MODELOS ESTADÍSTICOS DE RIESGO. APLICACIONES ACTUARIALES.

Elena Galeote López

MODELOS ESTADÍSTICOS DE RIESGO. APLICACIONES ACTUARIALES.

Elena Galeote López

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Inmaculada Barranco Chamorro

Índice general

English Abstract

Risk is an important topic in contemporary society. People are confronted with risks from financial markets, nuclear power plants, natural disasters and privacy leaks in ICT systems, these are just some of the areas in which uncertainty and risk of harm play an important role.

In this dissertation the probabilistic and statistical foundations of Risk Theory are developed in order to provide an analytic view to Actuarial Science. Practical examples and applications are given to support explanations.

We begin with a chapter of preliminaries in which results and definitions about the generating functions of probability and moments are given due to they are tools frequently used in this work.

Then we go into the individual risk model. We highlight the importance of mixed random variables in the economic and actuarial context. We present the individual model which is characterised by the fact that the portfolio of the insurance company is fixed, so the number of claims is limited. Claims X_i are random variables independently and with the same distribution, not necessarily with the same parameter. We focus on the study of the distribution of the claimed amount defined as $S = X_1 + \ldots + X_n$. For this, properties on the random variable S and approximations to high quantiles of its distribution are given.

Then we have the collective model. In this case the number of claims is modeled by a random variable N. Depending on the distribution that follows the number of claims, S, the claim amount will follow one distribution or another. We normally assume that the number of claims follows a Poisson, in this case the risk follows a compound Poisson. However, when there is overdispersion we will use the Negative Binomial. Finally, we present the Panjer formula that gives an algorithm for the explicit distribution of S when the amounts claimed are discrete.

Once the collective risk model is developed, we introduced the ruin theory. The ruin model describes the stability of an insurer. Starting from capital u at time $t = 0$, his capital is assumed to increase linearly in time by fixed annual premiums, but it de-

creases with a jump whenever a claim occurs. The insurer's capital in the instant t is a stochastic process, because, in this case, the number of claims is a random variable indexed by time. Ruin occurs when definite capital becomes negative. A limit will be given for the probability of coming to ruin in finite time.

It can be observed that a study of the amount claimed or risk is made on different occasions: first, in the individual model in which the number of claims is fixed, second, in the collective model, where the number of claims is modeled by a discrete random variable and in the latter case, in the ruin theory where it is shown that the number of claims is a random variable depending on time.

Resumen

El riesgo es un tema muy importante y presente en la sociedad contemporánea. Nos enfrentamos a riesgos de mercados financieros, centrales de energía nuclear, desastres naturales y fugas de privacidad en los sistemas TIC, entre otros casos. En este trabajo, se desarrollan fundamentos probabilísticos y estadísticos de la Teoría de Riesgo para proporcionar una visión analítica a la Ciencia Actuarial. Se darán ejemplos prácticos y aplicaciones para apoyar las explicaciones.

Comenzamos con un capítulo de preliminares en el que se definen y se dan resultados sobre las funciones generatrices de probabilidad y de momentos que son herramientas frecuentemente usadas en este trabajo.

Luego, nos adentramos en el modelo de riesgo individual. Destacamos la importancia de las variables aleatorias mixtas en el contexto económico y actuarial. Presentamos el modelo individual que se caracteriza porque la cartera de la compañía aseguradora es fija, por lo que el número de reclamaciones está acotado. Las reclamaciones X_i son v.a. independientes y con la misma distribución, pero no necesariamente de igual parámetro. Nos centramos en el estudio de la distribución de la cantidad reclamada definida como $S = X_1 + \ldots + X_n$. Para ello, se dan propiedades sobre la variable aleatoria S y aproximaciones a cuantiles altos de su distribución.

A continuación, tenemos el modelo colectivo. En este caso el número de reclamaciones es modelado por una variable aleatoria N. Según la distribución que siga el número de reclamaciones, la cantidad reclamada S seguirá una distribución u otra. Normalmente suponemos que el número de reclamaciones sigue una Poisson, en este caso el riesgo S sigue una Poisson compuesta. Sin embargo, cuando hay sobredispersión usaremos la Binomial Negativa. Finalmente, presentamos la fórmula de Panjer que da un algoritmo para la obtención explícita de la distribución de S en el caso de que las cantidades reclamadas sean discretas.

Una vez desarrollado el modelo de riesgo colectivo, introducimos la teoría de la ruina. El modelo de ruina describe la estabilidad de un asegurador. Comenzando con un capital u en el instante inicial, este capital aumenta de forma lineal a partir de primas

anuales fijas, pero cuando ocurren reclamaciones disminuye a saltos. El capital del asegurador en el instante t es un proceso estocástico, debido a que, en este caso, el número de reclamaciones es una variable aleatoria indexada por el tiempo. La ruina ocurre cuando el capital definido se hace negativo. Se dará una cota para la probabilidad de llegar a la ruina en tiempo finito.

Puede observarse que se hace un estudio de la cantidad reclamada o riesgo en diferentes ocasiones: primero, en el modelo individual en el que el número de reclamaciones es fijo, segundo, en el modelo colectivo, donde el número de reclamaciones es modelado por una variable aleatoria discreta y en el último caso, en la teoría de la ruina que se tiene que el número de reclamaciones es una variable aleatoria en función del tiempo.

1 Preliminares

1.1 Introducción

En este capítulo introducimos herramientas que nos van a ser útiles para trabajar con sumas de variables aleatorias independientes. Por ello, comenzamos estudiando funciones generatrices. Se darán resultados para la función generatriz de probabilidad y la función generatriz de momentos.
Comenzamos con el tipo más sencillo de función generatriz, que es la función generatriz de probabilidad. Esta está asociada a variables aleatorias discretas que toman valores enteros no negativos. Definiremos la convolución para variables aleatorias discretas, independientes e idénticamente distribuidas a través de la f.g.p. En primer lugar, en un número finito de variables aleatorias discretas y finalmente, en distribuciones compuestas, que son distribuciones de variables aleatorias obtenidas por la suma de un número aleatorio N de v.a. discretas independientes e idénticamente distribuidas $X_i, \quad \forall i = 1, .., N$. Este caso es de especial interés, ya que en los próximos capítulos definiremos el número de reclamaciones N como una v.a. de este tipo.
Daremos unos resultados sobre la función generatriz de probabilidad de una variable aleatoria que nos indicarán su utilidad y su relación con otros conceptos conocidos como los momentos que se utilizarán en los próximos capítulos para presentar aproximaciones a las distribución del número de reclamaciones entre otras cosas.
También se da la definición y resultados para la función generatriz de momentos usada durante el trabajo para encontrar la distribución y obtener momentos de distintas variables aleatorias tanto continuas como discretas.

1.2 Función generatriz de probabilidad

Definición 1.1. *Sea $a_0, a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de números reales. Si la serie*

$$P(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k.$$

*converge en algún intervalo $-s_0 < s < s_0$, entonces P(s) se denomina **función generatriz de probabilidad** asociada a la sucesión $\{a_k\}$.*

Observación 1.1. Si la sucesión $\{a_k\}$ está acotada, es decir $\exists\, M > 0$ tal que $|a_k| < M$, $\forall k$ entonces P(s) es convergente en $-1 < s < 1$.

Ejemplo 1.1. Sea $a_k = 1, \forall k$ entonces

$$P(s) = 1 + s^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} s^k = \frac{1}{1-s}, \quad |s| < 1.$$

Ejemplo 1.2. La función generatriz de probabilidad $(0, 0, 1, 1, 1, \ldots)$ es

$$P(s) = s^2 + s^3 + \ldots = \frac{s^2}{1-s}, \quad |s| < 1.$$

Ejemplo 1.3. Sea $a_k = \dfrac{1}{k!}$. $\quad k = 0, 1, 2, \ldots$

$$P(s) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}s + \frac{1}{2!}s^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} s^k = e^s, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.4. Sea la sucesión $a_k = \binom{n}{k}$, $\quad k = 0, \ldots, n$ y $a_k = 0$ para $k > n+1$.

$$P(s) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}s + \binom{n}{2}s^2 + \ldots + \binom{n}{n}s^n = (1+s)^n.$$

Definición 1.2. *Sea $\boldsymbol{X}$ una variable aleatoria discreta que toma valores enteros no negativos tal que $P[\boldsymbol{X} = k] = p_k$, $\quad k = 0, 1, 2, \ldots$*

*Entonces la **función generatriz de probabilidad** asociada a $\boldsymbol{X}$ es la función generatriz asociada a $\{p_k\}_{k \geq 0}$, es decir*

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k.$$

Ejemplo 1.5. Sea $X \sim Be(p)$, es decir $P[X = 0] = q, \quad P[X = 1] = p \quad (q = 1 - p)$

$$P(s) = q + ps, \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 1.6. Sea X= "número obtenido en el lanzamiento de un dado perfecto".

X $\in \{1, 2, ..., 6\}$; con $P[X = k] = \frac{1}{6} \; k = 1, ..., 6$. Entonces

$$P(s) = \frac{1}{6}s + \frac{1}{6}s^2 + ... + \frac{1}{6}s^6 = \frac{s + s^2 + ... + s^6}{6}.$$

Definición 1.3. *Sea X una variable aleatoria discreta que toma valores enteros no negativos tal que $p_k = P[X = k]$ y $q_k = P[X > k] = \sum_{j=k+1}^{\infty} p_j$.*

La ***función generatriz de la cola de la distribución*** *es la función generatriz asociada a la sucesión $\{q_k\}_{k \geq 0}$, es decir*

$$Q(s) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k s^k.$$

Existe una estrecha relación entre la función generatriz de probabilidad y la función generatriz de cola.

Teorema 1.1. *Si X es una variable aleatoria discreta que toma valores enteros no negativos que tiene como función generatriz de probabilidad P, entonces*

$$Q(s) = \frac{1 - P(s)}{1 - s}, \quad |s| < 1$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
p_k &= P[X = k] = P[X > k-1] - P[X > k] \\
&= q_{k-1} - q_k, \ \forall k \geq 1 \\
p_k &= q_{k-1} - q_k, \ k \geq 1 \\
p_k s^k &= q_{k-1} s^k - q_k s^k \\
\sum_{k=1}^{\infty} p_k s^k &= s \sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1} s^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} q_k s^k \\
P(s) - p_0 &= sQ(s) - [Q(s) - q_0] \\
P(s) - p_0 - q_0 &= Q(s)[s-1] \\
P(s) - p_0 - 1 + p_0 &= Q(s)[s-1] \\
\frac{P(s) - 1}{s - 1} &= Q(s) \\
\Rightarrow Q(s) &= \frac{1 - P(s)}{1 - s}
\end{aligned}
$$

La función generatriz de probabilidad es útil para el cálculo de momentos de la variable aleatoria X.

Definición 1.4. ***Momento factorial de orden k.***
Dada una variable aleatoria X, el momento factorial de orden k, se define como

$$f_k = E[X(X-1)...(X-k+1)]$$

Observación 1.2. Relación entre los momentos factoriales y los momentos ordinarios

$f_1 = EX = m_1$

$f_2 = E(X(X-1)) = EX^2 - EX = m_2 - m_1 \Rightarrow \mathrm{E}X^2 = f_2 + f_1$

La varianza en términos de los momentos factoriales

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = f_2 + f_1 - (f_1)^2$$

Teorema 1.2. *Sea X es una variable aleatoria discreta que toma valores enteros no negativos, con función generatriz de probabilidad P_X, entonces se verifica*

$$P_X^{k)}(1) = f_k = E[X(X-1)...(X-k+1)]$$

Demostración.

$$P_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

$P_X^{'}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k s^{k-1} \Rightarrow P_X^{'}(1) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = EX = f_1$

$P_X^{''}(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k s^{k-2} \Rightarrow P_X^{''}(1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k = E(X(X-1)) = f_2$

$P_X^{'''}(s) = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)p_k s^{k-3} \Rightarrow$

$P_X^{'''}(1) = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)p_k = E(X(X-1)(X-2)) = f_3$

$\vdots$

Así en general, $P_X^{k)}(1) = E[X(X-1)...(X-k+1)]$ ▮

<u>*Recordar*</u>:

$$P_X(1) = 1$$
$$P_X^{'}(1) = EX$$

Corolario 1.1. La varianza en términos de la función generatriz de probabilidad es

$$Var(X) = f_2 + f_1 - (f_1)^2 = P_X^{''}(1) + P_X^{'}(1) - (P_X^{''}(1))^2.$$

Corolario 1.2. La función generatriz de probabilidad de la cola también nos permite hallar momentos de X.

$$Var(X) = f_2 + f_1 - (f_1)^2 = 2Q'(1) + Q(1) - (Q(1))^2.$$

Demostración.

$$Q(s) = \frac{1-P(s)}{1-s} \Rightarrow Q(s)(1-s) = 1 - P(s) \Rightarrow P(s) = 1 - Q(s)(1-s)$$

Derivando, $P^{'}(s) = -[Q'(s)(1-s) - Q(s)] = Q(s) - Q'(s)(1-s)$

Luego, E$X = P'(1) = Q(1) = f_1$

Volviendo a derivar

$P''(s) = Q'(s) - Q''(s)(1-s) + Q'(s) = 2Q'(s) - Q''(s)(1-s)$

$P''(1) = 2Q'(1) = f_2$

Luego: $Var(X) = f_2 + f_1 - (f_1)^2 = 2Q'(1) + Q(1) - (Q(1))^2$

1.3 Convoluciones: caso discreto.

Lema 1.1. Sean X e Y variables aleatorias discretas que toman valores enteros no negativos e independientes con función de probabilidad $P[X = j] = a_j$ y $P[Y = j] = b_j$. Por la independencia, $P[X = j, Y = k] = a_j b_k$.
La suma $S = X + Y$ es una nueva variable aleatoria cuya distribución de probabilidad viene dada por

$$\begin{aligned} c_r &= P[S = r] \\ &= \sum_{j=0}^{r} P[X = j, Y = r - j] \\ &= a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + \dots + a_k b_{r-k} + \dots + a_r b_0. \\ r \in \mathbb{Z}^+ & . \end{aligned}$$

Es decir

$$c_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + \dots + a_k b_{r-k} + \dots + a_r b_0.$$

Podemos interpretar lo anterior como una operación entre sucesiones de números.

Definición 1.5. *Dadas a_k y b_k dos sucesiones numéricas con $k \geq 0$ no necesariamente distribuciones de probabilidad. Una nueva sucesión c_k formada a partir de ellas definida como*

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0$$

*A la expresión anterior se le denomina **convolución** de $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ y se denotará*

$$\{c_k\} = \{a_k\} * \{b_k\}$$

Por lo tanto, se puede decir que la distribución de probabilidad de la suma de variables aleatorias discretas que toman valores enteros no negativos e independientes es la convolución de las respectivas distribuciones de probabilidad.

