j)|^2 \\ &\leq c(S)^2c(R)^2\sum_{k=1}^{n}|(x|e_k)|^2\sum_{j=1}^{n}|(Be_k|e_j)|^2 \\ &\leq c(S)^2c(R)^2\|B\|^2\sum_{k=1}^{n}|(x|e_k)|^2 = c(S)^2c(R)^2\|B\|^2\|x\|^2 \\ &\Rightarrow \|(A \cdot B)(x)\| \leq c(S)c(R)\|B\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|A \cdot B\| \leq c(S)c(R)\|B\| \\ &\Rightarrow \|A\|_m \leq c(S)c(R)\end{aligned}$$

Como hemos probado, $\|A\|_m \leq c(S)c(R)$ para cualquier R y S tales que $A = R^*S$, luego claramente $\|A\|_m \leq \text{mín}\{c(R)c(S) : A = R^*S\}$, como queríamos demostrar.

□

Nota 2.4. Cabe destacar que la otra desigualdad también se cumple, es decir, que

$$\|A\|_m = \text{mín}\{c(R)c(S) : A = R^*S\}$$

Sin embargo, la prueba sobrepasa los límites del trabajo, y dado que sólo nos será necesaria la desigualdad probada, no la incluiremos. Dicha demostración fue descubierta por Haagerup. Haremos de nuevo mención a esto en el capítulo de truncación triangular de matrices.

Nota 2.5. También resaltamos que no hemos encontrado en la literatura una prueba como la anterior de esta desigualdad, y facilita mucho la demostración original, la cual usaba resultados mucho más profundos, mientras que ésta es más asequible.

El anterior teorema nos permite dar una cota de la norma de multiplicador de Schur de una matriz, de una forma sencilla. Pasamos a enunciarlo.

Corolario 2.6. *Se tiene que* $\|A\|_m \leq c(A)$.

Demostración. Sabemos que $\|A\|_m \leq c(S)c(R)$, con $S^*R = A$. Sea $S = I$, $R = A$. Entonces

$$\|A\|_m \leq c(A)$$

□

Del anterior corolario se puede deducir fácilmente algunos resultados análogos, que pasamos a probar. Para el primero de ellos, necesitaremos de la siguiente proposición.

Proposición 2.7. *A y A^t tienen la misma norma de multiplicador de Schur.*

Demostración. Sabemos que $\|A\| = \|A^t\|$. Sea $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

$$\|A \cdot B\| = \|(A^t \cdot B^t)^t\| = \|A^t \cdot B^t\| \leq \|A^t\|_m \cdot \|B\| \Rightarrow \|A\|_m \leq \|A^t\|_m$$

Análogamente, $\|A^t\|_m \leq \|A\|_m$. Por lo tanto, $\|A\|_m = \|A^t\|_m$, como se quería demostrar.

□

Definición 2.8. Llamamos norma fila de una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ y notamos $r(A)$ a

$$r(A) = \max_{1\leq j\leq n} \|e_j^t A\|$$

donde e_j es el vector j-ésimo de la base canónica.

Corolario 2.9. *Se cumple que* $\|A\|_m \leq r(A)$.

Demostración. Por la proposición y el corolario anteriores se tiene que

$$\|A\|_m = \|A^t\|_m \leq c(A^t) = r(A)$$

□

Ahora, pasaremos a demostrar el teorema más importante del capítulo, que nos ayudará en todo el trabajo. Es un resultado importante de Schur, del que recibe el nombre, aunque su prueba se simplifica mucho usando el Corolario 2.6.

Corolario 2.10. *(Desigualdad de Schur) Para cualquier* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *tenemos que* $\|A\|_m \leq \|A\|$.

Demostración. Veamos que se cumple.

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \max_{1\leq j\leq n} \frac{\|Ae_j\|}{\|e_j\|} = c(A) \Rightarrow c(A) \leq \|A\|$$

Luego, $\|A\|_m \leq c(A) \leq \|A\| \Rightarrow \|A\|_m \leq \|A\|$, como se quería probar.

□

Nota 2.11. Aunque la desigualdad anterior nos dé una cota más imprecisa de la norma de multiplicador de Schur que la que obtuvimos en el Corolario 2.6, ésta es mucho más útil en las pruebas que siguen en el trabajo. Ahondaremos en ello en el capítulo de matrices extremales, donde, entre otras cosas, veremos cuándo la desigualdad anterior se convierte en una igualdad.

Capítulo 3

Matrices semidefinidas positivas

En este capítulo vamos a continuar con algunos resultados clásicos de Schur [8], pero en este caso, referidos a un tipo específico de matrices, las matrices semidefinidas (y definidas) positivas. Veremos cómo actúa el producto de Schur en lo referente a este tipo de matrices, cuál es su norma de multiplicador de Schur y un resultado interesante sobre el determinante de estas matrices.
Comenzaremos recordando qué es una matriz definida y semidefinida positiva.

Definición 3.1. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermítica, es decir, $A = A^*$. Se dirá que A es definida positiva si $x^*Ax > 0$ para cualquier $x \in \mathbb{C}^n$ con $x \neq 0$. Se dirá que A es semidefinida positiva si $x^*Ax \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{C}^n$.

Vamos a aprovechar que también hemos recordado la definición de matriz hermítica para probar el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermíticas. Entonces $A \cdot B$ también es hermítica.*

Demostración. Tenemos que $A = A^*$ y que $B = B^*$. También, es evidente ver por su definición que $(A \cdot B)^t = A^t \cdot B^t$ y que $\overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$. Por lo tanto, deducimos que

$$(A \cdot B)^* = A^* \cdot B^* = A \cdot B$$

Luego, $A \cdot B$ es hermítica, como se quería demostrar.

$\square$

Acabamos de probar que el producto de Schur de dos matrices hermíticas también es una matriz hermítica. Parece interesante preguntarse si esto también ocurre con matrices (semi)definidas positivas, es decir, si el producto de Schur de dos matrices (semi)definidas positivas también lo es. El teorema del producto de Schur da respuesta a esta pregunta. Sin embargo, la demostración que nosotros veremos fue probada por Horn y Johnson en [5], y para la cual necesitamos unos resultados previos.

Definición 3.3. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ con $A = (a_{ij})$. Entonces $tr\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Definición 3.4. Sea $x \in \mathbb{C}^n$, con $x = (x_i)$. Definimos $diag(x)$ como la matriz cuya diagonal principal es el vector x y el resto de elementos es 0, es decir

$$diag(x) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

Lema 3.5. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ y $x, y \in \mathbb{C}^n$ dados. Entonces*

$$x^*\,(A\cdot B)\,y = tr\,\big((diag(\overline{x}))A(diag(y))B^t\big)$$

Demostración. Sea $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $x = (x_i)$, $y = (y_i)$. Entonces $(diag(\overline{x}))A = (\overline{x}_i a_{ij})$, y $B(diag(y)) = (b_{ij}y_j)$. Usaremos que $tr(AB^t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$. Veamos esto. Sea $B^t = (b^t_{ij})$, donde $b^t_{ij} = b_{ji}$, entonces

$$\begin{aligned} \left(AB^t\right)_{ii} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b^t_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} \\ tr\left(AB^t\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(AB^t\right)_{ii} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} \end{aligned}$$

Luego, nos queda que

$$\begin{aligned} tr\,\big((diag(\overline{x}))A(diag(y))B^t\big) &= tr\,\big(((diag(\overline{x}))A)\,(B(diag(y)))^t\big) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \overline{x}_i a_{ij}b_{ij}y_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i a_{ij}b_{ij}\right)y_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(x^*\,(A\cdot B)\right)_j y_j = x^*\,(A\cdot B)\,y \end{aligned}$$

Por lo tanto, $tr\,\big((diag(\overline{x}))A(diag(y))B^t\big) = x^*\,(A\cdot B)\,y$, como se quería demostrar. $\square$

Con este lema, podemos pasar a probar el teorema que nos caracteriza el producto de Schur de dos matrices semidefinidas positivas, cuya importancia veremos más adelante.

Teorema 3.6. *(Teorema del producto de Schur) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ semidefinidas positivas. Entonces*

a) $A \cdot B$ es semidefinida positiva.

b) Si A es definida positiva y cada elemento de la diagonal principal de B es positivo, entonces $A \cdot B$ es definida positiva.

c) Si tanto A como B son definidas positivas, entonces $A \cdot B$ es definida positiva.

Demostración. Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $x = (x_i) \in \mathbb{C}^n$, con $x \neq 0$ (para $x = 0$ es trivial).

a) Sea $C = (diag(x))\overline{B}^{\frac{1}{2}}$. Como B es semidefinida positiva, es hermítica, luego $\overline{B} = B^t$. Vamos a probar primero que si $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ cualquiera y $\overline{B}^{\frac{1}{2}} = (\widehat{b}_{ij})$, entonces $tr\left(D\overline{B}\right) = tr\left(\overline{B}^{\frac{1}{2}}D\overline{B}^{\frac{1}{2}}\right)$. Tenemos que $\overline{B}^{\frac{1}{2}}\overline{B}^{\frac{1}{2}} = \overline{B} = (\overline{b}_{ij})$, con $\overline{b}_{ij} = b_{ji}$, entonces $\sum_{k=1}^{n} \widehat{b}_{ik}\widehat{b}_{kj} = b_{ji}$. Usando esto, hallamos que

$$\begin{aligned}
\left(D\overline{B}\right)_{ii} &= \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\overline{b}_{ji} = \sum_{j=1}^{n} d_{ij}b_{ij} \Rightarrow tr\left(D\overline{B}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}b_{ij} \\
\left(\overline{B}^{\frac{1}{2}}D\overline{B}^{\frac{1}{2}}\right)_{ii} &= \sum_{j=1}^{n} \left(\overline{B}^{\frac{1}{2}}D\right)_{ij}\widehat{b}_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\widehat{b}_{ik}d_{kj}\right)\widehat{b}_{ji} = \sum_{j,k=1}^{n}\widehat{b}_{ik}\widehat{b}_{ji}d_{kj} \\
&\Rightarrow tr\left(\overline{B}^{\frac{1}{2}}D\overline{B}^{\frac{1}{2}}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j,k=1}^{n}\widehat{b}_{ik}\widehat{b}_{ji}d_{kj}\right) = \sum_{j,k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\widehat{b}_{ji}\widehat{b}_{ik}\right)d_{kj} \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} b_{kj}d_{kj} = tr\left(D\overline{B}\right)
\end{aligned}$$

Luego, $tr\left(D\overline{B}\right) = tr\left(\overline{B}^{\frac{1}{2}}D\overline{B}^{\frac{1}{2}}\right)$. Usando esto y el lema anterior, llegamos a que

$$x^*\left(A \cdot B\right)x = tr\left((diag(\overline{x}))A(diag(x))\overline{B}\right) = tr\left(\overline{B}^{\frac{1}{2}}(diag(\overline{x}))A(diag(x))\overline{B}^{\frac{1}{2}}\right) = tr\left(C^*AC\right)$$

Se tiene que, si A es semidefinida positiva, entonces C^*AC también lo es, pues

$$x^*\left(C^*AC\right)x = \left(Cx\right)^* A\left(Cx\right) = y^*Ay \geq 0$$

Por tanto, C^*AC es semidefinida positiva. Además, todos sus elementos diagonales son no negativos, pues si denotamos $D = C^*AC$, con $D = (d_{ij})$, entonces

$$0 \leq e_j^* D e_j = d_{jj} \Rightarrow d_{jj} \geq 0$$

De esta manera, tenemos que $tr\left(C^*AC\right) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} d_{jj} \geq 0$. Como $tr\left(C^*AC\right) = x^*\left(A \cdot B\right)x$, tenemos que $x^*\left(A \cdot B\right)x \geq 0$, es decir, $A \cdot B$ es semidefinida positiva, como queríamos probar.

b) Sea $\lambda_1 > 0$ el menor autovalor de A (que sabemos que es positivo porque A es definida positiva) y sea $\beta > 0$ el elemento más pequeño de la diagonal principal de B. Entonces $A - \lambda_1 I$ tiene autovalores no negativos, luego es semidefinida positiva, y así $(A - \lambda_1 I) \cdot B$ es semidefinida positiva. Por tanto,

$$0 \leq x^*\left(\left(A - \lambda_1 I\right) \cdot B\right)x = x^*\left(A \cdot B\right)x - \lambda_1 x^*\left(I \cdot B\right)x$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$x^*\left(A \cdot B\right)x \geq \lambda_1 x^*\left(I \cdot B\right)x = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} b_{ii}|x_i|^2 \geq \lambda_i \beta \|x\|^2 > 0$$

Obtenemos pues que $x^*\left(A \cdot B\right)x > 0$, luego $A \cdot B$ es definida positiva, como se quería demostrar.

c) Si B es definida positiva, entonces todos los elementos de su diagonal principal son positivos, pues $0 < e_j^* B e_j = b_{jj}$. Del apartado (b), se sigue que $A \cdot B$ es definida positiva, y ya hemos demostrado el teorema.

