



El Axioma de Determinación

Antonio Ferre Luque



El Axioma de Determinación

Antonio Ferre Luque

Memoria presentada como parte de los requisitos
para la obtención del título de Grado en Matemá-
ticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Andrés Cordon Franco

Francisco Félix Lara Martín

Índice general

English Abstract	1
Resumen	3
1. Introducción	5
2. Juegos Infinitos	9
2.1. Preliminares	9
2.2. Definiciones básicas	10
2.3. Cardinalidad	14
2.4. Determinación de los juegos infinitos	16
2.5. Sobre los axiomas de la teoría de conjuntos	19
3. El teorema de Gale-Stewart	21
3.1. Notación	21
3.2. El Teorema de Gale-Stewart	22
3.3. El Espacio de Baire	23
4. Medida y categoría	29

II EL AXIOMA DE DETERMINACIÓN

4.1. Medida de Lebesgue	29
4.2. Categoría de Baire	31
4.3. Conjuntos analíticos y conjuntos de Bernstein	33
5. Determinación y propiedades de regularidad	37
5.1. La propiedad del conjunto perfecto	39
5.2. La propiedad de Baire	43
5.3. Determinación y Medida de Lebesgue	48

English Abstract

The aim of this work is to study the consequences of assuming the axiom of determinacy regarding perfect set property, Baire property and Lebesgue measure. In order to accomplish that, we will study infinite games, Gale-Stewart theorem, Martin theorem and Baire category theorem. This work is divided into 5 chapters where the first chapter is an introduction and the next three chapters (2, 3, 4) are the base of the fifth chapter in which we study the consequences of assuming the axiom of determinacy.

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar las consecuencias de asumir como cierto el axioma de determinación en lo referente a la propiedad del conjunto perfecto, la propiedad de Baire y la medida de Lebesgue. Para ello, estudiaremos los juegos infinitos, el teorema de Gale-Stewart, el teorema de Martin y el teorema de categoría de Baire. Este trabajo se divide en 5 capítulos donde el primer capítulo es una introducción y los tres siguientes (2, 3, 4) son la base del quinto capítulo en el cual estudiaremos las consecuencias de asumir el axioma de determinación.

1 | Introducción

El estudio matemático de juegos de estrategia como el ajedrez, las damas y el Go comenzó en 1913 por Ernst Zermelo y continuó con otros matemáticos. Naturalmente, los juegos en la vida real siempre tienen longitud finita, es decir, terminan tras un número finito de turnos. Sin embargo, como tenemos un método matemático que funciona para juegos finitos, podemos extenderlo para incluir a los juegos infinitos, que son juegos similares al ajedrez, Go, etc., pero donde el número de movimientos es infinito.

Los axiomas de determinación afirman que ciertos juegos están determinados, es decir, que uno de los jugadores que participa en el juego tiene una estrategia ganadora. Los axiomas comúnmente aceptados en las matemáticas, los axiomas de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección (ZFC), implican la determinación de los juegos que la gente realmente juega. Esto se aplica en particular a juegos de información perfecta, en los cuales los jugadores se alternan en turnos los movimientos de cada jugador son conocidos por ambos jugadores y el resultado del juego depende sólo de los movimientos que haga cada jugador y no del azar u otros factores. Los juegos de información perfecta que acaban en un número finito de movimientos están determinados. Esto se sigue del trabajo de Ernst Zermelo, Dénes König y László Kálmár, y también de los trabajos independientes de John von Neumann and Oskar Morgenstern.

Stanislaw Ulam señaló que la determinación de los juegos de información perfecta de longitud finita fija es un teorema de lógica. Si $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ son las variables que representan los turnos del Jugador I (que juega con x_1, x_2, \dots, x_n) y los del Jugador II (que juega con y_1, y_2, \dots, y_n), y A (formado por sucesiones de longitud $2n$) es el conjunto de ganancia para el Jugador I, la fórmula

$$\exists x_1 \forall y_1, \dots, \exists x_n \forall y_n \langle x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \rangle \in A$$

afirma que el Jugador I tiene una estrategia ganadora en el juego, mientras que su negación,

$$\forall x_1 \exists y_1, \dots, \forall x_n \exists y_n \langle x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \rangle \notin A$$

afirma que el Jugador II tiene una estrategia ganadora en el juego.

El estudio de los axiomas de determinación afecta a juegos cuya determinación no está probada ni refutada por los axiomas de Zermelo-Fraenkel (sin el axioma de elección). Normalmente, dichos juegos son infinitos. Axiomas que establecen que varios tipos de juegos infinitos están determinados fueron estudiados por Stanislaw Mazur, Stefan Banach y Ulam a finales de los años 20 y a principios de los años 30. El estudio de estos axiomas volvió en los años 50 y principios de los 60 gracias a David Gale, Frank Stewart, y Jan Mycielski y Hugo Steinhaus, y ganó interés a finales de los 60 debido al trabajo de David Blackwell y Robert Solovay. Pero no fue hasta los años 70 y 80 cuando se convirtió en uno de los objetos de estudio más importantes de la teoría de conjuntos.

En 1962 Mycielski y Steinhaus introdujeron el axioma de determinación (AD) que afirma que para todo conjunto $A \subseteq \omega^\omega$, el juego $G(A)$ está determinado. Aquí ω es el conjunto de los números naturales $0, 1, 2, \dots$ y ω^ω es el conjunto de todas las funciones $f : \omega \rightarrow \omega$.

La historia contada aquí está sacada de un artículo de Paul B. Larson que podéis encontrar en [2].

El capítulo 2 del presente trabajo se centra en el estudio de los juegos infinitos. En este capítulo daremos definiciones básicas sobre juegos infinitos, como por ejemplo la definición de estrategia o la definición de estrategia ganadora, que tenemos que conocer si queremos comprender el resto del trabajo. Además hablaremos de la determinación de los juegos infinitos llegando a demostrar que existe un conjunto no determinado.

El material utilizado en este capítulo está tomado de [1] y de [5].

El capítulo 3 trata sobre el teorema de Gale-Stewart, el cual establece que todo conjunto finitamente decidible es determinado. El objetivo de este capítulo es reformular dicho teorema en términos topológicos. Para ello, introduciremos el espacio de Baire y veremos que los abiertos de este espacio son precisamente los conjuntos finitamente decidibles. Además, enunciaremos, pero no demostraremos debido a su

complejidad, el teorema de Martin.

El material utilizado en este capítulo está tomado de [1].

En el capítulo 4 recordaremos conceptos y resultados sobre la medida de Lebesgue, estudiaremos el teorema de categoría de Baire y hablaremos sobre los conjuntos analíticos y los conjuntos de Bernstein. Estos últimos prueban que el axioma de elección y el de determinación son incompatibles. Los resultados de este capítulo, salvo excepciones, no se demostrarán ya que o bien las hemos visto durante el grado o bien podrían distraernos de nuestro objetivo.

El material utilizado en este capítulo está tomado de [6], [3] y [4].

En el capítulo 5 veremos las implicaciones de la determinación sobre las propiedades de regularidad. Las propiedades de regularidad que trataremos serán la propiedad del conjunto perfecto, la propiedad de Baire y la medibilidad de Lebesgue. Además introduciremos tres juegos infinitos, el $*$ -game debido a Morton Davis, el juego de Banach-Mazur y el juego de los cubrimientos. El primer juego se usará para probar que bajo AD, todo conjunto de reales tiene la propiedad del conjunto perfecto. El juego de Banach-Mazur se utilizará para probar que bajo AD, todo conjunto de reales tiene la propiedad de Baire y el juego de los cubrimientos se empleará para probar que bajo AD, todo conjunto de reales es medible Lebesgue.

El material utilizado en este capítulo está tomado de [1], [2], [5] y [7].

2 | Juegos Infinitos

2.1 Preliminares

Nuestro punto de partida es el conjunto de todos los números naturales $\{0, 1, 2, \dots\}$, que denotamos por ω . Para cada n , ω^n es el producto cartesiano n -ario de ω , es decir, $\omega \times \dots \times \omega$ repetido n veces. Denotaremos a los elementos de ω^n por $\langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$, donde x_i es un número natural, y las llamaremos sucesiones finitas. Sin embargo, a efectos prácticos, identificaremos con frecuencia una sucesión finita con una función $f : \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \omega$, de modo que si $f \in \omega^n$, podemos escribir $f(m)$ para denotar el m -ésimo elemento de la sucesión f . Normalmente usaremos las letras s, t , etc. para sucesiones finitas. La sucesión vacía se denota por $\langle \rangle$.

El conjunto de todas las sucesiones finitas es denotado por

$$\omega^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} \omega^n$$

y para $s \in \omega^{<\omega}$, $|s|$ es la longitud de s , i.e., $|s| = n$ tal que $s \in \omega^n$. Escribimos $|A|$ para denotar la cardinalidad de A . Generalizando esto al producto cartesiano infinito, tenemos el conjunto

$$\omega^\omega := \{f \mid f : \omega \rightarrow \omega\}$$

Entonces ω^ω es el conjunto de todas las funciones que van desde los números naturales hasta los números naturales. Podemos ver tales funciones como sucesiones infinitas de números naturales, y por esa razón a veces usaremos una notación como $\langle 0, 0, 0, \dots \rangle$, o $\langle x_0, x_1, \dots \rangle$. Usualmente usaremos las letras x, y , etc. para elementos de ω^ω .

2.2 Definiciones básicas

Sea A un subconjunto de ω^ω . El juego $G(A)$ se juega como sigue:

- Hay dos jugadores, Jugador I y Jugador II, que se turnan para elegir un número natural en cada paso del juego.
- En cada turno i , denotamos la elección del Jugador I como x_i y la del Jugador II como y_i .
- Al final, un juego infinito que "se juega", se ve como sigue:

I	x_0	x_1	...
II	y_0	y_1	...

Definición 2.1. Sea $z := \langle x_0, y_0, x_1, y_1, \dots \rangle$ una sucesión infinita, llamada partida del juego $G(A)$. Formalmente, definimos

$$z(i) = \begin{cases} x_{\frac{i}{2}} & i \text{ es par} \\ y_{\frac{i-1}{2}} & i \text{ es impar} \end{cases}$$

Por tanto $x_i = z(2i)$ es el i -ésimo movimiento del Jugador I, mientras que $y(i) = z(2i+1)$ es el i -ésimo movimiento del Jugador II.

El Jugador I gana el juego $G(A)$ si $z \in A$, y el Jugador II ganará si $z \notin A$. Llamamos al conjunto A el conjunto de ganancia para el Jugador I.

Uno de los conceptos principales en el estudio de los juegos (finitos e infinitos) es el de una estrategia. Informalmente, una estrategia para un jugador es un método para determinar el siguiente movimiento basado en la secuencia de movimientos anteriores. Formalmente, presentamos la siguiente definición:

Definición 2.2. Dado $A \in \omega^\omega$, una estrategia para el Jugador I en el juego $G(A)$ es una función:

$$\sigma : \{s \in \omega^{<\omega} : |s| \text{ es par}\} \rightarrow \omega$$

Una estrategia para el Jugador II en el juego $G(A)$ es una función:

$$\tau : \{s \in \omega^{<\omega} : |s| \text{ es impar}\} \rightarrow \omega$$

Dada una estrategia σ para el Jugador I y una sucesión infinita $y = \langle y_0, y_1, y_2, \dots \rangle$ de respuestas del Jugador II, usamos la notación $\sigma * y$ para denotar la partida resultante. De igual forma, dada una estrategia τ para el Jugador II y una sucesión infinita $x = \langle x_0, x_1, x_2, \dots \rangle$ de respuestas del Jugador I, usamos la notación $x * \tau$ para denotar la partida resultante. Formalmente:

Definición 2.3.

1. Sea σ una estrategia para el Jugador I. Para todo $y = \langle y_0, y_1, y_2, \dots \rangle$, definimos

$$\sigma * y := \langle x_0, y_0, x_1, y_1, \dots \rangle$$

donde cada x_i viene dado por lo siguiente:

- $x_0 := \sigma(\langle \rangle)$
- $x_{i+1} := \sigma(\langle x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_i, y_i \rangle)$

2. Sea σ una estrategia para el Jugador I. Para todo $s \in \omega^{<\omega}$ con $|s| = n$, definimos

$$\sigma * s := \langle x_0, s(0), x_1, s(1), \dots, x_{i-1}, s(n-1), x_i \rangle$$

donde cada x_i viene dado por lo siguiente:

- $x_0 := \sigma(\langle \rangle)$
- $x_{i+1} := \sigma(\langle x_0, s(0), x_1, s(1), \dots, x_i, s(i) \rangle)$

3. Sea τ una estrategia para el Jugador II. Para todo $x = \langle x_0, x_1, x_2, \dots \rangle$, definimos

$$x * \tau := \langle x_0, y_0, x_1, y_1, \dots \rangle$$

donde cada y_i viene dado por lo siguiente:

- $y_0 := \tau(\langle x_0 \rangle)$
- $y_{i+1} := \tau(\langle x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_i, y_i, x_{i+1} \rangle)$

4. Sea τ una estrategia para el Jugador II. Para todo $t \in \omega^{<\omega}$ con $|t| = n$, definimos

$$t * \tau := \langle t(0), y_0, t(1), y_1, \dots, t(n-1), y_{n-1} \rangle$$

donde cada y_i viene dado por lo siguiente:

- $y_0 := \tau(\langle t(0) \rangle)$
- $y_i := \tau(\langle t(0), y_0, t(1), y_1, \dots, t(i) \rangle)$

5. Sea σ una estrategia para I y sea τ una estrategia para II, definimos

$$\sigma * \tau := \langle x_0, y_0, x_1, y_1, \dots \rangle$$

donde cada x_i e y_i vienen dados por:

- $x_0 := \sigma(\langle \rangle)$
- $x_{i+1} := \sigma(\langle x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_i, y_i \rangle)$
- $y_0 := \tau(\langle x_0 \rangle)$
- $y_{i+1} := \tau(\langle x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_i, y_i, x_{i+1} \rangle)$

Definición 2.4. Sea σ una estrategia para el jugador I, denotamos por

$$Partidas(\sigma) := \{\sigma * y : y \in \omega^\omega\}$$

al conjunto de las infinitas partidas posibles en que I juega según σ . De igual forma,

$$Partidas(\tau) := \{x * \tau : x \in \omega^\omega\}$$

es el conjunto de las infinitas partidas posibles en que II juega según τ .