Algunos ejemplos de convoluciones con sucesiones.

Ejemplo 1.7.

$$\begin{aligned} \text{Sea } a_k &= b_k = 1, \quad \forall k \geq 0 \\ c_k &= a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0 = k + 1. \\ \text{Luego, } \{1\} * \{1\} &= \{k + 1\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.8. Sea $a_k = k, b_k = 1, \quad \forall k \geq 0$ entonces

$$\begin{aligned} c_k &= a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0 \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + \ldots + k \cdot 1 \\ &= 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}. \end{aligned}$$

Luego, $\{k\} * \{1\} = \left\{ \dfrac{k(k+1)}{2} \right\}$.

Ejemplo 1.9. $a_0 = a_1 = \frac{1}{2}, a_k = 0, \quad k \geq 2$ y b_k cualquiera:

$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0 = \frac{1}{2} b_k + \frac{1}{2} b_{k-1}$.

En este caso

$\{a_k\} * \{b_k\} = \left\{ \dfrac{b_k + b_{k-1}}{2} \right\}$.

Teorema 1.3. *Sea $\{a_k\}$ una sucesión con función generatriz A(s) y $\{b_k\}$ otra sucesión con función generatriz B(s). Entonces la sucesión $\{c_k\} = \{a_k\} * \{b_k\}$ tiene como función generatriz de probabilidad*

$$C(s) = A(s)B(s).$$

Es decir, la función generatriz correspondiente al producto de convolución de dos sucesiones es el producto de las funciones generatrices.

Demostración.

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0 = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} C(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\Big) s^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} a_j b_{k-j} s^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j s^j \sum_{k=j}^{\infty} b_{k-j} s^{k-j} = A(s)B(s). \end{aligned}$$

Como consecuencia tenemos el siguiente **teorema**.

Teorema 1.4. *Sean X e Y dos variables aleatorias discretas que toman valores enteros no negativos e independientes con funciones generatrices de probabilidad $P_X(s)$ y $P_Y(s)$ respectivamente, entonces la función generatriz de $Z = X + Y$ es*

$$P_Z(s) = P_X(s) P_Y(s).$$

Demostración. Resulta obvia, pues si la función de probabilidad de X es $p_k = P[X = k]$ y la de Y es $q_k = P[Y = k]$, entonces hemos visto anteriormente que

$$P[X + Y = k] = p_0 q_k + p_1 q_{k-1} + \dots + p_k q_0.$$

Es decir

$$\{P[X + Y = k]\} = \{p_k\} * \{q_k\}$$

y por el teorema anterior

$$P_Z(s) = P_X(s) P_Y(s).$$

La convolución (o producto de convolución) se puede generalizar a más de dos sucesiones numéricas, siendo siempre la función generatriz del producto de convolución el producto de las respectivas funciones generatrices, así si tenemos tres sucesiones numéricas $\{a_k\}, \{b_k\}, \{c_k\}$ con función generatriz correspondiente A(s), B(s) y C(s) se verifica:

$$\{a_k\} * \{b_k\} * \{c_k\}$$

tiene como función generatriz A(s)B(s)C(s).

La operación convolución es **asociativa** y **conmutativa**.

Consecuentemente, se puede definir la operación "convolución potencia" de una sucesión:

$\{a_n\}^{2*} = \{a_n\} * \{a_n\}$

y en general:

$$\{a_n\}^{k*} = \{a_n\}^{(k-1)*} * \{a_n\},\ k = 3, 4, \ldots$$

por tanto se tendrá que la función generatriz de $\{a_n\}^{k*}$ es $(A(s))^k$.

Como consecuencia de las consideraciones hechas anteriormente, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.5. *Si $X_1,\ldots,X_n$ son variables aleatorias independientes que toman valores enteros no negativos con funciones generatrices de probabilidad $P_1(s), \ldots, P_n(s)$ respectivamente, entonces la función generatriz de probabilidad de la variable aleatoria $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ es*

$$P(s) = P_1(s)P_2(s)\ldots P_n(s).$$

Es más, si las variables aleatorias son idénticamente distribuidas, todas las P_i son iguales y la función generatriz de S_n es $P(s) = [P_1(s)]^n$

Ejemplo 1.10. Sean $X_1,\ldots,X_n$ ~Be(p) independientes

$P_i(s) = q + ps, \quad \forall i$

La función generatriz de probabilidad de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ es

$P_{S_n}(s) = (q + ps)^n \Rightarrow S_n \sim Bi(n, p).$

Esto quiere decir que la suma de n variables aleatorias Bernoulli independientes con el mismo parámetro es una binomial de parámetros n,p.

Ejemplo 1.11. Sean $X_i \sim Po(\lambda_i), i = 1, ..., n$ independientes. $S_n = X_1 + ... + X_n$. La función generatriz de probabilidad para cada variable aleatoria X_i es $P_i(s) = e^{-\lambda_i(1-s)}$.

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} P_{S_n}(s) &= P_1(s)...P_n(s) = \prod_{i=1}^{n} P_i(s) \\ &= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i(1-s)} = e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(1-s)} \Rightarrow S_n \sim Po\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \end{aligned}$$

Esto es, la suma de variables aleatorias que siguen una Poisson independientes es también una Poisson con parámetro la suma de los parámetros de cada variables.

Obtención de la función de probabilidad a partir de la función generatriz de probabilidad

Definición 1.6. *Dada una variable aleatoria X con función de probabilidad $p_k = P[X = k]$ la función generatriz de probabilidad de X se define como*

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k.$$

El procedimiento puede usarse a la inversa, es decir, dada una variable aleatoria con función generatriz de probabilidad P(s), para determinar $P[X = k]$ basta desarrollar P(s) en serie de potencias y obtener el coeficiente de s^k, dicho coeficiente será precisamente $P[X = k]$.

Ejemplo 1.12. Sea $X \sim Be(p)$. Entonces

$$P(s) = q + ps \Rightarrow P[X = 0] = q, \;\; P[X = 1] = p$$

Ejemplo 1.13. Sea $X \sim Bi(p)$

$$\begin{aligned} P(s) &= (q+ps)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ps)^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} s^k \Rightarrow P[X=k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Definición 1.7. *En general, la función generatriz de probabilidad es una función racional, cociente de dos polinomios y puede expresarse de la forma*

$$P(s) = R(s) + \frac{N(s)}{D(s)}$$

donde R,N,D son polinomios con gr(N(s))<gr(D(s)) con objeto de determinar $p_k = P[X = k]$ *debemos desarrollar la expresión anterior en series de potencias y encontrar el coeficiente* s^k *en dicho desarrollo.*

-El coeficiente de s^k *en R(s) se obtiene directamente pues R es un polinomio.*

-El coeficiente de s^k *en* $\frac{N(s)}{D(s)}$ *es más difícil de obtener, para lo cual daremos el siguiente teorema.*

Teorema 1.6. *Sea* $\frac{N(s)}{D(s)}$ *donde N y D son polinomios sin raíces comunes de grados n y d respectivamente con n<d, y las raíces de D(s) son* $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ *distintas. Entonces*

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

con

$$p_k = \sum_{i=1}^{d} \frac{A_1}{\alpha_i^{k+1}} k = 0, 1, 2, \ldots$$

y

$$A_i = \frac{N(\alpha_i)}{D'(\alpha_i)}.$$

Ejemplo 1.14. Sea $P(s) = \dfrac{4}{6-5s+s^2}$ Se tiene $N(s) = 4$, $D(s) = 6 - 5s + s^2$

$n = gr(N(s)) = 0$

$d = gr(D(s)) = 2$

Las raíces de $D(s) = 6 - 5s + s^2 = 0$ son $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 3$

Entonces:

$p_k = \sum_{i=1}^{d} \frac{A_i}{\alpha_i^{k+1}}$

$D'(s) = 2s - 5$

$A_1 = -\frac{N(\alpha_1)}{D'(\alpha_1)} = -\frac{N(2)}{D'(2)} = -\frac{4}{-1} = 4$

$A_2 = -\frac{N(\alpha_2)}{D'(\alpha_2)} = -\frac{N(3)}{D'(3)} = -\frac{4}{1} = -4$

Luego

$$p_k = \frac{4}{2^{k+1}} - \frac{4}{3^{k+1}} = 4\left(\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}}\right), \; k \geq 0.$$

1.4 Distribuciones aleatorias compuestas: suma de un número aleatorio de variables aleatorias

Sea $\{X_k\}$ una sucesión de variables aleatorias discretas que toman valores enteros no negativos, independientes e idénticamente distribuidas con función de probabilidad $\mathrm{P}[X_k = j] = p_j$ y función generatriz de probabilidad$P_X(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j$.

A veces estamos interesados en variables aleatorias del tipo:

$$\begin{aligned} S_N &= X_1 + X_2 + ... + X_N \\ S_0 &= 0 \end{aligned}$$

donde el número de términos N a incluir en el sumatorio es también una variable aleatoria con función de probabilidad $P[N = n] = r_n$, n≥0 y función generatriz de probabilidad $P_N(s) = \sum_{j=0}^{\infty} r_j s^j$. La variable aleatoria N tiene que ser independiente de las $X_k's$.

Determinaremos la función de probabilidad y la función generatriz de S_N

$$\begin{aligned} P[S_N = k] &= \sum_{n=0}^{\infty} P[S_N = k|N = n]P[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P[S_N = k]P[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\{p_k\}^{n*}\right)_k r_n. \end{aligned}$$

La función generatriz de probabilidad de S_N es:

$$\begin{aligned} P_{S_N}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} P[S_N = k]s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \{p_k\}^{n*} r_n \right) s^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r_n \sum_{k=0}^{\infty} \{p_k\}^{n*} s^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r_n \left(P_X(s)\right)^n = P_N\left(P_X(s)\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función generatriz de probabilidad correspondiente a S_N es la composición de las funciones generatriz de N y la de X.

Teorema 1.7. *Sea $X_k \sim Be(p)$, $N \sim Po(\lambda)$, independientes tales que $P_X(s) = q+ps$ y $P_N(s) = e^{-\lambda(1-s)}$.*
Entonces la función generatriz de probabilidad de $S_N = X_1 + X_2 + ... + X_N$ es $P_{S_N}(s) = P_N(P_X(s)) = P_N(q + ps) = e^{-\lambda(1-q-ps)} = e^{-\lambda(p-ps)} = e^{-\lambda p(1-s)} \Rightarrow S_N \sim Po(\lambda p)$.

Ejemplo 1.15. - Captura de animales

Si N= número de individuos con un determinado seguro de hogar y cada individuo tiene una probabilidad p de sufrir un robo i.e:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si individuo i-ésimo sufre un robo} \\ 0 & \text{si no sufre un robo} \end{cases}$$

El número total de individuos que sufren un robo es

$$S_N = X_1 + ... + X_N$$

la cual es una variable aleatoria con función generatriz de probabilidad

$$P_{S_N}(s) = P_N(P_X(s)) = P_N(q + ps)$$

Ejemplo 1.16. Si $N =$ número de accidentes de tráfico y p la probabilidad de que un individuo sobreviva al accidente, i.e:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el individuo i-ésimo sobrevive} \\ 0 & \text{si el individuo no sobrevive} \end{cases}$$

La función generatriz de probabilidad de S_N = número de individuos supervivientes es

$$P_{S_N} = P_N(P_X(s)) = P_N(q + ps).$$

Ejemplo 1.17. Sea N el número de hijos de una familia. Si la razón del número de hijos varones es $\frac{p}{q}$ yS_N = número de varones en la familia tiene como función generatriz de probabilidad

$$P_{S_N} = P_N(q + ps)$$

A partir de la función generatriz de probabilidad pueden obtenerse sus momentos.

Teorema 1.8. *Sea $\{X_k\}$ una sucesión de variables aleatorias que toman valores enteros no negativos, independientes e idénticamente distribuidas. Sea N una variable aleatoria que toma valores enteros no negativos independiente de las $\{X_k\}$ y*

$$S_N = X_1 + ... + X_N$$

Entonces:

1) $ES_N = ENEX$

2)$VarS_N = ENVar[X] + Var[N]E^2[X]$

Demostración. $P_{S_N}(s) = P_N(P_X(s))$

Derivando:

$$\begin{aligned} P'_{S_N}(s) &= P'_N(P_X(s))P'_X(s) \\ P''_{S_N}(s) &= P''_N(P_X(s))(P'_X(s))^2 + P'_N(P_X(s))P''_X(1) \end{aligned}$$

Haciendo s=1:

$$\begin{aligned} P'_{S_N}(1) &= P'_N(P_X(1))P'_X(1) \\ P''_{S_N}(1) &= P''_N(P_X(1))(P'_X(1))^2 + P'_N(P_X(1))P''_X(1) \end{aligned}$$

Por la relación entre la función generatriz de probabilidad y los momentos:

$$ES_N = P'_{S_N}(1) = ENEX$$

$$\begin{aligned} Var(S_N) &= P''_{S_N}(1) + P'_{S_N}(1) - (P'_{S_N}(1))^2 \\ &= P''_N(P_X(1))(P'_X(1))^2 + P'_N(P_X(1))P''_X(1) + P'_{S_N}(1) - (P'_{S_N}(1)^2 \\ &= E[N(N-1)](EX)^2 + ENE(X(X-1)) + EXEN - (EX)^2(EN)^2 \\ &= EN^2(EX)^2 - EN(EX)^2 + ENEX^2 \\ &\quad -ENEX + ENEX - (EX)^2(EN)^2 \\ &= (EX)^2[EN^2 - (EN)^2] + EN[EX^2 - (EX)^2] \\ &= (EX)^2[Var(N)] + ENVar[X]. \end{aligned}$$

1.5 Función generatriz de momentos

Definición 1.8. *Sea X una variable aleatoria. La función generatriz*

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

se conoce como la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X si la esperanza del término de la derecha existe en un entorno de origen.

Ejemplo 1.18. Sea X una v.a. con la siguiente función de probabilidad.

$$P[X = k] = \begin{cases} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}, & \text{k=0,1,2,..} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es decir, $X \sim Po(\lambda)$. Entonces

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{-\lambda(1-e^t)}$$

Corolario 1.3. **Relación con la función generatriz de probabilidad**. Si X es una variable discreta con función generatriz de probabilidad $P_X(s)$ entonces la función generatriz de momentos puede obtenerse como la f.g.p evaluada en $s = e^t$

$$M_X(t) = P_X(e^t).$$

La función generatriz de momentos es interesante por diferentes motivos que daremos en seguida.

