Universidad de Sevilla

Facultad de Matemáticas

Teoría de grupos y el Skewb

Trabajo de Fin de Grado (Grado en Matemáticas)

Autor: Carlos Méndez García-Barroso

Tutor: Juan González-Meneses López

Índice general

0.1 Resumen

En este trabajo repasaremos algunas definiciones y resultados básicos de la Teoría de Grupos y trataremos de utilizarlos para determinar la estructura de grupo asociada al Skewb, un puzzle del tipo del cubo de Rubik. Además, cubriremos algunos métodos de resolución, incluyendo un método que se basa en la propia estructura del grupo del skewb.

0.2 Abstract

In this paper, we aim to review some basic definitions and results from Group Theory and we will attempt to use them in order to determine the group structure associated to the Skewb, a Rubik's-type twisty puzzle. Furthermore, we will cover some solving methods, including one which takes advantage of the Skewb's group structure.

Capítulo 1

Definiciones y resultados previos

En esta sección presentaremos las definiciones y los resultados que serán fundamentales en el desarrollo del resultado final que queremos probar. Para ello, necesitaremos recordar las bases de la teoría de grupos. Nos hemos basado en los libros *An Introduction to Abstract Algebra* [1], en el que también se basan los apuntes de la asignatura de Álgebra Básica, y en *An Introduction to the Theory of Groups* [2] y la mayoría de los resultados están enunciados sin demostración para no alargar innecesariamente esta memoria.

1.1 La estructura algebraica de grupo

Definición 1.1. Un *grupo* es un par $(G, \star)$ donde G es un conjunto y $\star$ es una operación binaria interna sobre G que cumple las siguientes propiedades:

Asociatividad La operación es asociativa. Es decir, $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ para cualesquiera $x, y, z \in G$.

Elemento neutro Existe un elemento $e \in G$ que es elemento neutro de la operación. Es decir, se tiene $e \star x = x \star e = x$ para cualquier $x \in G$.

Elemento inverso Para cada elemento de G, existe otro que al operar con el primero da el elemento neutro. Es decir, para cualquier $x \in G$, existe $y \in G$ con $y \star x = x \star y = e$. Dado $x \in G$, notaremos a su inverso como x^{-1}

Nota. Dado que la operación es asociativa, podemos prescindir del uso de paréntesis cuando vayamos a operar con varios elementos de G seguidos. Además, en la práctica, suele omitirse también el símbolo que representa la operación en favor de la yuxtaposición. De esta manera, una expresión como $x \star (y \star z)$ se puede escribir sin ninguna ambigüedad como xyz

Nota. Si además de cumplir los axiomas de grupo, se tiene la propiedad conmutativa (esto es, $xy = yx \quad \forall x, y \in G$), diremos que G es un grupo *abeliano*

Algunos ejemplos de grupos son:

1. Los números enteros con la suma: $(\mathbb{Z}, +)$
2. Los números racionales no nulos con el producto: $(\mathbb{Q}^\times, \cdot\,)$
3. Las matrices del mismo orden con coeficientes sobre un cuerpo y la suma de matrices: $(\mathcal{M}_{n\times m}(k), +)$
4. Dado un conjunto $X \neq \emptyset$, el conjunto $S_X = \{f\colon X \to X | f \text{ biyectiva}\}$ es un grupo con la operación dada por la composición de aplicaciones. Cuando $X = \{1, \ldots, n\}$, denotamos $S_n \coloneqq S_X$. Conocemos a este grupo como el *grupo de permutaciones* de X. Este ejemplo nos resultará importante más adelante, puesto que "parte" del grupo del Skewb se corresponde con un grupo de permutaciones.