Ya tenemos todos los conceptos importantes para definir *estrategia ganadora*:

Definición 2.5. Sea $A \subseteq \omega^\omega$,

1. Una estrategia σ para el jugador I es una estrategia ganadora para I en $G(A)$ si para cualquier $y \in \omega^\omega$:

$$\sigma * y \in A$$

2. Una estrategia τ para el jugador II es una estrategia ganadora para II en $G(A)$ si para cualquier $x \in \omega^\omega$:

$$x * \tau \notin A$$

Lema 2.1. Para cualquier $A \subseteq \omega^\omega$, los jugadores I y II no pueden tener estrategias ganadoras a la vez.

Demostración. Supongamos que tanto I como II tienen estrategias ganadoras σ y τ respectivamente. Sea $\sigma * \tau$ la partida resultante cuando I juega según σ y II juega según τ , entonces por un lado se tiene que $\sigma * \tau \in A$ y por otro se tiene que $\sigma * \tau \notin A$, lo cual es una contradicción. |

Veamos antes de continuar, algunos ejemplos.

Consideremos el siguiente juego: Los jugadores I y II escogen números naturales y el primer jugador en sacar un 5 pierde. Si no se ha sacado ningún 5, I gana. ¿Cómo modelamos este juego? En este juego, se tiene que el conjunto A (condiciones para que gane I) es:

$$A := \{z \in \omega^\omega : \forall n (z(n) \neq 5) \text{ o } (\exists n (z(2n+1) = 5) \wedge \forall k < 2n+1 (z(k) \neq 5))\}$$

Claramente el Jugador I tiene una estrategia ganadora fácil: no sacar ningún 5. Formalmente, definimos para todo i :

$$\sigma(\langle \rangle) \neq 5$$

$$\sigma(\langle x_0, y_0, \dots, x_i, y_i \rangle) \neq 5$$

Otro ejemplo: Los jugadores I y II cogen números con la condición de que cada número sea más grande que el anterior. El primer jugador que saque uno más pequeño que el anterior pierde. Si nadie ha roto la regla, II gana. Aquí el conjunto A es:

$$A := \{z \in \omega^\omega : \exists n (z(2n+1) \leq z(2n))\}$$

Aquí, la estrategia ganadora de II es: siempre coger un número mas grande que el anterior. Formalmente, definimos para todo i :

$$\tau(\langle x_0 \rangle) > x_0$$

$$\tau(\langle x_0, y_0, \dots, x_i, y_i, x_{i+1} \rangle) > x_{i+1}$$

Otro ejemplo: Sea $z := \langle z(0), z(1), z(2), \dots \rangle$ una sucesión infinita y sea $A = \{z\}$. En este juego, I ganará si tanto éste como II juegan los números $z(0), z(1), z(2), \dots$ en orden, es decir, I juega $z(0)$, luego II juega $z(1)$, luego I juega $z(2)$ y así sucesivamente. Si uno de los dos no lo hace, entonces II ganará. Aquí II tiene una estrategia ganadora: en su primer turno jugar un número distinto de $z(1)$. Formalmente, se tiene que:

$$\tau(\langle x_0 \rangle) \neq z(1)$$

Por tanto II sabrá tras su primer movimiento que ha ganado el juego

Todos estos juegos están basados en reglas finitas, es decir, los jugadores pueden saber quién gana en un número finito de movimientos. Sin embargo, en el siguiente juego veremos que ambos jugadores sólo sabrán quién es el ganador tras infinitos movimientos.

Dado el siguiente conjunto de ganancia:

$$A = \{z \in \omega^\omega : \forall n \exists m \geq n (z(2m)) = 0\}$$

Aquí, la estrategia ganadora de I es: jugar un cero en cada turno. Formalmente, esto es:

$$\sigma(\langle \rangle) = 0$$

$$\sigma(\langle x_0, y_0, \dots, x_i, y_i \rangle) = 0$$

2.3 Cardinalidad

El estudio de los juegos infinitos $G(A)$ está relacionado con las propiedades de los conjuntos A y, en particular, con sus cardinalidades.

| Teorema 2.1. *Sea $A \subseteq \omega^\omega$ un conjunto numerable. Entonces II tiene una estrategia ganadora en $G(A)$.*

Demostración. Se trata de un argumento diagonal: Enumeramos A por $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$. Consideremos la siguiente "matriz"

	0	1	2	3	4	5	...
a_0	$a_0(0)$	$a_0(1)$	$a_0(2)$	$a_0(3)$	$a_0(4)$...	
a_1	$a_1(0)$	$a_1(1)$	$a_1(2)$	$a_1(3)$	$a_1(4)$...	
a_2	$a_2(0)$	$a_2(1)$	$a_2(2)$	$a_2(3)$	$a_2(4)$	$a_2(5)$...
\vdots							

La estrategia τ elige siempre un elemento distinto del marcado en negrita $a_0(1) + 1$, $a_1(3) + 1$, $a_2(5) + 1$, ...

De este modo para todo x , $x * \tau \neq a_i$ para todo i . Describimos la siguiente estrategia

ganadora τ para II: En el turno i , tomar un número natural distinto de $a_i(2i + 1)$, independientemente de los movimientos anteriores. O, formalmente, definimos para todo i :

$$\tau(\langle x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_i \rangle) := a_i(2i + 1) + 1$$

Sea z el resultado de esta estrategia contra cualquier jugada del Jugador I, i.e., sea $z = x * \tau$ para cualquier $x \in \omega^\omega$. Escribimos $z := \langle x_0, y_0, x_1, y_1, \dots \rangle$. Por construcción, para cada natural i :

$$z(2i + 1) = y_i \neq a_i(2i + 1)$$

Por tanto, para cada i : $z \neq a_i$. Luego, $z \notin A$, y esto prueba que τ es una estrategia ganadora para II. |

Continuamos con más resultados de cardinalidad. Recordemos que ω^ω tiene la cardinalidad del continuo, es decir, el cardinal de los números reales, $|\omega^\omega| = 2^{\aleph_0}$.

| Definición 2.6. Sean σ y τ estrategias para I y II respectivamente, las funciones f_σ y g_τ , que son funciones de ω^ω en ω^ω , vienen dadas por:

$$f_\sigma(y) := \sigma * y$$

$$g_\tau(x) := x * \tau$$

Lema 2.2. Toda función f_σ es una biyección entre ω^ω y $Partidas(\sigma)$. Toda función g_τ es una biyección entre ω^ω y $Partidas(\tau)$.

Demostración. Vamos a probar solo que f_σ es biyectiva pues la otra es análoga. Para ver que es biyectiva, basta ver que es inyectiva y sobreyectiva.

- Inyectividad: Sean $y_1, y_2 \in \omega^\omega$, si $y_1 \neq y_2$, entonces las partidas resultantes son distintas, y por tanto $f_\sigma(y_1) = \sigma * y_1 \neq \sigma * y_2 = f_\sigma(y_2)$, luego f_σ es inyectiva.
- Sobreyectividad: Veamos que para todo $u \in Partidas(\sigma)$, existe $y \in \omega^\omega$ tal que $f_\sigma(y) = u$. Por definición del conjunto $Partidas(\sigma)$, tenemos que dado $u \in Partidas(\sigma)$, existe y tal que $u = \sigma * y$, luego tomando dicho y se obtiene que $f_\sigma(y) = \sigma * y$.

Luego se tiene que es biyectiva. |

Corolario 2.1. Sea A un conjunto con $|A| < 2^{\aleph_0}$. Entonces I no puede tener una estrategia ganadora en $G(A)$.

Demostración. Sea σ una estrategia ganadora para I, entonces por definición tendríamos que $\text{Partidas}(\sigma) \subseteq A$. Por el lema 2.2, sabemos que existe una biyección entre ω^ω y A , pero entonces la cardinalidad de A debe ser al menos la de ω^ω , que es 2^{\aleph_0} . |

Observación 2.1. El teorema 2.1 y el corolario 2.1 también sirven con los roles de I y II cambiados, i.e., si $\omega^\omega - A$ es numerable, entonces I tiene una estrategia ganadora, y si $|\omega^\omega - A| < 2^{\aleph_0}$, entonces II no puede tener una estrategia ganadora.

2.4 Determinación de los juegos infinitos

| **Definición 2.7.** Un juego $G(A)$ está determinado si o bien I o bien II tiene una estrategia ganadora. Análogamente un conjunto $A \subseteq \omega^\omega$ está determinado si el juego $G(A)$ está determinado.

| **Teorema 2.2.** Existe un conjunto no determinado, es decir, un conjunto $A \subseteq \omega^\omega$ tal que $G(A)$ no está determinado.

Para la demostración de este teorema vamos a necesitar la siguiente definición y el siguiente lema, cuya demostración depende esencialmente del axioma de elección.

| **Definición 2.8.** Sea A un conjunto no vacío y R una relación binaria definida en A , entonces R es una relación de orden si:

1. Reflexiva: Todo elemento de A está relacionado consigo mismo, es decir, para todo $a \in A$, aRa .
2. Antisimétrica: Si dos elementos se relacionan entre sí, entonces son iguales. Es decir, $\forall x, y \in A, (xRy, yRx \Rightarrow x = y)$.
3. Transitiva: Si un elemento de A está relacionado con otro, y este otro se relaciona a su vez con un tercero, entonces el primero estará relacionado también con este último, es decir, $\forall x, y, z \in A, (xRy, yRz \Rightarrow xRz)$.

Es un orden total si satisface además la siguiente propiedad:

- Para todo $x, y \in A, (xRy \vee yRx)$

| Definición 2.9. Sea A un conjunto no vacío y R una relación binaria definida en A , entonces R es una relación bien fundada si para todo subconjunto no vacío S de A , hay un m en S tal que ningún s en S cumple que sRm .

| Definición 2.10. Un conjunto bien ordenado es un conjunto I con una relación de orden total \leq tal que la relación $<$ es bien fundada. Es decir, todo subconjunto $J \subseteq I$ contiene un elemento mínimo (es decir, un α tal que $\forall \beta \in J (\alpha \leq \beta)$). Equivalentemente, esto quiere decir que no hay una sucesión infinita estrictamente decreciente, i.e., no existe $\{\alpha_i \in I : i \in \omega\}$ tal que

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$$

Si (I, \leq) es un conjunto bien ordenado, tenemos un principio de inducción trans-finita sobre ese conjunto. Y además tenemos

Lema 2.3. Para todo conjunto X , existe un conjunto bien ordenado (I, \leq) , que llamamos conjunto de índices de X , tal que

1. $|I| = |X|$
2. Para cada $\alpha \in I$, el conjunto $\{\beta \in I : \beta < \alpha\}$ tiene cardinalidad estrictamente menor que $|I| = |X|$.

Demostración. Este resultado es esencialmente equivalente al axioma de elección. Omitiremos la demostración. |

Demostración (Teorema 2.2). Comenzamos contando el número posible de estrategias. Una estrategia es una función de un subconjunto de $\omega^{<\omega}$ a ω . Pero es fácil ver que $\omega^{<\omega}$ es un conjunto numerable ya que $\omega^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} \omega^n$ es unión numerable de conjuntos numerables. Por tanto, puede ser identificado con ω mediante una biyección. Luego cada estrategia puede ser identificada con una función de ω a ω . Así que hay exactamente tantas estrategias como funciones de ω a ω , que son 2^{\aleph_0} .

Sea ahora $\text{STRAT} - I$ el conjunto de todas las posibles estrategias del Jugador I, apliquemos el lema 2.3 a ese conjunto. El conjunto de índices J tiene cardinalidad 2^{\aleph_0} y la biyección entre $\text{STRAT} - I$ y J nos permite identificar cada estrategia del Jugador I con un índice $\alpha \in J$. Por consiguiente podemos escribir:

$$\text{STRAT} - I = \{\sigma_\alpha \mid \alpha \in J\}$$

Podemos hacer lo mismo para el conjunto $\text{STRAT} - II$ que son todas las estrategias posibles del Jugador II, y además podemos usar el mismo conjunto de J (ya que la cardinalidad es la misma). Así que también tenemos

$$\text{STRAT} - \text{II} = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in J\}$$

Ahora vamos a formar dos conjuntos $A, B \subseteq \omega^\omega$ por recursión sobre (J, \leq) . Vamos a definir

$$A = \{a_\alpha \mid \alpha \in J\}$$

$$B = \{b_\alpha \mid \alpha \in J\}$$

mediante la siguiente recursión.