□

Un resultado que se deduce rápidamente del teorema anterior es el siguiente.

Corolario 3.7. *Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ es semidefinida positiva (respectivamente definida positiva), entonces las potencias de Schur de A, es decir, $A^{(k)} = (a_{ij}^k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$, son semidefinidas positivas (respectivamente definidas positivas).*

Demostración. Trivial, aplicando de manera inductiva el apartado (a) (respectivamente el apartado (c)) del teorema anterior.

□

Ahora vamos a dar un teorema que caracteriza la norma del operador de multiplicación de una matriz semidefinida positiva, para lo cual usaremos el teorema de diagonalización (Teorema 6.16), cuyo enunciado recordaremos en la demostración de dicho teorema. Esto resulta de gran importancia, ya que de hecho nos da una forma muy fácil de calcular la norma de multiplicador, únicamente viendo cómo es la matriz. El resultado fue probado por Schur, sin embargo, la prueba que nosotros veremos se encuentra en Horn [4], y está basada en resultados anteriores.

Teorema 3.8. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ semidefinida positiva. Entonces, la norma de multiplicador de A es su máximo coeficiente diagonal, es decir,*

$$\|A\|_m = \max_{1\leq j\leq n} a_{jj}$$

Demostración. Como la matriz A es semidefinida positiva, es hermítica, luego podemos aplicar el teorema de diagonalización (Teorema 6.16), el cual nos decía que existe una matriz unitaria $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $U^*AU = D$, con D una matriz diagonal, $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ y los coeficientes de la diagonal de D son los autovalores de A, los cuales sabemos que son todos no negativos (luego reales) por ser A semidefinida positiva. Sean U y D las dadas en el teorema de diagonalización, $D = (d_{ij})$. Como todos los coeficientes de D son reales y no negativos, tiene sentido definir

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{d_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{d_{nn}} \end{pmatrix}$$

Es evidente que, por ser $D^{\frac{1}{2}}$ una matriz diagonal, $D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}} = D$. Como $U^*AU = D$, entonces $UDU^* = A$. Vamos a considerar la matriz $UD^{\frac{1}{2}}U^*$, la cual es hermítica, pues

$$\left(UD^{\frac{1}{2}}U^*\right)^* = U\left(D^{\frac{1}{2}}\right)^* U^*$$

pero por ser $D^{\frac{1}{2}}$ diagonal y real, tenemos que $\left(D^{\frac{1}{2}}\right)^* = D^{\frac{1}{2}}$. Luego notamos $A^{\frac{1}{2}} = UD^{\frac{1}{2}}U^*$, y es evidente ver que

$$\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^* A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} = UD^{\frac{1}{2}}U^*UD^{\frac{1}{2}}U^* = UD^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}U^* = UDU^* = A$$

Usando el Teorema 2.3 tenemos que

$$\|A\|_m \leq c\left(A^{\frac{1}{2}}\right)c\left(A^{\frac{1}{2}}\right) = c\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

Para acabar, notamos $A^{\frac{1}{2}} = (b_{ij})$ y $\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^* = (c_{ij})$, con $c_{ij} = \overline{b}_{ji}$, y utilizando que $\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^* A^{\frac{1}{2}} = A$, observamos

$$a_{jj} = \sum_{i=1}^{n} c_{ji}b_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \overline{b}_{ij}b_{ij} = \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}|^2 = \|A^{\frac{1}{2}}e_j\|^2$$

donde $A^{\frac{1}{2}}e_j$ representa la columna j-ésima de $A^{\frac{1}{2}}$. Por lo tanto, tomando máximo en $1 \leq j \leq n$, tenemos finalmente que

$$\max_{1\leq j\leq n} a_{jj} = \max_{1\leq j\leq n} \|A^{\frac{1}{2}} e_j\|^2 = c\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

Así, concluimos que

$$\|A\|_m \leq \max_{1\leq j\leq n} a_{jj}$$

La otra desigualdad es más sencilla, ya que se cumple en módulo para cualquier matriz A. Basta considerar la matriz cuadrada, $E = (e_{ij})$ definida como $e_{jj} = 1$ para cierto $1 \leq j \leq n$ y todos los demás coeficientes iguales a 0. Esta claro que $\|E\| \leq 1$, pues si $x \in \mathbb{C}^n$ es un vector cualquiera, entonces

$$\|Ex\|^2 = |x_j|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow \|E\| \leq 1$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\|A\|_m = \sup_{\|B\|\leq 1} \|A \cdot B\| \geq \|A \cdot E\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A \cdot E)\, x\| \geq \|(A \cdot E)\, e_j\| = |a_{jj}|$$

Ahora bien, como j era arbitrario, podemos tomar máximo, y como nuestra matriz A es semidefinida positiva, entonces a_{jj} es real y no negativo para todo j, luego $|a_{jj}| = a_{jj}$, y nos queda que

$$\|A\|_m \geq \max_{1\leq j\leq n} a_{jj}$$

que junto con la otra desigualdad, nos da que

$$\|A\|_m = \max_{1\leq j\leq n} a_{jj}$$

como queríamos demostrar.

□

El teorema anterior nos da una caracterización muy buena de la norma del operador de multiplicación por el producto de Schur con matrices semidefinidas positivas, y resalta de nuevo la importancia del Teorema 2.3, el cual ya hemos utilizado para demostrar varios resultados interesantes y que seguirá siendo útil más adelante.
Para acabar el capítulo, vamos a dar respuesta a una pregunta interesante. Es bien conocido que el producto ordinario de matrices preserva los determinantes, en el sentido que que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Sin embargo, es evidente que el producto de Schur no actúa igual. Un sencillo ejemplo de esto sería considerar la matriz identidad I de dimensión n y la matriz A definida como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Está claro que $\det(A) = 0$ y $\det(I) = 1$. Sin embargo, $\det(A \cdot I) = 1 \neq \det(A)\det(I)$. En general, el producto de Schur no se relaciona de forma clara con el determinante. Sin embargo, en el caso de las matrices semidefinidas positivas, sí se puede encontrar una caracterización, aunque sólo será una desigualdad, ya que la igualdad se reduce al caso de matrices diagonales, lo cual es evidente por definición, y a casos más específicos que no siguen ninguna caracterización.
Para encontrar dicha relación entre los determinantes necesitaremos de unos resultados previos. Empezaremos por dar una cota inferior para el determinante de dos matrices semidefinidas positivas. Para encontrar dicha cota, necesitaremos del siguiente lema. En lo que sigue, todos los resultados se basan en los vistos por Horn y Johnson [5], aunque haremos con más detalle la prueba de varios de ellos, ya que algunas demostraciones no aparecen, y otras se cambiarán para adaptarlas al resultado que buscamos.

Lema 3.9. *Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ semidefinida positiva y la dividimos como*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & x^* \\ x & A_{22} \end{pmatrix}$$

con $A_{22} \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{C})$ y $x = (x_i) \in \mathbb{C}^{n-1}$. Definimos

$$\alpha(A) = \begin{cases} \frac{\det A}{\det A_{22}}, & \textit{si } A_{22} \textit{ es definida positiva} \\ \\ 0, & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} - \alpha(A) & x^* \\ x & A_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces, $\widehat{A}$ es semidefinida positiva.

Demostración. Como para $\alpha(A) = 0$ no hay nada que probar, podemos suponer que A_{22} es definida positiva y que A es no singular, por la tanto $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$, con λ_i los autovalores de A. Como tenemos que $\lambda_i \geq 0$ para todo i por ser A semidefinida positiva, nos queda con lo anterior que $\lambda_i > 0$, luego por el teorema de caracterización de las matrices definidas positivas (Teorema 6.17), tenemos que A es definida positiva. Por el corolario del criterio de Sylvester (Corolario 6.20), tenemos que todos los menores principales inferiores de A son positivos. Como los $n-1$ primeros menores principales de A coinciden con los de $\widehat{A}$, tenemos que los $n-1$ primeros menores principales de $\widehat{A}$ son positivos. Ahora bien, como

$$
\begin{aligned}
\det\left(\widehat{A}\right) &= \left(a_{11}-\alpha\left(A\right)\right)\det\left(A_{22}\right)+(-1)^{3}x_1\det\begin{pmatrix}\overline{x}_1 & \cdots & \overline{x}_{n-1}\\ a_{32} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\\
&+(-1)^{4}x_2\det\begin{pmatrix}\overline{x}_1 & \cdots & \overline{x}_{n-1}\\ a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ a_{42} & \cdots & a_{4n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}+\cdots+(-1)^{n+1}x_{n-1}\det\begin{pmatrix}\overline{x}_1 & \cdots & \overline{x}_{n-1}\\ a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)n}\end{pmatrix}\\
&=\det\left(A\right)-\alpha\left(A\right)\det\left(A_{22}\right)=0
\end{aligned}
$$

Luego $\det\left(\widehat{A}\right)=0$. Por el tercer apartado del criterio de Sylvester (Teorema 6.19), tenemos que $\widehat{A}$ es semidefinida positiva, como queríamos demostrar.

□

Con esto, podemos pasar a probar el primer resultado, que nos será de utilidad para encontrar la caracterización del determinante con el producto de Schur de matrices semidefinidas positivas.

Teorema 3.10. *Sean $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times n}\left(\mathbb{C}\right)$ semidefinidas positivas. Entonces*

$$\max\{a_{11}\cdots a_{nn}\det\left(B\right), b_{11}\cdots b_{nn}\det\left(A\right)\}\leq\det\left(A\cdot B\right)$$

Demostración. Vamos a continuar usando la notación del lema anterior y probaremos la desigualdad por inducción en la dimensión. Para $n=1$ es obvio que se cumple. Sea $n\geq 2$ y supongamos que se tiene la desigualdad para $n-1$. Como $\widehat{A}$ es semidefinida positiva, con $\widehat{A}$ la matriz del lema anterior, tenemos por el teorema del producto de Schur (Teorema 3.6) que $\widehat{A}\cdot B$ es semidefinida positiva, luego $\det\left(\widehat{A}\cdot B\right)\geq 0$. Usando el mismo desarrollo del determinante que usamos en la demostración del lema anterior, deducimos

$$0\leq\det\left(\widehat{A}\cdot B\right)=\det\left(A\cdot B\right)-\alpha\left(A\right)b_{11}\det\left(A_{22}\cdot B_{22}\right)$$

Para $\alpha\left(A\right)=0$ es obvio que se cumple el resultado. Suponiendo que $\alpha\left(A\right)\neq 0$ y aplicando la hipótesis de inducción a $A_{22}\cdot B_{22}$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
0\leq\det\left(\widehat{A}\cdot B\right)&=\det\left(A\cdot B\right)-\alpha\left(A\right)b_{11}\left(b_{22}\cdots b_{nn}\det\left(A_{22}\right)\right)\\
&=\det\left(A\cdot B\right)-b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}\det\left(A\right)
\end{aligned}
$$

Luego, $\det(A \cdot B) \geq b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}\det(A)$.

La otra desigualdad se deduce de la anterior, teniendo en cuenta que $A \cdot B = B \cdot A$. Por lo tanto, $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A) \geq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\det(B)$.
De esta manera, tenemos que $\max\{a_{11}\cdots a_{nn}\det(B), b_{11}\cdots b_{nn}\det(A)\} \leq \det(A \cdot B)$, y ya hemos probado lo que queríamos. $\square$

Necesitaremos de otro resultado del cual se deduce la caracterización que buscamos, y que probaremos ayudándonos del teorema anterior y de los siguientes dos teoremas, que son de gran utilidad. El primero nos dará una cota del determinante de una matriz en función de su diagonal y el segundo una cota del determinante en función de una cierta descomposición en cajas de la matriz.