Teorema 1.9. *La función generatriz de momentos únicamente determina una función de distribución de una variable aleatoria.*

Teorema 1.10. ***Determina los momentos de una v.a.***
Si la f.g.m. $M_X(t)$ de una variable aleatoria X existe para $t \in (-t_0, t_0)$ con $t_0 > 0$, las derivadas de todos los órdenes existen en $t = 0$, entonces

$$M^k(t)|_{t=0} = E[X^k]$$

Observación 1.3. Alternativamente, si la f.g.m. $M(t)$ existe para $t \in (-t_0, t_0)$ con $t_0 > 0$. Podemos expresarla como una serie de Maclaurin de la siguiente forma

$$M(t) = M(0) + \frac{M'(0)}{1!}t + \frac{M''(0)}{2!}t^2 + ...$$

Por tanto, EX^k es el coeficiente de $t^k/k!$.

El desarrollo de McLaurin para la f.g.m es útil para obtener resultados que permiten aproximar distribuciones. Por ejemplo, se utiliza en la demostración del Teorema Central del Límite que aparece en el próximo capítulo.

Hemos insistido en que la esperanza Ee^{tX} no existe a menos que t esté estrictamente restringida. De hecho, la exigencia de que $M_X(t)$ exista en un entorno a cero es un requisito muy fuerte que no se cumple para algunas distribuciones comunes. Por ello, vamos a considerar una función generatriz que existe para todas las distribuciones.

Definición 1.9. *Sea X una variable aleatoria. La función de valor complejo ϕ definida en $\mathbb{R}$ por*

$$\phi(t) = E[e^{itX}] = E[cos tX] + iE[sen tX], \quad t \in \mathbb{R}$$

es la denominada ***función característica*** *de una v.a. X.*
Claramente

$$\phi(t) = \sum_k (cos tk + i sen tk) P[X = k]$$

en el caso discreto, y

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} cos tx f(x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} sen tx f(x) dx$$

en el caso continuo.

A diferencia de la función generatriz de momentos, la función característica presenta la ventaja de que siempre existe, por lo que es una herramienta interesante para probar resultados sobre distribuciones.

2 Modelos de riesgo individual

2.1 Introducción

En este capítulo se presentan las variables aleatorias mixtas, que son de alto interés en economía, en particular en el caso actuarial que nos encontramos. Definimos el modelo de riesgo individual que es la cantidad total reclamada $S = X_1 + \ldots + X_n$ de la cartera de un asegurador de tamaño fijo n, donde X_i es la cantidad i-ésima reclamada. Nos interesa la distribución de S y características de S como su esperanza, varianza y otros momentos. También propondremos en el capítulo aproximaciones para los cuantiles de la distribución, necesitamos cuantiles de orden alto para garantizar que el pago de la aseguradora no exceda una cantidad determinada fijada.
Un aspecto importante en la práctica de los seguros, es que a menudo los riesgos no se pueden modelizar ni por una variable aleatoria puramente discreta, ni por variables aleatorias puramente continuas, y necesitaremos hacer uso de variables aleatorias mixtas. Por ejemplo, en situaciones donde la cantidad reclamada puede tomar valores en un intervalo de valores reales, o puede ocurrir con una probabilidad alta que no haya ninguna reclamación, o que la cantidad reclamada sea un valor M máximo fijado. Esta situación puede modelizarse matemáticamente haciendo uso de variables aleatorias mixtas.
Estudiamos la función de distribución de la cantidad total de reclamaciones o riesgo S para la cartera de un asegurador. Nos interesará el valor esperado y la varianza de S. También la probabilidad de que las cantidades pagadas excedan un umbral determinado.
Para abordar este problema, p.e. para determinar el valor en riesgo a un nivel de 99.5 %, se necesitan buenas aproximaciones para la inversa de la función de distribución, es decir, para cuantiles altos de esta distribución.
A continuación, se presentan resultados teóricos, ejemplos y aplicaciones de las situaciones anteriormente señaladas.

Seguidamente damos un ejemplo de interés para una variable aleatoria definida como el pago por reclamación para un seguro contra el robo de bicicletas. Calculamos su distribución, esperanza y varianza.

Ejemplo 2.1. **Seguro contra el robo de bicicletas**

Consideramos una póliza de seguro contra el robo de bicicletas que paga c en caso de que la bicicleta sea robada, en cuyo caso la póliza termina. Obviamente, el número de pagos es 0 o 1 y la cantidad c se conoce de antemano, al igual que con las pólizas de seguro de vida.

Supongamos que la probabilidad de robo es q y sea $X = Ic$ denota el pago por reclamación, donde I es un indicador que sigue una distribución Be(q), con $I = 1$ si la bicicleta es robada e $I = 0$ en caso contrario. Podemos reescribir X como $X = Ic + (1 - I)0$. Podemos obtener la distribución y los momentos de X a partir de los de I:

$$P[X = c] = P[I = 1] = q; \quad P[X = 0] = P[I = 0] = 1 - q;$$

$$E[X] = cE[I] = cq; \quad Var[X] = c^2 Var[I] = c^2 q(1 - q)$$

Ahora suponemos que solo la mitad de la cantidad C es pagada en caso de que la bicicleta no estuviera protegida con un candado. Algunos seguros de robo de bicicletas tienen restricciones como esta. Los aseguradores comprueban esto pidiendo que todas las llaves originales sean entregadas en el momento que se produce la reclamación. Entonces, $X = IC$, donde C representa el pago aleatorio. Supongamos que las probabilidades de una reclamación tome los valores $X = 400$ y $X = 200$ son 0.05 y 0.15 respectivamente, obtenemos que

$$P[I = 1, C = 400] = 0.05; P[I = 1, C = 200] = 0.15.$$

Entonces, $P[I = 1] = 0.2$ y consecuentemente $P[I = 0] = 0.8$. También sabemos que

$$P[C = 400|I = 1] = \frac{P[C = 400, I = 1]}{P[I = 1]} = 0.25$$

Esto representa la probabilidad condicionada de que una bicicleta esté protegida con un candado sabiendo el hecho de que ha sido robada.

2.2 Distribuciones mixtas y riesgos

En estadística, casi sin excepción, trabajamos con variables que son continuas o discretas. Éste no es el caso de los pagos en los seguros. Algunas funciones de distribución para modelar pagos de seguros tienen partes continuas crecientes, pero también trozos positivos discretos. Para modelizar esta situación vamos a definir Z que representa el pago en un contrato, tengo tres posibilidades para la variable aleatoria Z:

1. El contrato no recibe reclamaciones, entonces $Z = 0$.

2. El contrato genera una reclamación que es más grande que la cantidad máxima asegurada M. Entonces $Z = M$.

3. El contrato genera una reclamación menor que la cantidad máxima asegurada, entonces $0 < Z < M$.

Definición 2.1. ***Variable aleatoria mixta.***
Sea Z una variable aleatoria definida de la siguiente forma

$$Z = IX + (1 - I)Y$$

donde X es una variable aleatoria puramente discreta, Y una variable puramente continua e I es una variable aleatoria Bernoulli de parámetro q, con X e Y independientes. Entonces Z es una variable aleatoria mixta.

Presentamos algunas características de la distribución mixta en función de las variables X e Y.

Lema 2.1. **Función de distribución de Z**
Su función de distribución es también una mixtura, es una combinación convexa de las funciones de distribución de X e Y

$$F_Z(z) = qF_X(z) + (1 - q)F_Y(z).$$

Lema 2.2. **Esperanza de Z**
La esperanza de Z existe si $qE[X] + (1 - q)E[Y] < +\infty$ y es

$$E[Z] = qE[X] + (1 - q)E[Y] = q\sum_x xP[X = x] + (1 - q)\int_R xf_Y(x)dx$$

Lema 2.3. **Varianza de Z**

$$Var[Z] = E[Z^2] - (E[Z])^2$$

donde $E[Z^2]$ se calcula de forma similar a la indicada anteriormente.

2.2.1 Teoría de la utilidad

Antes de unos ejemplos, vamos a definir algunos conceptos necesarios para su comprensión.
La industria de seguros existe porque las personas están dispuestas a pagar un precio por ser aseguradas. Existe una teoría económica que explica por qué los asegurados están dispuestos a pagar una prima mayor que la prima neta. La presentamos a continuación.

Definición 2.2. *Un tomador de decisiones sin ser consciente de ello, asigna un valor $u(w)$ a su riqueza w en lugar de solo w, donde $u(\cdot)$ es la* ***función de utilidad****.*

Observación 2.1. Para decidir entre dos pérdidas dadas por dos variables aleatorias X e Y, se compara $E[u(w-X)]$ con $E[u(w-Y)]$ y se elige la pérdida con el valor esperado de utilidad más alto.

Observación 2.2. Aunque es imposible determinar con exactitud la función de utilidad de una persona, podemos dar algunas propiedades sobre ella. Por ejemplo, a más riqueza implicaría un mayor nivel de utilidad, por lo que $u(\cdot)$ deberá ser una función no decreciente.También es lógico que los tomadores de decisiones "razonables" sean reacios al riesgo, lo que significa que prefieren un pérdida fija sobre una pérdida aleatoria con el mismo valor esperado.

Definición 2.3. ***Prima máxima P^+***
La prima máxima P^+ es la cantidad máxima que un asegurado con una riqueza w está dispuesto a pagar para una pérdida o riego aleatorio X.

Lema 2.4. Si la función de utilidad es exponencial, esto es $u(w) = -\alpha e^{-\alpha w}$ entonces la prima máxima P^+ ante un riesgo X es la siguiente

$$P^+ = \frac{1}{\alpha} log(m_X(\alpha)).$$

Donde α es un coefiente que representa la aversión al riesgo.

Vamos a dar un ejemplo de una variable aleatoria mixta en el caso de una reclamación exponencial y también se va a calcular la prima máxima P^+ para un riesgo concreto.

Ejemplo 2.2. **Tamaño exponencial de reclamación, si hay reclamación**

Supongamos que la variable aleatoria riesgo X está distribuida como sigue

1. $P[X=0] = \dfrac{1}{2}$

2. $P[X \in [x, x + dx)] = \frac{1}{2}\beta e^{-\beta x} dx$ para $\beta = 0.1, x > 0$

donde dx denota un número positivo infinitesimal. ¿Cuál es el valor esperado de X, y cuál es la prima máxima para X que alguien con una función de utilidad con una aversión al riesgo de $\alpha = 0.01$ está dispuesto a pagar?.

La variable aleatoria X no es continua, porque la función de distribución de probabilidad de X tiene un salto en 0.

Tampoco es una variable aleatoria discreta, ya que la cdf no es una función escalonada; es derivable, lo que en términos de números infinitesimales equivale a $P[x \leq X < x + dx]/dx$, es positiva para $x > 0$. Podemos calcular las esperanzas de funciones de X tratando con cada trozo de la cdf por separado. Esto lleva a

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x) = 0 dF_X(0) + \int_0^{\infty} x F_X'(x) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x\beta e^{-\beta x} dx = 5.$$

Si la función de utilidad del asegurado es una exponencial con parámetro $\alpha = 0.01$, entonces la prima máxima, denotada por P^+:

$$\begin{aligned} P^+ &= \frac{1}{\alpha} log\left(m_X(\alpha)\right) = \frac{1}{\alpha} log\left(e^0 dF_X(0) + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{\alpha x}\beta e^{-\beta x} dx\right) \\ &= \frac{1}{\alpha} log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\beta}{\beta - \alpha}\right) = 100 log\left(\frac{19}{18}\right) \approx 5.4. \end{aligned}$$

2.3 Presentación del modelo de riesgo individual

En esta sección estudiamos el modelo de riesgo individual que se puede utilizar cuando tenemos una cartera de n pólizas individuales de seguros válidas para un periodo de tiempo, por ejemplo, un año.
Sea p_i la probabilidad de que el i-ésimo asegurado no efectúe ninguna reclamación durante el tiempo en el que el seguro esté vigente, y q_i la probabilidad de que se observe exactamente una reclamación. Se cumple $p_i + q_i = 1$, esto significa que no puede haber más de una reclamación por asegurado. Este sería el caso, por ejemplo, de los seguros de vida. Definimos la variable aleatoria

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{si hay reclamación en la póliza i} \\ 0 & \text{si no hay reclamación en la póliza i} \end{cases}$$

Claramente I_i tiene distribución Bernoulli con parámetro $q_i, \forall i$. Las variables aleatorias I_i son independientes entre sí. El número total de reclamaciones está dado por la variable aleatoria $N = I_1 + \ldots + I_n$.
Supongamos artificialmente que cada póliza efectúa una reclamación, y sea la variable aleatoria $C_i > 0$ la cantidad de la reclamación efectuada por la póliza i. Los siniestros pueden presentarse con características diferentes y esto puede llevar a distintas cantidades de reclamación, consideramos de manera general a C_i no como una constante, sino como una variable aleatoria.
La verdadera reclamación de la póliza i está dada por la variable aleatoria X_i que se define por el siguiente producto

$$X_i = I_i C_i = \begin{cases} C_i, & \text{si } I_i = 1 \\ 0, & \text{si } I_i = 0 \end{cases}$$

Observe que esta variable aleatoria puede ser mixta. Consideremos también que las variables I_i y C_i son independientes entre sí.

Se va a denominar modelo de riesgo individual a aquel que la cantidad total reclamada S viene dada por un número de pólizas fijas n.

Definición 2.4. ***Modelo individual***
Se denomina modelo de riesgo individual la cantidad total reclamada S a una compañía por un número de pólizas n, en el modelo individual, es la variable aleatoria S

$$S = X_1 + \ldots + X_n = I_1 C_1 + \ldots + I_n C_n$$

Esta variable es la cantidad total que afronta una compañía aseguradora por concepto de reclamaciones durante el periodo completo del seguro. Una posible desventaja de este modelo es que presupone que el número de asegurados en la cartera se mantiene constante durante todo el tiempo de vigencia del seguro.

2.4 Distribución de la variable aleatoria compuesta S

En el modelo de riesgo individual lo que nos interesa es la distribución del total S de las reclamaciones de un número de pólizas

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

donde X_i, $i = 1, 2, ..., n$ denotan el pago en la póliza i. A la variable aleatoria S la denominamos riesgo. Suponemos que los riesgos X_i son variables aleatorias independientes.
Si $F_i(s)$ denota la función de distribución de $X_i = I_i C_i$, vamos a estudiar cuál sería la expresión de la función de distribución de S.

Para obtener la distribución de S recordamos algunos resultados para la suma de dos variables aleatorias independientes.

Convoluciones: caso continuo

Lema 2.5. La función de distribución de $X + Y$ de dos variables aleatorias independientes X e Y se obtienen a través de convolución de las funciones de distribución de X e Y, es decir

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(s-x)dF_X(x) \\ &= (F_X * F_Y)(s). \end{aligned}$$

Por tanto, si en lugar de tomar 2 variables aleatorias X e Y, tomamos las n variables X_i, $\quad \forall i = 1, .., n$. Denotando $F_i(s)$ la función de distribución de cada X_i como hemos definido anteriormente.