- Caso base: Fijemos $0 \in J$ como el menor elemento de J . Tomamos arbitrariamente un $a_0 \in \text{Partidas}(\tau_0)$. Ahora, $\text{Partidas}(\sigma_0)$ contiene más de un elemento, así que tomamos $b_0 \in \text{Partidas}(\sigma_0)$ tal que $b_0 \neq a_0$.
- Paso recursivo: Sea $\alpha \in J$ y supongamos que para todo $\beta < \alpha$, a_β y b_β han sido ya escogidos. Nosotros escogeremos a a_α y b_α . Nótese que $\{b_\beta : \beta < \alpha\}$ está en biyección con $\{\beta \in J : \beta < \alpha\}$, tiene cardinalidad estrictamente menor que 2^{\aleph_0} (por lema 2.3 (2)). Por otro lado, ya vimos que $\text{Partidas}(\tau_\alpha)$ tiene cardinalidad 2^{\aleph_0} . Por tanto, hay al menos un elemento en $\text{Partidas}(\tau_\alpha)$ que no está en $\{b_\beta : \beta < \alpha\}$. Escogemos alguno de estos y lo llamamos a_α .
Ahora hacemos lo mismo para la colección $\{a_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{a_\alpha\}$. Ésta también tiene cardinalidad menor que 2^{\aleph_0} mientras que $\text{Partidas}(\sigma_\alpha)$ tiene cardinalidad 2^{\aleph_0} , así que podemos tomar un $b_\alpha \in \text{Jugadas}(\sigma_\alpha)$, que no es elemento de $\{a_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{a_\alpha\}$.

Después de haber completado la definición recursiva, hemos definido nuestros conjuntos A y B . Tenemos las siguientes propiedades:

- $A \cap B = \emptyset$

Demostración. Dado $a \in A$, por construcción, hay un $\alpha \in J$ tal que $a = a_\alpha$. Ahora, recordemos que en la "etapa α " del procedimiento recursivo nos aseguramos de que a_α no es igual a b_β para cualquier $\beta < \alpha$. Por otro lado, en cada "etapa γ " con $\gamma \geq \alpha$ nos aseguramos de que b_γ no es igual a a_α . Por tanto a_α no es igual a $b \in B$, probando así la afirmación. |

- A es no determinado

Demostración. Primero, supongamos que I tiene una estrategia ganadora σ en $G(A)$. Entonces $Partidas(\sigma) \subseteq A$, pero hay un $\alpha \in J$ tal que $\sigma = \sigma_\alpha$. En la "etapa α " del procedimiento inductivo tomamos un $b_\alpha \in Partidas(\sigma_\alpha)$, pero por la afirmación 1, b_α no puede estar en A , luego hay una contradicción. Ahora suponemos que II tiene una estrategia ganadora τ en $G(A)$. Entonces $Partidas(\tau) \cap A = \emptyset$. Otra vez, $\tau = \tau_\alpha$ para algún α , pero en la "etapa α " tomamos $a_\alpha \in Partidas(\tau_\alpha)$, y esto es una contradicción. |

Esto completa la prueba del teorema. |

2.5 Sobre los axiomas de la teoría de conjuntos

Todos los teoremas que hemos probado hasta ahora han sido demostrados en la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección (ZFC). Ésta es la teoría de conjuntos que se utiliza habitualmente para el desarrollo de las matemáticas. A continuación enunciaremos los axiomas de Zermelo-Fraenkel.

1. Axioma de Extensionalidad: Si X e Y tienen los mismos elementos, entonces $X = Y$.
2. Axioma del Par: Para cualesquiera a y b existe un conjunto $\{a, b\}$ formado únicamente por a y b .
3. Axioma de Separación: Si ϕ es una propiedad (que puede depender de un parámetro p), entonces para cualquier conjunto X y parámetro p existe un conjunto $Y = \{u \in X : \phi(u, p)\}$ formado por los $u \in X$ que tengan la propiedad ϕ .
4. Axioma de la Unión: Para cualquier X existe un conjunto $Y = \bigcup X$, que es la unión de todos los elementos de X .
5. Axioma de las Partes: Para cualquier X existe un conjunto $Y = \mathcal{P}(X)$, que es el conjunto de todos los subconjuntos de X .
6. Axioma del Infinito: Existe un conjunto infinito.
7. Axioma de Reemplazamiento: Si F es una función, entonces para cualquier X existe un conjunto $Y = F[X] = \{F(x) : x \in X\}$.
8. Axioma de Regularidad: Si $X \neq \emptyset$ entonces existe $m \in X$ tal que para todo $x \in X$ ($x \notin m$).
9. Axioma de Elección: Toda familia de conjuntos no vacíos tiene una función de elección.

Los ocho primeros axiomas se abrevian como ZF, mientras que ZFC denota ZF junto al axioma de elección.

Veamos ahora la definición de función de elección.

| Definición 2.11. Si S es una familia de conjuntos y $\emptyset \notin S$, entonces una función de elección para S es una función f definida sobre S tal que

$$f(X) \in X$$

para todo $X \in S$.

El axioma de elección postula que para todo S tal que $\emptyset \notin S$, existe una función f en S que satisface la definición anterior.

El axioma de elección difiere del resto de axiomas por afirmar la existencia de un conjunto sin definirlo (a diferencia, por ejemplo, del axioma del Par o del axioma de las Partes). De este modo, es interesante saber si un resultado matemático puede probarse sin usar el axioma de elección. Resulta que el axioma de elección es independiente del resto de axiomas y que muchos teoremas matemáticos no se pueden probar en ZF sin usarlo.

Usando el axioma de elección, uno prueba que todo conjunto puede ser bien ordenado.

| Teorema 2.3 (Teorema de buena ordenación de Zermelo). Todo conjunto puede ser bien ordenado.

Observación 2.2. Este teorema es equivalente al lema 2.3.

Vamos a enunciar ahora el axioma de determinación.

- Axioma de Determinación: Todo conjunto $A \subseteq \omega^\omega$ es determinado.

El teorema 2.2 prueba que la teoría ZFC + AD es inconsistente.

3 | El teorema de Gale-Stewart

3.1 Notación

Sea $x \in \omega^\omega$ y n un número natural, entonces $x \upharpoonright n$ denota la parte inicial de x de longitud n , es decir,

$$x \upharpoonright n := \langle x(0), x(1), x(2), \dots, x(n-1) \rangle$$

Si $s \in \omega^{<\omega}$ y $x \in \omega^\omega$, entonces decimos que s es una parte inicial de x , y lo denotamos por

$$s \triangleleft x$$

si para todo $m < |s|$ tenemos que $s(m) = x(m)$, equivalentemente si $x \upharpoonright |s| = s$. Si $s, t \in \omega^{<\omega}$, diremos que s es una parte inicial de t , $s \triangleleft t$, si $|s| \leq |t|$ y para todo $i < |s|$ se tiene que $s(i) = t(i)$. Por último, definimos la concatenación de dos sucesiones finitas $s, t \in \omega^{<\omega}$, denotada por $s \frown t$, como sigue:

$$s \frown t := \langle s(0), s(1), \dots, s(n-1), t(0), t(1), \dots, t(m-1) \rangle$$

donde $|s| = n$ y $|t| = m$. Análogamente, para $s \in \omega^{<\omega}$ y $x \in \omega^\omega$, se define la concatenación de s y x como:

$$s \frown x := \langle s(0), s(1), \dots, s(n-1), x(0), x(1), \dots \rangle$$

3.2 El Teorema de Gale-Stewart

Hasta ahora sólo hemos visto que es posible construir juegos que no son determinados. En esta sección, trataremos qué tipo de juegos son siempre determinados. Para ello, vamos a enunciar y demostrar el teorema de Gale-Stewart dando previamente tres conceptos importantes.

Definición 3.1. Sea $G(A)$ un juego infinito y sea s una sucesión finita de longitud par, definimos $G(A; s)$ como el juego donde el Jugador I empieza con x_0 , luego el Jugador II continua con y_0 , etc. El Jugador I gana el juego si y sólo si $s \frown \langle x_0, y_0, x_1, y_1, \dots \rangle \in A$. Es decir, el conjunto de ganancia es

$$\{z \in \omega^\omega : s \frown z \in A\}$$

Definición 3.2. Dado un juego $G(A)$, decimos que

- Una estrategia ∂_I para el Jugador I es defensiva para I si para todo $t \in \omega^{<\omega}$ el Jugador II no tiene una estrategia ganadora en $G(A, \partial_I * t)$
- Una estrategia ∂_{II} para el Jugador II es defensiva para II si para todo $s \in \omega^{<\omega}$ el Jugador I no tiene una estrategia ganadora en $G(A, s * \partial_{II})$

Definición 3.3. Un conjunto $A \subseteq \omega^\omega$ es finitamente decidable si para todo $x \in A$, existe $s \triangleleft x$ tal que

$$\forall y (s \triangleleft y \rightarrow y \in A)$$

Teorema 3.1 (Gale-Stewart). Si A es un conjunto finitamente decidable, entonces $G(A)$ es determinado.

Demostración. En primer lugar vamos a probar que si I no tiene una estrategia ganadora en $G(A)$, entonces II tiene una estrategia defensiva ∂_{II} . Lo haremos por inducción sobre la longitud de s . Si $s = \langle \rangle$, tenemos que $s * \partial_{II}$ es la sucesión vacía, pues es la posición inicial del juego, por tanto $G(A; s * \partial_{II})$ es lo mismo que $G(A)$ y, por hipótesis, sabemos que I no tiene una estrategia ganadora en $G(A)$.

Ahora supongámoslo cierto para $|s| = n$ y probémoslo para $|s| = n + 1$. En primer lugar, fijamos $p =: s * \partial_{II}$ y vamos a demostrar lo siguiente: Para todo x_0 hay un y_0 tal que I no tiene una estrategia ganadora en $G(A; p \frown \langle x_0, y_0 \rangle)$

Por reducción al absurdo, supongamos que existe un x_0 tal que para todo y_0 , I tiene una estrategia ganadora, σ , en $G(A; p \frown \langle x_0, y_0 \rangle)$. Pero entonces I tiene una estrategia ganadora en $G(A; p)$, lo cual contradice nuestra hipótesis de inducción.

Por tanto, para todo x_0 hay un $y_0 := \partial_{II}(p \frown \langle x_0 \rangle)$ tal que I no tiene una estrategia ganadora en $G(A; p \frown \langle x_0, \partial_{II}(p \frown \langle x_0 \rangle) \rangle)$. Así que le hemos añadido un paso más a la hipótesis de inducción y esto prueba el caso $|s| = n + 1$ y por tanto, lo que queríamos ver.

Gracias a esto, veamos ahora que para cualquier $x \in \omega^\omega$ se tiene que $x * \partial_{II} \notin A$, es decir, que ∂_{II} es una estrategia ganadora. Supongamos que ∂_{II} no es una estrategia ganadora para II, entonces, para un cierto $x \in \omega^\omega$, $x * \partial_{II} \in A$. Como A es finitamente decidible, esto implica que existe $s \triangleleft x * \partial_{II}$ tal que todo y con $s \triangleleft y$ está en A , pero entonces juegue con el número que juegue, I va a ganar el juego $G(A; s)$, o dicho de otro modo, I tiene una estrategia ganadora en $G(A; s)$ y esto contradice el hecho de que II tenga una estrategia defensiva. Luego ∂_{II} es una estrategia ganadora y, por tanto, $G(A)$ está determinado.

I

Veamos antes de continuar un ejemplo de juego finitamente decidible.

Dado el conjunto de ganancia

$$A = \{z \in \omega^\omega : \text{Existe } i \in \omega, (z(10i) = z(10i + 1))\}$$

En este juego el Jugador I ganará si tanto él como el Jugador II juegan el mismo número en algún n -ésimo turno, siendo $n = 1, 6, 11, 16, 21, \dots$. Veamos que A es un conjunto finitamente decidible. Si s es una parte inicial de $z \in A$, entonces $s(10i) = s(10i + 1)$ para algún $i \in \omega$, luego para cualquier $x \in \omega^\omega$ con parte inicial s , por definición tendríamos que $x(10i) = x(10i + 1)$ para algún $i \in \omega$, y por tanto $x \in A$.

Como hemos visto en el teorema anterior, este juego está determinado por ser A un conjunto finitamente decidible. Aquí II tiene una estrategia ganadora: jugar en su n -ésimo turno un número distinto al que jugó I en su n -ésimo turno, con $n = 1, 6, 11, 16, 21, \dots$.

3.3 El Espacio de Baire

El objetivo de esta sección es reformular el teorema de Gale-Stewart en términos topológicos. Comenzaremos recordando conceptos de topología general que nos servirán para definir el espacio de Baire, el cual es necesario para la reformulación del

teorema de Gale-Stewart. Además, reflexionaremos sobre la posibilidad de que haya familias de conjuntos que impliquen la determinación de los juegos asociados a sus miembros.

Definición 3.4. Sea X un conjunto. Diremos que una colección \mathcal{T} de subconjuntos de X es una topología si cumple lo siguiente:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$
3. Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset \mathcal{T}$, entonces $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \mathcal{T}$

Al par (X, \mathcal{T}) se le denomina espacio topológico. A los conjuntos de \mathcal{T} se les llama abiertos de (X, \mathcal{T}) y a sus complementarios cerrados de (X, \mathcal{T}) .

Definición 3.5. Una familia $B \subseteq \mathcal{T}$ se llama base del espacio topológico (X, \mathcal{T}) si todo abierto de \mathcal{T} es unión de conjuntos de B .

Definición 3.6. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y sea $B \subseteq \mathcal{T}$ una base del mismo. Diremos que U es un abierto básico de (X, \mathcal{T}) si $U \in B$. En otras palabras, un abierto básico de una topología es un abierto de esa topología que a su vez es elemento de una base de dicha topología.

Una vez vistas estas definiciones de topología general, daremos paso a conceptos y resultados relacionados con el espacio de Baire.

Definición 3.7. Sea $s \in \omega^{<\omega}$ una sucesión finita, definimos el conjunto $O(s) := \{x \in \omega^\omega : s \triangleleft x\}$. Estos conjuntos se denominarán abiertos básicos.