Teorema 3.11. *(Desigualdad de Hadamard) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ semidefinida positiva. Entonces*

$$\det(A) \leq a_{11}\cdots a_{nn}$$

Demostración. Sabemos que $\det(A) \geq 0$. Si $\det(A) = 0$ está claro que se cumple la desigualdad, pues al ser A semidefinida positiva, ya vimos que $a_{ii} \geq 0$ para todo i, luego $a_{11}\cdots a_{nn} \geq 0$. Por tanto, podemos suponer que $\det(A) > 0$ y ya vimos en la demostración del Lema 3.9 que entonces A es definida positiva. Por tanto, también vimos anteriormente que A tiene todos sus elementos diagonales positivos. Sea $D = diag(\sqrt{a_{11}}, \ldots, \sqrt{a_{nn}})$. Por ser D diagonal e invertible, sabemos que $D^{-1} = diag(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{a_{nn}}})$. Definimos $C = D^{-1}AD^{-1}$ y está claro que C es definida positiva, pues si $x \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$x^*Cx = x^*\left(D^{-1}AD^{-1}\right)x = \left(D^{-1}x\right)^* A\left(D^{-1}x\right) = y^*Ay > 0 \Rightarrow x^*Cx > 0$$

Por tanto, C es definida positiva. Además, los elementos diagonales de C son todos 1, luego $tr(C) = n$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los autovalores de C (todos ellos positivos al ser C definida positiva). Entonces, usando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica (Teorema 6.21) tenemos que

$$\det(C) = \lambda_1\cdots\lambda_n \leq \left(\frac{1}{n}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)\right)^n = \left(\frac{1}{n}tr(C)\right)^n = 1 \Rightarrow \det(C) \leq 1$$

Así, llegamos a que

$$\det(A) = \det(DCD) = \det(D)\det(C)\det(D) \leq (\det(D))^2 = a_{11}\cdots a_{nn}$$

como se quería demostrar. $\square$

Teorema 3.12. *(Desigualdad de Fischer) Supongamos que $H \in \mathcal{M}_{(p+q)\times(p+q)}(\mathbb{C})$ es una matriz semidefinida positiva y que se puede dividir como*

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$$

con $A \in \mathcal{M}_{p\times p}(\mathbb{C})$ y $C \in \mathcal{M}_{q\times q}(\mathbb{C})$. Entonces

$$\det(H) \leq \det(A)\det(C)$$

Demostración. Como H es hermítica, A y C también lo son. Usando el teorema de diagonalización para matrices hermíticas, tenemos que existen $U \in \mathcal{M}_{p\times p}(\mathbb{C})$ y $V \in \mathcal{M}_{q\times q}(\mathbb{C})$ unitarias y $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ y $\Gamma = diag(\gamma_1, \ldots, \gamma_q)$ diagonales, con $A = U\Lambda U^*$ y $C = V\Gamma V^*$. Está claro que

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(U)\det(\Lambda)\det(U^*) = \det(U)\det(\Lambda)\overline{\det(U)} \\ &= |\det(U)|^2\det(\Lambda) = \det(\Lambda) = \lambda_1\cdots\lambda_p \end{aligned}$$

De igual forma, $\det(C) = \gamma_1\cdots\gamma_q$. Definimos $W \in \mathcal{M}_{(p+q)\times(p+q)}(\mathbb{C})$ como

$$W = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

Claramente W también es unitaria. Definimos pues

$$W^*HW = \begin{pmatrix} \Lambda & U^*BV \\ V^*B^*U & \Gamma \end{pmatrix}$$

Ya vimos que si H es semidefinida positiva, entonces W^*HW también lo es. Por lo tanto, la desigualdad de Hadamard nos dice que

$$\det(H) = \det(W^*HW) \leq (\lambda_1\cdots\lambda_p)(\gamma_1\cdots\gamma_q) = \det(A)\det(C)$$

Luego, $\det(H) \leq \det(A)\det(C)$ como queríamos demostrar.

□

Con estas dos últimas desigualdades, podemos pasar a probar el resultado que estábamos buscando, del cual se deduce fácilmente la caracterización del determinante que queremos.

Teorema 3.13. *Sean $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ semidefinidas positivas. Entonces*

$$a_{11}\cdots a_{nn}\det(B) + b_{11}\cdots b_{nn}\det(A) \leq \det(A\cdot B) + \det(AB)$$

Demostración. Vamos a probarlo por inducción. Está claro que para $n = 1$ se verifica. Supongamos que $n \geq 2$ y que la desigualdad se cumple para $n-1$. Sea $\widehat{A}$ como en el Lema 3.9 y, aplicando el Teorema 3.10 a $\widehat{A} \cdot B$ junto con el razonamiento del desarrollo del determinante que vimos en dicho teorema, obtenemos que

$$(a_{11} - \alpha(A))\, a_{22} \cdots a_{nn} \det(B) \leq \det\left(\widehat{A} \cdot B\right) = \det(A \cdot B) - \alpha(A)\, b_{11} \det(A_{22} \cdot B_{22})$$

Aplicamos la hipótesis de inducción a $A_{22} \cdot B_{22}$ de manera que

$$\begin{aligned} \det(A \cdot B) &\geq (a_{11} - \alpha(A))\, a_{22} \cdots a_{nn} \det(B) + \alpha(A)\, b_{11} \det(A_{22} \cdot B_{22}) \\ &\geq (a_{11} - \alpha(A))\, a_{22} \cdots a_{nn} \det(B) + \alpha(A)\, b_{11} \left[a_{22} \cdots a_{nn} \det(B_{22})\right. \\ &\left. + b_{22} \cdots b_{nn} \det(A_{22}) - \det(A_{22} B_{22})\right] \end{aligned}$$

Sumando $\det(AB)$ a ambos lados y reordenando obtenemos que

$$\det(A \cdot B) + \det(AB) - a_{11} \cdots a_{nn} \det(B) - b_{11} \cdots b_{nn} \det(A) \geq$$
$$\det(AB) - \alpha(A)\, a_{22} \cdots a_{nn} \det(B) + \alpha(A)\, b_{11} \left[a_{22} \cdots a_{nn} \det(B_{22}) - \det(A_{22} B_{22})\right] =$$
$$\alpha(A) \left[a_{22} \cdots a_{nn} - \det(A_{22})\right] \left[b_{11} \det(B_{22}) - \det(B)\right]$$

Si $\alpha(A) = 0$, es obvio que ya lo habríamos probado. Supongamos pues que $\alpha(A) > 0$, es decir, que A_{22} es definida positiva. La desigualdad de Hadamard asegura que $a_{22} \cdots a_{nn} - \det(A_{22}) \geq 0$ y, como B es semidefinida positiva, la desigualdad de Fischer nos dice que $b_{11} \det(B_{22}) - \det(B) \geq 0$. Usando esto, llegamos a que

$$\det(A \cdot B) + \det(AB) - a_{11} \cdots a_{nn} \det(B) - b_{11} \cdots b_{nn} \det(A) \geq$$
$$\alpha(A) \left[a_{22} \cdots a_{nn} - \det(A_{22})\right] \left[b_{11} \det(B_{22}) - \det(B)\right] \geq 0$$

Despejando, obtenemos la desigualdad deseada.

□

Nota 3.14. A la desigualdad de este teorema y a la del Teorema 3.10 se les conoce como *Desigualdades de Oppenheim-Schur.*

Finalmente, utilizando el teorema anterior, se deduce fácilmente la relación que deseábamos entre el producto de Schur por matrices semidefinidas positivas y el determinante, la cual resulta bastante interesante por su diferencia con el producto ordinario de matrices.

Corolario 3.15. *Si $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ son semidefinidas positivas, entonces*

$$\det(A) \det(B) \leq \det(A \cdot B)$$

Demostración. Sabemos que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Usando esto, la desigualdad de Hadamard para A y para B y la desigualdad del teorema anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}\det(A\cdot B) &\geq a_{11}\cdots a_{nn}\det(B) + b_{11}\cdots b_{nn}\det(A) - \det(AB)\\ &\geq \det(A)\det(B) + \det(A)\det(B) - \det(AB)\\ &= \det(A)\det(B)\end{aligned}$$

Luego, $\det(A)\det(B) \leq \det(A\cdot B)$ como queríamos probar.

$\square$

Capítulo 4

Multiplicadores de norma extremal

En el segundo capítulo vimos la desigualdad de Schur (corolario 2.10), la cual nos decía que la norma de multiplicador de una matriz es menor o igual que su norma de operador. En esta sección vamos a estudiar el caso en que lo anterior es una igualdad, es decir, cuando la norma de multiplicador es igual a la norma de operador.
Intentaremos dar un caracterización de las matrices de norma extremal, aunque primero veremos un caso específico de éstas, ya que la prueba de que se verifica la igualdad es bastante simple. Nos estamos refiriendo a las matrices unitarias, que pasaremos a definir.

Definición 4.1. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Se dice que A es unitaria si $A^*A = AA^* = I$.

Teorema 4.2. *Sea $U = (u_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matriz unitaria. Entonces*

$$\|U\|_m = 1 = \|U\|$$

Demostración. Sea $\overline{U} = (\overline{u}_{ij})$ la matriz conjugada de U. Entonces la matriz $U \cdot \overline{U} = (|u_{ij}|^2)$ tiene la propiedad de que la suma de los elementos de una fila (columna) es 1. Vamos a probarlo, usando que $UU^* = I$ y $(U^*) = (v_{ij})$, con $v_{ij} = \overline{u}_{ji}$, entonces

$$(UU^*)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}v_{ji} = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\overline{u}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} |u_{ij}|^2 = 1$$

Por tanto, ya tenemos que los elementos de una fila de $U \cdot \overline{U}$ suman 1 (para las columnas se razona igual con $U^*U = I$). Consideramos el vector $x = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \in \mathbb{C}^n$. Está claro que $\|x\| = 1$. Tenemos pues que

$$\begin{aligned}
\left(U \cdot \overline{U}\right) x &= \left(\sum_{j=1}^{n} |u_{1j}|^2 x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} |u_{nj}|^2 x_j\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} |u_{1j}|^2 \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} |u_{nj}|^2 \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = x
\end{aligned}$$

Luego $\|\left(U \cdot \overline{U}\right) x\| = \|x\| = 1$, de lo que podemos deducir que

$$1 = \|\left(U \cdot \overline{U}\right) x\| \leq \|U\|_m \cdot \|Ux\| \leq \|U\|_m \cdot \|U\| \cdot \|x\| = \|U\|_m$$

Así, $\|U\|_m \geq 1$. La otra desigualdad se sigue fácilmente de la desigualdad de Schur, pues $\|U\|_m \leq \|U\| = 1$, de forma que finalmente obtenemos $\|U\|_m = \|U\| = 1$, como queríamos probar.

$\square$

Con este teorema ya podemos ver lo interesante que resulta el producto de Schur con matrices unitarias, ya que es fácil comprobar que convierte la desigualdad de Schur en una igualdad. Pero no es el único resultado interesante en el que se relacionan este tipo de matrices y el producto de Schur. Dado que las matrices unitarias tienen tanto norma de multiplicador como de operador igual a 1, y que la norma (de multiplicador y de operador) de A^* es igual a la de A, se deduce lo siguiente. Sean $A, U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, con U una matriz unitaria. Notaremos U^*AU como la conjugación de A por la matriz unitaria U. Entonces

$$\begin{aligned}
\|U^*AU\|_m &\leq \|U\|_m \cdot \|AU\| \leq \|U\|_m \cdot \|A\| \cdot \|U\| = \|A\| \\
&\Rightarrow \|U^*AU\|_m \leq \|A\|
\end{aligned}$$

Por tanto, nos encontramos con otra desigualdad que relaciona la norma de un multiplicador de Schur con la norma de operador, pero en este caso, la matriz ha sufrido una conjugación unitaria. Vamos a caracterizar cuando se da la igualdad en lo anterior, dando explícitamente el conjunto de matrices que la verifican. Estos resultados se basan en los de Ong [7], aunque algunos se demostrarán de forma más precisa, para su completa comprensión. Para dar dicha caracterización, necesitaremos unos resultados previos.