Proposición 1.2. *Sea G un grupo. Se tiene:*

1. *El elemento neutro es único.*
2. *Cada elemento tiene un único elemento inverso. Además, si $xy = e$, entonces $x = y^{-1}$ e $y = x^{-1}$.*
3. $(x^{-1})^{-1} = x$.
4. $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$
5. *Se tiene la propiedad cancelativa por la izquierda y por la derecha: si $xy = xz$, entonces $y = z$. Además, si $xy = zy$, entonces $x = z$.*

Definición 1.3. Sea G un grupo, $k \in \mathbb{Z}$ y $g \in G$. Entonces definimos la potencia k-ésima de g como sigue:

$$g^k = \begin{cases} \overbrace{g \ldots g}^{\text{k veces}} \quad \text{si} \quad k > 0 \\ e \quad \text{si} \quad k = 0 \\ \underbrace{g^{-1} \ldots g^{-1}}_{\text{-k veces}} \quad \text{si} \quad k < 0 \end{cases}$$

Definición 1.4. Sea G un grupo y $g \in G$. Llamaremos *orden* de g (notado $ord(g)$) al menor entero positivo k tal que $g^k = e$. Si no existe tal entero, diremos que g tiene orden infinito.

Definición 1.5. Dado un grupo G diremos que su *orden* es su cardinal como conjunto y lo notaremos $|G|$.

Proposición 1.6. *Si G es un grupo finito, entonces todos los elementos de G tienen orden finito.*

Ahora definiremos dos conceptos que serán de especial utilidad cuando estudiemos en más profundidad el Skewb. Sin embargo, son conceptos que se pueden definir de manera general para cualquier grupo.

Definición 1.7. Sea G un grupo. Dados dos elementos $g, h \in G$, definimos el *conmutador* de g y h como $[g, h] \coloneqq ghg^{-1}h^{-1}$.

Definición 1.8. Sea G un grupo. Dados dos elementos $g, h \in G$, definimos el *conjugado de h por g* como $g : h \coloneqq ghg^{-1}$.

Nota. La notación que vamos a usar para la conjugación no es la habitual (${}^g h$). Conjugar es algo tan común en los puzzles de tipo Rubik que tiene su propia notación, y es la que utilizaremos a lo largo del desarrollo.

1.2 Subgrupos

Definición 1.9. Sea G un grupo. Diremos que $H \subseteq G$ es un subgrupo de G (notado $H \leq G$) si H es un grupo con "la misma" operación de G (es decir, la operación de G restringida a $H \times H$).

Proposición 1.10. *Sea G un grupo. Entonces $H \leq G$ si y solo si $H \neq \emptyset$ y $xy^{-1} \in H$ para cualesquiera $x, y \in H$.*

Teorema 1.11. *Sea G un grupo finito y $H \leq G$. Entonces $k|H| = |G|$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, al que llamaremos* índice *de H en G. En particular, el orden de H divide al orden de G.*

Definición 1.12. Sea G un grupo y $S \subseteq G$. Llamaremos *subgrupo generado* por S al menor subgrupo de G (respecto de la inclusión de conjuntos) que contiene a S y lo notaremos $\langle S \rangle$.

Proposición 1.13. *Sea G un grupo y $S \subseteq G$. Se tiene:*

1. $\langle S \rangle = \{g_1 g_2 \cdots g_k | k \in \mathbb{N}, g_i \in S \text{ o } g_i^{-1} \in S \quad \forall i = 1, \ldots, k\}$
2. $\langle S \rangle = \bigcap_{S \subseteq H \leq G} H$

Definición 1.14. Sea G un grupo y $H \leq G$. Diremos que H es un *subgrupo normal* de G si $ghg^{-1} = g : h \in H$ para cualesquiera $h \in H$ y $g \in G$. Notaremos esto como $H \lhd G$.

Nota. Con gH nos referiremos al conjunto $\{gh | h \in H\}$. Los conjuntos de esta forma se llaman *clases por la izquierda* de H en G. De modo similar, los conjuntos $Hg = \{hg | h \in H\}$ se llaman *clases por la derecha*.

Proposición 1.15. *Sea G un grupo y $H \leq G$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *H es un subgrupo normal de G.*
2. $\forall g, h \in G \quad gh \in H \iff hg \in H$.
3. $\forall g \in G \quad gHg^{-1} \subseteq H$.
4. $\forall g \in G \quad gH = Hg$.