Definición 3.8. Sean $s, t \in \omega^{<\omega}$. Diremos que s y t son compatibles, $s || t$, si $s \triangleleft t$ o $t \triangleleft s$. En caso contrario diremos que s y t son incompatibles, y lo denotamos por $s \perp t$.

Lema 3.1. Dadas $s, t \in \omega^{<\omega}$, se cumple lo siguiente:

1. $s \triangleleft t$ si y sólo si $O(t) \subseteq O(s)$
2. $s || t$ si y sólo si $O(t) \subseteq O(s)$ o $O(s) \subseteq O(t)$
3. $s \perp t$ si y sólo si $O(t) \cap O(s) = \emptyset$
4. $O(s) \cap O(t)$ es o bien \emptyset o bien un abierto básico

Demostración.

1. Comenzamos probando que $s \triangleleft t \Rightarrow O(t) \subseteq O(s)$. Dado $x \in O(t)$, entonces por definición de $O(t)$ se tiene que $t \triangleleft x$ y como $s \triangleleft t$, entonces $s \triangleleft x$ lo que implica

que $x \in O(s)$ y, por tanto, $O(t) \subseteq O(s)$. Para la otra implicación razonamos por reducción al absurdo, si $\neg(s \triangleleft t)$, entonces existe un m tal que $s(m) \neq t(m)$, pero entonces si $t \triangleleft x$ no se tiene que $s \triangleleft x$, luego $x \notin O(s)$, lo que es una contradicción.

2. Usando 1. tenemos que

$$s || t \iff s \triangleleft t \text{ o } t \triangleleft s \iff O(t) \subseteq O(s) \text{ o } O(s) \subseteq O(t).$$

3. Comenzamos probando que $s \perp t \implies O(t) \cap O(s) = \emptyset$. Si s y t son incompatibles, entonces existe un m tal que $s(m) \neq t(m)$ y eso implica que si $t \triangleleft x$, no se tiene que $s \triangleleft x$, entonces si $x \in O(t)$, $x \notin O(s)$, o lo que es lo mismo, $O(t) \cap O(s) = \emptyset$. La otra implicación sigue directamente de 2, pues si s y t no son incompatibles, entonces $O(t) \subseteq O(s)$ o $O(s) \subseteq O(t)$, luego $O(t) \cap O(s) \neq \emptyset$.
4. Gracias a 2 y a 3, se tiene que la intersección es o bien $O(t)$ o bien $O(s)$ o bien \emptyset .

El último apartado del lema anterior será fundamental para probar el siguiente teorema:

| Teorema 3.2. *Sea \mathcal{T} la colección de subconjuntos de ω^ω que son unión de una familia de abiertos básicos. Entonces $(\omega^\omega, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, conocido como espacio de Baire.*

Demostración. Basta con ver que \mathcal{T} cumple las propiedades de la definición de topología.

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ pues es la unión de una familia vacía de abiertos básicos. Por otro lado, como ω^ω es precisamente $O(\langle \rangle)$, se tiene que $\omega^\omega \in \mathcal{T}$.
2. Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ y sean $J_1, J_2 \subseteq \omega^{<\omega}$, podemos escribir A_1 y A_2 como $A_1 = \bigcup \{O(s) : s \in J_1\}$ y $A_2 = \bigcup \{O(t) : t \in J_2\}$, entonces

$$A_1 \cap A_2 = \bigcup \{O(s) \cap O(t) : s \in J_1, t \in J_2\}$$

y gracias al último apartado del lema anterior, se tiene que la intersección es, o bien el vacío, o bien una unión de abiertos básicos y, por tanto, es abierta, es decir, $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$.

3. Es obvio pues una unión de abiertos es la unión de una unión de abiertos básicos.

Con toda esta información ya podemos enunciar y demostrar el teorema de Gale-Stewart en términos topológicos que, como ya dije al principio de esta sección, es nuestro objetivo.

| Teorema 3.3 (Gale-Stewart). *Si A es un conjunto abierto o cerrado, entonces $G(A)$ es determinado.*

Demostración. La prueba vamos a dividirla en dos partes; la primera, suponiendo que A es abierto y la segunda, que A es cerrado.

- A es un conjunto abierto: Veamos que,

$$A \subseteq \omega^\omega \text{ es abierto} \iff A \text{ es finitamente decidable}$$

Si A es abierto, entonces podemos escribirlo como $A = \bigcup \{O(s) : s \in J\}$ para algún $J \subseteq \omega^{<\omega}$. En particular, $O(s) \subseteq A$ para cada $s \in J$. Dado $x \in A$, debe de existir un s tal que $x \in O(s)$, entonces $s \triangleleft x$ y todo y con $s \triangleleft y$ está en $O(s) \subseteq A$ y esto implica que A es finitamente decidable. Sea ahora A un conjunto finitamente decidable, entonces si $x \in A$, existe $s \triangleleft x$ tal que todo y con $s \triangleleft y$ está en A , pero entonces para todo x , existe $O(s)$ con $x \in O(s)$ tal que $O(s) \subseteq A$. Luego podemos escribir A como unión de abiertos básicos y, por tanto, A es abierto.

Gracias a lo que acabamos de demostrar, se tiene que si A es abierto, entonces es finitamente decidable y por el teorema 3.1 se tiene que $G(A)$ es determinado.

- A es un conjunto cerrado: Si A es cerrado, su complementario es abierto, es decir, $\omega^\omega \setminus A$ es abierto. Por el apartado anterior tenemos que entonces $G(\omega^\omega \setminus A)$ es determinado. Como $G(\omega^\omega \setminus A)$ está determinado, entonces o bien I o bien II tiene una estrategia ganadora. Supongamos que el Jugador I tiene una estrategia ganadora, entonces por el lema 2.1, el Jugador II no puede tener una estrategia ganadora, entonces toda estrategia τ para II verifica que para todo $x \in \omega^\omega$:

$$x * \tau \in \omega^\omega \setminus A$$

lo que significa que

$$x * \tau \notin A,$$

luego II tiene una estrategia ganadora en $G(A)$.

Si suponemos ahora que II tiene una estrategia ganadora en $G(\omega^\omega \setminus A)$, razonando de manera similar llegamos a que I tiene una estrategia ganadora en $G(A)$. Por tanto, $G(A)$ está determinado.

Observación 3.1. Obsérvese que en la primera parte de la prueba, demostramos que los conjuntos finitamente decidibles son precisamente los abiertos del espacio Baire.

Llegados aquí, nos preguntamos si hay más familias de conjuntos que impliquen la determinación de los juegos asociados a sus miembros. Ya sabemos que los finitamente decidibles y los abiertos o cerrados del espacio de Baire la implican. Pero, ¿hay más?. Podríamos ver si la familia de las intersecciones numerables de abiertos, notada como G_δ , lo cumple. También, podríamos hacerlo con la familia de las uniones numerables de cerrados notada como F_σ . Sin embargo, hay un resultado todavía más fuerte, ya que además de demostrar que las familias anteriores, G_δ y F_σ , implican la determinación de sus juegos, también demuestra que existen otros conjuntos que la implican.

Definición 3.9. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Decimos que \mathcal{M} es una σ -álgebra sobre X cuando se verifican las siguientes condiciones:

- $X \in \mathcal{M}$
- Si $A \in \mathcal{M}$, entonces $A^c \in \mathcal{M}$
- Si $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

Definición 3.10. Definimos la σ -álgebra de Borel \mathcal{B} como la menor σ -álgebra que contiene a todos los conjuntos abiertos. A los elementos de \mathcal{B} les decimos conjuntos de Borel o borelianos.

Teorema 3.4 (Martin). Si $B \subseteq \omega^\omega$ es un boreliano, entonces $G(B)$ está determinado.

Este teorema no lo vamos a demostrar, pues la prueba es bastante compleja y está fuera de nuestro alcance. Sin embargo, es inmediato comprobar que implica la determinación de $G(A)$ para todo $A \in G_\delta$ o $A \in F_\sigma$ ya que $G_\delta, F_\sigma \subseteq \mathcal{B}$

4 | Medida y categoría

4.1 Medida de Lebesgue

En esta sección recordaremos conceptos y resultados sobre la medida de Lebesgue, los cuales nos servirán de gran utilidad en el siguiente capítulo.

Definición 4.1. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una σ -álgebra sobre X . Se llama espacio medible al par (X, \mathcal{M}) y conjunto medible a cada miembro de \mathcal{M} .

Definición 4.2. Sea (X, \mathcal{M}) un espacio medible. Una medida sobre (X, \mathcal{M}) es una aplicación $m : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ tal que $m(\emptyset) = 0$ y es numerablemente aditiva, es decir, si $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}$ y los A_n son dos a dos disjuntos, entonces $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$. A la terna (X, \mathcal{M}, m) se le denomina espacio de medida.

La siguiente proposición resume algunas propiedades básicas de toda medida m :

Proposición 4.1. Sea (X, \mathcal{M}, m) un espacio de medida. Se verifica:

1. m es finitamente aditiva, es decir, si $A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathcal{M}$ son dos a dos disjuntos, entonces $m(\bigcup_{n=1}^N A_n) = \sum_{n=1}^N m(A_n)$.
2. m es monótona, es decir, si $A, B \in \mathcal{M}$ y $A \subseteq B$ entonces $m(A) \leq m(B)$.
3. Si $A, B \in \mathcal{M}$ con $A \subseteq B$ y $m(A) < +\infty$, entonces $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$.

La medida μ de Lebesgue suele introducirse mediante una medida exterior asociada a ella:

Definición 4.3. Se llama medida exterior sobre un conjunto X a una aplicación $m^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ nula sobre el conjunto vacío, monótona y numerablemente subaditiva, es decir:

1. $m^*(\emptyset) = 0$.
2. Si $A \subseteq B$ entonces $m^*(A) \leq m^*(B)$.
3. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(X)$ entonces $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$.

| Definición 4.4. Denotamos, como es habitual, al conjunto de los números reales por \mathbb{R} . Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Definimos la aplicación $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ dada por

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \text{long}(I_k) : A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \text{ intervalos } \subseteq \mathbb{R} \right\}$$

| Teorema 4.1. La aplicación μ^* de la definición anterior verifica las siguientes propiedades:

1. μ^* es una medida exterior.
2. μ^* es invariante por traslaciones, es decir, $\mu^*(a + A) = \mu^*(A)$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y todo $A \subseteq \mathbb{R}$. Aquí $a + A := \{a + x : x \in A\}$.
3. μ^* es homotética, es decir, $\mu^*(\lambda A) = |\lambda| \mu^*(A)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $A \subseteq \mathbb{R}$. Aquí $\lambda A := \{\lambda x : x \in A\}$.
4. Si $E \subset \mathbb{R}$ es numerable, $\mu^*(E) = 0$.
5. Si I es un intervalos entonces $\mu^*(I)$ coincide con su longitud.

Observación 4.1. La aplicación μ^* se denomina medida exterior de Lebesgue.

| Definición 4.5. Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ se dice medible Lebesgue si se verifica que $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ para todo $A \subseteq \mathbb{R}$. Es bien conocido que los conjuntos medibles forman una σ -álgebra que denotaremos por \mathcal{L} . Se denomina medida de Lebesgue a la aplicación $\mu : \mathcal{L} \rightarrow [0, +\infty]$ dada por $\mu := \mu^*|_{\mathcal{L}}$

Ya que μ proviene de μ^* , se tiene la propiedad de invariancia por traslaciones y la propiedad de homotecia. Además los conjuntos $\lambda + A$ y λA son medibles Lebesgue siempre que A lo sea. También obtenemos que μ es una medida completa, es decir, que si $A \in \mathcal{M}$ y $\mu(A) = 0$, entonces para todo $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{M}$.

Además cada conjunto $E \subset \mathbb{R}$ numerable es medible Lebesgue con $\mu(E) = 0$. Por último, se tiene que si $\mu^*(A) = 0$, entonces $A \in \mathcal{L}$.

| Teorema 4.2. Todo abierto, todo cerrado, la unión numerable de medibles, la intersección numerable de medibles, todo conjunto de Borel, el complementario de un medible, todo intervalo y todo subconjunto compacto de \mathbb{R} es medible Lebesgue. La medida de Lebesgue de un intervalo coincide con su longitud y la medida de un compacto es finita.

| Definición 4.6. Decimos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tiene medida nula si su medida exterior de Lebesgue es 0.

Las siguientes proposiciones resumen las principales propiedades de los conjuntos de medida nula.

Proposición 4.2. La unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula.

Proposición 4.3. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ tal que $S \cap [k, k+1]$ tiene medida nula para todo $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, S tiene medida nula.

Proposición 4.4. Para todo $X \subseteq \mathbb{R}$ existe A medible con $X \subseteq A$ y $\mu^*(X) = \mu(A)$.

Proposición 4.5. Dados $X \subseteq \mathbb{R}$ y A medible con $X \subseteq A$ y $\mu^*(X) = \mu(A)$, se cumple que todo conjunto medible $Z \subseteq (A \setminus X)$ tiene medida nula.

4.2 Categoría de Baire

El objetivo de esta sección es demostrar el teorema de categoría de Baire y obtener como corolario que todo espacio de Baire es de segunda categoría. El teorema de Categoría de Baire es un resultado de análisis y topología general que establece que si S es o bien un espacio completamente metrizable o bien es un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces la intersección numerable de cualquier colección de abiertos densos en S , sigue siendo densa en S . Aquí solo veremos el caso en el que S es un espacio completamente metrizable.

Definición 4.7. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, decimos que $A \subseteq X$ es un conjunto denso en X si $\overline{A} = X$, es decir, la clausura topológica del conjunto es todo el espacio. Equivalentemente, $A \subset X$ es denso si corta a cualquier abierto no vacío.