La **función de distribución** $F_S(s)$ de S en términos de convoluciones es

$$F_S(s) = (F_1 * ... * F_n)(s)$$

En el modelo individual se tienen los siguientes resultados para las características de S.

2.4.1 Propiedades de S

Teorema 2.1.

1. *El valor esperado de S es*
$$E[S] = \sum_{i=1}^{n} q_i EC_i.$$
2. *La varianza de S es*
$$Var[S] = \sum_{i=1}^{n} [q_i VarC_i + q_i p_i E^2 C_i].$$
3. *La fgm de X es*
$$M_{X_i}(t) = 1 + q_i(M_{C_i}(t) - 1).$$
4. *La fgm de S es*
$$M_S(t) = \prod_{i=1}^{n} [1 + q_i(M_{C_i}(t) - 1)].$$

Demostración. 1. Por la hipótesis de independencia

$$E[S] = \sum_{i=1}^{n} E[I_i C_i] = \sum_{i=1}^{n} EI_i EC_i = \sum q_i EC_i.$$

2.

$$\begin{aligned}
VarX_i = Var[I_i C_i] &= E[I_i^2 C_i^2] - E^2[I_i C_i] \\
&= q_i EC_i^2 - q_i^2 E^2 C_i \\
&= q_i[VarC_i + E^2 C_i] - q_i^2 E^2 C_i \\
&= q_i VarC_i + q_i p_i E^2 C_i.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$VarS = \sum_{i=1}^{n} VarX_i = \sum_{i=1}^{n} [q_i VarC_i + q_i p_i E^2 C_i].$$

3. Nuevamente condicionando sobre el valor de I_i,

$$\begin{aligned}
M_{X_i}(t) &= E[e^{tI_i C_i}] \\
&= E[e^{tI_i C_i} | I_i = 0] P[I_i = 0] \\
&\quad + E[e^{tI_i C_i} | I_i = 1]] P[I_i = 1] \\
&= p_i + q_i M_{C_i}(t) \\
&= 1 + q_i(M_{C_i}(t) - 1).
\end{aligned}$$

4. Esta igualdad se sigue directamente de la anterior usando la hipótesis de independencia.

Observación 2.3. Es interesante observar que aunque inicialmente el modelo individual de riesgo que hemos presentado puede aplicarse a esquemas de seguros en donde hay como máximo una reclamación por póliza, esta única reclamación puede considerarse como la cantidad total conformada por la suma de varias posibles reclamaciones efectuadas por una póliza a lo largo del periodo de vigencia del seguro.

Observación 2.4. El modelo individual puede también aplicarse al caso de reclamaciones múltiples. En cualquier caso, los datos necesarios para aplicar el modelo individual a una situación real son el número de asegurados n, las probabilidades de reclamación $q_1, q_2, ..., q_n$ y las distribuciones de probabilidad de las cantidades reclamadas $C_1, C_2, ...C_n$.

Estudiamos aproximaciones a la distribución de S.

2.4.2 Aproximaciones a cuantiles de S.

Cuando n es grande y la cartera de asegurados es homogénea, en el sentido de que las variables X_i son independientes y con la misma distribución, puede usarse el Teorema Central del Límite para aproximar la distribución de S mediante la distribución Normal.
Esta aproximación puede no ser fina ya que la función de densidad normal decae muy rápidamente para valores altos, ya que está sesgada a la derecha y hay variables S para las que su función de densidad no cumple con tal característica, para este caso se usará la aproximación gamma.

Aproximación Normal

Un método conocido para aproximar la función de distribución de una variable aleatoria es a través del Teorema Central del Límite. Esto se usa para calcular aproximaciones de la distribución del monto total de la reclamación S. Si consideramos S como la suma de una gran cantidad de variables aleatorias, en virtud del Teorema Central del Límite, podemos aproximar su distribución por una distribución Normal con la misma media y varianza que S.

Teorema 2.2. ***Teorema Central del Límite.***
Si $X_1, X_2, \ldots, X_N$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ y varianza $\sigma^2 < \infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \leq n\mu + x\sigma\sqrt{n}\right] = \Phi(x)$$

El Teorema también es válido cuando las variables X_i son independientes con la misma distribución, pero con diferentes parámetros.

Demostración. Sea $S^* = (X_1 + \ldots + X_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n}$ entonces para $n \to \infty$ y $\forall$ t se tiene

$$\begin{aligned} logm_{S^*}(t) &= -\frac{\sqrt{n}\mu t}{\sigma} + n\left\{ logm_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right\} \\ &= -\frac{\sqrt{n}\mu t}{\sigma} + n\left\{ \mu\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + O\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Que converge a la función generatriz acumulada de la distribución Normal $(0, 1)$, con función generatriz de momentos $exp\left(\frac{1}{2}t^2\right)$. Como consecuencia, la función de distribución de S^* converge a la función de distribución Normal estándar Φ.

Corolario 2.1. Si los sumandos son independientes y tienen varianza finita, podemos aproximar la función de distribución de $S = X_1 + \ldots + X_n$ por

$$F_S(s) \approx \Phi\left(s; \sum_{i=1}^{n} E[X_i], \sum_{i=1}^{n} Var[X_i]\right).$$

Podemos usar esta aproximación cuando n es lo suficientemente grande.

A continuación, se presenta un ejemplo en el que la aproximación Normal no es adecuada.

Ejemplo 2.3. **Ilustración de aproximación por el TCL.**
Sopongamos que $n = 1000$ hombres jóvenes toman un seguro de vida durante un periodo de un año. La probabilidad de morir en este año es 0.001 para todos y el pago por cada muerte es 1. Queremos calcular la probabilidad de que el pago total

sea al menos de 4. Este pago total está distribuido por una Binomial $(1000, 0.001)$, como $n = 1000$ es grande y $p = 0.001$ es pequeño, aproximaremos esta probabilidad por una Poisson de parámetro np. Calculando la probabilidad de 3.5 en lugar de 4 y aplicando la correción de continuidad necesaria después, tenemos

$$P[S \geq 3.5] = 1 - P[S < 3.5] = 1 - e^{-1} - e{-1} - \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{6}e^{-1} = 0.01899.$$

La probabilidad exacta es 0.01899.
Con $\mu = E[S] = 1$ y $\sigma^2 = Var[S] = 1$ tenemos

$$P[S \geq 3.5] = P\left[\frac{S-\mu}{\sigma} \geq \frac{3.5-\mu}{\sigma}\right] \approx 1 - \Phi(2.5) = 0.0062$$

El Teorema Central del Límite en este caso da una aproximación no muy buena.

Como alternativa al Teorema Central del Límite, tenemos una aproximación más refinida: la aproximación gamma trasladada.

Aproximación gamma trasladada

La mayoría de las distribuciones del total de reclamaciones están sesgadas a la derecha. Por ello, siguen aproximadamente la forma de una distribución gamma. Para ganar más flexibilidad, aparte de los parámetros α y β dejamos un cambio sobre una distancia x_0. Entonces, aproximamos la función de distribución de S por la distribución de $Z+x_0$ con Z tal que $Z \sim Ga(\alpha, \beta)$. Elegimos α, β y x_0 de forma que la variable aleatoria de aproximación tenga los tres mismos primeros momentos que S.

Definición 2.5. *La aproximación gamma trasladada de la función de distribución de S puede formularse de la siguiente forma.*

$$F_S(s) \approx G(s - x_0; \alpha, \beta)$$

donde $G(x; \alpha, \beta) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x y^{\alpha-1}\beta^\alpha e^{-\beta y} dy, \quad x \geq 0.$
Elegimos α, β y x_0 de forma que los tres primeros momentos sean iguales, entonces $\mu = x_0 + \dfrac{\alpha}{\beta}, \quad \sigma^2 = \dfrac{\alpha}{\beta^2} \quad \gamma = \dfrac{2}{\sqrt{a}}$. *En particular,*

$$\alpha = \frac{4}{\gamma^2}, \quad \beta = \frac{2}{\gamma\sigma}, \quad x_0 = \mu - \frac{2\sigma}{\gamma}.$$

Ejemplo 2.4. Continuamos el ejemplo anterior y usamos la aproximación gamma trasladada.
Si $S \sim Poisson(1)$, tenemos que $\mu = \sigma = \gamma = 1$, entonces por la definición anterior $\alpha = 4$, $\beta = 2$ y $x_0 = -1$. Por tanto, $P[S \geq 3.5] \approx 1 - G(3.5 - (-1); 4, 2) = 0.0212$. Este valor es mucho más cercano al valor exacto que el obtenido por la aproximación mediante el Teorema Central del Límite.

3 Modelos de riesgo colectivo

3.1 Introducción

En este capítulo, presentamos el modelo de riesgo colectivo. Vamos a obtener la distribución de la cantidad total de las reclamaciones. Miramos la cartera como un colectivo que produce un número aleatorio N de reclamaciones en un cierto periodo de tiempo. Por tanto, N es una variable aleatoria discreta. Denotamos $S_N = X_i + ... + X_N$ la cantidad total de las reclamaciones.
Se darán algunos resultados y propiedades para la variable compuesta S a partir de la función generatriz de momentos y la independencia entre las cantidades reclamadas X_i.
A continuación, estudiamos distribuciones apropiadas para la variable aleatoria número de reclamaciones N tales que el modelo colectivo encaje lo máximo posible al modelo individual dado. Nos centramos en el caso particular en el que número de reclamaciones esté distribuida según una Poisson, entonces S sigue una distribución Poisson compuesta. Cuando hay sobredispersión, debemos usar la distribución Binomial Negativa en su lugar como distribución de N. También aparecen algunos resultados y ejemplos relacionando ambas distribuciones.
Finalmente, presentamos la función de Panjer que da un algoritmo para la obtención explícita de la distribución de S en el caso de que las cantidades reclamadas sean discretas.

Ejemplo 3.1. En modelos colectivos requerimos que el número de reclamaciones N y las cantidades reclamadas X_i sean independientes. Esto hace que sea un poco menos apropiado modelar una cartera de seguros de coches, ya que, por ejemplo, las malas condiciones climáticas causarán una gran cantidad de reclamaciones menores. En la práctica, sin embargo, la influencia de estos fenómenos parece ser pequeña.

Observación 3.1. Podemos expresar los momentos de S en función de los momentos de N y X_i. Con esta información, podemos aproximar la distribución de S usando el Teorema Central del Límite si $E[N]$ es grande, así como por la aproximación gamma trasladada como vimos en el Capítulo anterior.

3.2 Presentación del modelo de riesgo colectivo

Consideremos un número no determinado de contratos de seguros con vigencia en un periodo de tiempo $[0, T]$. Este periodo puede corresponder a un año por ejemplo. Sea N la variable que denota el número de reclamaciones ocurridas en este intervalo, y sean las variables positivas $X_1, \ldots X_N$ las cantidades de estas reclamaciones.
Suponemos que el número de reclamaciones N y las cantidades de éstas, las variables aleatorias $X_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n$ son v.a. independientes, así como las variables X_i. Además, supondremos que las variables X_i comparten la misma distribución de probabilidad.

Definición 3.1. *La cantidad total de todas las reclamaciones efectuadas es la variable aleatoria S, llamada riesgo y se define*

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Esta ecuación representa el modelo colectivo para un contrato de seguros.

Observación 3.2. Cada sumando es una variable aleatoria y el número de sumandos es también aleatorio. La suma se define como cero cuando $N = 0$.

3.3 Propiedades de la variable aleatoria compuesta S

Supongamos que S es una variable aleatoria compuesta. Usaremos la siguiente notación:

$$\mu_k = E[X^k], \quad P(x) = P[X \leq x], \quad F(s) = P[S \leq s].$$

Se definen conceptos que aparecen con frecuencia en los resultados y ejemplos posteriores.

Definición 3.2. ***Función generatriz de momentos.***
Dada una variable aleatoria X se denomina función generatriz de momentos a la función

$$M_X(t) = E[e^{Xt}]$$

para todo t tal que $E[e^{Xt}]$ es finita.

Definición 3.3. ***Momento de orden n***
Dada una variable aleatoria X y un $n \in N$, se define el momento de orden n de la variable X como

$$m_n = E[X^n]$$

siempre que exista dicha esperanza.

Teorema 3.1. *Dada la variable aleatoria N, usando la distribución condicional de S, se tiene que el valor esperado de S es*

$$E[S] = \mu_1 E[N]$$

Demostración.

$$\begin{aligned} E[S] &= E[E[S|N]] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[X_1 + ... + X_N | N = n]P[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[X_1 + ... + X_n]P[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n\mu_1 P[N = n] = \mu_1 E[N] \end{aligned}$$

Teorema 3.2. *Se tiene que la varianza de S es*

$$Var[S] = E[N]Var[X] + \mu_1^2 Var[N].$$

Demostración.

A partir del Teorema de Madow y haciendo uso de la independencia entre las variables X_i's y N,

$$\begin{aligned} Var[S] &= E[Var[S|N]] + Var[E[S|N]] \\ &= E[NVar[X]] + Var[N\mu_1] \\ &= E[N]Var[X] + \mu_1^2 Var[N] \end{aligned}$$

Teorema 3.3. *La función generatriz de momentos de S es la siguiente*

$$m_s(t) = m_N(log m_X(t))$$

Demostración.

$$\begin{aligned} m_s(t) &= E[E[e^{tS}|N]] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{t(X_1+\ldots+X_N)}|N=n]P[N=n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{t(X_1+\ldots+X_N)}]P[N=n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{m_X(t)\}^n P[N=n] = E[(e^{log m_X(t)})^N] \\ &= m_N(log m_X(t)) \end{aligned}$$

Distribución compuesta cuya función de distribución es una expresión conocida.

Teorema 3.4. *La distribución Geométrica compuesta.*

Sea $N \sim$ *Geométrica (p),* $0 < p < 1$ *y* $X \sim Exponencial(1)$.

Entonces la función de distribución de S *es*

$$F(x) = p + q(1 - e^{-px}) = 1 - qe^{-px}, \quad \forall x \geq 0$$

Demostración. Sea q=1-p.
Primero, calculamos la función generatriz de momentos de S, y entonces intentamos identificarla.