1.3 Grupo cociente

Dado un grupo G y un subgrupo $H \leq G$, podemos definir una relación de equivalencia en G de la siguiente manera:

Definición 1.16. Sean $g, h \in G$. Diremos que g y h son congruentes por la izquierda (resp. derecha) módulo H si $g^{-1}h \in H$ (resp. $gh^{-1} \in H$).

Las clases de equivalencia de esta relación son las clases por la izquierda gH (resp. Hg) con $g \in G$.

Idealmente, querríamos que el conjunto de las clases de equivalencia anteriores (notado G/H) junto con la operación natural heredada de G (esto es, $(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H$) tuviera estructura de grupo. Sin embargo, hay que imponer una condición adicional al subgrupo H para que esto sea así, como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 1.17. *Sea G un grupo y $H \leq G$. Son equivalentes:*

1. *La operación $(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H$ está bien definida y dota a G/H de una estructura de grupo.*
2. *$H \lhd G$.*

1.4 Homomorfismos de grupos

Definición 1.18. Sean G y H grupos. Decimos que $f\colon G \to H$ es un *homomorfismo de grupos* si se cumple que $f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G$

Nota. Diremos que un homomorfismo de grupos es un *isomorfismo* de grupos si es biyectivo, y diremos que dos grupos son *isomorfos* si existe un isomorfismo de uno al otro. Si G y H son isomorfos, lo notaremos como $G \simeq H$. Además, llamaremos *automorfismo* a un isomorfismo de un grupo en sí mismo.

Proposición 1.19. *Sean $f_1\colon G \to H$ y $f_2\colon H \to K$ isomorfismos de grupos. Se tiene:*

1. *$f_1^{-1}\colon H \to G$ también es un isomorfismo de grupos.*
2. *$f_2 \circ f_1\colon G \to K$ también es un isomorfismo.*
3. *Como consecuencia, la relación "ser isomorfos" es una relación de equivalencia entre grupos.*

Esta última proposición nos dice que a ojos de la teoría de grupos, dos grupos isomorfos son realmente el mismo grupo, salvo el nombre y/o la forma de los elementos.

Definición 1.20. Sea G un grupo. Llamamos grupo de automorfismos de G a $Aut(G) := \{f : G \to G | f \text{ es automorfismo}\}$.

Proposición 1.21. *Sea G un grupo. Entonces:*

1. *$Aut(G)$ es un grupo con la composición de aplicaciones como operación.*
2. *El elemento neutro de $Aut(G)$ es $id_G : G \to G$.*
3. *Dado $f \in Aut(G)$, su inverso es la aplicación inversa $f^{-1} \in Aut(G)$.*

Definición 1.22. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Definimos el *núcleo* de f como $\ker f := \{g \in G | f(g) = e_H\}$.

Proposición 1.23. *Sean G y H grupos y $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Se tiene:*

1. *$f(e_G) = e_H$*
2. *$im(f) = f(G) \subseteq H$ es un subgrupo de H.*
3. *$\ker f \subseteq G$ es un subgrupo normal de G.*
4. *(Primer teorema de isomorfía) $G/\ker f$ es isomorfo a $im(f)$.*

1.5 Grupos de permutaciones

Dado que los grupos de permutaciones juegan un papel fundamental en el desarrollo de la teoría de grupos asociada al Skewb (y en general a cualquier puzzle de tipo Rubik), es recomendable dedicar una parte del trabajo a estos grupos.

Definición 1.24. Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos $\sigma \in S_n$. Diremos que σ es una *permutación* de n elementos. Una manera de representarla es mediante la matriz

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Definición 1.25. Sea $\sigma \in S_n$. Llamaremos *soporte* de σ al conjunto $sop(\sigma) := \{i \in \{1, \dots, n\} | \ \sigma(i) \neq i\}$

Definición 1.26. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$. Sea $\sigma \in S_n$ tal que $sop(\sigma) = A$ y $\sigma(i_j) = i_{j+1}$ (entendiendo que $k + 1 = 1$). Diremos que σ es un k-ciclo. En las condiciones anteriores, podemos denotar σ como la matriz $(i_1 \cdots i_k)$. Si $k = 2$, diremos que σ es una *trasposición*.