Lema 4.3. *Si $\|A\| = 1$ y si una fila (columna) de A, vista como un vector en $\mathbb{C}^n$, tienen norma igual a 1, entonces esa fila (columna) es ortogonal a toda otra fila (columna) de A.*

Demostración. Sin perdida de generalidad, supongamos que es la primera columna. Sabemos que $A = (Ae_1 \,|Ae_2| \cdots |Ae_n)$, con $\|Ae_1\| = 1$, y que $\|A\| = \|A^t\|$. Entonces, como $\|A^t\,(Ae_1)\|^2 \leq \|A^t\|^2 \cdot \|Ae_1\|^2 = 1$, tenemos que

$$1 \geq \|A^t\,(Ae_1)\|^2 = |(Ae_1\,|Ae_1)|^2 + |(Ae_2\,|Ae_1)|^2 + \cdots + |(Ae_n\,|Ae_1)|^2$$

Como $|(Ae_1\,|Ae_1)|^2 = 1$, se tiene que

$$|(Ae_2\,|Ae_1)|^2 + \cdots + |(Ae_n\,|Ae_1)|^2 \leq 0 \Rightarrow (Ae_j\,|Ae_1) = 0, \forall j \in \{2, \cdots, n\}$$

como se quería demostrar. $\square$

El lema anterior también nos será de utilidad cuando queramos caracterizar las matrices que hacen de la desigualdad de Schur una igualdad. Por ahora, lo usaremos para probar el siguiente lema, que nos encamina al resultado que buscamos.

Lema 4.4. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ con $\|A\| = 1$. Supongamos que existe un vector unitario (de norma 1) $e \in \mathbb{C}^n$ tal que $\|Ae\| = 1$. Entonces $(Ae\,|Af) = 0$ para cualquier vector unitario $f \in \mathbb{C}^n$ ortogonal a e.*

Demostración. Si denotamos $b_1 = e$ y $b_2 = f$ podemos añadir vectores unitarios b_k con $k \in \{3, \ldots, n\}$ de manera que el conjunto $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ sea una base ortonormal. Mediante este cambio de base, tendríamos que la columna j-ésima de la matriz A pasaría a ser el vector Ab_j, y del Lema 4.3 se sigue fácilmente que la primera columna de A, es decir Ae, al tener norma 1 es ortogonal al resto de columnas de A, en particular, es ortogonal a Af y ya tenemos que $(Ae\,|Af) = 0$ como queríamos.

$\square$

Lema 4.5. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ con $\|A\| = 1$. Supongamos que $\|Ax\| < 1$ para algún vector unitario $x \in \mathbb{C}^n$. Entonces existe una base ortonormal E tal que $\|Ae\| < 1$ para todo $e \in E$.*

Demostración. Siguiendo el mismo razonamiento del apartado anterior, podemos construir una base ortonormal $E = (e_1 = x, e_2, \ldots, e_n)$. Sabemos que $c\,(A) \leq \|A\| = 1$, luego podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\|Ae_1\| < 1$, $\|Ae_2\| < 1$, ..., $\|Ae_k\| < 1$ y que $\|Ae_{k+1}\| = \cdots = \|Ae_n\| = 1$.

Reemplazando e_1 por $\widehat{e}_1 = \dfrac{e_1}{\sqrt{2}} + \dfrac{e_{k+1}}{\sqrt{2}}$, y e_{k+1} por $\widehat{e}_{k+1} = \dfrac{e_1}{\sqrt{2}} - \dfrac{e_{k+1}}{\sqrt{2}}$, el conjunto $\{\widehat{e}_1, e_2, \ldots, \widehat{e}_{k+1}, \ldots, e_n\}$ es todavía una base ortonormal. Usando el Lema 4.4, como $\|Ae_{k+1}\| = 1$, tenemos que $(Ae_1\,|Ae_{k+1}) = 0$, y así

$$\begin{aligned}\|A\widehat{e}_1\|^2 &= \|\frac{Ae_1}{\sqrt{2}} + \frac{Ae_{k+1}}{\sqrt{2}}\|^2 = \frac{1}{2}\|Ae_1\|^2 + \frac{1}{2}\|Ae_{k+1}\|^2 + 2\frac{1}{2}\,(Ae_1\,|Ae_{k+1}) \\ &= \frac{1}{2}\|Ae_1\|^2 + \frac{1}{2}\|Ae_{k+1}\|^2 < 1\end{aligned}$$

Análogamente, $\|A\widehat{e}_{k+1}\| < 1$. El nuevo sistema ortonormal $\{\widehat{e}_1, e_2, \ldots, \widehat{e}_{k+1}, \ldots, e_n\}$ satisface la misma hipótesis que E cambiando k por $k+1$, es decir, $\|A\widehat{e}_1\| < 1$, $\|Ae_2\| < 1$, …, $\|Ae_k\| < 1$, $\|A\widehat{e}_{k+1}\| < 1$ y $\|Ae_{k+2}\| = \cdots = \|Ae_n\| = 1$. Renombrando este sistema ortonormal como E y realizando recursivamente el razonamiento anterior, en un número finito de pasos obtenemos lo que queríamos probar.

□

Proposición 4.6. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ con $\|A\| = 1$. Supongamos que $\|Ax\| < 1$ para algún vector unitario $x \in \mathbb{C}^n$. Entonces existe una matriz unitaria $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $\|U^*AU\|_m < 1$.*

Demostración. Sea U la matriz cuyas columnas son los vectores de la base ortonormal obtenida en el Lema 4.5. Esta claro que esta matriz es unitaria, al ser sus columnas ortonormales entre sí. Por tanto, tenemos que U^*AU tiene la propiedad de que todas sus columnas tienen norma menor que 1. Vamos a verlo. Sabemos que la columna j-ésima de U^*AU es el vector U^*Ae_j, con e_j el elemento j-ésimo de la base E del lema anterior, luego

$$\|U^*Ae_j\| \leq \|U^*\| \cdot \|Ae_j\| = \|Ae_j\| < 1$$

Así, como se cumple para cualquier j, usando el corolario 2.6 tenemos que $\|U^*AU\|_m \leq c(U^*AU) < 1$, como queríamos demostrar.

□

Con ésto, hemos encontrado una cota para la norma de multiplicador de U^*AU, bajo ciertas condiciones. Utilizaremos esto para caracterizar las matrices de norma 1 que verifiquen que la norma de multiplicador de su conjugación por cualquier matriz unitaria también valga 1.

Teorema 4.7. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $\|A\| = 1 = \|U^*AU\|_m$ para toda matriz unitaria $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Entonces A es unitaria.*

Demostración. Como $\|A\| = 1$ entonces $\|Ax\| \leq \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$. Supongamos que x es unitario, es decir, $\|Ax\| \leq \|x\| = 1$. Debe ocurrir que $\|Ax\| = \|x\| = 1$ para todo x unitario, porque si existiera un vector $\widehat{x}$ de norma 1 tal que $\|A\widehat{x}\| < 1$, la proposición anterior nos dice que existe una matriz unitaria V con $\|V^*AV\|_m < 1$, lo cual es una contradicción, ya que $\|U^*AU\|_m = 1$ para toda matriz unitaria U. Por tanto, tenemos que $\|Ax\| = \|x\| = 1$ para todo vector x unitario. Supongamos ahora un vector $y \in \mathbb{C}^n$ cualquiera (y distinto del vector nulo, porque para él es obvio). Entonces tenemos que $\dfrac{y}{\|y\|}$ es un vector unitario, luego

$$\frac{1}{\|y\|}\|Ay\| = \|A\frac{y}{\|y\|}\| = 1 \Rightarrow \|Ay\| = \|y\|$$

Por lo tanto, A es una isometría. Falta por probar que toda isometría en un espacio de dimensión finita es unitaria. Vamos a verlo. Sea $x \in \mathbb{C}^n$ cualquiera y recordemos que $\|A^*\| = \|A\| = 1$, luego

$$\begin{aligned}0 \leq \|A^*Ax - x\|^2 &= \|A^*Ax\|^2 + \|x\|^2 - 2\left(A^*Ax \,|\, x\right)\\ &\leq \|A^*\|^2 \cdot \|Ax\|^2 + \|x\|^2 - 2\left(Ax \,|\, Ax\right) = \|Ax\|^2 + \|x\|^2 - 2\|Ax\|^2\\ &= \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0 \Rightarrow \|A^*Ax - x\| = 0\\ &\Rightarrow A^*Ax = x\end{aligned}$$

De esta manera tenemos que $A^*A = I$. De forma análoga, se ve que $AA^* = I$, usando el mismo razonamiento anterior para probar que A^* es una isometría, pues si no lo fuera, existiría un vector x unitario con $\|A^*x\| < 1$, y la proposición anterior nos dice que existe una matriz unitaria V con $\|V^*A^*V\|_m < 1$. Pero entonces tendríamos que $1 > \|V^*A^*V\|_m = \|(V^*A^*V)^*\|_m = \|V^*AV\|_m = 1$ y tendríamos una contradicción. Con esto, tenemos que A es unitaria, como queríamos demostrar.

$\square$

Con este último teorema, pasamos a determinar el conjunto de las matrices que verifican la igualdad que queríamos.

Teorema 4.8. *El conjunto de las matrices $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tales que $\|A\| = \|U^*AU\|_m$ para cualquier matriz unitaria U es precisamente el conjunto de los múltiplos escalares de matrices unitarias, es decir, si denotamos como $\mathcal{U}_{n\times n}(\mathbb{C})$ al conjunto de matrices unitarias complejas de dimensión n, entonces*

$$\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) : \|A\| = \|U^*AU\|_m, U \in \mathcal{U}_{n\times n}(\mathbb{C})\} = \{\lambda U : U \in \mathcal{U}_{n\times n}(\mathbb{C}), \lambda \in \mathbb{C}\}$$

Demostración. Vamos a probarlo por doble inclusión.

$\boxed{\supseteq}$ Sea λU con U unitaria. Usando que el producto de matrices unitarias sigue siendo unitario y el Teorema 4.2 tenemos que para cualquier matriz unitaria V

$$\|\lambda U\| = |\lambda| = |\lambda| \cdot \|V^*UV\|_m = \|V^*\left(\lambda U\right)V\|_m$$

y ya tenemos la primera contención.

$\boxed{\subseteq}$ Si A es la matriz nula, está claro que pertenece a ambos conjuntos, tomando $\lambda = 0$. Entonces sea A una matriz no nula con $\|A\| = \|U^*AU\|_m$ para toda U unitaria. Sabemos que toda matriz no nula se puede escribir como $\|A\|\left(\|A\|^{-1}A\right)$. La matriz $\|A\|^{-1}A$ tiene norma igual a 1 y se cumple que

$$\|U^* \left(\|A\|^{-1} A\right) U\|_m = \|A\|^{-1} \cdot \|U^* A U\|_m = \|A\|^{-1} \cdot \|A\| = 1$$

Por tanto, usando el teorema anterior tenemos que la matriz $\|A\|^{-1}A$ es unitaria. Tomando $\lambda = \|A\|$ y multiplicando por la matriz unitaria $\|A\|^{-1}A$, tenemos que A pertenece al segundo conjunto y ya hemos demostrado el teorema.

□

Como hemos podido ver, los múltiplos escalares de matrices unitarias son las que preservan la igualdad en relación a su norma de operador y a su norma de multiplicador al aplicarle una conjugación por otra matriz unitaria, lo cual no es más que una reescritura del primer teorema del capítulo, en el que vimos como las matrices unitarias convierten la desigualdad de Schur (corolario 2.10) en una igualdad. Esto es fácil de ver, ya que el producto de unitarias es claramente otra matriz unitaria, todas las matrices unitarias verifican que tienen norma de operador y multiplicador igual a 1 y $\|\lambda U\| = |\lambda| \cdot \|U\|$ para cualquier matriz U.

Por tanto, dedicaremos lo que resta del capítulo a determinar una caracterización de las matrices de norma extremal, donde la desigualdad de Schur es una igualdad. Para ello, pasaremos primero a probar una cota de la norma de operador de un producto de Schur.

Proposición 4.9. *(Desigualdad de Schwarz para la multiplicación de Schur) Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, se tiene que*

$$\|A \cdot B\| \leq \|A \cdot \overline{A}\|^{\frac{1}{2}} \cdot \|B \cdot \overline{B}\|^{\frac{1}{2}}$$

Demostración. Sea $x = (x_j)$ un vector cualquiera de $\mathbb{C}^n$. Entonces, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz dos veces, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|(A \cdot B)\, x\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} x_j \right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\, |x_j|^{\frac{1}{2}}\, |b_{ij}|\, |x_j|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \, |x_j| \right) \left(\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|^2 \, |x_j| \right) \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \, |x_j| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|^2 \, |x_j| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\left(A \cdot \overline{A}\right) |x|\| \cdot \|\left(\left(B \cdot \overline{B}\right) |x|\right)\| \\
&\leq \|A \cdot \overline{A}\| \cdot \|B \cdot \overline{B}\| \cdot \|x\|^2
\end{aligned}$$

con $|x| = (|x_j|)$ y $\|(|x|)\| = \|x\|$.