Para $qe^t < 1$, o lo que es lo mismo, $t < -log$ q, tenemos

$$m_N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nt} pq^n = \frac{p}{1-qe^t}$$

Como $X \sim Exponencial(1)$, entonces $m_X(t) = (1-t)^{-1}$, por ello

$$m_s(t) = m_N(logm_X(t)) = \frac{p}{1-qm_X(t)} = p + q\frac{p}{p-t}$$

entonces la función generatriz de momentos de S es la combinación de las funciones generatriz de momentos de la constante 0 y la de la distribución $Exponencial(p)$. Debido a la correspondencia uno a uno de las funciones de distribución y las funciones generatrices de momentos, tenemos que concluir que la función de distribución de S se obtiene con la misma combinación

$$F(x) = p + q(1-e^{-px}) = 1 - qe^{-px}, \quad \forall x \geq 0$$

Esta es una función de distribución de una variable mixta con un salto de tamaño p en 0 y comportamiento exponencial en otro caso.

Este caso es único en el sentido en que presenta la única distribución compuesta no trivial cuya función de distribución es una expresión conocida. ∎

3.4 Distribuciones para el número de reclamaciones

En la práctica, no tendremos muchos datos relevantes a nuestra disposición para elegir una distribución para N. Para describir "casos raros", la distribución Poisson que tiene un solo parámetro que estimar, es siempre la primera opción. También, su uso puede justificarse si el proceso fundamental puede describirse como un proceso Poisson.

3.4.1 Distribución Poisson compuesta.

Cuando el número de reclamaciones N sigue una distribución Poisson se dice que el riesgo S sigue una distribución Poisson compuesta y se denota $S \sim Po\ comp(\lambda, F)$ donde λ es el parámetro de la distribución Poisson y F es la función de distribución de cada sumando de S.
Para este modelo se tienen los siguientes resultados

Teorema 3.5. *Si N tiene distribución Poisson(λ), entonces*

$$\begin{aligned} E[S] &= \lambda\mu. \\ E[S^2] &= \lambda\mu_2 + \lambda^2\mu^2. \\ Var[S] &= \lambda\mu_2. \\ M_S(t) &= exp[\lambda(M_X(t) - 1)] \end{aligned}$$

Demostración. Estos resultados son consecuencia de las características generales de S demostradas anteriormente (Teorema 3.1, 3.2 y 3.3) y del hecho de que si N sigue una distribución $Po(\lambda)$, entonces $E[N] = \lambda$, $Var[N] = \lambda$ y $M_N(t) = exp(\lambda(e^t - 1))$.

Sabemos que la esperanza y la varianza de una Poisson(λ) son las dos iguales a λ. Por lo tanto, si la relación $Var[N]/E[N] > 1$ que significa que hay sobredispersión, debemos usar la distribución Binomial Negativa en su lugar.
A continuación se presenta un ejemplo en el que la distribución del número de accidentes causados por un conductor N sigue una Poisson de parámetro λ distinto para cada conductor, es decir, λ es una salida de una variable aleatoria. El objetivo es encontrar la distribución marginal de N. Se prueba que esta distribución es una Binomial Negativa, debido a la sobredispersión.

Ejemplo 3.2. **Distribución Poisson, incertidumbre sobre el parámetro**

Supongamos que el número de accidentes causados por un conductor de coche en un año sigue una Poisson(λ). El parámetro λ es desconocido y diferente para cada conductor. Supongamos que λ es una salida de la variable aleatoria Λ. Entonces, la distribución condicionada del número de accidentes N en un año, dado que $\Lambda = \lambda$, es una Poisson(λ). ¿Cuál es la distribución marginal de N?

Sea $U(\lambda) = P[\Lambda \leq \lambda]$ que denota la función de distribución de Λ. Entonces podemos escribir las probabilidades marginales del suceso N=n como

$$P[N = n] = \int_0^\infty P[N = n|\Lambda = \lambda]dU(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}dU(\lambda)$$

para la media y varianza de N tenemos:

$$E[N] = E[E[N|\Lambda]] = E[\Lambda]$$

$$Var[N] = E[Var[N|\Lambda]] + Var[E[N|\Lambda]] = E[\Lambda] + Var[\Lambda] \geq E[N]$$

Ahora asumimos adicionalmente que $\Lambda \sim gamma(\alpha, \beta)$, entonces, escribiendo $p = \beta/(\beta+1)$,

$$\begin{aligned} m_N(t) &= E[E[e^{tN}|\Lambda]] = E[exp\{\Lambda(e^t-1)\}] = m_\Lambda(e^t-1) \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta-(e^t-1)}\right)^\alpha = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^\alpha \end{aligned}$$

Que es, en efecto, la función generatriz de momentos de una distribución Binomial Negativa $\left(\alpha, \dfrac{\beta}{\beta+1}\right)$. Puede mostrarse que la sobredispersión $Var[N]/E[N]$ es $1/p = 1 + 1/\beta$.

Obviamente, el valor de Λ para un conductor particular es una variable aleatoria no observable. Es la frecuencia de reclamo a largo plazo, el valor al cual la media observada de números de accidentes en un año convergería si el conductor pudiera ser observado por un largo periodo, durante el cual el patrón de reclamaciones no cambie. La distribución de Λ se llama distribución de estructuras.

3.4.2 Distribución Binomial Compuesta

Cuando la variable aleatoria N número de reclamaciones sigue una distribución $Bi(n,p)$, se dice que S sigue una distribución Binomial compuesta, i.e., $S \sim Bi\ comp(n, p, F_i)$, donde F_i es la función de distribución de cada sumando X_i en la definición de S. Bajo esta hipótesis, se tienen los siguientes resultados.

Teorema 3.6. *Si N sigue una distribución $Bi(n,p)$, entonces*

$$\begin{aligned} E[S] &= np\mu. \\ E[S^2] &= np\mu_2 + n(n-1)p^2\mu^2. \\ Var[S] &= np(\mu_2 - p\mu^2). \\ M_S(t) &= (1-p+pM_Y(t))^n. \end{aligned}$$

Demostración. Estos resultados se obtiene fácilmente por los teoremas 3.1, 3.2 y 3.3. Basta recordar que si N sigue una distribución $Bi(n,p)$, entonces $E[N] = np$, $Var[N] = np(1-p)$, y $M_N(t) = (1-p+pe^t)^n$.

3.4.3 Distribución Binomial Negativa compuesta

Cuando la variable aleatoria N número de reclamaciones sigue una distribución Binomial Negativa, o cuando hay sobredispersión, i.e. $Var[N]/E[N] > 1$ y no es apropiado usar una distribución Poisson, se dice que S sigue una distribución Binomial Negativa compuesta. Esto es, si $N \sim Bi\ neg(k,p)$, entonces S sigue una distribución Binomial Negativa compuesta de parámetros k, p, F_i, donde F_i hace referencia a la función de distribución de cada sumando X_i de S. Tenemos los siguientes resultados.

Teorema 3.7. *Si N sigue una distribución Binomial Negativa k, p, entonces*

$$
\begin{aligned}
E[S] &= k(1/p-1)\mu. \\
E[S^2] &= k(1/p-1)(1/p)\mu^2. \\
Var[S] &= k(1/p-1)(1/p)\mu^2 + k(1/p-1)(\mu_2-\mu^2). \\
M_S(t) &= \left(\frac{p}{1-(1-p)M_Y(t)}\right)^k.
\end{aligned}
$$

Demostración. Es suficiente recordar que si N sigue una distribución Binomial Negativa k, p, entonces $E[N] = k(1-p)/p$, $Var[N] = k(1-p)/p^2$, y $M_N(t) = [p/(1-(1-p)e^t]^k$. En el caso particular en el que $k = 1$, la distribución de N se reduce a la distribución Geométrica de parámetro p, y se dice que S tiene distribución Geométrica compuesta. ▮

Se presenta un ejemplo que prueba que cualquier distribución Binomial Negativa compuesta puede ser expresada como una Poisson compuesta.

Ejemplo 3.3. **La distribución Binomial Negativa compuesta es también una Poisson compuesta** En un determinado cruce hay N accidentes de tráfico con damnificados en un año. Hay L_i damnificados en el i-ésimo accidente, así $S_N = L_1 + L_2 + ... + L_N$ es el número total de damnificados. Ahora supongamos que $N \sim Poisson(\lambda)$ y $L_i \sim$ logarítmica (c) con $0 < c < 1$, entonces

$$P[L_i = k] = \frac{c^k}{kh(c)}, k = 1, 2, ...$$

La división por la función $h(\cdot)$ sirve para hacer la suma de las probabilidades igual a 1, entonces por el desarrollo usual de series de $log(1+x)$, esta función es $h(c) = -log(1-c)$, de ahí el nombre distribución logarítmica. ¿Cuál es la distribución de S?

Esa función generatriz de momentos de los términos L_i viene dada por

$$m_L(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{tk}c^k}{kh(c)} = \frac{h(ce^t)}{h(c)}$$

Entonces, para función generatriz de momentos de S, tenemos

$$\begin{aligned} m_S(t) &= m_N(log m_L(t)) = exp\lambda(m_L(t) - 1) \\ &= \left(exp\left\{h(ce^t) - h(c)\right\}\right)^{\lambda/h(c)} = \left(\frac{1-c}{1-ce^t}\right)^{\lambda/h(c)} \end{aligned}$$

que es la función generatriz de momentos de una distribución Binomial Negativa con parámetros $\lambda/h(c) = -\lambda/log(1-c)$ y $1-c$.

Por un lado, el pago total Z para los damnificados sigue una distribución Poisson compuesta ya que es la suma de un número de pagos por accidentes fatales que sigue una distribución $Poisson(\lambda)$. Por otro lado, sumando los damnificados lleva a una distribución Binomial Negativa compuesta. Puede demostrarse que si S_2 sigue una Binomial Negativa compuesta con parámetros r y $p = 1 - q$ y distribución de reclamaciones $P_2(\cdot)$, entonces S_2 sigue la misma distribución que S_1, donde S_1 está distribuida mediante una Poisson de parámetro λ y distribución de reclamaciones P_1 dada por

$$\lambda = rh(q), P_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{kh(q)} P_2^{*k}(x)$$

De esta forma, cualquier distribución Binomial Negativa compuesta puede ser escrita como una distribución Poisson compuesta.

Observación 3.3. **Distribuciones Poisson compuesta en teoría de la probabilidad** Las distribuciones Poisson compuestas son objeto de estudio en teoría de la probabilidad. Si extendemos esta clase hasta sus límites, al cual las distribuciones gamma y normal pertenecen, entonces tenemos solo la clase de distribuciones infinitamente divisibles. Esta clase está formada por las variables aleatorias X con la propiedad que para cada n, la secuencia de variables aleatorias iid. $X_1, X_2, ..., X_n$ con $X \sim X_1 + X_2 + ... + X_n$.

Vamos a probar un teorema de interés sobre la distribución Poisson compuesta y lo usaremos para construir un algoritmo mejor para calcular la función de distribución de S, $F(\cdot)$ que el anterior dado por convolución.

Teorema 3.8. ***La suma de variables aleatorias Poisson compuestas es una Poisson compuesta***

Si $S_1, S_2, ..., S_m$ son variables aleatorias Poisson compuestas independientes con parámetro Poisson λ_i denominadas riesgos y con distribución de reclamaciones P_i, $i = 1, 3, .., m$, entonces $S = S_1 + S_2 + ... + S_m$ está distribuida mediante una Poisson tal que

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

y

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} P_i(x)$$

Demostración. Sea m_i la función generatriz de momentos de P_i. Entonces S tiene la siguiente función generatriz de momentos.

$$m_S(t) = \prod_{i=1}^{m} exp\{\lambda_i[m_i(t) - 1]\} = exp\lambda \left\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} m_i(t) - 1 \right\}$$

Entonces S es una variable aleatoria que sigue una Poisson compuesta con parámetro y función de probabilidad la dada por el teorema. ∎

Consecuentemente, el resultado total de m portafolios independientes Poisson compuesta sigue de nuevo una distribución Poisson compuesta.

Un caso particular de interés ocurre cuando las distribuciones S_i tienen reclamaciones fijas x_i, pues en ese caso podemos escribir

$$S_i = x_i N_i, \qquad \text{con } x_i > 0 \text{ fija, } N_i \sim Poisson(\lambda_i)$$

Se tiene que

$$S = x_1 N_1 + \ldots + x_m N_m$$

y aplicando el teorema anterior la distribución de S es una Poisson compuesta.

En este caso particular, existe una especie de recíproco que permite expresar S como una combinación lineal de v.a. $N_1, \ldots, N_m$ independientes. $N_1, \ldots, N_m$ serán las frecuecias con las que han ocurrido las reclamaciones correspondientes $x_1, \ldots, x_m$.

Teorema 3.9. *Sea S una distribución de Poisson compuesta con parámetro λ y distribuciones de reclamaciones X_i discretas con*

$$\pi_i = p(x_i) = P[X = x_i], \quad i = 1, .., m.$$

Expresamos

$$S = x_1 N_1 + ... + x_m N_m$$

donde N_i *denota el número de reclamaciones con cuantía* $x >_i$. *Entonces* $N_1, ..., N_m$ *son v.a. de Poisson independientes,*

$$N_i \sim Poisson(\lambda \pi_i), \quad i = 1, .., m.$$

El resultado anterior permite calcular la función de probabilidad de S utilizando la funció de R convolve, y aplicando el llamado algoritmo de vector sparse. Ilustramos este punto con un ejemplo.

Ejemplo 3.4. **Aplicación: algoritmo del vector sparse**

Sea S la cantidad total reclamada, que suponemos que sigue una Poisson compuesta con $\lambda = 4$. Si las reclamaciones X son valores enteros y no negativos, podemos calcular la función de probabilidad de S de una manera eficiente.

Suponemos que $P[X = 1, 2, 3] = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. Entonces, uniendo todos los términos, podemos escribir S como $S = 1N_1 + 2N_2 + 3N_3$ y calculamos la distribución de S por convolución.

La función de probabilidad de la cantidad total de reclamaciones de tamaño $1, 2, ..., j-1$ está con convolución con la de jN_j. Podría construirse una tabla, cuyas columnas fueran las probabilidades de jN_j, y en ellas, sólo las filas $0, j, 2, ..., j-1$ estarían llenas, motivo por el que el algoritmo se llama algoritmo "vector sparse". Estas probabilidades son probabilidades Poisson($\lambda \pi_j$).

Utilizando la función de R convolve la implementación para este ejemplo sería

```
freq=c(1,2,1)
M=length(freq)
mu=sum((1:M)*freq)
sigma2=sum((1:M)^2*freq)
##mean and variance of the compound r.v.
MM=ceiling(mu + 10 * sqrt(sigma2)) + 6
fs=dpois(0:(MM-1), freq[1]) ##density of S_1 = 1*N_1
for (j in 2:M)
{MMM=trunc((MM-1)/j)
fj=rep(0, MM) ##construct the density of j*N_j
```

```
fj[(0:MMM)*j+1]=dpois(0:MMM, freq[j])
fs=convolve(fs, rev(fj), type="open")
}
fs[1:5]*exp(4)
```

Los 5 primeros valores de la función de probabilidad de S son

s	0	1	2	3	4
$P[S=s]$	.01831564	0.01831564	0.04578910	0.05799952	0.07402571

Con el objetivo de encontrar una expresión explícita de la distribución de S, vamos a definir a continuación la fórmula de Panjer, que nos da un algoritmo recursivo para determinar la función de probabibilidad de S en el caso de que ésta sea discreta.