Definición 4.8. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $A \subseteq X$,

1. A es denso en ninguna parte o diseminado si el interior de su clausura es vacío.
2. A es de primera categoría o deficiente si es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Diremos que A es de segunda categoría si no es de primera categoría.
3. A tiene la propiedad de Baire si hay un abierto O tal que $A \Delta O = (A \setminus O) \cup (O \setminus A)$ es de primera categoría.

Observación 4.2. En el caso de espacio de Baire, $X \subseteq \omega^\omega$ es denso en ninguna parte o diseminado si todo abierto básico $O(t)$ contiene un abierto básico $O(s) \subseteq O(t)$ tal que $O(s) \cap X = \emptyset$.

| Definición 4.9. Un espacio completamente metrizable es un espacio topológico (X, \mathcal{T}) para el cual existe al menos una métrica d en X tal que el espacio métrico (X, d) es completo y d induce la topología \mathcal{T} . Un espacio polaco es un espacio topológico completamente metrizable y separable (es decir, contiene un conjunto denso numerable).

Observación 4.3. Ejemplos de espacios polacos son el conjunto ω (con la topología discreta), los reales \mathbb{R} , el conjunto \mathbb{R}^n , el espacio de Baire ω^ω y el intervalo abierto $(0, 1)$.

| Teorema 4.3 (Teorema de categoría de Baire). Si X es un espacio completamente metrizable, entonces la intersección numerable de conjuntos abiertos densos en X es densa.

Para demostrar el teorema, nos será de gran ayuda el siguiente resultado:

| Teorema 4.4 (Teorema de intersección de Cantor). Un espacio métrico (X, d) es completo si y sólo para toda sucesión decreciente $F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \subseteq \dots$ de subconjuntos cerrados no vacíos de X con $\text{diámetro}(F_n) \rightarrow 0$, la intersección $\bigcap_n F_n$ es unitaria.

Demostración (Teorema 4.3). Sea d una métrica en X tal que (X, d) es completo y sea (U_n) una sucesión de abiertos densos en X . Sea ahora V un abierto no vacío en X . Como U_0 es denso, $U_0 \cap V \neq \emptyset$. Escojamos ahora una bola abierta B_0 de diámetro menor que 1 tal que $\overline{B_0} \subseteq U_0 \cap V$. De igual forma, como U_1 es denso, $U_1 \cap V \neq \emptyset$ y escojamos una bola abierta B_1 de diámetro menor que $1/2$ tal que $\overline{B_1} \subseteq U_1 \cap B_0$. Haciendo lo mismo sucesivamente, tenemos una sucesión de bolas abiertas (B_n) tales que para cada n :

1. $\text{diámetro}(B_n) < 1/2^n$
2. $\overline{B_0} \subseteq U_0 \cap V$
3. $\overline{B_{n+1}} \subseteq U_{n+1} \cap B_n$

Como (X, d) es un espacio métrico completo, el teorema de intersección de Cantor nos asegura que $\bigcap_n B_n = \bigcap_n \overline{B_n}$ es unitaria. Sea $x \in X$ tal que $\{x\} = \bigcap_n \overline{B_n}$, entonces $x \in \bigcap_n U_n \cap V$. |

Corolario 4.1. Si X es un espacio polaco, X es un conjunto de segunda categoría en sí mismo.

Demostración. Sea X un espacio polaco, supongamos que X es de primera categoría en sí mismo. Si tomamos una sucesión de cerrados densos en ninguna parte (F_n) tales que $X = \bigcup_n F_n$, entonces los conjuntos $U_n = X \setminus F_n$ son densos, pues el complementario de un conjunto denso en ninguna parte es denso, y abiertos, y además $\bigcap_n U_n = \emptyset$, lo que contradice al teorema de categoría de Baire. |

4.3 Conjuntos analíticos y conjuntos de Bernstein

En esta sección veremos otro tipo de conjuntos que son también muy importantes: los analíticos y los de Bernstein. Los primeros serán fundamentales en el capítulo siguiente y los segundos nos darán un resultado que demuestra la incompatibilidad del axioma de determinación y el axioma de elección.

| Definición 4.10. *Un subconjunto A de un espacio polaco es analítico si es la imagen continua de un subconjunto de Borel de algún otro espacio polaco.*

| Teorema 4.5. *Todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ analítico es medible Lebesgue.*

| Definición 4.11. *Decimos que un subconjunto cerrado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto perfecto si todos sus puntos son de acumulación.*

Un resultado fundamental sobre conjuntos perfectos es el teorema de Cantor-Bendixson que permite descomponer todo cerrado no numerable de \mathbb{R}^n en un conjunto perfecto y un conjunto numerable. Puesto que el cardinal de un conjunto perfecto es 2^{\aleph_0} , esto prueba que el cardinal de un cerrado infinito es \aleph_0 o 2^{\aleph_0} .

| Teorema 4.6 (Cantor-Bendixson). *Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto no numerable y cerrado, entonces podemos escribir F como la unión disjunta de un conjunto perfecto P y un conjunto numerable C .*

Observación 4.4. En el siguiente teorema, \mathcal{Baire} es la clase de los conjuntos que tienen la propiedad de Baire, \mathcal{N} es la clase de los conjuntos de medida nula, \mathcal{M} es la clase de los conjuntos de primera categoría y \mathcal{ND} es la clase de los conjuntos densos en ninguna parte.

| Teorema 4.7. *Si $A \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{N}$ o $A \in \mathcal{Baire} \setminus \mathcal{M}$, entonces existe un conjunto perfecto P tal que $P \subset A$.*

En la demostración del teorema 4.7 vamos a utilizar los siguientes resultados. El primero de ellos es una consecuencia del teorema de intersección de Cantor.

| Teorema 4.8. *Si $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots$ es una sucesión decreciente de compactos no vacíos de \mathbb{R}^n , entonces la intersección $\bigcap_{i=0}^{\infty} K_i$ es no vacía.*

| Teorema 4.9. *Para todo $A \in \mathcal{L}$ existe un F que es F_{σ} y un G que es G_{δ} tales que $F \subset A \subset G$ y $G \setminus F$ tiene medida nula.*

Demostración (Teorema 4.7). Supongamos primero que $A \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{N}$, entonces por el teorema 4.9, existe un F que es F_{σ} tal que $F \subset A$ y $A \setminus F \in \mathcal{N}$. Por tanto, $F \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{N}$.

Sea $F = \bigcup_{n < \omega} F_n$, donde los F_n son cerrados de \mathbb{R}^n . Nótese que al menos uno de los F_n tiene que ser no numerable, pues si todos los F_n lo fueran entonces F sería unión numerable de conjuntos de medida nula y, por tanto, F tendría medida nula. Así que sea F_n no numerable, por el teorema de Cantor-Bendixson, hay un conjunto perfecto $P \subset F_n \subset F \subset A$.

Sea ahora $A \in \text{Baire} \setminus \mathcal{M}$ con $A = U \triangle S$ siendo U un abierto no vacío y $S \in \mathcal{M}$. Sea $S = \bigcup_{n < \omega} S_n$ para una sucesión (S_n) con $S_n \in \mathcal{ND}$ para todo n . Vamos ahora a construir una familia de abiertos no vacíos $\{U_s \subset U : s \in 2^{<\omega}\}$ por inducción sobre la longitud $|s|$ de una sucesión s .

Tomamos un conjunto acotado U_\emptyset tal que $\overline{U_\emptyset} \subset U \setminus S_0$ y continuamos la inducción manteniendo que la siguiente condición se cumpla para todo $s \in 2^{<\omega}$:

(I) U_{s_0} y U_{s_1} son bolas abiertas tales que

$$\overline{U_{s_0}} \cap \overline{U_{s_1}} = \emptyset, \quad \overline{U_{s_0}} \cup \overline{U_{s_1}} \subset U_s \setminus S_{|s|}.$$

donde $s_0 = s \frown \langle 0 \rangle$ y $s_1 = s \frown \langle 1 \rangle$.

Supongamos que ya hemos construido U_s . Como $\overline{U_s} \in \mathcal{ND}$ se tiene que $U_s \setminus \overline{U_s} \neq \emptyset$, es abierto, luego podemos encontrar dos bolas abiertas disjuntas en $U_s \setminus \overline{U_s}$. Disminuyendo el radio, si es necesario, podemos satisfacer la condición (I). Esto completa la construcción.

Sea ahora $F_n = \bigcup \{\overline{U_s} : s \in 2^{<\omega}, |s| = n\}$ y $F = \bigcap_{n < \omega} F_n$, se tiene que $F \subset U$ y $F_n \cap S_n = \emptyset$ para todo $n < \omega$. Luego $F \subset U \setminus S \subset A$. Además, cada F_n es compacto, pues es unión finita de conjuntos cerrados y acotados y, por tanto, F también es compacto. Basta probar entonces que F es no numerable pues si no lo es, el teorema de Cantor-Bendixson implica que existe un conjunto perfecto P tal que $P \subset F \subset A$.

Para probar que F no es numerable, consideramos para cada $f \in 2^\omega$ el conjunto $F_f = \bigcap_{n < \omega} \overline{U_{f|_n}} \subset F$. Por el teorema 4.8 se tiene que cada F_f es no vacío. Además los conjuntos $\{F_f : f \in 2^\omega\}$ son disjuntos dos a dos, luego si $f, g \in 2^\omega$ son distintas, $n = \min\{i < \omega : f(i) \neq g(i)\}$, y $s = f|_n = g|_n$ entonces $F_f \cap F_g \subset \overline{U_{s_0}} \cap \overline{U_{s_1}} = \emptyset$. Sea ahora $c : 2^\omega \rightarrow F$ una función de elección para la familia $\{F_f : f \in 2^\omega\}$, esto es, $c(f) \in F_f$ para todo $f \in 2^\omega$. Entonces f es inyectiva y por tanto $|2^\omega| \leq |F|$, luego F no es numerable. |

| Teorema 4.10. *Existe un conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ tal que ni B ni $\mathbb{R}^n \setminus B$ contienen un conjunto perfecto.*

Para la prueba necesitaremos el siguiente teorema:

| Teorema 4.11. *Todo subconjunto perfecto $P \subset \mathbb{R}^n$ tiene la cardinalidad del continuo.*

Demostración (Teorema 4.10). En primer lugar, sea \mathcal{F} la familia de todos los conjuntos perfectos de \mathbb{R}^n y sea \mathcal{B} la clase de los conjuntos borelianos, entonces $|\mathcal{F}| \leq 2^{\aleph_0}$ ya que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ y $|\mathcal{B}| = 2^{\aleph_0}$. Por el lema 2.3 existe (J, \leq) bien ordenado tal que $|J| = |\mathcal{F}|$ y para todo $\alpha \in J$, $|\{\beta \in J : \beta < \alpha\}| < |J|$. Sea $\mathcal{F} = \{P_\xi : \xi \in J\}$, por inducción transfinita sobre $\xi \in J$ definimos las sucesiones $\langle a_\xi : \xi \in J \rangle$ y $\langle b_\xi : \xi \in J \rangle$ tomando en el paso $\xi \in J$ los puntos $a_\xi \neq b_\xi$ de \mathbb{R}^n tales que

$$a_\xi, b_\xi \in P_\xi \setminus (\{a_\zeta : \zeta < \xi\} \cup \{b_\zeta : \zeta < \xi\})$$

Esto se puede hacer porque

$$|\{a_\zeta : \zeta < \xi\} \cup \{b_\zeta : \zeta < \xi\}| = 2|\{\beta \in J : \beta < \xi\}| < 2^{\aleph_0}$$

y porque gracias al teorema 4.11, $|P_\xi| = 2^{\aleph_0}$. Esto termina la construcción.

Sea ahora $B = \{a_\xi : \xi \in J\}$, entonces para cada conjunto perfecto P hay un $\xi \in J$ tal que $P = P_\xi$. Entonces como $a_\xi \in P \cap B$ y $b_\xi \in P \cap (\mathbb{R}^n \setminus B)$ se tiene que ni $P \subset B$ ni $P \subset (\mathbb{R}^n \setminus B)$.

| Definición 4.12. *Los conjuntos B que verifican el enunciado del teorema 4.10 son los conjuntos de Bernstein.*

| Teorema 4.12. *Un conjunto de Bernstein $B \subset \mathbb{R}^n$ no es ni medible ni tiene la propiedad de Baire.*

Demostración. Supongamos que $B \in \mathcal{L}$. Al ser un conjunto de Bernstein, no puede contener un conjunto perfecto y, por tanto, gracias al teorema 4.7 se tiene que B tiene medida nula y lo mismo sucede con el complementario, es decir, $\mathbb{R}^n \setminus B \in \mathcal{L}$ y $\mathbb{R}^n \setminus B$ tiene medida nula. Entonces $\mathbb{R}^n = B \cup (\mathbb{R}^n \setminus B)$ tiene medida nula, lo cual es falso y por tanto $B \notin \mathcal{L}$.

Supongamos que $B \in \text{Baire}$. Al ser un conjunto de Bernstein, no puede contener un conjunto perfecto y, por tanto, gracias al teorema 4.7 se tiene que B es de primera categoría y lo mismo sucede con el complementario, es decir, $\mathbb{R}^n \setminus B \in \text{Baire}$ y $\mathbb{R}^n \setminus B$ es de primera categoría. Entonces $\mathbb{R}^n = B \cup (\mathbb{R}^n \setminus B)$ es de primera categoría, pero como \mathbb{R}^n es un espacio polaco, el corolario 4.1 nos asegura que \mathbb{R}^n es de segunda categoría, lo cual es una contradicción.