Así, $\|A \cdot B\|^2 \leq \|A \cdot \overline{A}\| \cdot \|B \cdot \overline{B}\|$ y tomando raíz cuadrada a ambos lados obtenemos la desigualdad deseada.

$\square$

A continuación, veremos una serie de propiedades de las normas de operador y multiplicador de una matriz, las cuales son fáciles de probar, pero serán de gran utilidad.

Lema 4.10. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Se cumple que*

- *Si $\|A\| = \|A\|_m$, entonces una permutación de filas (columnas) de A también tiene la misma propiedad.*
- *Si $\|A\| = \|A\|_m$, un múltiplo escalar de A tiene la misma propiedad.*
- *Si $\|A\| = 1$, entonces las filas (columnas) de A tienen norma ≤ 1.*

Demostración. Sea A como en el enunciado.

- Sean $P, Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una permutación de filas y columnas respectivamente, y sea $x \in \mathbb{C}^n$. Es trivial ver que $\|x\| = \|Px\|$, pues P sólo permuta los elementos de x. Entonces se tiene que

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|P(Ax)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|PAx\| = \|PA\|$$

Luego $\|A\| = \|PA\|$. Usando ahora que si Q es una permutación de columnas, entonces $Q^t A$ permuta filas, se tiene que $\|AQ\| = \|(AQ)^t\| = \|Q^t A^t\| = \|A^t\| = \|A\|$. Por lo tanto, se llega a que

$$\|PAQ\| = \|AQ\| = \|A\|$$

Supongamos ahora que $\|A\| = \|A\|_m$, y observemos que, para $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ se tiene por la definición de producto de Schur que $P(A \cdot B)Q = (PAQ) \cdot (PBQ)$, luego $(PAQ) \cdot B = P(A \cdot (P^{-1}BQ^{-1}))Q$ donde P^{-1} y Q^{-1} son las permutaciones inversas de P y Q. Usando además que $\|A\| = \|PAQ\|$ si P y Q son permutaciones, deducimos

$$\|PAQ\|_m = \sup_{\|B\|=1} \|(PAQ)\cdot B\| = \sup_{\|B\|=1} \|P(A\cdot(P^{-1}BQ^{-1}))Q\| = \sup_{\|B\|=1} \|A\cdot(P^{-1}BQ^{-1})\|$$

Llamando $X = P^{-1}BQ^{-1}$ y usando que $1 = \|B\| = \|P^{-1}BQ^{-1}\| = \|X\|$ obtenemos que

$$\|PAQ\|_m = \sup_{\|X\|=1} \|A \cdot X\| = \|A\|_m = \|A\| = \|PAQ\|$$

Luego, $\|PAQ\| = \|PAQ\|_m$, como queríamos probar.

- Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\|A\| = \|A\|_m$, entonces, por las propiedades de las normas, tenemos que $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\| = |\lambda| \cdot \|A\|_m = \|\lambda A\|_m$.

- En la demostración de la desigualdad de Schur (corolario 2.10) probamos que $c(A) \leq \|A\|$, luego es evidente que si $\|A\| = 1$, entonces $c(A) \leq \|A\| = 1 \Rightarrow c(A) \leq 1$. Análogamente para la norma fila, usando que $\|A^t\| = \|A\| = 1$ y que $c(A^t) = r(A)$.

$\square$

Finalmente, podemos demostrar el resultado que buscábamos. Para ello, utilizaremos el lema y la proposición anteriores, ademas del Lema 4.3. Nos apoyaremos en encontrar una serie de equivalencias que nos caractericen las matrices que tienen igual norma de operador y de multiplicador de Schur. Veámoslo.

Teorema 4.11. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*
a) $\|A\| = \|A\|_m$
b) $\|A \cdot \overline{A}\| = \|A\|^2$
c) $\exists \lambda > 0$*,* $P, Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *permutaciones,* $U \in \mathcal{M}_{p\times p}(\mathbb{C})$ *unitaria (con* $1 \leq p \leq n$*) y* $C \in \mathcal{M}_{(n-p)\times(n-p)}(\mathbb{C})$ *contracción tal que*

$$PAQ = \lambda \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Demostración. $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Sea $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $\|B\| \leq 1$. Entonces, por la Proposición 4.9, y usando que $\|B\| = \|\overline{B}\|$ y la desigualdad de Schur se tiene

$$\|A \cdot B\| \leq \|A \cdot \overline{A}\|^{\frac{1}{2}} \cdot \|B \cdot \overline{B}\|^{\frac{1}{2}} \leq \|A \cdot \overline{A}\|^{\frac{1}{2}} \cdot \|B\|_m^{\frac{1}{2}} \cdot \|\overline{B}\|^{\frac{1}{2}} \leq \|A \cdot \overline{A}\|^{\frac{1}{2}} \cdot \|B\| \leq \|A \cdot \overline{A}\|^{\frac{1}{2}}$$

Así, se llega a que $\|A\|_m \leq \|A \cdot \overline{A}\|^{\frac{1}{2}}$, y como $\|A\|_m = \|A\|$, entonces $\|A\|^2 \leq \|A \cdot \overline{A}\|$.
Para la otra desigualdad, usando de nuevo que $\|\overline{A}\| = \|A\|$ y la desigualdad de Schur, se llega a

$$\|A \cdot \overline{A}\| \leq \|A\|_m \cdot \|\overline{A}\| \leq \|A\| \cdot \|A\| = \|A\|^2$$

como queríamos demostrar.

$\boxed{(b) \Rightarrow (c)}$ Nosotros podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\|A \cdot \overline{A}\| = 1 = \|A\|^2$, pues si $\|A\| \neq 1$ y probamos la implicación para $\frac{A}{\|A\|}$ (que sí tiene norma igual a 1), entonces

$$P\frac{A}{\|A\|}Q = \lambda \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \Rightarrow PAQ = \lambda \|A\| \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Por tanto, existe un vector unitario $x = (x_1, \cdots, x_n)$ con $x_j \geq 0$ y tal que $\|\left(A \cdot \overline{A}\right) x\| = 1 = \|x\|$. Veámoslo.

$$1 = \|A \cdot \overline{A}\| = \sup_{\|y\|=1} \|\left(A \cdot \overline{A}\right) y\| = \|\left(A \cdot \overline{A}\right) \overline{x}\|$$

con $\|\overline{x}\| = 1$ y $\overline{x} = (\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n)$. Tomando $x = (|\overline{x}_1|, \cdots, |\overline{x}_n|)$ ya lo tendríamos.
Como una permutación de columnas (filas) en A resulta en la misma permutación de columnas (filas) en $A \cdot \overline{A}$, y como para alguna permutación Q, Qx tiene la propiedad de que todas las coordenadas distintas de cero preceden a las coordenadas nulas (si las hay), entonces podemos asumir que, realizando las permutaciones oportunas

- Para algún p, con $1 \leq p \leq n$, se tiene que $x_1, \cdots, x_p > 0$ y $x_{p+1} = \cdots = x_n = 0$
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 x_j > 0$, para $i \in \{1, \cdots, q\}$, con $1 \leq q \leq n$
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 x_j = 0$, para $i \in \{q+1, \cdots, n\}$

Ahora, también tenemos que, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el tercer apartado del lema anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} 1 = \|\left(A \cdot \overline{A}\right) x\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 x_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 x_j^2 \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} r(A)^2 \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 x_j^2 \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 x_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right) x_j^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} c(A)^2 x_j^2 \leq \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \|x\|^2 = 1 \end{aligned}$$

Así, todas las desigualdades anteriores son igualdades, y concluimos que

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 = 1$, para $x_j \neq 0$, es decir, cuando $1 \leq j \leq p$
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = 1$, cuando $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 x_j^2 > 0$, es decir, cuando $1 \leq i \leq q$

- Para cada i, los vectores $(|a_{i1}|, \cdots, |a_{in}|)$ y $(|a_{i1}|x_1, \cdots, |a_{in}|x_n)$ son linealmente dependientes

Esto último ocurre al tener que la desigualdad de Cauchy-Schwarz es una igualdad. Vamos a verlo. Sean f y g dos vectores no nulos de un espacio de Hilbert real y sea λ un número real. Consideramos la función $p(\lambda) = \|\lambda f - g\|^2 = \lambda^2\|f\|^2 + \|g\|^2 - 2\lambda(f|g)$. Por lo tanto, p es un polinomio de segundo grado, y como $p(\lambda) \geq 0, \forall\lambda$ real, se tiene que p posee, a lo sumo, una raíz real. Deducimos pues que el discriminante de la ecuación $p(\lambda) = 0$ es no positivo, de modo que $4|(f|g)|^2 - 4\|f\|^2 \cdot \|g\|^2 \leq 0$, es decir, $|(f|g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$, por lo que obtenemos la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Si tomamos f y g tales que la desigualdad es una igualdad, entonces la función p tiene una raíz doble, es decir, existe un λ real tal que $p(\lambda) = 0$, luego $\|\lambda f - g\| = 0$ y obtenemos que $\lambda f = g$, o lo que es lo mismo, que f y g son linealmente dependientes.

Luego, deducimos que

- Para $1 \leq i \leq q$, como $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2 = 1$ y se cumple la dependencia lineal, existe $\lambda_i > 0$ tal que $|a_{ij}|\lambda_i = |a_{ij}|x_j$, para $j \in \{1, \cdots, n\}$.
- Como $x_j = 0$, para $j \in \{p+1, \cdots, n\}$, nosotros tenemos por la dependencia lineal que $|a_{ij}| = 0$, con $1 \leq i \leq q$ y $p+1 \leq j \leq n$.
- También, $|a_{ij}| = 0$ para $q+1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq p$, porque $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2x_j^2 = 0$ para $q+1 \leq i \leq n$ y $x_j > 0$ para $1 \leq j \leq p$.

Vamos a probar que $p = q$. Supongamos primero que $p < q$. Tendríamos que nuestra matriz A sería de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qp} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{(q+1)(p+1)} & \cdots & a_{(q+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n(p+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces, como las primeras p filas de A son de norma 1, el Lema 4.3 nos dice que para $1 \leq i \leq p$ la fila i-ésima es ortogonal a cualquier otra fila de A. Para las últimas $n-q$ filas es evidente que esto se cumple, pero si $k \in \{p+1, \cdots, q\}$ entonces la k-ésima fila de A también debe verificar ser ortogonal a las p primeras filas. Veamos que se cumple que las filas k-ésimas son nulas, luego tendríamos una contradicción, ya que tienen norma igual a 1. Para ello, consideraremos la submatriz de A formada por las primeras p filas y columnas. Por la construcción de A es evidente que si los primeros p elementos de la fila k son nulos, entonces toda la fila k es nula, luego tenemos que se cumple lo siguiente

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \vdots \\ a_{kp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como todas las filas de la submatriz tienen norma 1, son ortogonales entre sí por el Lema 4.3, luego existe una única solución del sistema, que sería la solución trivial, por lo que tendríamos que para todo $k \in \{p+1, \cdots, q\}$ la fila k es nula, y ya tendríamos nuestra contradicción. La prueba es análoga para $q < p$, usando el Lema 4.3 para las columnas de A y usando que $\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 = 1$ para $1 \leq j \leq p$. Por tanto, nos queda que $p = q$ y está claro que

$$A = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

donde U es una $p \times p$ matriz y C es una $(n-p) \times (n-p)$ matriz. C es claramente una contracción, pues $\|C\| \leq \|A\| = 1$, y también es evidente que U es unitaria, pues si $1 \leq i, j \leq p$ se tiene que usando de nuevo el Lema 4.3, si $1 \leq i, j \leq p$, como $\|Ae_i\| = 1$,

$$(UU^*)_{ij} = (AA^*)_{ij} = (Ae_i \,|Ae_j\,) = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j \\ \\ 0, \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Es análogo para U^*U. Luego $UU^* = U^*U = I_p$ y U es una matriz unitaria.