3.5 Fórmula de Panjer

Supongamos que S es un riesgo que sigue un modelo colectivo. ¿Podemos encontrar una fórmula para la distribución de S? La respuesta es afirmativa: la función de Panjer proporciona una formula recursiva para la distribución de riesgo, pero solo es aplicable cuando la variable aleatoria N, número de reclamaciones, cumple cierta condición dada por la siguiente proposición.
Previamente a dar la expresión de la función de Panjer, damos unos resultados necesarios para llegar hasta esta.

Proposición 3.1. Sea N una variable aleatoria discreta con valores en $0, 1, \ldots$ y sea $p_k = P[N = k]$ para $k = 0, 1, \ldots$ Sean a y b dos constantes. Entonces la igualdad

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}, \quad k \geq 1,$$

se cumple cuando

1. $N \sim Bi(n, p)$, con $a = -\dfrac{p}{1-p}$ y $b = \dfrac{(n+1)p}{1-p}$.
2. $N \sim Po(\lambda)$, con $a = 0$ y $b = \lambda$.
3. $N \sim Bin\ neg(n, p)$, con $a = 1 - p$ y $b = (r-1)(1-p)$.

Definición 3.4. *A las distribuciones con soporte contenido en* $0, 1, \ldots$ *y que satisfacen*

$$P[N = k] = \left(a + \frac{b}{k}\right) P[N = k-1]$$

para $k = 1, 2, ...$, *se les llama* ***distribuciones de clase (a,b,0)***.
El cero se refiere a que la probabilidad de inicio de la fórmula recursiva es aquella que tiene subíndice cero, es decir, p_0.

Observación 3.4. El resultado anterior es muy atractivo, ya que permite generar la distribución de probabilidad de estas variables aleatorias discretas de una forma recursiva: se calcula primero p_0, a partir de ella se obtiene p_1, y así sucesivamente.

Supondremos entonces que la distribución del número de reclamaciones cumple con la condición anterior dada y la proposición establece que tal condición es válida para las tres distribuciones señaladas.

Proposición 3.2. Sea S un riesgo que sigue un modelo colectivo $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Para $k = 1, 2, ..$ se tiene $E[X_1 | \sum_{i=1}^{k} X_j = r] = \frac{r}{k}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} E[X_1 | \sum_{i=1}^{k} X_i = r] &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} E[X_i | \sum_{i=1}^{k} X_i = r] \\ &= \frac{1}{k} E \sum_{i=1}^{k} [X_i | \sum_{i=1}^{k} X_i = r] \\ &= \frac{r}{k}. \end{aligned}$$

∎

Este resultado es válido para cualquier disribución de probabilidad siempre que tengamos la finitud de su varianza.

Proposición 3.3. Supongamos que N satiaface la condición

$$P[N = k] = \left(a + \frac{b}{k}\right) P[N = k - 1] \quad \text{para} \quad k = 1, 2, ...,$$

esto es, N es una distribución de clase $(a, b, 0)$ y que las reclamaciones X_i toman valores $1, 2, ...$ Entonces

$$P[N = k] P[X_1 + ... + X_k] = P[N = k-1] \sum_{j=1}^{r-1} \left(a + \frac{b_j}{r}\right) P[X_1 + ... + X_{k-1} = r - j] P[X_1 = j]$$

Para $r = 1, 2, ..$ y $k = 2, 3, ..$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
& P[N=k-1]\sum_{j=1}^{r-1}\left(a+\frac{b_j}{r}\right)P[X_1+\ldots+X_{k-1}=r-j]P[X_1=j] \\
= \quad & P[N=k-1]\sum_{j=1}^{r-1}\left(a+\frac{b_j}{r}\right)P[X_2+\ldots+X_k=r-j]P[X_1=j] \\
= \quad & P[N=k-1]\sum_{j=1}^{r-1}\left(a+\frac{b_j}{r}\right)P[X_1=j,X_2+\ldots+X_k=r-j] \\
= \quad & P[N=k-1]\sum_{j=1}^{r-1}\left(a+\frac{b_j}{r}\right)P[X_1=j,X_1+\ldots+X_k=r] \\
= \quad & P[N=k-1]\sum_{j=1}^{r-1}\left(a+b\frac{j}{r}\right)P[X_1=j|X_1+\ldots+X_k=r]P[X_1+\ldots P_k]=r] \\
= \quad & P[N=k-1]E[(a+b\frac{X_1}{r}|X_1+\ldots+X_k=r)P[X_1+\ldots+X_k=r] \\
= \quad & P[N=k-1]\left(a+\frac{b}{r}\frac{r}{k}\right)P[X_1+\ldots X_k=r] \\
= \quad & P[N=k-1]\left(a+\frac{b}{k}\right)P[X_1+\ldots+X_k=r] \\
= \quad & P[N=k])P[X_1+\ldots+X_k=r]
\end{aligned}
$$

Con lo visto anteriormente podemos enunciar y demostrar la fórmula de Panjer.

Teorema 3.10. ***Fórmula de Panjer***
Para el modelo colectivo de riesgo, y bajo las hipótesis anteriores se cumple que

$$
\begin{aligned}
P[S=0] &= P[N=0] \\
P[S=r] &= \sum_{j=1}^{r}\left(a+b\frac{j}{r}\right)P[X_1=r]P[S=r-j] \quad \textit{para} \quad r\geq 1.
\end{aligned}
$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
P[S=r] &= \sum_{k=1}^{\infty} P[S=r|N=k]P[N=k] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P[N=k]P[X_1+\ldots+X_k=r] \\
&= P[N=1]P[X_1=r] + \sum_{k=2}^{\infty} P[N=k]P[X_1+\ldots+X_k=r] \\
&= (a+b)P[N=0]P[X_1=r] \\
&+ \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{r-1}\left(a+b\frac{j}{r}\right) P[N=k-1]P[X_1+\ldots+X_{k-1}=r-j]P[X_1=j] \\
&= (a+b)P[N=0]P[X_1=r] \\
&+ \sum_{j=1}^{r-1}\left(a+b\frac{j}{r}\right) P[X_1=j]\sum_{k=2}^{\infty} P[N=k-1]P[X_1+\ldots+X_{k-1}=r-j]P[X_1=j] \\
&= (a+b)P[N=0]P[X_1=r]\sum_{j=1}^{r-1}\left(a+b\frac{j}{r}\right) P[X_1=j]P[S=r-j] \\
&= \sum_{j=1}^{r}\left(a+b\frac{j}{r}\right) P[X_1=j]P[S=r-j].
\end{aligned}$$

∎

Ejemplo 3.5. Obtenemos la distribución de S del ejemplo anterior con la fórmula de Panjer que será mucho más sencillo como veremos a continuación.
Se cumplen las hipótesis necesarias para aplicar la fórmula de Panjer. Por tanto,

$$P[S=s] = \frac{1}{s}[P[S=s-1]+4P[S=s-2]+3P[S=s-3]], \quad s=1,2,\ldots$$

y empezando por el valor $P[S=0]=e^{-4}$. Tenemos

$$\begin{aligned}
P[S=1] &= P[S=0]=e^{-4} \\
P[S=2] &= \frac{1}{2}[P[S=1]+4P[S=0]] = \frac{5}{2}e^{-4}, \\
P[S=3] &= \frac{1}{3}[P[S=2]+4P[S=1]+3P[S=0]] = \frac{19}{6}e^{-4}
\end{aligned}$$

Aproximación en el caso de cantidades reclamadas continuas

Cuando los montos de las reclamaciones toman valores continuos, pueden usarse el siguiente método de discretización, para poder así aplicar la fórmula de Panjer. Se toma cualquier unidad monetaria $\rho > 0$, y se definen las variables aleatorias enteras

$$\bar{X}_i = \text{ínf}\,\{n \in N \,:\, X_i \leq n\rho\}$$

$$\underline{X}_i = \sup\,\{n \in N \,:\, X_i \geq n\rho\}$$

Se definen entonces los siguientes riesgos, cuyas reclamaciones ahora son enteras

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^{N} \bar{X}_i, \qquad \underline{S} = \sum_{i=1}^{N} \underline{X_i}$$

Por lo tanto, para cualquier $s > 0$,

$$P[\bar{S} \leq s/\rho) \leq P[S \leq s] \leq P[\underline{S} \leq x/\rho].$$

Esto provee dos cotas superior e inferior, calculadas usando la fórmula de Panjer, para la función de distribución del riesgo.

Existen métodos de aproximación con validez general para estimar la distribución de un riesgo. Estos métodos generales de aproximación pueden ser útiles cuando no se cumplen las condiciones requeridas para aplicar la fórmula de Panjer y son entre otros, la aproximación normal y la gamma trasladada definidas en el Capítulo 1.

4 Teoría de la ruina

4.1 Introducción

Vamos a centrarnos ahora en modelos de riesgo colectivo pero a largo plazo.
El modelo de ruina describe la estabilidad de una aseguradora. Se define el modelo clásico de ruina, que supone que las reclamaciones son independientes y siguen la misma distribución Poisson. Considerando el desarrollo en el tiempo del capital $U(t)$ de un asegurador este aumenta continuamente a causa de las primas ganadas, y decrece paulatinamente a medida que una reclamación ocurre. Cuando el capital se convierte negativo, decimos que la ruina ocurre.
Denoraremos ψ a la probabilidad de que esto ocurra, bajo la suposición de que la prima anual y el proceso de reclamación permanecen inalterables. Esta probabilidad es una herramienta muy útil ya que sirve como una indicación de la solvencia de la combinación de las primas y de las reclamaciones recibidas por el asegurador, en relación del capital inicial disponible $u = U(0)$. Una alta probabilidad de ruina definitiva indica inestabilidad: medidas como un reaseguro o incrementar las primas deberían considerarse.
Daremos definiciones y resultados sobre la probabilidad de ruina, como el coeficiente de ajuste, que nos ayudará a dar una cota para la probabilidad de ruina a través de la cota de Lundberg.

Observación 4.1. La probabilidad de ruina sirve para comparar carteras pero no podemos obtener ningún significado absoluto sobre la probabilidad de ruina, ya que realmente no representa la probabilidad de que el asegurador vaya a bancarrota en un futuro cercano. Primero, porque esto podría llevar siglos y, segundo, porque intervenciones en el proceso tal y como pagar dividendos o aumentar la prima de riesgo no son tomadas en cuenta en la definición de probabilidad de ruina. Además, existen efectos como la inflación y el rendimiento del capital se anulan el uno al otro.

Observación 4.2. Conocemos solo dos tipos de variables aleatorias de reclamaciones por las cuales la probabilidad de ruina puede ser fácilmente calculada. Estas son las variables aleatorias distribuidas exponencialmente y combinaciones lineales de este tipo de variables aleatorias, así como las variables aleatorias que toman un número finito de valores. Para otras distribuciones, una cota elegante y normalmente suficiente para la función ψ puede ser encontrada, $\psi(u) \leq e^{-Ru}$, conocido como el límite superior de Lundberg. El número real R en esta expresión se llama coeficiente de ajuste.

Esta cota puede ser con frecuencia usada en lugar de la probabilidad de ruina: a mayor R, menor cota superior para la probabilidad de ruina y, por tanto, estamos ante una situación más segura. Por ello, e^{-R} puede ser interpretado como el factor por el cual la probabilidad de ruina disminuye si el capital inicial en el proceso de ruina aumenta en una unidad de u a $u + 1$.

4.2 El proceso clásico de ruina

Definición 4.1. *Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias* $\{X_t, t \in T\}$ *parametrizada por un conjunto* T *y con valores en un mismo conjunto, llamado espacio de estados y comúnmente denotado por* S.

Definición 4.2. *El proceso de riesgo* U *es un proceso estocástico y se define de la siguiente manera*

$$U(t) = u + ct - S_{N(t)}(t), t \geq 0$$

donde

$$\begin{aligned} U(t) &= \text{el capital del asegurador en el momento } t \\ u &= U(0) = \text{capital inicial} \\ c &= \text{la constante prima recibida por unidad de tiempo} \\ S(t)_{N(t)} &= X_1 + X_2 + \ldots + X_{N(t)} \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} N(t) &= \text{número de reclamaciones hasta el momento } t \\ X_i &= \text{el tamaño de la i-ésima reclamación, asumida no negativa.} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.1. **Realización frecuente del proceso de riesgo. Figura 4.1.**
Las variables aleatorias $T_1, T_2, \ldots$ denotan los instantes de tiempo en los que ocurre una reclamación. La pendiente del proceso es c si no hay reclamaciones; en tiempos $t = T_j$ para algún j, el capital desciende X_j, que es el tamaño de la reclamación j-ésima. Ya que en la Figura 4.1, en el instante T_4 el total de las reclamaciones sufridas $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ es mayor que el capital inicial u más la prima ganada cT_4, el excedente restante $U(T_4)$ es menor que 0. Este estado del proceso se conoce como **ruina**, y el instante de tiempo en el que ocurre por primera vez se denota por T.

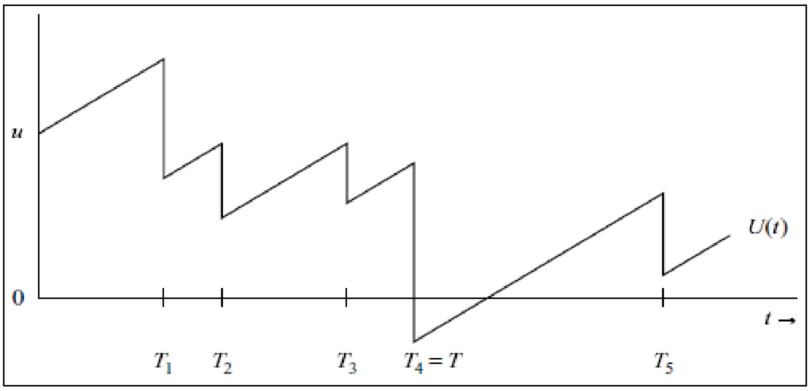

Figura 4.1: Una realización del proceso de riesgo U(t)

En el caso en el que la probabilidad de $T = \infty$ sea positiva, llamamos a la variable aleatoria T defectuosa. La probabilidad de que la ruina ocurra alguna vez, que es, la probabilidad de que T sea finita, se llama **probabilidad de ruina**.

$$\psi(u) = P[T < \infty]$$

Definición 4.3. ***Proceso Poisson.***
El proceso $N(t)$ es un proceso de Poisson si para algún $\lambda > 0$ llamado la intensidad del proceso, los incrementos del proceso tienen la siguiente propiedad

$$N(t+h) - N(t) \sim Poisson(\lambda h)$$

$$\forall t > 0, h > 0 y \; cada\ historia \quad N(s), s \leq t.$$

Como resultado, los procesos Poisson tienen las siguientes propiedades:

Independencia: *los incrementos* $N(t_i+h_i)-N(t_i)$ *son independiente para intervalos disjuntos* $(t_i, t_i + h_i)$, $i = 1, 2, ...;$.