Observación 4.5. El teorema 4.12 nos da otra prueba que el axioma de elección y el axioma de determinación son incompatibles ya que más adelante veremos que bajo el axioma de determinación, todo conjunto de reales es medible y según el teorema 4.12, los conjuntos de Bernstein, que son conjuntos de reales, no son medibles.

5 | Determinación y propiedades de regularidad

La motivación inicial para el estudio de la determinación estuvo dada por sus implicaciones sobre las propiedades de regularidad de los conjuntos de números reales. En particular, la determinación de ciertos tipos de juegos implican que todo conjunto de reales tiene la propiedad del conjunto perfecto, la propiedad de Baire y es medible Lebesgue. Estos tres hechos contradicen, cada uno por separado, al axioma de elección pues en el capítulo anterior vimos que los conjuntos de Bernstein son conjuntos de reales que ni tienen la propiedad del conjunto perfecto, ni tienen la propiedad de Baire ni son medibles Lebesgue. Nos referiremos a la medibilidad de Lebesgue, la propiedad de Baire y la propiedad del conjunto perfecto como propiedades de regularidad.

El problema 43 del Libro escocés, planteado por Mazur, pregunta sobre juegos donde hay dos jugadores que seleccionan alternativamente los elementos de una sucesión cada vez más pequeña de intervalos de números reales, siendo el primer jugador ganador si la intersección de la sucesión corta a un conjunto dado de antemano. Banach publicó una respuesta en 1935 mostrando que tales juegos están determinados si y sólo si el conjunto dado es o bien de primera categoría (en cuyo caso gana el segundo jugador) o bien su complementario es de primera categoría (en cuyo caso gana el primer jugador). La determinación de la restricción de este juego a cada intervalo implica entonces que el conjunto dado tiene la propiedad de Baire. El juego se conoce como el juego de Banach-Mazur. Usando una enumeración de los racionales, uno puede enumerar los intervalos con extremos racionales mediante números enteros, consiguiendo un juego de enteros.

Morton Davis estudió un juego, sugerido por Dubins, donde el primer jugador juega sucesiones infinitas de ceros y unos y el segundo jugador juega con ceros y

unos, siendo el conjunto de ganancia un conjunto de sucesiones infinitas de ceros y unos. Davis probó que el primer jugador tenía una estrategia ganadora en tal juego si y sólo si el conjunto de ganancia contenía un conjunto perfecto, y el segundo jugador tenía una estrategia ganadora en tal juego si y sólo si el conjunto de ganancia era finito o numerable. La determinación de estos juegos entonces implica que todo conjunto no numerable de reales contiene un conjunto perfecto.

Mycielski y Swierczkowski mostraron que la determinación de ciertos juegos de enteros implica que todo subconjunto de reales es medible Lebesgue. A modo de contraste, un argumento de Vitali mostró que bajo ZFC, hay conjuntos de reales que no son medibles Lebesgue. Como vimos en el capítulo anterior, la existencia de conjuntos de Bernstein nos da ejemplos de conjuntos no medibles que tampoco tienen la propiedad de Baire ni contienen conjuntos perfectos.

Definición 5.1. Sea X un espacio polaco y sea $\Gamma \subseteq \mathcal{P}(X)$ una colección de subconjuntos de X . Decimos que Γ es una clase en negrita si es cerrada bajo antiimágenes continuas e intersecciones con conjuntos cerrados, es decir,

1. Para todo A , si $A \in \Gamma \Rightarrow f^{-1}[A] \in \Gamma$, con $f : \omega^\omega \rightarrow \omega^\omega$ continua
2. Para todo C , con C cerrado, si $A \in \Gamma \Rightarrow A \cap C \in \Gamma$

Definición 5.2. Sea Γ una clase en negrita, $\text{Det}(\Gamma)$ abrevia la siguiente afirmación: "Para todo $A \in \Gamma$, $G(A)$ está determinado."

Observación 5.1. Gracias a los teoremas de Gale-Stewart y de Martin, se tiene que, $\text{Det}(\text{cerrados})$ y $\text{Det}(B)$.

En este capítulo veremos que dada una clase en negrita Γ , la afirmación $\text{Det}(\Gamma)$ permite deducir propiedades de regularidad para los miembros de la clase Γ .

Observación 5.2. En los capítulos 3 y 4 hemos trabajado usando el axioma de elección sin restricciones. Es decir, todos los teoremas se demuestran en ZFC. Ahora consideramos la teoría ZF+DC donde el axioma de elección se sustituye por el axioma de elecciones dependientes (DC): Si ρ es una relación binaria sobre un conjunto no vacío A , y si para todo $a \in A$ existe $b \in A$ tal que $b \rho a$, entonces hay una sucesión $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ en A tal que

$$a_{n+1} \rho a_n \text{ para todo } n \in \omega$$

La teoría ZF + DC es consistente con AD y nos permite probar todos los resultados necesarios sin utilizar el axioma de elección. En este trabajo no trataremos los detalles de esta cuestión.

5.1 La propiedad del conjunto perfecto

Definición 5.3. Un árbol T es una colección de sucesiones finitas $T \subseteq \omega^{<\omega}$ cerrada bajo segmentos iniciales, es decir, tal que si $t \in T$ y $s \triangleleft t$, entonces $s \in T$. A los elementos de T se les llama nodos. Un sucesor de t es un nodo $s \in T$ tal que $t \triangleleft s$ y $|s| = |t| + 1$.

Definición 5.4. Sea T un árbol. Una rama de T es cualquier $x \in \omega^\omega$ tal que para todo $s \triangleleft x$ se tiene que $s \in T$. Al conjunto de ramas de T se le denota por $[T]$.

Definición 5.5. Decimos que un árbol T es perfecto si todo nodo $t \in T$ tiene al menos dos extensiones incompatibles, es decir, existen $s_1, s_2 \in T$ tales que $t \triangleleft s_1, t \triangleleft s_2$ y $s_1 \perp s_2$.

Definición 5.6. Un conjunto $A \subseteq \omega^\omega$ tiene la propiedad del conjunto perfecto si es numerable o hay un árbol perfecto T tal que $[T] \subseteq A$.

Definición 5.7. Dado $A \subseteq \omega^\omega$, al juego $G^*(A)$ se juega como sigue:

- El Jugador I juega con sucesiones no vacías de números naturales y el Jugador II juega con números naturales.

I	s_0	s_1	...
II	n_1	n_2	...

- El Jugador I ganará $G^*(A)$ si:

- $\forall i \geq 1 : s_i(0) \neq n_i$
- $x := s_0 \cap s_1 \cap s_2 \cap \dots \in A$

Como vemos, es un juego totalmente diferente al que definimos en el capítulo 2. Aquí I intenta formar una sucesión infinita que esté en A mientras que II saca números naturales n_i de tal forma que I, en su siguiente movimiento, podría no sacar ninguna sucesión s_i que empiece por n_i . Por lo tanto, I ganará si supera los "desafíos" a los que II le somete y consigue formar una sucesión infinita en A . Por otro lado, II ganará si saca números de tal forma que impida a I crear una sucesión en A .

Una pregunta que nos podemos hacer es: ¿podemos reformular $G^*(A)$ como el juego definido en el capítulo 2?. La respuesta es afirmativa pero ¿cómo lo hacemos?. Pues bien, sea $\phi : \omega \rightarrow (\omega^{<\omega} \setminus \langle \rangle)$ una biyección, se tiene que $G^*(A) = G(A^*)$ siendo A^* el siguiente conjunto:

$$A^* = \{z \in \omega^\omega : \forall n \geq 1 (\phi(z(2n))(0) \neq z(2n-1)) \\ \wedge \phi(z(0)) \cap \phi(z(2)) \cap \phi(z(4)) \cap \dots \in A\}$$

Observación 5.3. Veamos que $G^*(A) = G(A^*)$. En efecto, si el Jugador I gana en $G^*(A)$, entonces

1. $\forall i \geq 1 : s_i(0) \neq n_i$
2. $x := s_0 \cap s_1 \cap s_2 \cap \dots \in A$

Tomando para todo $i \geq 1$ $s_i = \phi(z(2i))$ y $n_i = z(2i - 1)$, se tiene que el Jugador I ganará también en $G(A^*)$. Si ahora el Jugador I gana en $G(A^*)$, entonces

1. $\forall n \geq 1 (\phi(z(2n))(0) \neq z(2n - 1))$
2. $\phi(z(0)) \cap \phi(z(2)) \cap \phi(z(4)) \cap \dots \in A$

Tomando para todo $i \geq 1$ $s_i = \phi(z(2i))$ y $n_i = z(2i - 1)$, se tiene que el Jugador I ganará también en $G^*(A)$.

| Teorema 5.1. Sea Γ una clase en negrita. Si $A \in \Gamma$, entonces $A^* \in \Gamma$.

Antes de ver la prueba, necesitamos introducir las dos siguientes definiciones que nos dicen cuando una sucesión infinita de elementos de ω^ω converge a un elemento de ω^ω y cuando una función de ω^ω en ω^ω es continua:

| Definición 5.8. Decimos que una sucesión infinita x_n de elementos de ω^ω converge a $x \in \omega^\omega$, notado como $x_n \rightarrow x$, si:

Para todo $s \triangleleft x$, existe N tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $s \triangleleft x_n$

En ese caso, decimos que x es el límite de x_n . Si tal x no existe, decimos que x_n es divergente

| Definición 5.9. Una función $f : \omega^\omega \rightarrow \omega^\omega$ es continua si para cada $x \in \omega^\omega$ se tiene que:

Para todo $s \triangleleft f(x)$ existe $t \triangleleft x$ tal que para todo $y \in \omega^\omega$ con $t \triangleleft y$ se tiene que $s \triangleleft f(y)$

Observación 5.4. Estas nociones coinciden con las nociones topológicas de convergencia y continuidad usuales.

Una vez vistas estas dos definiciones, pasamos a demostrar el teorema.

Demostración (Teorema 5.1). Por definición, tenemos que $A^* = C \cap f^{-1}[A]$, siendo $f : \omega^\omega \rightarrow \omega^\omega$ la función dada por:

$$f(z) := \phi(z(0)) \smallfrown \phi(z(2)) \smallfrown \phi(z(4)) \smallfrown \dots$$

y $C = \{z \in \omega^\omega : \forall n \geq 1 (\phi(z(2n))(0) \neq z(2n-1))\}$.

Si probamos que f es continua y que C es cerrado, la definición de Γ prueba el resultado.

- f es una función continua: Sea $s \smallfrown f(z)$ y sea n el menor número tal que $s \smallfrown \phi(z(0)) \smallfrown \phi(z(2)) \smallfrown \dots \smallfrown \phi(z(2n))$. Sea ahora $t := \langle z(0), z(2), \dots, z(2n) \rangle$, entonces para cualquier $y \in \omega^\omega$ con $t \smallfrown y$ se tiene que:

$$f(y) = \phi(z(0)) \smallfrown \phi(z(2)) \smallfrown \dots \smallfrown \phi(z(2n)) \smallfrown \phi(y(2(n+1))) \smallfrown \dots$$

Entonces $s \smallfrown f(y)$ y por tanto cumple la definición de continuidad.

- C es un conjunto cerrado: Sea $C = \bigcap_{n \geq 1} C_n$ con

$$C_n = \{z \in \omega^\omega : \phi(z(2n))(0) \neq z(2n-1)\}$$

Tenemos que ver que cada C_n es un conjunto cerrado. Para ello nos apoyamos en la siguiente afirmación:

- Si T un árbol, entonces $[T]$ es un conjunto cerrado.

Demostración. En efecto, sea x_n una sucesión en $[T]$ con $x_n \rightarrow x$. Entonces para todo $s \smallfrown x$, existe un N tal que $\forall n \geq N$ se tiene que $s \smallfrown x_n$. La sucesión x_n está en $[T]$, luego por definición se tiene que s es un elemento de T . De este modo, para todo $s \smallfrown x$ se tiene que $s \in T$, luego $x \in [T]$. Como el límite de cualquier sucesión de $[T]$ está en $[T]$, se tiene que es cerrado. |

Es fácil ver que $C_n = [T_n]$ con

$$T_n = \{t \in \omega^{<\omega} \mid \text{si } |t| > 2n \Rightarrow \phi(t(2n))(0) \neq t(2n-1)\},$$

luego la afirmación anterior prueba que cada C_n es cerrado y, por tanto, C también.

Por hipótesis tenemos que $A \in \Gamma$, luego al ser f continua, entonces $f^{-1}[A] \in \Gamma$. Por otro lado, al ser C cerrado y $f^{-1}[A] \in \Gamma$, se tiene que $A^* = C \cap f^{-1}[A] \in \Gamma$. |

| **Teorema 5.2 (Morton Davis).** Sea $A \subseteq \omega^\omega$ un conjunto, entonces:

1. Si I tiene una estrategia ganadora en $G^*(A)$, entonces A contiene un árbol perfecto.

2. Si Π tiene una estrategia ganadora en $G^*(A)$, entonces A es un conjunto numerable.

Para la prueba del teorema, nos apoyaremos en la siguiente definición:

Definición 5.10. Sea τ una estrategia ganadora para el Jugador Π . Para una posición $p := \langle s_0, n_1, s_1, n_2, \dots, s_{i-1}, n_i \rangle$ escribimos $p^* = s_0 \smallfrown s_1 \smallfrown \dots \smallfrown s_{i-1}$. Entonces para cualquier posición p y $x \in \omega^\omega$ decimos que:

- p es compatible con x si existe un s_i tal que $s_i(0) \neq n_i$ y $p^* \smallfrown s_i \smallfrown x$.
- p rechaza a x si p es compatible con x y para todo s_i , con $s_i(0) \neq n_i$, la siguiente posición según τ , es decir, la posición $p \smallfrown \langle s_i, \tau(p \smallfrown \langle s_i \rangle) \rangle$, no es compatible con x .