$\boxed{(c) \Rightarrow (a)}$ Sean U y C las matrices dadas por hipótesis. En primer lugar, vamos a notar

$$B = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & C \cdot C^* \end{pmatrix} \quad B^* = \begin{pmatrix} U^* & 0 \\ 0 & C^* \end{pmatrix}$$

donde I_p es la matriz identidad de orden p. Es evidente ver que $\|I\| = 1$, pues como $\|Ie_1\| = \|e_1\| = 1$, tenemos que $\|I\| \geq 1$. También, sea $x = (x_1, \cdots, x_n)$, notamos $x^{(p)} = (x_1, \cdots, x_p)$ y $x^{(n-p)} = (x_{p+1}, \cdots, x_n)$ y tenemos, usando el corolario 2.10 y que $\|C^*\| = \|C\| \leq 1$, que

$$\begin{aligned}\|Ix\|^2 &= \|I_p x^{(p)}\|^2 + \|(C\cdot C^*)\,x^{(n-p)}\|^2 \le \|I_p\|^2\cdot\|x^{(p)}\|^2 + \|C\|_m^2\cdot\|C^*\|^2\cdot\|x^{(n-p)}\|^2\\ &\le \|x^{(p)}\|^2 + \|C\|^4\cdot\|x^{(n-p)}\|^2 \le \|x^{(p)}\|^2 + \|x^{(n-p)}\|^2 = \|x\|^2\\ &\Rightarrow \|I\|\le 1\end{aligned}$$

Luego, ya tenemos que $\|I\| = 1$. De igual forma, tenemos que $\|B^*\| = \|B\| \le 1$, pues

$$\begin{aligned}\|Bx\|^2 &\le \|Ux^{(p)}\|^2 + \|Cx^{(n-p)}\|^2 \le \|U\|^2\cdot\|x^{(p)}\|^2 + \|C\|^2\cdot\|x^{(n-p)}\|^2\\ &\le \|x^{(p)}\|^2 + \|x^{(n-p)}\|^2 = \|x\|^2\\ &\Rightarrow \|B\|\le 1\end{aligned}$$

También, se puede deducir que

$$\|B\|_m = \sup_{\|C\|\le 1}\|B\cdot C\| \ge \|B\cdot B^*\| = \|I\| = 1 \Rightarrow \|B\|_m \ge 1$$

Por tanto, usando la desigualdad de Schur (corolario 2.10) llegamos a que

$$1 \le \|B\|_m \le \|B\| \le 1 \Rightarrow \|B\|_m = \|B\|$$

Usando ahora el segundo apartado del Lema 4.10, para $\lambda > 0$ el dado por hipótesis, tenemos que $\|\lambda B\|_m = \|\lambda B\|$. Pero como, por hipótesis, existen P y Q permutaciones tales que $PAQ = \lambda B$, entonces se cumple que $\|PAQ\|_m = \|PAQ\|$.

Finalmente, usando el primer apartado del Lema 4.10 para las permutaciones P^{-1} y Q^{-1}, llegamos a que $\|P^{-1}(PAQ)Q^{-1}\|_m = \|P^{-1}(PAQ)Q^{-1}\|$, o lo que es lo mismo, $\|A\|_m = \|A\|$, y así terminamos la demostración.

□

Nota 4.12. Tomando $P = Q = Id_n$ con Id_n la matriz identidad de dimensión n, y C una matriz unitaria, nos encontramos con que, siguiendo la notación de la tercera equivalencia del teorema, la matriz A no es más que un múltiplo escalar de una matriz unitaria, ya que, usando la misma definición que en la demostración para la matriz B

$$BB^* = \begin{pmatrix} U & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} U^* & 0\\ 0 & C^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} UU^* & 0\\ 0 & CC^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_p & 0\\ 0 & Id_{n-p}\end{pmatrix} = Id_n$$

$$B^*B = \begin{pmatrix} U^* & 0\\ 0 & C^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & 0\\ 0 & C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^*U & 0\\ 0 & C^*C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_p & 0\\ 0 & Id_{n-p}\end{pmatrix} = Id_n$$

Luego B es claramente una matriz unitaria. Deducimos pues, por la equivalencia del teorema, que las matrices unitarias (y los productos escalares de matrices unitarias) verifican que la desigualdad de Schur es una igualdad, como ya probamos en el Teorema 4.2.

Hemos hallado pues una caracterización para las matrices de norma de multiplicador extremal. Las matrices que verifiquen lo anterior tendrán también otra propiedad interesante, ya que también son extremales para los corolarios 2.6 y 2.9.

Corolario 4.13. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ verificando cualquiera de las tres equivalencias del Teorema 4.11. Entonces*

$$\|A\|_m = \|A\| = c(A) = r(A)$$

con $c(\cdot)$ y $r(\cdot)$ las normas columna y fila, respectivamente.

Demostración. Por el Teorema 4.11 y el corolario 2.6, sabemos que $\|A\|_m = \|A\|$ y que $\|A\|_m \leq c(A)$. En la demostración de la desigualdad de Schur (corolario 2.10) vimos que $c(A) \leq \|A\|$. Luego nos queda

$$\begin{aligned} &\|A\| = \|A\|_m \leq c(A) \leq \|A\| \\ &\Rightarrow \|A\| = \|A\|_m = c(A) \end{aligned}$$

Ahora, usando que $\|A\| = \|A^t\|$ y el corolario 2.9, que nos decía que $\|A\|_m \leq r(A)$, tenemos que

$$\begin{aligned} &\|A\| = \|A\|_m \leq r(A) = c(A^t) \leq \|A^t\| = \|A\| \\ &\Rightarrow \|A\| = \|A\|_m = r(A) \end{aligned}$$

Por tanto, $\|A\| = \|A\|_m = c(A) = r(A)$ como queríamos probar.

$\square$

Capítulo 5

Truncación triangular de matrices

En este capítulo vamos a centrarnos en un operador de multiplicación de Schur especial, el inducido por la matriz

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Si tomamos $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, con $A = (a_{ij})$, y le aplicamos el operador de multiplicación por T_n, nos queda

$$T_n \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

En esta sección vamos a dar una estimación del orden de la norma del operador anterior, el cual a partir de ahora notaremos como el operador de truncación triangular. Kwapien y Pelczynski [6] probaron que $\|T_n\|_m = O(log(n))$, y después Davidson [2] lo mejoró, encontrando una estimación inferior

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\|T_n\|_m}{\log n} \geq \frac{4}{5\pi}.$$

Sin embargo, nosotros daremos una estimación más precisa, que fue descubierta por Angelos, Cowen y Narayan [1]. En su artículo, los autores se apoyan para la prueba en la igualdad mencionada en la Nota 2.4, sin embargo, realmente sólo es necesaria la desigualdad del Teorema 2.3, por lo tanto, no necesitamos dicha igualdad, que como ya mencionamos antes, es un resultado mucho más profundo que sale fuera de los objetivos del trabajo.

Antes de nada, necesitaremos algunas herramientas para la prueba. Para comenzar, definiremos y veremos algunas propiedades de los operadores de Toeplitz, para lo cual primero pasaremos a definir el espacio de Hardy. Para los resultados referentes a este tipo de operadores, nos apoyaremos en los vistos por Douglas [3], aunque añadiremos algunas demostraciones que nos serán útiles.

Definición 5.1. Llamamos espacio de Hardy H^2 a

$$H^2 = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) : \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = 0, \forall n < 0 \right\}$$

Es evidente pues que H^2 es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{T})$. Por tanto, podemos decir que existe P proyección ortogonal, con $P : L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow H^2$.

Proposición 5.2. *Sea $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Definimos el operador de multiplicación por φ como*

$$\begin{aligned} M_\varphi \colon L^2(\mathbb{T}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{T}) \\ f &\longmapsto \varphi f \end{aligned}$$

Entonces M_φ es un operador lineal y continuo de $L^2(\mathbb{T})$ en $L^2(\mathbb{T})$.

Demostración. Es trivial ver que M_φ es lineal. Vamos a probar que es continua. Para ello, usaremos que φ es esencialmente acotada por pertenecer a $L^\infty(\mathbb{T})$.

$$\begin{aligned} \|M_\varphi(f)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \|\varphi f\|^2_{L^2(\mathbb{T})} &= \int_0^{2\pi} |\varphi(t)|^2 |f(t)|^2 dt \\ &\leq \|\varphi\|^2_{L^\infty(\mathbb{T})} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \|\varphi\|^2_{L^\infty(\mathbb{T})} \cdot \|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

Luego, $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$, por lo que tenemos que M_φ es continua. Por tanto, $M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))$ (operadores lineales y continuos de $L^2(\mathbb{T})$ en sí mismo).

□

Una vez definidos el operador de multiplicación por φ y el espacio de Hardy, podemos pasar a definir lo que se conoce como un operador de Toeplitz.

Definición 5.3. Sea $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, definimos el operador de Toeplitz asociado a φ como

$$\begin{aligned} T_\varphi \colon H^2 &\longrightarrow H^2 \\ f &\longmapsto T_\varphi(f) = P(M_\varphi(j(f))) \end{aligned}$$

con $P : L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow H^2$ la proyección ortogonal y $j : H^2 \longrightarrow L^2(\mathbb{T})$ la inclusión.

Es evidente que un operador de Toeplitz es lineal y continuo, por ser composición de operadores lineales y continuos.

Los resultados referentes a los operadores de Toeplitz que necesitamos son los que veremos a continuación. El primero de ellos nos dirá que forma tiene la matriz asociada al operador de Toeplitz, y el segundo nos permitirá acotar superiormente la norma de dicho operador por la norma de $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$.

Proposición 5.4. *Si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, con $\varphi(e^{i\theta}) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(n)e^{in\theta}$, el operador de Toeplitz T_φ tiene por matriz asociada a*

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \widehat{\varphi}(-2) & \cdots \\ \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \cdots \\ \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Demostración. Sea $T_\varphi = (t_{nm})$. Sabemos que se tiene

$$Pe^{ik\theta} = \begin{cases} 0, \text{ si } k < 0 \\ \\ e^{ik\theta}, \text{ si } k \geq 0 \end{cases}$$

Luego nos queda que

$$\begin{aligned} t_{nm} &= \left(T_\varphi\left(e^{im\theta}\right)\Big| e^{in\theta}\right) = \left(P\left(M_\varphi\left(j\left(e^{im\theta}\right)\right)\right)\Big| e^{in\theta}\right) = \left(P\left(\varphi e^{im\theta}\right)\Big| e^{in\theta}\right) \\ &= \left(P\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(k)e^{i(k+m)\theta}\right)\Bigg| e^{in\theta}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(k)\left(Pe^{i(k+m)\theta}\Big| e^{in\theta}\right) \\ &= \sum_{k=-m}^{\infty} \widehat{\varphi}(k)\left(e^{i(k+m)\theta}\Big| e^{in\theta}\right) = \widehat{\varphi}(n-m) \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

□

Teorema 5.5. *Si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, el operador de Toeplitz asociado a φ, T_φ, verifica que $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$.*

Demostración. Por la continuidad de P y j y como $\|P\| \leq 1$ y $\|j\| \leq 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|T_\varphi(f)\|_{H^2} &= \|P(\varphi(j(f)))\|_{H^2} \leq \|P\| \cdot \|\varphi(j(f))\|_{L^2(\mathbb{T})} \\
&\leq \|P\| \cdot \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \cdot \|j(f)\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|P\| \cdot \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \cdot \|j\| \cdot \|f\|_{H^2} \\
&\leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \cdot \|f\|_{H^2}
\end{aligned}$$

Luego, $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$, como queríamos probar. □

Nota 5.6. De hecho, se puede probar que lo anterior es una igualdad, es decir, que la aplicación

$$\begin{aligned}
\xi\colon L^\infty(\mathbb{T}) &\longrightarrow \mathcal{L}(H^2) \\
\varphi &\longmapsto T_\varphi
\end{aligned}$$

es una isometría. Sin embargo, nosotros sólo necesitamos la primera desigualdad para la demostración que buscamos. Como ya mencionamos antes, la prueba de esta igualdad fue dada por Douglas [3].

El último resultado que necesitaremos es una desigualdad que aparece en la demostración de la fórmula de Wallis. Dicha demostración es un resultado de Angus E. Taylor y W. Robert Mann [9]. Antes de verlo, necesitaremos definir la función *Beta*, la cual nos ayudará en la prueba, al relacionarla con la función *Gamma*, que definimos en el apéndice, en la Definición 6.11.