Estacionariedad: $N(t + h) - N(t)$ *está distribuido mediante una Poisson*(λh) *para cada valor de* t.

Otra manera de definir este proceso es considerando los tiempos de espera.

$$W_1 = T_1, W_j = T_j - T_{j-1}, j = 2, 3, ...$$

Debido a que los procesos Poisson no tienen memoria, estos tiempos de espera son variables aleatorias independientes que siguen una exponencial de parámetro λ*, también son independientes de la historia del proceso.*

Ejemplo 4.2. Sea un mismo evento que ocurre repetidas veces de manera aleatoria a lo largo del tiempo. Tal evento puede ser por ejemplo la llegada de una reclamación a una compañía aseguradora, o la llegada de un cliente a una ventanilla para solicitar algún servicio, o los momentos en que una cierta maquinaria requiere reparación, etc. Supongamos que las variables aleatorias $W_1, W_2...$ representan los tiempos que transcurren entre una ocurrencia del evento y la siguiente ocurrencia. También suponemos que estos tiempos son independientes uno del otro, y que cada uno de ellos tiene distribución $\exp(\lambda)$. Se define el proceso de Poisson en el tiempo t como el número de ocurrencias del evento que se han observado hasta ese instante t.

Teorema 4.1. *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson, entonces* $S(t)$ *es un proceso Poisson compuesto para un t fijo* $t = t_0$*, el agregado de reclamaciones* $S(t_0)$ *sigue una distribución Poisson compuesta con parámetro* λt_0.

Denotaremos la función de distribución y los momentos de las reclamaciones individuales X_i *como*

$$P(x) = P[X_i \leq x]; \mu_j = E[X_i^j], \quad i, j = 1, 2, ...$$

El factor de carga o la carga de seguridad θ *se define como* $x = (1 + \theta)\lambda\mu_1$*, entonces*

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1$$

4.3 Algunos resultados sobre probabilidades de ruina

Definimos algunos conceptos necesarios para poder dar una cota para la probabilidad de ruina: la cota superior de Lundberg.

Definición 4.4. ***Coeficiente de ajuste.***
En un proceso de ruina con reclamaciones distribuidas como variables aleatorias $X \geq 0$ con $E[X] = \mu_1 > 0$, el coeficiente de ajuste R es la solución positiva de la siguiente ecuación en r

$$1 + (1 + \theta)\mu_1 r = m_X(r)$$

Esta ecuación es equivalente a $\lambda + cR = \lambda m_X(R)$.

Ahora escribimos S para el total de las reclamaciones recibidas en un intervalo de longitud 1. Consecuentemente, $c - S$ es el beneficio en ese intervalo. Entonces S es una Poisson compuesta con parámetro λ, por tanto $m_S(r) = exp\{\lambda(m_X(r) - 1)\}$. Entonces R puede hallarse mediante la solución positiva de cualquiera de las ecuaciones equivalentes

$$e^{Rc} = E[e^{RS}] \Leftrightarrow m_{c-S}(-R) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{R} log m_S(R)$$

Definición 4.5. *A una distribución de probabilidad para la cual existe el coeficiente de ajuste, se le llama* ***distribución con cola ligera****. Cuando no existe tal coeficiente, la distribución adquiere el nombre de "distribución con cola pesada".*

Observación 4.3. **Coeficiente de ajuste y riesgo de aversión**

En el caso de una función de utilidad exponencial, R es el riesgo de aversión α que lleva a una prima anual c.

Ejemplo 4.3. **Coeficiente de ajuste para una distribución exponencial**

Supongamos que X está distribuida exponencialmente con parámetro $\beta = 1/\mu_1$. El correspondiente coeficiente de ajuste es la solución positiva de la ecuación siguiente

$$1 + (1 + \theta)\mu_1 r = m_X(r) = \frac{\beta}{\beta - r}$$

Las soluciones de esta ecuación son la excluida solución trivial $r = 0$ y

$$r = R = \frac{\theta\beta}{1 + \theta}$$

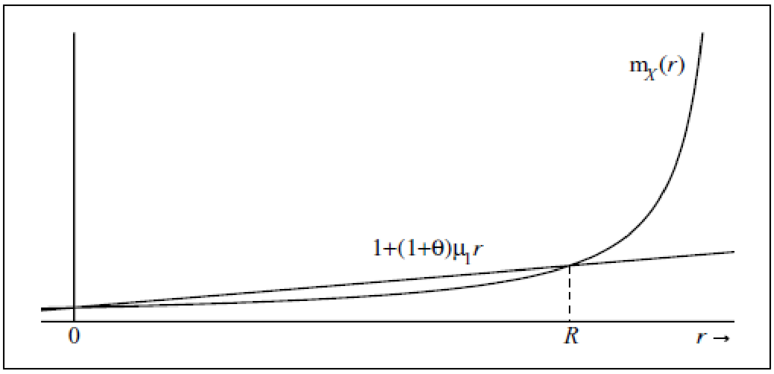

Figura 4.2: Determinando el coeficiente de ajuste R

Esta situación admite una expresión explícita para el coeficiente de ajuste.

Para la mayoría de distribuciones, no hay expresiones explícitas para el coeficiente de ajuste.

En el siguiente teorema probamos la famosa desigualdad exponencial de Lundberg para la probabilidad de ruina.

Para aquellas distribuciones para las cuales el coeficiente de ajuste R existe, tenemos la siguiente cota para la probabilidad de ruina.

Teorema 4.2. ***La cota exponencial de Lundberg para la probabilidad de ruina***

Para un proceso de riesgo compuesto Poisson con un capital inicial u, una prima por unidad de tiempo c, reclamaciones con función de distribución $P(\cdot)$ y función generatriz de momentos $m_X(t)$, y un coeficiente de ajuste R que satisface (Def. 4.4) tenemos la siguiente desigualdad para la probabilidad de ruina

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$

Demostración.

Definimos $\psi_k(u)$, $\;-\infty < u < +\infty$ y $k = 0, 1, 2, \ldots$ como la probabilidad de que la ruina ocurra en la reclamación k-ésima o en alguna anterior. Ya que para $k \rightarrow \infty$,

$\psi_k(u)$ aumenta hasta su límite $\psi(u)$ para todo u, es suficiente probar por ello que $\psi_k(u) \leq e^{-Ru}$ para cada k. Vamos a separar el suceso "ruina en la reclamación k-ésima o en alguna anterior" en cuanto a tiempo y tamaño del primer reclamo.
Supongamos que esto ocurre entre el instante t y $t + dt$. Este suceso posee una probabilidad de $\lambda e^{-\lambda t} dt$. También asumimos que tiene un tamaño entre x y $x + dx$, el cual tiene una probabilidad $dP(x)$. Entonces el capital justo después del tiempo t es igual a $u + ct - x$. Integrando con respecto a x y t obtenemos

$$\psi_k(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \psi_{k-1}(u + ct - x) dP(x) \lambda e^{-\lambda t} dt$$

Ahora suponemos que la hipótesis de inducción para k-1, que es, $\psi_{k-1}(u) \leq e^{-Ru}$ para todo real u. Entonces lleva a

$$\begin{aligned}
\psi_k(u) &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty exp\{-R(u + ct - x)\} dP(x) \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda exp\{-t(\lambda + Rc)\} dt \int_0^\infty e^{Rx} dP(x) \\
&= e^{-Ru} \frac{\lambda}{\lambda + cR} m_X(R) = e^{-Ru}
\end{aligned}$$

Corolario 4.1. **El coeficiente de ajuste positivo significa que la ruina no es segura**

Demostración. Ya que hay una probabilidad positiva e^λ de no tener reclamaciones hasta el instante 1, y $\psi(1) \leq e^{-R}$ por el teorema anterior, para cualquier capital inicial no negativo $u \geq 0$, tenemos $1 - \psi(u) \geq 1 - \psi(0) \geq e^{-\lambda}(1 - e^{-R})$. Entonces la probabilidad de no ruina, también conocida como la probabilidad de supervivencia, es estrictamente positiva cuando $R > 0$, esto ocurre cuando la función generatriz de momentos de la distribución de gravedad de la reclamación es finita en un intervalo que contiene cero

Teorema 4.3. ***Probabilidad de ruina con reclamaciones exponenciales***
Para un proceso de ruina Poisson con reclamaciones que siguen una exponencial $\left(\frac{1}{\mu_1}\right)$, *intensidad* λ *y prima* $c = (1 + \theta) \lambda \mu_1$ *con* $\theta > 0$, *la probabilidad de ruina con un capital inicial* u *es*

$$\psi(u) = \psi(0) e^{-Ru},$$

donde $R = \dfrac{\theta}{(1+\theta)\mu_1}$ *es el coeficiente de ajuste resolviendo la ecuación del Ejemplo 4.2,* $\psi(0) = \dfrac{1}{1+\theta}$

Demostración. Suponemos que tanto las reclamaciones y el tiempo que hay entre ellas siguen una exponencial de parámetro 1, por tanto $\mu_1 = \lambda = 1$. Después, el caso general se conseguirá fácilmente. Queremos encontrar la probabilidad de ruina $\psi(u)$ con capital inicial $u \geq 0$.

Supongamos que estamos ante la realización de un proceso de riesgo con un capital inicial u en el que la ruina ocurre. En este caso, hay una reclamación que lleva a la ruina, de tamaño $X \sim$ exponencial (1). Se sabe que $X > v$, donde v representa el capital presente justo antes de la ruina en este momento del proceso. Supongamos ahora que el capital inicial no era u, pero infinitesimalmente mayor, esto es, $u + du$. Hay dos casos en el que nuestra particular realización del proceso también resulta en ruina empezando desde $u + du$. Primero, la reclamación que lleva a la ruina debe ser tan grande que un extra du en el capital inicial no habría hecho diferencia, en otras palabras, $X > v + du$. Ya que X es exponencial, tenemos $P[X > v + du | X > v] = e^{-v-du}/e^{-v} = 1 - du$. Notemos que esta probabilidad no depende de v. Segundo, la cantidad extra du podría por un momento salvarnos de la ruina. Este evento tiene probabilidad condicional du. Pero entonces, podríamos arruinarnos en un tiempo posterior, y como un proceso Poisson no tiene memoria, la probabilidad de que esto pase es solo $\psi(0)$. Por lo tanto, tenemos la siguiente ecuación diferencial

$$\psi(u + du) = \psi(u)(1 - du + \psi(0)du$$

Reagrupando tenemos

$$\frac{\psi'(u)}{\psi(u)} = \psi(0) - 1$$

Tomando diferenciales e integrando, se tiene

$$log\psi(u) = u(\psi(0) - 1) + log\psi(0)$$

Por tanto, para un proceso de riesgo clásico con reclamaciones exponenciales unitarias, la probabilidad de ruina, como función del capital inicial u, debe ser de la siguiente forma

$$\psi(u) = \left\{ \begin{array}{ll} \psi(0)e^{-u(1-\psi(0))}, & \text{para } u \geq 0 \\ 1, & \text{para } u < 0 \end{array} \right\}.$$

El segundo paso en la demostración es encontrar el valor de $\psi(0)$ como función de c. Para esto, suponemos que la primera reclamación es igual a x y ocurre en el instante t. La probabilidad de este suceso es igual a $e^{-t}dte{-}xdx$. Después de esa reclamación, el capital es $u + ct - x$, entonces la probabilidad de ruina en u puede ser expresada como

$$\psi(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \psi(u + ct - x)e^{-t}dte_{-x}dx$$

que usando la definición de $\psi(u)$ escrita anteriormente, para el caso $u = 0$ puede ser rescrito como

$$\begin{aligned}\psi(0) &= \int_0^\infty \int_{x/c}^\infty \psi(0)e^{-(1-\psi(0))(ct-x)}e^{-t}dte^{-x}dx \\ &\quad + \int_0^\infty \int_0^{x/c} e^{-t}dte^{-x}dx\end{aligned}$$

Usando $\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx = 1/\alpha$ y sustituyendo $y = ct - x$, queda de tal manera

$$\begin{aligned}\psi(0) &= \frac{\psi(0)}{c}\int_0^\infty e^{-x/c}\int_0^\infty e^{-y(1-\psi(0)+1/c)}dye^{-x}dx \\ &\quad + \int_0^\infty (1 - e^{-x/c})e^{-x}dx \\ &= \frac{\psi(0)}{c}\int_0^\infty e^{-x/c}\frac{1}{1-\psi(0)+1/c}e^{-x}dx + 1 - \frac{1}{1+1/c} \\ &= \frac{\psi(0)}{c}\frac{1}{1-\psi(0)+1/c}\frac{1}{c+1}\end{aligned}$$

Que puede ser simplificado en la siguiente ecuación cuadrática expresando $\psi(0)$ en función de c

$$\psi(0) = \frac{1}{c}\frac{1}{1-\psi(0)+1/c}$$

Hay solo dos soluciones. Una es $\psi(0) = 1$, que se excluye por el **Corolario 4.1**. La otra solución es $\psi(0) = \dfrac{1}{c}$, por lo tanto, queda probado.

La igualdad $\psi(0) = \dfrac{1}{1+\theta}$ probada anteriormente para reclamaciones exponenciales, se mantiene para todo tipo de distribuciones del tamaño de las reclamaciones. Ya que $\psi(0)$ tiende a 0 si θ decrece a 0, por el **Corolario 4.1** tenemos que $\psi(u) \equiv 1$ para reclamaciones exponenciales cuando no hay carga de seguridad, esto es, cuando $\theta = 0$. ∎

Ejemplo 4.4. **Simulando un proceso de ruina Poisson. Ilustración con R.**

El siguiente programa de R cuenta con qué frecuencia la ruina ocurre durante las primeras $n = 400$ reclamaciones de un proceso de ruina simulado. De esta manera, obtenemos un estimador de $\psi_n(u)$, la probabilidad de ruina en la n-ésima reclamación o en una anterior a esta. Las reclamaciones están distribuidas mediante una distribución gamma(α, α) distribuidas con un $\alpha = 2$. Se espera que si la ruina ocurre, ocurrirá pronto. Esto es porque el proceso excedente se alejará de cero, ya que $E[U(t)] = u + \theta\lambda t E[X]$ y $Var[U(t)] = \lambda t E[X^2]$. Entonces, este programa da una buena aproximación para $\psi(u)$

```
lab= 1 ; EX = 1 theta = 0.3 ; u= 7.5 ; alpha = 2
n = 400
nSim = 10000
set.seed(2)
c.= (1+theta)*lab*EX
N=rep(Inf, nSim)
for (k in 1:nSim){
  Wi = rexp(n)/lab
  Ti=cumsum(Wi)
  Xi= rgamma(n, shape=alpha)/alpha  ##La severidad tiene media EX=1
  Si=cumsum(Xi)
  Ui=u+Ti*c. - Si
  ruin = !all(Ui>=0)
  if (ruin) N[k] = min(which(Ui<0))}
N= N[N<Inf]; length(N); mean(N); sd(N); max(N)
## 745 30.78792 24.71228 255
```

4.4 Probabilidad de ruina y capital en la ruina

Para poder dar más resultados sobre el proceso de ruina, tenemos que desarrollar un poco más de teoría. Primero vamos a dar una expresión para la probabilidad de ruina que involucra la fgm de $U(t)$, que es el capital en el instante de la primera ruina, condicionada el evento de que la ruina ocurra en un periodo finito de tiempo.