Demostración (Teorema 5.2).

1. Sea σ una estrategia ganadora para el Jugador I en $G^*(A)$ y sea el conjunto $Partidas^*(\sigma) = \{\sigma * y : y \in \omega^\omega\}$. Definimos ahora:

$$T_\sigma = \{s \in \omega^{<\omega} : s \smallfrown (\sigma * t) \text{ para algún } t\}$$

Es claro que T_σ es un árbol pues si $s \in T_\sigma$ y $s' \smallfrown s$, entonces $s' \smallfrown (\sigma * t)$ y esto implica que $s' \in T_\sigma$. Además $[T_\sigma] = Partidas^*(\sigma) \subseteq A$, pues para cualquier $(\sigma * y) \in \omega^\omega$, se tiene que para todo $s \in T_\sigma$, $s \smallfrown (\sigma * y)$. Por tanto, sólo queda ver que T_σ es un árbol perfecto.

Tomamos un $t \in T_\sigma$ y sea i el menor movimiento tal que $t \smallfrown s_0 \smallfrown \dots \smallfrown s_i$. Ahora el Jugador Π puede jugar con n_{i+1} en su siguiente movimiento, después de que I , asumiendo que él juega según σ , juegue con s_{i+1} tal que $s_{i+1}(0) \neq n_{i+1}$. Sea ahora $m_{i+1} = s_{i+1}(0)$. En vez de jugar con n_{i+1} , el Jugador Π podría haber jugado con m_{i+1} , lo cual habría obligado al Jugador I a jugar con t_{i+1} tal que $t_{i+1}(0) \neq m_{i+1}$. Pero entonces $t_{i+1} \neq s_{i+1}$ y por tanto las sucesiones $s_0 \smallfrown \dots \smallfrown s_i \smallfrown s_{i+1}$ y $s_0 \smallfrown \dots \smallfrown s_i \smallfrown t_{i+1}$ son extensiones de t incompatibles según σ y por tanto ambas son elementos de T_σ . Luego T_σ es un árbol perfecto contenido en A , lo que implica que A tiene la propiedad del conjunto perfecto.

2. Supongamos ahora que el Jugador Π tiene una estrategia ganadora τ . Veamos que para todo $x \in A$, hay una y sólo una posición que rechaza a x .

Dado $x \in A$, supongamos que no existe ninguna posición que rechaze a x . Entonces en cualquier momento de la partida, el Jugador I puede jugar con un s_i tal que $s_0 \smallfrown \dots \smallfrown s_i \smallfrown x$ y, por tanto, la estrategia τ del Jugador Π no puede hacer nada para evitar que I consiga su objetivo. Esto quiere decir que existe una

sucesión y de movimientos jugados por el Jugador I tales que $x = y * \tau \in A$, lo que contradice que τ sea una estrategia ganadora para el Jugador II.

Veamos ahora que toda posición rechaza como mucho a un x .

Supongamos que p rechaza a x y a y con $x \neq y$. Por definición, p es compatible con x e y , así que el Jugador I puede jugar con s_i tal que $s_i(0) \neq n_i$, $p^* \cap s_i \triangleleft x$ y $p^* \cap s_i \triangleleft y$. Pero entonces, el Jugador I puede jugar con un s_i tal que cualquier extensión $p^* \cap s_i \cap \langle n \rangle$ no puede ser un segmento inicial de x e y a la vez pues debe de existir un n tal que $x(n) \neq y(n)$.

Entonces, sea $n_{i+1} = \tau(p \cap \langle s_i \rangle)$ se tiene que $p \cap \langle s_i, n_{i+1} \rangle$ no es compatible o bien con x o bien con y , luego p rechaza a x o a y .

En consecuencia, si definimos ahora el conjunto $K_p = \{x \in \omega^\omega : p \text{ rechaza a } x\}$, se tiene que $A \subseteq \bigcup_p K_p$ y, por lo que acabamos de ver, el conjunto K_p es unitario, luego A está contenido en una unión numerable de conjuntos unitarios y, por tanto, A es numerable.

I

Estos dos últimos teoremas prueban, en conjunto, que todo conjunto determinado tiene la propiedad del conjunto perfecto que es lo que queríamos demostrar.

Corolario 5.1. $\text{Det}(\Gamma)$ implica que todo conjunto de Γ tiene la propiedad del conjunto perfecto.

Demostración. En efecto, sea $A \in \Gamma$, entonces $A^* \in \Gamma$. Como $G(A^*) = G^*(A)$ está determinado, entonces o bien I tiene una estrategia ganadora o bien II tiene una estrategia ganadora. Si la tiene I, entonces A contiene un árbol perfecto. Si la tiene II, entonces A es un conjunto numerable. Luego, en cualquier caso, A tiene la propiedad del conjunto perfecto.

I

5.2 La propiedad de Baire

En esta sección estudiaremos la propiedad de Baire, una propiedad que ha sido importante durante mucho tiempo para los topólogos. Además veremos que los conjuntos determinados tienen la propiedad de Baire. Aquí trabajaremos con el juego de Banach-Mazur que introducimos a continuación:

Dado un conjunto $A \subseteq \omega^\omega$, el juego de Banach-Mazur, notado como $G^{**}(A)$, consiste en: Dos jugadores, I y II, juegan con sucesiones no vacías de números naturales

$s_i, t_i \in \omega^{<\omega}$:

I	s_0	s_1	...
II	t_0	t_1	...

Entonces $z := s_0 \frown t_0 \frown s_1 \frown t_1 \frown \dots$ y diremos que el Jugador I gana en $G^{**}(A)$ si y sólo si $z \in A$. Al igual que con $G^*(A)$, el juego de Banach-Mazur también se puede reformular como el juego definido en el capítulo 2. Como hicimos con $G^*(A)$, sea $\phi : \omega \rightarrow (\omega^{<\omega} \setminus \langle \rangle)$ una biyección, se tiene que $G^{**}(A) = G(A^{**})$ siendo A^{**} el siguiente conjunto:

$$A^{**} = \{z \in \omega^\omega : \phi(z(0)) \frown \phi(z(1)) \frown \phi(z(2)) \frown \dots \in A\}$$

Observación 5.5. La prueba de que $G^{**}(A) = G(A^{**})$ se realiza de forma similar a la que aparece en la observación 5.3.

Teorema 5.3. Sea Γ una clase en negrita. Si $A \in \Gamma$, entonces $A^{**} \in \Gamma$.

Demostración. Tenemos que $A^{**} = f^{-1}[A]$, siendo $f : \omega^\omega \rightarrow \omega^\omega$ la función dada por:

$$f(z) := \phi(z(0)) \frown \phi(z(1)) \frown \phi(z(2)) \frown \dots$$

Basta probar entonces que f es continua. En efecto, fijado z y sea $s \triangleleft f(z)$. Sea n el menor número tal que $s \triangleleft \phi(z(0)) \frown \phi(z(1)) \frown \phi(z(2)) \frown \dots \frown \phi(z(n))$. Sea ahora $t := \langle z(0), z(1), \dots, z(n) \rangle$, entonces para cualquier y con $t \triangleleft y$ se tiene que:

$$f(y) = \phi(z(0)) \frown \phi(z(1)) \frown \phi(z(2)) \frown \dots \frown \phi(z(n)) \frown \phi(y(n+1)) \frown \dots$$

Entonces $s \triangleleft f(y)$ y, por tanto, cumple la definición de continuidad. Como $A \in \Gamma$, la primera condición de la definición de Γ nos asegura que $A^{**} = f^{-1}[A] \in \Gamma$. |

Teorema 5.4. Sea $A \subseteq \omega^\omega$ un conjunto, se verifica:

1. Si el Jugador II tiene una estrategia ganadora en $G^{**}(A)$, entonces A es de primera categoría.
2. Si el Jugador I tiene una estrategia ganadora en $G^{**}(A)$, entonces $O(s) \setminus A$ es de primera categoría para algún abierto básico $O(s)$.

Para la prueba del teorema, nos apoyaremos en la siguiente definición:

| Definición 5.11. Sea τ una estrategia ganadora para el Jugador II. Para una posición $p := \langle s_0, t_0, \dots, s_n, t_n \rangle$ escribimos $p^* = s_0 \frown t_0 \frown \dots \frown s_n \frown t_n$. Entonces para cualquier posición p y $x \in \omega^\omega$ decimos que:

- p es compatible con x si $p^* \triangleleft x$
- p rechaza a x si p es compatible con x y para cualquier s_{n+1} , la siguiente posición según τ , es decir, la posición $p \frown \langle s_{n+1}, \tau(p \frown \langle s_{n+1} \rangle) \rangle$, no es compatible con x .

Demostración (Teorema 5.4).

1. Sea τ una estrategia ganadora para el Jugador II y sea $p = \langle s_0, t_0, \dots, s_n, t_n \rangle$ una posición. En primer lugar veamos que para todo $x \in A$, existe una posición que rechaza a x .

Si no existiese tal posición, entonces para cualquier sucesión con la que juegue I, la siguiente posición según τ será compatible con x . De igual forma, en el siguiente turno juegue con lo que juegue I, la siguiente posición según τ también será compatible con x , es decir, el Jugador II no puede impedir que I consiga su objetivo. Luego existe una sucesión y de movimientos jugados por I tales que $x = y * \tau \in A$, pero entonces τ no sería una estrategia ganadora.

Veamos ahora que para toda posición p , el conjunto $F_p := \{x : p \text{ rechaza a } x\}$ es denso en ninguna parte.

Sea $O(s)$ un abierto básico. Distinguimos dos casos:

- Caso 1: $\neg(p^* \triangleleft t)$. Si no se tiene que $p^* \triangleleft s$, entonces debe de existir un t con $s \triangleleft t$ tal que $\neg(p^* \triangleleft t)$. Como $s \triangleleft t$, se tiene $O(t) \subseteq O(s)$ y entonces para $x \in O(t)$, x es incompatible con p^* y, por tanto, $O(t) \cap F_p = \emptyset$.
- Caso 2: $p^* \triangleleft s$. Si $p^* \triangleleft s$, sea s_{n+1} la sucesión tal que $p^* \frown s_{n+1} = s$ y sea $t_{n+1} = \tau(p \frown \langle s_{n+1} \rangle)$. Sea ahora $t := s \frown t_{n+1}$, se tiene que $s \triangleleft t$ y por tanto $O(t) \subseteq O(s)$.

Dado $x \in O(t)$, se tiene que p no rechaza a x pues en la siguiente posición nos queda que $p^* \frown \langle s_{n+1}, t_{n+1} \rangle = t$, y al ser x elemento de $O(t)$, se tiene que $t \triangleleft x$ y por tanto $O(t) \cap F_p = \emptyset$.

En definitiva, nos queda que $A \subseteq \bigcup_p F_p$ y como cada F_p es denso en ninguna parte, se tiene que A es unión numerable de densos en ninguna parte y, por tanto, A es de primera categoría.

2. Sea σ una estrategia ganadora para el Jugador I y sea s el primer movimiento de I según σ , es decir, $\sigma(\langle \rangle) = s$. Sea ahora s_0 el primer movimiento de I en

$G^{**}(O(s) \setminus A)$, veamos que II tiene una estrategia ganadora en $G^{**}(O(s) \setminus A)$ siendo $O(s)$ un abierto básico.

- Si $\neg(s \triangleleft s_0)$, entonces II juega con cualquier t_0 tal que $s_0 \cap t_0$ es incompatible con s . Tras esto, da igual con lo que jueguen, pues el resultado final es un $x \notin O(s)$ y por tanto $x \notin O(s) \setminus A$, luego II gana en $G^{**}(O(s) \setminus A)$.
- Si $s \triangleleft s_0$ y s'_0 es tal que $s \cap s'_0 = s_0$. Entonces II considera un "juego auxiliar". Este juego auxiliar es el juego $G^{**}(A)$ en donde I juega según σ . Los movimientos que hace II en $G^{**}(O(s) \setminus A)$ dependen de los movimientos que I haga en el juego auxiliar.

El primer movimiento en el juego auxiliar es s , entonces II responde con s'_0 y luego I vuelve a responder con $t_0 = \sigma(\langle s, s'_0 \rangle)$. Ahora el Jugador II usa t_0 como respuesta al movimiento del Jugador I en $G^{**}(O(s) \setminus A)$, que era s_0 .

Después, en $G^{**}(O(s) \setminus A)$ el Jugador I juega con s_1 y II responde con s_1 en el juego auxiliar. En este último, el Jugador I juega con $t_1 = \sigma(\langle s, s'_0, t_0, s_1 \rangle)$, entonces II juega con dicho t_1 en $G^{**}(O(s) \setminus A)$ y así sucesivamente. En las dos tablas siguientes podemos ver mejor todo este razonamiento en donde la primera tabla corresponde a $G^{**}(O(s) \setminus A)$ y la segunda corresponde al juego auxiliar.

I	s_0	s_1	...
II		t_0	t_1

I	$s = \sigma(\langle \rangle)$	$t_0 = \sigma(\langle s, s'_0 \rangle)$	$t_1 = \sigma(\langle s, s'_0, t_0, s_1 \rangle)$
II	s'_0	s_1	...

La partida resultante en $G^{**}(O(s) \setminus A)$ será $x = s_0 \cap t_0 \cap s_1 \cap t_1 \cap \dots$, mientras que en el juego auxiliar será $x = s_0 \cap s'_0 \cap t_0 \cap s_1 \cap t_1 \cap \dots$ y como en éste el Jugador I estaba jugando según σ , la cual es una estrategia ganadora, se tiene que $x \in A$ y, por tanto, en $G^{**}(O(s) \setminus A)$ se tiene que $x \notin O(s) \setminus A$, lo cual quiere decir que II gana.