Definición 5.7. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, llamaremos función *Beta* a

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

Proposición 5.8. *Si $x > 0$ e $y > 0$, podemos relacionar la función Beta con la función Gamma de la siguiente forma:*

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Demostración. Recordemos que $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$. Realizamos el cambio $t = \dfrac{u}{1+u}$, $dt = \dfrac{du}{(1+u)^2}$. Así,

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_0^\infty \left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{y-1}\frac{du}{(1+u)^2}$$

Ahora hacemos el cambio $t = uv$ y $dt = vdu$ en la función *Gamma*.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty (uv)^{x-1} e^{-uv} v du = \int_0^\infty u^{x-1} v^x e^{-uv} du$$

Multiplicamos por $v^{y-1}e^{-v}$ e integramos respecto de v:

$$\Gamma(x) \int_0^\infty v^{y-1} e^{-v} dv = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty v^{x+y-1} u^{x-1} e^{-v(1+u)} du \right) dv$$

Ahora bien, como $\Gamma(x) \int_0^\infty v^{y-1} e^{-v} dv = \Gamma(x)\Gamma(y)$, cambiando el orden de integración en lo anterior tenemos que

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty u^{x-1} \left(\int_0^\infty v^{x+y-1} e^{-v(1+u)} dv \right) du$$

Hacemos el cambio $v = \dfrac{w}{1+u}$, $dv = \dfrac{dw}{1+u}$. Así,

$$\int_0^\infty v^{x+y-1} e^{-v(1+u)} dv = \frac{1}{(1+u)^{x+y}} \int_0^\infty w^{x+y-1} e^{-w} dw = \frac{\Gamma(x+y)}{(1+u)^{x+y}}$$

Por lo tanto, conseguimos que

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \Gamma(x+y) \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du \\ &= \Gamma(x+y) \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x-1}} \frac{1}{(1+u)^{y-1}} \frac{du}{(1+u)^2} \\ &= \Gamma(x+y)\beta(x,y) \end{aligned}$$

Despejando, ya tenemos lo que queríamos. □

Ahora pasaremos a probar la desigualdad que queremos. Ésta se encuentra en la demostración de la fórmula de Wallis, y es el último paso antes de hallar dicha fórmula (se añadirá el final de dicha demostración como corolario). Vamos pues a enunciar el resultado.

Lema 5.9. *Para todo $n \geq 1$ se verifica que*

$$\frac{2n}{2n+1} \frac{\pi}{2} \leq \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \right)^2 \frac{1}{2n+1} \leq \frac{\pi}{2}$$

Demostración. Veámoslo. Haciendo el cambio de variable $t = \operatorname{sen}^2\theta$, $dt = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta d\theta$, en la función *Beta* obtenemos que

$$\beta(x,y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta d\theta$$

En particular, con $x = n$, $y = \frac{1}{2}$, tenemos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-1}\theta d\theta = \frac{1}{2}\beta\left(n, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

Sabemos que $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ y que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Luego,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) \\ &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

O de otro modo,

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Así, tenemos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-1}\theta d\theta = \frac{2^{n-1}\Gamma(n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$$

De forma similar, se puede probar que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}\theta d\theta = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}\theta d\theta = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$$

Ahora, como $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, tenemos que $\forall n \geq 1$ se cumple que $\operatorname{sen}^{2n+1}\theta \leq \operatorname{sen}^{2n}\theta \leq \operatorname{sen}^{2n-1}\theta$, luego

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1}\theta d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}\theta d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-1}\theta d\theta$$

Es decir,

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} \leq \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{\pi}{2} \leq \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$$

De esta manera, multiplicando ahora por $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{2}{\pi}(2n+1)$ e invirtiendo, nos queda que

$$\frac{2n}{2n+1}\frac{\pi}{2} \leq \left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right)^2 \frac{1}{2n+1} \leq \frac{\pi}{2}$$

y ya tenemos la desigualdad deseada.

□

Corolario 5.10. *(Fórmula de Wallis) Se tiene que*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Demostración. Es obvio ver que

$$\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right)^2 \frac{1}{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}$$

y tomando límite cuando n tiende a infinito en la desigualdad anterior, ya lo tendríamos probado. □

Con todo lo anterior, ya estamos listos para probar el teorema principal de esta sección, el cual nos dará una estimación más precisa de la norma del operador de truncación triangular.

Teorema 5.11. *Para $n \geq 2$, la norma del operador de truncación triangular satisface que*

$$\left|\frac{\|T_n\|_m}{\log n} - \frac{1}{\pi}\right| \leq \left(1 + \frac{1}{\pi}\right)\frac{1}{\log n}$$

Demostración. $\boxed{\geq}$ Sea $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ dada por $f\left(e^{i\theta}\right) = i(\pi - \theta)$, para $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Podemos desarrollar f como una serie de Fourier

$$f\left(e^{i\theta}\right) = \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{1}{n} e^{in\theta}$$

Sea T_f el correspondiente operador de Toeplitz asociado a f en H^2. Usando el Teorema 5.5 tenemos que $\|T_f\| \leq \sup_\theta \left\{\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|\right\} = \pi$. Por la Proposición 5.4, sabemos que la matriz de T_f es aquella que vale 0 en las entradas (j,j) y que vale $\dfrac{1}{j-k}$ en las entradas (j,k), con $j \neq k$, $\forall j,k \geq 1$.

Para $n \geq 2$, denotamos por $(T_f)_n$ a la matriz $n \times n$ con 0 en las entradas (j,j) y que vale $\dfrac{1}{j-k}$ en las entradas (j,k), con $j \neq k$, $\forall j,k \in \{1,\cdots,n\}$. Como $(T_f)_n$ es una submatriz de T_f, tenemos que $\|(T_f)_n\| \leq \|T_f\| \leq \pi$, $\forall n \geq 2$. Sea T_n el operador de truncación triangular. Definimos entonces $S = T_n \cdot (T_f)_n$, como el operador $(T_f)_n$ truncado inferiormente.

Sea $v_n = (1, 1, \cdots, 1) \in \mathbb{C}^n$. Obtenemos que

$$\|S\| \geq \frac{\|Sv_n\|}{\|v_n\|} = \frac{\|\left(T_n \cdot (T_f)_n\right) v_n\|}{\|v_n\|} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Como se cumple que

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \geq \int_1^{k+1} \frac{1}{x} dx = [\log(x)]_1^{k+1} = \log(k+1)$$

Luego, nos queda que

$$\|S\| \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (\log(k+1))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ahora, como también tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} (\log(k+1))^2 \geq \int_0^{n-1} (\log(x+1))^2 \, dx &= \left[(x+1)\left(\log^2(x+1) - 2\log(x+1) + 2\right)\right]_0^{n-1} \\
&= n\log^2(n) - 2n\log(n) + 2n - 2 \geq n\log^2(n) - 2n\log(n) + n \\
&= n\left(\log(n) - 1\right)^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, finalmente obtenemos que

$$\|S\| \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \left(n\left(\log(n) - 1\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{n} \left(\log(n) - 1\right) = \log(n) - 1$$

Así, obtenemos una cota para $\|T_n\|_m$, pues se tiene que

$$\log(n) - 1 \leq \|S\| = \|T_n \cdot (T_f)_n\| \leq \|T_n\|_m \cdot \|(T_f)_n\| \leq \|T_n\|_m \pi \Rightarrow \|T_n\|_m \geq \frac{\log(n) - 1}{\pi}$$

Operando un poco y usando que como $n \geq 2$ se tiene que $\log(n) > 0$, se obtiene la desigualdad deseada. Veámoslo.

$$\begin{aligned}
\frac{\|T_n\|_m}{\log(n)} \geq \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi\log(n)} \Rightarrow \frac{\|T_n\|_m}{\log(n)} - \frac{1}{\pi} &\geq -\frac{1}{\pi\log(n)} \geq -\frac{1}{\pi\log(n)} - \frac{1}{\log(n)} \\
&= -\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)\frac{1}{\log(n)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, llegamos a que $\dfrac{\|T_n\|_m}{\log(n)} - \dfrac{1}{\pi} \geq -\left(1+\dfrac{1}{\pi}\right)\dfrac{1}{\log(n)}$, y ya tenemos la primera desigualdad.

$\boxed{\leq}$ Para probar esta desigualdad usaremos el Teorema 2.3 y las funciones $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ y $g(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1-z}}$ con z en el disco unidad abierto.

Tenemos que, para todo z en el disco, $f(z) = g(z)^2$. También sabemos que f tiene un desarrollo en serie geométrica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

y g tiene un desarrollo en serie binómica

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

con $c_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right)\cdots\left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)$ para todo $n > 0$ y $c_0 = 1$.

Tenemos pues que, para todo z

$$\begin{aligned} g(z)^2 = f(z) \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\right) &= \sum_{m=0}^{\infty} z^m \\ \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n+k=m} c_n c_k\right) z^m &= \sum_{m=0}^{\infty} z^m \end{aligned}$$

Por tanto, si fijamos m y consideramos el coeficiente que acompaña a z^m en ambos lados de la igualdad, deducimos

$$\sum_{n+k=m} c_n c_k = \sum_{n=0}^{m} c_n c_{m-n} = 1$$

Esto ocurre para todo $m \in \mathbb{N}$. Ahora, vamos a considerar la matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, con $A = (r_{jk})$, definida como

$$\begin{aligned} &r_{jk} = 0, \text{ para } j < k \\ &r_{jj} = c_0 = 1 \\ &r_{jk} = c_{j-k} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\cdots\left(\frac{2(j-k)-1}{2(j-k)}\right), \text{ para } j < k \end{aligned}$$

Vamos a probar que $A^2 = T_n$. Para ello, usaremos inducción en n. Con $n = 2$ es evidente, pues

$$AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = T_2$$

Suponemos pues que se cumple la igualdad para $n-1$ y vamos a probar que también se cumple para n. Tenemos que

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & c_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & c_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & c_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & c_1 & 1 & 0 \\ c_{n-1} & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $x \in \mathbb{C}^{n-1}$ con $x = (c_{n-1}, c_{n-2}, \cdots, c_1)$ y $O \in \mathbb{C}^{n-1}$ con $O = (0, \cdots, 0)$. Entonces, escribimos A como

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & O^t \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

Denotamos $(A_{n-1})_k$ para $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ a la k-ésima columna de A_{n-1}. Por ser A una matriz triangular inferior, como el último coeficiente de sus primeras $n-1$ filas es 0, entonces la caja superior izquierda de dimensión $n-1$ de A^2 es igual al producto de las cajas superiores izquierdas de dimensión $n-1$ de A, luego aplicando la hipótesis de inducción tenemos que

$$\begin{aligned} AA &= \begin{pmatrix} A_{n-1} & O^t \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & O^t \\ x & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{n-1}^2 & O^t \\ xA_{n-1} + x & xO^t + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_{n-1} & O^t \\ xA_{n-1} + x & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Denotamos $X = xA_{n-1} + x$, con $X \in \mathbb{C}^{n-1}$. Por tanto, nos falta ver que $X = (1, 1, \ldots, 1)$.
Por hipótesis de inducción tenemos que, para $1 \leq j \leq n-1$

$$\left(A_{n-1}^2\right)_{j1} = \sum_{k=0}^{j-1} c_k c_{j-1-k} = 1$$

Tenemos pues que, para $1 \leq k \leq n-2$

$$\begin{aligned}
X_{n-1} &= (xA_{n-1})_{n-1} + x_{n-1} = c_1 + c_1 = \left(A_{n-1}^2\right)_{21} = 1 \\
X_{n-2} &= (xA_{n-1})_{n-2} + x_{n-2} = c_2 + c_1 c_1 + c_2 = \left(A_{n-1}^2\right)_{31} = 1 \\
&\vdots \\
X_{n-k} &= (xA_{n-1})_{n-k} + x_{n-k} = \sum_{j=n-k}^{n-1} x_j c_{j+k-n} + x_{n-k} = \sum_{j=n-k}^{n-1} c_{n-j} c_{j+k-n} + c_k \\
&= \sum_{j=n-k}^{n} c_{n-j} c_{j+k-n} = \sum_{l=0}^{k} c_{k-l} c_l = \left(A_{n-1}^2\right)_{(k+1)1} = 1
\end{aligned}$$

Ya hemos visto pues que $X = (X_1, 1, 1, \ldots, 1)$, luego sólo falta ver cuanto vale X_1. Sin embargo, aquí no podemos usar la inducción. Para ello, usaremos el razonamiento que vimos al principio de la prueba de esta desigualdad, el cual decía que para cualquier m natural

$$\sum_{a=0}^{m} c_a c_{m-a} = 1$$

Ahora si $m = n-1$, usando lo anterior tenemos que

$$X_1 = (xA_{n-1})_1 + x_1 = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-1-k} + c_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k} = 1$$

Por lo tanto, ya tenemos que $X = (1, \ldots, 1)$ y deducimos que, efectivamente, $AA = T_n$.
Ahora vamos a utilizar el Teorema 2.3, tomando $R^* = S = A$, pues entonces $R^* S = AA = T_n$ y estamos en las condiciones del teorema.
Así, tenemos que $R^* = S = (r_{jk})$, con r_{jk} los definidos anteriormente. Ahora, es evidente por su definición que $c(S) = \|Se_1\|$, y como los coeficientes de R son reales, entonces $R^* = R^t$. Como $c(R) = r(R^t)$ y como la norma fila de R^t es la norma euclídea de su última fila, que es la última columna de R, deducimos que $c(R) = \|Re_n\|$.