Teorema 4.4. ***Probabilidad de ruina y capital en la ruina***

La probabilidad de ruina para $u \geq 0$ satisface

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)}|T < \infty]}$$

Demostración. Sea $R > 0$ y $t > 0$. Entonces

$$E[e^{-RU(t)}] = E[e^{-RU(t)}|T \leq t]P[T \leq t] + E[e^{-RU(t)}|T > t]P[T > t]$$

El lado izquierdo es igual a e^{-Ru}. Esto puede demostrarse de la siguiente manera: $U(t) = u + ct - S(t)$ y $S(t)$ siguen una distribución Poisson compuesta con parámetro λt.

$$\begin{aligned} E[e{-}RU(t)] &= E[e^{-R\{u+ct-S(t)\}}] \\ &= e^{-Ru}[e^{-Rc}exp\{\lambda(m_X(R)-1)\}]^t \\ &= e^{-Ru}. \end{aligned}$$

Para la primera esperanza condicional en la primera igualdad, tomamos $v \in [0, t]$ y escribimos, usando $U(t) = U(v) + c(t - v) - [S(t) - S(v)]$

$$\begin{aligned} E[e^{-RU(t)}|T = v] &= E[e^{-R\{U(v)+c(t-v)-[S(t)-S(v)]\}}|T = v] \\ &= E[e^{-RU(v)}|T = v]e^{-Rc(t-v)}E[^{R\{S(t)-S(v)\}}|T = v] \\ &= E[e^{-RU(v)}|T = v]\{e^{-Rc}exp[\lambda(m_X(R)-1)]\}^{t-v} \\ &= E[e^{-RU(T)}|T = v]. \end{aligned}$$

Las reclamaciones totales $S(t)-S(v)$ entre v y t siguen, de nuevo, una distribución Poisson compuesta. Lo que pasa después de v es independiente de lo que pasó antes de v, entonces $U(v)$ y $S(t) - S(v)$ son independientes.

Ya que $P[T \leq t] \uparrow P[T \leq \infty]$ para $t \longrightarrow \infty$, es suficiente para mostrar que el último término de la primera igualdad desaparece para $t \longrightarrow \infty$. Por esta razón, separamos el suceso $T > t$ de acuerdo al tamaño de $U(t)$. Dicho de otra forma, consideramos los casos $U(t) \leq u_0(t)$ y $U(t) > u_0(t)$ para alguna función adecuada $u_0(t)$. Nos damos cuenta de que si $T > t$ implica que no estamos en ruina en el tiempo t, lo que significa que $U(t) \geq 0$, entonces $e^{-RU(t)} \leq 1$. Tenemos

$$
\begin{aligned}
E[e^{-RU(t)}|T > t]P[T > t] &= E[e^{-RU(t)}|T > t, 0 \leq U(t) \leq u_0(t)]\ P[T > t, 0 \leq U(t) \leq u_0(t)] \\
&+ E[e^{-RU(t)}|T > t, U(t) > u_0(t)]\ P[T > t, U(t) > u_0(t)] \\
&\leq P[U(t) \leq u_0(t)] + E[exp(-Ru_0(t))]\ .
\end{aligned}
$$

El segundo término desaparece si $u_0(t) \longrightarrow \infty$. Para el primer término, nos damos cuenta de que $U(t)$ tiene esperanza $\mu(t) = u + ct - \lambda t \mu_1$ y varianza $\sigma^2(t) = \lambda t \mu_2$. Debido a la desigualdad de Chebyschev, es suficiente elegir la función $u_0(t)$ tal que $(\mu(t) - u_0(t))/\sigma(t) \longrightarrow \infty$. Por ejemplo, podemos tomar $u_0(t) = t^{2/3}$. ∎

Conclusión.

A lo largo del trabajo, hemos definido conceptos y dado resultados sobre la cantidad reclamada S, que es una variable aleatoria compuesta. Esta variable, como se ha visto, va a tener una distribución y unas características dependiendo del número de reclamaciones. En el modelo individual, veíamos que dicha cantidad era a lo sumo un número fijo n que es el número de pólizas, lo que indica que como máximo hay una reclamación por póliza, esto no es muy realista.

Posteriormente, se da el modelo colectivo, en este caso el número de reclamaciones de una cartera de seguros es una variable aleatoria discreta. Esto genera diferentes propiedades en la distribución de S a las dadas en el modelo individual. Este modelo se ajusta mejor a la realidad.

Por último, se expone el modelo de riesgo que estudia el comportamiento de una cartera cuando las reclamaciones ocurren a lo largo del tiempo. En este caso, el número de reclamaciones viene dado por una variable aleatoria que también depende del tiempo, $N(t)$, es decir, no fijamos un tiempo como en el modelo colectivo en el que pueden ocurrir las reclamaciones. Esto hace que el capital de un asegurador sea un proceso estocástico, que denominamos proceso de riesgo. En este caso, S es un proceso compuesto. Se han visto resultados y propiedades sobre la probabilidad de ruina del asegurador.

A Modelos de variables aleatorias

A.1 Modelos de variables aleatorias discretas

A.1.1 Variable aleatoria de Bernoulli

La variable aleatoria de Bernoulli se utiliza para modelar un experimento con dos posibles resultados, denominados respectivamente *éxito* y textitfracaso. Usualmente se asigna el valor 1 para el éxito y el valor 0 para el fracaso. Se supone que el éxito aparece con probabilidad $p \in (0, 1)$ y por tanto, el fracaso con probabilidad $q = 1 - p$. Este tipo de experimentos se denominan *experimentos de Bernoulli*. Más formalmente, una variable aleatoria X sigue una distribución de parámetro $p \in (0, 1)$, si su funciín de probabilidad es

$$P[X = 0] = 1 - p \text{ y } P[X = 1] = p.$$

Se denotará $X \sim$ Be(p).

Para esta variable aleatoria se tiene

$E[X^r] = p, \ \forall r > 0.$

En particular, $E[X] = p$ y $Var[X] = pq$.

$M_X(t) = E[e^{tX}] = pe^t + q.$

A.1.2 Variable aleatoria binomial

Supongamos un experimento de Bernoulli que es repetido n veces. Se supondrá además que los experimentos son (mutuamente) independientes y que la probabilidad de éxito, p, se mantiene constante en las n repeticiones. La variable aleatoria

$$X = \text{número de éxitos en los n ensayos Bernoulli}$$

es una variable aleatoria binomial de parámetros n y p. Se denota $X \sim Bi(n, p)$. Si n=1, la variable binomial coincide con la distribución Bernoulli.
La función de probabilidad de una variable $X \sim Bi(n, p)$ es

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \; k = 0, ..., n \; con \; q = 1 - p.$$

Se verifica

$M_X(t) = (q + pe^t)^n$

$E[X] = np$ y $Var[X] = npq$.

Reproductividad. Si $X_1 \sim Bi(n_1, p)$ y $X_2 \sim (n_2, p)$ son independientes, entonces $X_1 + X_2 \sim \; Bi(n_1 + n_2, p)$.

A.1.3 Variable aleatoria geométrica

Supongamos un experimento de Bernoulli que puede ser repetido indefinidamente. Supondremos también que los experimentos son mutuamente independientes y que la probabilidad de éxito, $p \in (0, 1)$ se mantiene constante en todos los experimentos. La variable aleatoria

$$X = \text{número de fracasos hasta que por primera vez se obtiene un éxito}$$

es una variable aleatoria geométrica de parámetro p y se denota $X \sim Ge(p)$.
La función de probabilidad de una variable $X \sim Ge(p)$ es

$$P[X = k] = q^k p, \; k = 0, 1, ...$$

Se verifica

$$M_X(t) = \frac{p}{1 - qe^t}, \quad t < -ln(q).$$

$$E[X] = \frac{q}{p}, \quad Var(X) = \frac{q}{p^2}.$$

La familia de distribuciones geométricas no es reproductiva.

A.1.4 Variable aleatoria Binomial Negativa

Es una generalización de la distribución geométrica. La situación experimental es similiar a la de un experimento geométrico, es decir, se tiene un experimento Bernoulli que puede ser repetido indefinidamente de tal forma que los ensayos sean independientes entre sí y que la probabilidad de éxito, $p \in (0, 1)$, se mantenga inalterada. La variable

$$X = \text{número total de fracasos hasta que se obtienen r éxitos}$$

es una variable aleatoria Binomial Negativa de parámetros r y p. Se denota $X \sim BN(r, p)$. La función de probabilidad de una variable $X \sim BN(r, p)$ es

$$P[X = k] = \binom{k + r - 1}{k} q^k p^r, \; k = 0, 1, ...$$

Nótese que si r=1 la variable X es geométrica de parámetro p.
Se verifica

$$M_X(t) = \frac{p^r}{(1 - e^t q)^r} \quad t < -ln(q)$$

$$E[X] = \frac{rq}{p}, \quad Var[X] = \frac{rq}{p^2}$$

Reproductividad. Si $X_1 \sim BN(n_1, p)$ y $X_2 \sim BN(n_2, p)$ son independientes, entonces $X_1 + X_2 \sim BN(n_1 + n_2, p)$.

A.1.5 Variable aleatoria de Poisson

Una variable aleatoria X que toma valores enteros no negativos y que tiene una función de probabilidad de la forma

$$P[X = k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, \ldots$$

es una variable aleatoria de Poisson de parámetro $\lambda > 0$. Se denota $X \sim Po(\lambda)$.
La distribución de Poisson es un caso límite de la distribución binomial.
Sean $X_n \sim Bi(n, p_n)$ con $p_n = \frac{\lambda}{n}$, con $\lambda > 0$. La función de probabilidad de X_n es

$$P[X_n = k] = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n^k}\right)^k\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

si hacemos tender n (número de ensayos de Bernoulli) a infinito, se obiente

$$\lim_n P[X_n = k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad \forall k \geq 0 \ entero.$$

Por lo tanto, la distribución de Poisson puede entenderse como el límite de probabilidades binomiales cuando el número de ensayos tiende a infinito y la probabilidad de éxito tiende a cero, manteniéndose constante el valor esperado $\lambda = np_n$.
Se verifica

$$M_X(t) = exp\left\{\lambda(e^t - 1)\right\}, \ \forall t \in R$$

$$E[X] = Var(X) = \lambda.$$

Reproductividad. Si $X_1 \sim Po(\lambda_1)$, $X_2 \sim Po(\lambda_2)$ son independientes, entonces $X_1 + X_2 \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$.

A.2 Modelos de variables aleatorias absolutamente continuas

A.2.1 Variable aleatoria exponencial

Diremos que X tiene una distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$ si es absolutamente continua con función de densidad

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x)...$$

Se denotará $X \sim Exp(\lambda)$.
La función de distribución de $X \sim Exp(\lambda)$ es

$$F(x) = (1 - e^{-\lambda x}) I_{(0,+\infty)}(x).$$

Se verifica

Momentos ordinarios de orden k.

$$E[X^k] = \frac{k!}{\lambda^k},\ k \geq 0.$$

Esperanza, momento ordinario de segundo orden y varianza.

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}; \quad E[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}; \quad Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Función generatriz de momentos.

$$M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}, \quad t < \lambda.$$

La familia de distribuciones exponenciales no es reproductiva.

A.2.2 Variable aleatoria Gamma

Diremos que la variable aleatoria X se distribuye según una distribución Gamma de parámetros $p > 0$ y $\lambda > 0$, si es absolutamente continua, con función de densidad

$$f(x) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} e^{-\lambda x} x^{p-1} I_{(0,+\infty)}(x), \ \lambda > 0, \ p > 0.$$

Se denotará $X \sim Ga(p, \lambda)$.
En la definición anterior, $\Gamma(p)$ denota la función gamma, definida como

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \ p > 0$$

Algunas propiedades básicas de la función gamma son

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1), \quad p > 1$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in N$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Fácilmente se comprueba que f cumple los requisitos para ser función de densidad. Se tiene además
Momentos ordinarios de orden k.

$$E[X^k] = \frac{\Gamma(k+p)}{\lambda^k \Gamma(p)}, \ k \geq 0.$$

Esperanza, momento ordinario de segundo orden y varianza.

$$E[X] = \frac{p}{\lambda}; \quad E[X^2] = \frac{p(p+1)}{\lambda^2}; \quad Var[X] = \frac{p}{\lambda^2}$$

Función generatriz de momentos.

$$M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-p}, \ t < \lambda.$$

Reproductividad. Si $X_1 \sim Ga(p_1, \lambda)$ y $X_2 \sim Ga(p_2, \lambda)$ son independientes, entonces $X_1 + X_2 \sim Ga(p_1 + p_2, \lambda)$

Bibliografía

[1] Rob Kaas, Marc Goovaerts, Jan Dhaene, Michel Denuit, *Modern Actuarial Risk Theory*, 2nd edition, Springer, Amsterdam, 2008.

[2] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, 3rd edition, Wiley, New York, 1968.

[3] Michel Dekking, C. Kraaikamp L.E. Meester, H.P. Lopuhaä, *A Modern Introduction to Probability and Statistics*, Springer, Delft, 2005.

[4] Luis Rincón, *Introducción a la teoría del riesgo*, Circuito Exterior de CU, México DF, 2012.

[5] Vijay K. Rohatgi, A. K. MD. Ehsanes Saleh, *An introduction to Probability and Statistics*, 3rd edition, John Wiley and Sons Inc., New Jersey, 2015.

[6] Ross, Sheldon M., Stochastic Processes, 2nd Edition, Wiley., New York, 1996.

[7] Panjer, Harry H. Willmot, Gordon E., Insurance Risk Models, Society of Actuaries, University of Michigan, 1992.