Entonces, gracias al apartado 1, se tiene que $O(s) \setminus A$ es de primera categoría.

■

El Teorema 5.3 junto con el Teorema 5.4, son fundamentales para probar el objetivo principal de esta sección: La determinación implica la propiedad de Baire.

Corolario 5.2. $\text{Det}(\Gamma)$ implica que todo conjunto de Γ tiene la propiedad de Baire.

Demostración. Para llevar a cabo la prueba, vamos a tener en cuenta la siguiente afirmación:

- Dada una clase en negrita Γ tal que para todo $A \in \Gamma$, A es de primera categoría o $O(s) \setminus A$ de primera categoría para algún $O(s)$. Entonces todo $A \in \Gamma$ satisface la propiedad de Baire.

Demostración. Dado $A \in \Gamma$, distinguimos dos casos:

- A es de primera categoría.
Este caso es sencillo pues si tomamos el conjunto vacío \emptyset , que es abierto, se tiene que $A \triangle \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A$, el cual es de primera categoría por hipótesis y, por tanto, A tiene la propiedad de Baire.

- $O(s) - A$ es de primera categoría.

Para este caso definimos el siguiente conjunto:

$$O = \bigcup \{O(s) : O(s) \setminus A \text{ es de primera categoría}\}$$

Claramente se tiene que O es un conjunto abierto pues es unión de abiertos básicos y, por definición de dicho conjunto, se tiene que $O \setminus A$ es unión numerable de conjuntos de primera categoría y, por tanto, es de primera categoría. Tenemos ahora que probar que $A \setminus O$ es de primera categoría. Por definición de Γ , se tiene que para todo cerrado C , si $A \in \Gamma$, entonces $A \cap C \in \Gamma$, luego usando esto aquí, se tiene que $A \cap O^c = A \setminus O \in \Gamma$. Así que por hipótesis, se tiene que $A \setminus O$ es de primera categoría o que $O(s) \setminus (A \setminus O)$ es de primera categoría para algún $O(s)$. Si no fuera de primera categoría, entonces $O(s) \setminus (A \setminus O)$ es de primera categoría, o lo que es lo mismo, que

$$\begin{aligned} O(s) \setminus (A \setminus O) &= O(s) \cap (A \setminus O)^c = O(s) \cap (A \cap O^c)^c = O(s) \cap (A^c \cup O) = \\ &= (O(s) \cap A^c) \cup (O(s) \cap O) = (O(s) \setminus A) \cup (O(s) \cap O) \end{aligned}$$

es de primera categoría. Esto implica que:

1. $O(s) \setminus A$ es de primera categoría
2. $O(s) \cap O$ es de primera categoría

Pero si $O(s) \setminus A$ es de primera categoría, la definición del conjunto O implica que $O(s) \subseteq O$ y esto a su vez implica que $O(s) \cap O = O(s)$ es de primera categoría, lo cual es imposible en el espacio de Baire por el corolario 4.1. Por tanto, $A \setminus O$ es de primera categoría, luego A tiene la propiedad de Baire.

Sea ahora $A \in \Gamma$, entonces $A^{**} \in \Gamma$. Como $G(A^{**}) = G^{**}(A)$ está determinado, entonces, o bien I tiene una estrategia ganadora en $G^{**}(A)$, o bien II tiene una estrategia ganadora en $G^{**}(A)$. Si la tiene I entonces $O(s) \setminus A$ es de primera categoría para algún abierto básico $O(s)$ por el teorema 5.4. Si la tiene II entonces A es de primera categoría de nuevo por el teorema 5.4. Aplicando ahora la afirmación anterior, obtenemos que todo conjunto A tiene la propiedad de Baire que es lo que queríamos demostrar.

5.3 Determinación y Medida de Lebesgue

En esta sección trataremos la relación que existe entre la medida de Lebesgue y el axioma de determinación. Veremos que si suponemos dicho axioma como cierto, todo conjunto de reales es medible Lebesgue. Ahora vamos a introducir un juego infinito, al que llamaremos "juego de los cubrimientos". Dicho juego tendrá un papel fundamental para demostrar un lema que veremos mas adelante. Antes de definirlo, necesitamos probar que el conjunto K_n de todos los conjuntos G tales que

1. G es la unión finita de intervalos abiertos con extremos racionales
2. $\mu(G) \leq \frac{\epsilon}{2^{2(n+1)}}$ (siendo μ la medida de Lebesgue)

es numerable para cada n .

Proposición 5.1. Para todo $n \in \omega$, el conjunto K_n es numerable.

Demostración. El conjunto de los intervalos abiertos con extremos racionales se puede inyectar en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Sea ahora $K_n = \bigcup_{p=0}^{\infty} K_{np}$ siendo K_{np} el conjunto de todos los conjuntos G tales que

1. G es la unión de p intervalos abiertos con extremos racionales
2. $\mu(G) \leq \frac{\epsilon}{2^{2(n+1)}}$

Entonces K_{np} se puede inyectar con $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^p$. Como este último es numerable, entonces K_{np} también lo será y, por tanto, K_n es unión de conjuntos numerables, luego es numerable.

Ahora ya si podemos definir el juego de los cubrimientos. Sea $S \subseteq [0, 1]$ y dado $\epsilon > 0$, establecemos dicho juego como sigue:

Sea $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ una sucesión de ceros y unos y sea a el número real dado por:

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$$

Sea ahora $(G_k^n)_{k \in \omega}$ una enumeración del conjunto K_n . Una partida $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, \dots \rangle$ la gana el Jugador I si

1. $a_n = 0, 1$ para todo $n \in \omega$.
2. $a \in S$.
3. $a \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} G_{b_n}^n$.

Por tanto, en este juego el Jugador I jugará con un numero real $a \in S$ y el Jugador II intentará cubrirlo mediante la unión $\bigcup_{n=0}^{\infty} H_n$ tales que $H_n \in K_n$ para todo n .

Lema 5.1. Si Z es un conjunto de medida nula, entonces puede ser cubierto mediante una unión numerable de conjuntos H_n con $H_n \in K_n$ para todo $n \in \omega$.

Demostración. Como Z tiene medida nula, entonces

1. $Z \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(G_n) < \epsilon_0$

donde $\epsilon_n = \frac{\epsilon}{2^{2(n+1)}}$ y los G_n son intervalos abiertos. Como \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} , podemos tomar los intervalos con extremos racionales.

Al ser $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(G_n)$ convergente, existe $N \in \omega$ tal que para todo $n_1 \geq N$ se tiene que:

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \mu(G_n) < \epsilon_1$$

Aplicando esto sucesivamente, obtenemos una sucesión $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_k < \dots$ tal que:

$$\sum_{n=n_k}^{\infty} \mu(G_n) < \epsilon_k$$

Si tomamos $H_m = \bigcup_{n=n_m}^{n_m+1} G_n$, que cumple que $H_m \in K_m$ para todo $m \in \omega$ y, obtenemos el resultado. I

Una vez visto el juego de los cubrimientos, vamos a enunciar y a demostrar un lema que será fundamental para alcanzar nuestro objetivo.

Lema 5.2. Supongamos cierto AD. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ tal que todo medible $Z \subseteq S$ tiene medida nula. Entonces, S tiene medida nula.

Demostración. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto que cumple la propiedad del enunciado. Gracias a la proposición 4.3 y a que lo que realicemos en un cierto intervalo podemos llevarlo a otro mediante una traslación, podemos restringirnos al $[0, 1]$. Así que, sea $S \subseteq [0, 1]$, veamos que $\mu(S)^* < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Para ello, nos apoyamos en la siguiente afirmación:

- El Jugador I no tiene una estrategia ganadora en el juego de los cubrimientos.

Demostración. En efecto, supongamos que I si tiene una estrategia ganadora σ . Sea $f : \omega^\omega \rightarrow \mathbb{R}$ la función que a cada $b = \langle b_0, b_1, b_2, \dots \rangle \in \omega^\omega$ le asigna el número real $a = f(b)$ tal que $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, \dots \rangle = \sigma * b$ y $a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$, tenemos que probar que f es continua.

Sea $f = h \circ g$ siendo $h : \omega^\omega \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $h(\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle) = a$ y siendo $g : \omega^\omega \rightarrow \omega^\omega$ la función dada por $g(b) = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$.

Esta función está bien definida ya que al jugar I con ceros y unos, se tiene que $a < \infty$. Como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$ es convergente, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \omega$ tal que para todo $m' \geq N$ se tiene que $\sum_{n=m'}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} < \frac{\epsilon}{2}$.

Para probar que f es continua bastará probar que h y g lo son. Ahora bien, la continuidad de g puede probarse razonando como en las pruebas de continuidad dadas en las demostraciones de los teoremas 5.1 o 5.3. Para ello basta tener en cuenta que dadas $t_1, t_2 \in \omega^{<\omega}$ se tiene

$$t_1 \triangleleft t_2 \Rightarrow g(t_1) \triangleleft g(t_2)$$

Por otro lado, si $s \in \omega^{<\omega}$ con $|s| = N$ entonces, para todo $a, a' \in O(s)$, se tiene que

$$|h(a) - h(a')| \leq \sum_{j=N}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}}$$

Por tanto, dado que $\sum \frac{1}{2^{n+1}}$ es una serie convergente, tomando N suficientemente grande podemos hacer el valor $|h(a) - h(a')|$ tan pequeño como queramos. Esto basta para probar la continuidad de h .

Por tanto f es continua.

Como f es continua, el conjunto $Z = f(\omega^\omega)$ es analítico, pues es imagen de una función continua de ω^ω en \mathbb{R} . Como es analítico, también es medible y además al ser σ una estrategia ganadora para I, se tiene $Z \subseteq S$ y, por tanto, Z tiene medida nula. Por el lema 5.1, podemos cubrir Z mediante la unión $H_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$ con $H_n \in K_n$ para todo $n \in \omega$, luego si el Jugador II juega con $\langle b_0, b_1, b_2, \dots \rangle$ donde $G_{b_n}^n = H_n$ y I juega según σ , entonces II gana, lo que contradice que σ sea una estrategia ganadora.

■

Entonces, como suponemos cierto AD, el juego de los cubrimientos está determinado y, por tanto, el Jugador II debe tener una estrategia ganadora. Sea τ una estrategia ganadora para II, para cada sucesión finita $s = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ de ceros y unos, sea $G_s \in K_n$ el conjunto $G_{b_n}^n$, donde $\langle b_0, \dots, b_n \rangle$ son los movimientos que el Jugador II juega según τ como respuesta a a_0, \dots, a_n . Como τ es una estrategia ganadora, todo $a \in S$ está en el conjunto $\bigcup \{G_s : s \subset a\}$ y por tanto:

$$S \subseteq \bigcup \{G_s : s \in \{0, 1\}^\omega\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s \in \{0, 1\}^n} G_s$$

Ahora para todo $n \geq 1$, si $s \in \{0, 1\}^n$, entonces $\mu(G_s) \leq \frac{\epsilon}{2^{2(n+1)}} \leq \frac{\epsilon}{2^{2n}}$, luego por la subaditividad de la medida

$$\mu^*(S) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s \in \{0, 1\}^n} G_s\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\bigcup_{s \in \{0, 1\}^n} G_s\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \frac{\frac{\epsilon}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, entonces $\mu^*(S) = 0$ y, por tanto, S es de medida nula. ■

Teorema 5.5. *Supongamos cierto AD. Entonces todo conjunto de números reales es medible Lebesgue.*

Demostración. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ y sea $A \supseteq X$ un conjunto medible con la propiedad de que todo medible $Z \subseteq A \setminus X$ (posible por las proposiciones 4.4 y 4.5). Entonces el lema anterior nos asegura que $A \setminus X$ tiene medida nula, luego es medible y, por tanto, su complementario

$$\mathbb{R} \setminus (A \setminus X) = \mathbb{R} \cap (A \cap X^c)^c = \mathbb{R} \cap (A^c \cup X) = (\mathbb{R} \cap A^c) \cup (\mathbb{R} \cap X) = (\mathbb{R} \setminus A) \cup X$$

también lo es.

Teniendo en cuenta ahora que $X \subseteq A$ y que la intersección numerable de medibles es medible, se deduce que $((\mathbb{R} \setminus A) \cup X) \cap A = X$ es medible. |

Bibliografía

- [1] Khomskii, Yurii: **Infinite Games**. Notas para un curso de verano en la universidad de Sofia (Bulgaria). Julio 2010. [https://www.math.uni-hamburg.de/home/khomskii/infinitegames2010/Infinite %20Games %20Sofia.pdf](https://www.math.uni-hamburg.de/home/khomskii/infinitegames2010/Infinite%20Games%20Sofia.pdf)
- [2] Larson, Paul B.: **A brief history of determinacy**, en The Handbook of the History of Logic, volume 6, Gabbay, Kanamori, Woods, eds., Elsevier, 2012
- [3] S.M. Srivastava: **A Course on Borel Sets**. Springer, 1998
- [4] Ciesielski, Krzysztof: **Set Theory for the Working Mathematician** (London Mathematical Society Student Texts) 1st Edition. Cambridge University Press, 1997.
- [5] Jech, Thomas: **Set Theory**. Perspectives in Mathematical Logic. Springer Verlag, 1997.
- [6] Bernal-González, Luis: **Series de funciones e integral de Lebesgue**, Universidad de Sevilla, 2015. <https://personal.us.es/lbernal/php/activos/pdf/SFIL.pdf>
- [7] González López, Víctor: **El Axioma de Determinación**, Trabajo fin de grado, Universidad de Murcia, 2016.