Por tanto, $c(R) = c(S)$, y su valor es la norma euclídea de la última columna de R. Así, tenemos que

$$c(S)c(R) = c(R)^2 = 1 + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{4}\right) \cdots \left(\frac{2m-1}{2m}\right) \right)^2$$

Del Lema 5.9, sabemos que

$$\frac{2m}{2m+1}\frac{\pi}{2} \leq \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}\right)^2 \frac{1}{2m+1} \leq \frac{\pi}{2}$$

Luego, multiplicando por $2m+1$ e invirtiendo, llegamos a

$$\frac{1}{2m+1}\frac{2}{\pi} \leq \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}\right)^2 \leq \frac{2}{\pi}\frac{1}{2m} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{m}$$

También sabemos que

$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \leq 1 + \int_1^{n-1} \frac{1}{x} dx = 1 + [\log(x)]_1^{n-1} = 1 + \log(n-1)$$

Por lo tanto, llegamos al final a que

$$\begin{aligned} \|T_n\|_m \leq c(R)^2 = 1 + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{4}\right) \cdots \left(\frac{2m-1}{2m}\right) \right)^2 &\leq 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \\ \leq 1 + \frac{1}{\pi}(1 + \log(n-1)) \leq 1 + \frac{1}{\pi}(1 + \log(n)) \end{aligned}$$

Así, obtenemos la desigualdad que queríamos, pues

$$\frac{\|T_n\|_m}{\log(n)} \leq \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\log(n)}\left(1 + \frac{1}{\pi}\right) \Rightarrow \frac{\|T_n\|_m}{\log(n)} - \frac{1}{\pi} \leq \frac{1}{\log(n)}\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)$$

Finalmente, tenemos que

$$-\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)\frac{1}{\log(n)} \leq \frac{\|T_n\|_m}{\log(n)} - \frac{1}{\pi} \leq \frac{1}{\log(n)}\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)$$

Luego nos queda que

$$\left| \frac{\|T_n\|_m}{\log(n)} - \frac{1}{\pi} \right| \leq \frac{1}{\log(n)}\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)$$

como se quería demostrar.

$\square$

Tenemos pues que hemos encontrado una estimación mucho más precisa de la norma del operador de truncación triangular. Viendo con más detalle en la acotación anterior, tenemos que

$$-\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\frac{1}{\log n} \leq \frac{\|T_n\|_m}{\log n} - \frac{1}{\pi} \leq \left(1+\frac{1}{\pi}\right)\frac{1}{\log n}$$

Tomando límite cuando n tiende a infinito, podemos concluir la estimación óptima de dicha norma, ya que tendríamos que

$$-\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\frac{1}{\log n} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{\|T_n\|_m}{\log n} - \frac{1}{\pi} \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\frac{1}{\log n}$$

Usando que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n} = 0$, concluímos que

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\frac{\|T_n\|_m}{\log n} - \frac{1}{\pi} \leq 0$$

$$\frac{1}{\pi} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{\|T_n\|_m}{\log n} \leq \frac{1}{\pi}$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty}\frac{\|T_n\|_m}{\log n} = \frac{1}{\pi}$ y tenemos la estimación que deseamos, la cual claramente mejora las estimaciones anteriores.
También, gracias a ésta, resulta evidente que no tiene sentido considerar el operador de truncación triangular para el caso de dimensión infinita, porque su norma sería infinito.

Capítulo 6

Apéndice

En esta sección vamos a dar una serie de definiciones y resultados que usamos a lo largo de este trabajo, que han sido vistos y probados en el grado, y por ello no necesitan demostración.

Teorema 6.1. *Sean X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Son equivalentes:*

- *T es continua*
- *T es continua en el origen*
- *Existe una constante $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$, $\forall x \in X$*

Definición 6.2. Sean X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal y continua. Se define la norma de T como el ínfimo $\|T\|$ de las constantes $M \geq 0$ tales que $\|Tx\| \leq M\|x\|$, para todo $x \in X$. Es fácil ver que el ínfimo se alcanza porque el conjunto de tales constantes es cerrado. Tenemos por lo tanto $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$, para todo $x \in X$.

Teorema 6.3. *Si X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal y continua, entonces se tiene que, si $x \in X$*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

Teorema 6.4. *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Si x, y son vectores en un espacio prehilbertiano, entonces $|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.*

Definición 6.5. Sea H un espacio de Hilbert y sea $K \subseteq H$ un subconjunto convexo y cerrado. Consideremos para cada $x \in H$ el único vector Px tal que

$$\|x - Px\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|$$

Se dice que la aplicación $P : H \to K$ es la proyección métrica de H sobre K.

Proposición 6.6. *Sea H un espacio de Hilbert, sea $K \subseteq H$ un subconjunto convexo y cerrado, y sea P la proyección métrica de H sobre K. Entonces $\|Px - Py\| \leq \|x - y\|$, para todo $x, y \in H$. En particular, se deduce que $\|P\| \leq 1$.*

Proposición 6.7. *Sea H un espacio de Hilbert, $E \subseteq H$ un subespacio cerrado, y sea P la proyección métrica de H sobre E. Entonces P es una aplicación lineal y continua.*

Definición 6.8. Se dice que una sucesión de vectores (u_n) en un espacio prehilbertiano es un sistema ortogonal si se verifica $(u_n|u_m) = 0$ para todo $n \neq m$. Si además $\|u_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces se dice que (u_n) es un sistema ortonormal.

Definición 6.9. Se dice que un sistema ortonormal (u_n) en un espacio de Hilbert H es completo cuando además, la variedad lineal generada por $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en H. También se dice que (u_n) es una base ortonormal de H. Si (u_n) es un sistema ortonormal completo de un espacio prehilbertiano H, entonces se define la sucesión (c_n) de coeficientes de Fourier de un vector $x \in H$ como $c_n = (x|u_n)$.

Proposición 6.10. *Sea $\{u_1, \ldots, u_n\}$ un sistema ortonormal completo finito en un espacio prehilbertiano H, y sea $x \in \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$, digamos $x = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k$. Entonces $c_k = (x|u_k)$ para todo $1 \leq k \leq n$, y además*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x|u_k)|^2$$

Definición 6.11. Si la parte real del número complejo z es positiva ($Re(z) > 0$), entonces la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

converge absolutamente. A esta función $\Gamma(z)$ se le conoce como la función *Gamma*.

Proposición 6.12. *Se cumple que*

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$
- *Si* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $\Gamma(n) = (n - 1)!$

Proposición 6.13. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ (semi)definida positiva si y sólo si todos los autovalores de A son reales y, si λ es un autovalor de A, entonces $\lambda > 0$ ($\lambda \geq 0$).*

Definición 6.14. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$. Se dice que

- A es simétrica si A es real y $A = A^t$

- A es hermítica si $A = A^*$
- A es ortogonal si A es real y $AA^t = A^tA = I$
- A es unitaria si $A^*A = AA^* = I$
- A es normal si $A^*A = AA^*$

Proposición 6.15. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Se tiene que*

- $det\,(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$*, donde λ_i son los autovalores de A*
- $tr\,(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$*, donde λ_i son los autovalores de A*
- *Si A es unitaria, entonces $|det\,(A)| = 1$*

Teorema 6.16. *(Teorema de diagonalización) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Entonces, A es normal si y solo si existe $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ unitaria tal que $U^*AU = D$, siendo D diagonal. Es decir, las matrices normales son las matrices diagonalizables con matriz de paso unitaria. En particular, se cumple para toda A hermítica.*

Teorema 6.17. *(Caracterización de las matrices definidas positivas). Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermítica. Entonces,*

- *A es definida positiva si y solo si todos los autovalores de A son positivos*
- *A es semidefinida positiva si y solo si todos los autovalores de A son no negativos*

Corolario 6.18. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermítica. Entonces,*

- *Si A es definida positiva, entonces $det\,(A) > 0$*
- *Si A es semidefinida positiva, entonces $det\,(A) \geq 0$*

Teorema 6.19. *(Criterio de Sylvester) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermítica, con $A = (a_{ij})$. Se define el menor principal superior como $\det(A_{kk})$, donde $A_{kk} = (a_{ij})$ con $1 \leq i, j \leq k$. De igual manera, se define el menor principal inferior como $\det\left(\overline{A}_{kk}\right)$, donde $\overline{A}_{kk} = (a_{ij})$ con $n + 1 - k \leq i, j \leq n$ Entonces*

- *Si todo menor principal de A (incluido su propio determinante) es no-negativo, A es una matriz semidefinida positiva.*
- *Si todo menor principal superior (o inferior) de A es positivo, incluyendo el $\det(A)$, A es definida positiva.*

- *Si los primeros $n-1$ menores principales superiores (o los primeros $n-1$ menores principales inferiores) de A son positivos y además det $(A) \geq 0$, A es semidefinida positiva.*

Corolario 6.20. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Entonces A es definida positiva si y sólo si todos los menores principales superiores (o inferiores) de A son positivos.*

Teorema 6.21. *(Desigualdad de las medias aritmética y geométrica) Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ entonces*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

La igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Definición 6.22. Sea H un espacio de Hilbert. Se dice que un operador lineal y continuo $U : H \to H$ es unitario si verifica que $U^*U = UU^* = I$, donde U^* es el operador adjunto de U e I representa el operador identidad.

Proposición 6.23. *Sea H es un espacio de Hilbert. Si U es un operador unitario en H, entonces se tiene que $\|U\| = 1$, donde $\|U\|$ representa la norma como operador de U.*

Definición 6.24. Sean H_1 y H_2 dos espacios de Hilbert. Se dice que $T : H_1 \to H_2$ es una isometría si se verifica que

$$(Tx\,|Ty\,) = (x|y)$$

para todo $x, y \in H_1$ donde $(\cdot|\cdot)_i$ representa el producto escalar asociado a H_i.

Proposición 6.25. *En los mismos términos de la definición anterior, decir que T es una isometría es equivalente a decir que, si $x \in H_1$, entonces*

$$\|Tx\|_2 = \|x\|_1$$

con $\|\cdot\|_i$ la norma asociada a H_i.

Bibliografía

[1] James R. Angelos, Carl C. Cowen, and Sivaram K. Narayan. Triangular truncation and finding the norm of a Hadamard multiplier. *Linear Algebra Appl.*, 170:117–135, 1992.

[2] Kenneth R. Davidson. *Nest algebras*, volume 191 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988. Triangular forms for operator algebras on Hilbert space.

[3] Ronald G. Douglas. *Banach algebra techniques in operator theory*, volume 179 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[4] Roger A. Horn. The Hadamard product. In *Matrix theory and applications (Phoenix, AZ, 1989)*, volume 40 of *Proc. Sympos. Appl. Math.*, pages 87–169. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[5] Roger A. Horn and Charles R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2013.

[6] S. Kwapień and A. Peł czyński. The main triangle projection in matrix spaces and its applications. *Studia Math.*, 34:43–68, 1970.

[7] Sing-Cheong Ong. On the Schur multiplier norm of matrices. *Linear Algebra Appl.*, 56:45–55, 1984.

[8] J. Schur. Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen. *J. Reine Angew. Math.*, 140:1–28, 1911.

[9] Angus E. Taylor and W. Robert Mann. *Advanced calculus*. John Wiley & Sons, Inc., New York, third edition, 1983.