Definición 1.27. Sean $\sigma, \tau \in S_n$ ciclos. Diremos que σ y τ son *ciclos disjuntos* si sus soportes son disjuntos.

Teorema 1.28 (Descomposición en ciclos disjuntos)**.** *Sea $\sigma \in S_n$. Entonces σ se puede escribir como composición de ciclos disjuntos. Además, esta descomposición es única salvo orden de los ciclos.*

Nota. En general, la composición de permutaciones no es conmutativa. Sin embargo, si σ y τ son ciclos disjuntos, $\sigma\tau = \tau\sigma$. De ahí que el orden de los ciclos disjuntos no sea relevante.

Observación. A la vista del teorema anterior, dada una permutación $\sigma \in S_n$, podemos escribirla como producto de ciclos disjuntos. Por ejemplo, la permutación $\sigma \in S_7$ dada por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 6 & 4 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

se puede representar como producto de ciclos disjuntos como $\sigma = (1572)(36)$. Esta será la notación que utilizaremos preferentemente para dar permutaciones de manera explícita.

Proposición 1.29. *Toda permutación se puede escribir como producto de trasposiciones. Esto es,* $S_n = \langle \{(ij) | 1 \leq i < j \leq n\} \rangle$

Proposición 1.30. *Dada* $\sigma \in S_n$*, si* $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_r = \rho_1 \cdots \rho_s$ *donde todas las* τ_i *y todas las* ρ_j *son trasposiciones, se tiene que* $r - s \equiv 0 \pmod 2$

La proposición anterior nos permite definir un nuevo concepto: el *signo* de una permutación.

Definición 1.31. Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos la aplicación *signo* como $sign\colon S_n \to \mathbb{Z}_2$ de la siguiente manera:

- Si σ se escribe como producto de un número par de trasposiciones, $sign(\sigma) = 0$. En este caso, decimos que σ es una permutación par.
- Si σ se escribe como producto de un número impar de trasposiciones, $sign(\sigma) = 1$. En este caso, decimos que σ es una permutación impar.

Proposición 1.32. $sign\colon S_n \to \mathbb{Z}_2$ *es un homomorfismo de grupos.*

Definición 1.33. Llamaremos *grupo alternado* de S_n a $\ker sign$ y lo notaremos A_n. A_n es el conjunto de todas las permutaciones pares de S_n.

Proposición 1.34. *Sea* $n \in \mathbb{N}$.

1. A_n *es un subgrupo normal de* S_n *de índice 2.*
2. $|S_n| = n!$
3. $|A_n| = \frac{n!}{2}$

1.6 Grupos libres

Definición 1.35. Sea S un conjunto cuyos elementos llamaremos *símbolos*. Consideremos $S^{-1} \coloneqq \{s^{-1} | s \in S\}$. Los elementos de S^{-1} no son más que inversos formales, es decir, símbolos que a priori no tienen relación con los de S. Definiremos una *palabra* como una secuencia finita de símbolos de $S \cup S^{-1}$. Diremos que una palabra es *reducida* si no contiene subpalabras de la forma ss^{-1} o $s^{-1}s$. Por último, diremos que dos palabras son equivalentes si se puede pasar de una a otra mediate una sucesión de transformaciones, cada una de las cuales consiste en añadir o eliminar subpalabras de la forma ss^{-1} o $s^{-1}s$. Esta es una relación de equivalencia sobre el conjunto de las palabras en $S \cup S^{-1}$, y el conjunto cociente con la operación definida por la concatenación de representantes de las clases de equivalencia es un grupo, al que llamaremos *grupo libre* generado por S, notado F_S.

Proposición 1.36. *Todo grupo es isomorfo a un cociente de un grupo libre por un subgrupo normal.*

Prueba. Sea G un grupo. Consideramos la aplicación $f\colon F_G \to G$ que a cada clase de equivalencia en F_G representada por una palabra w de F_G le asigna el elemento de G que resulta de operar los elementos que aparecen en la palabra. Es claro que f es un homomorfismo bien definido y que es sobreyectivo, así que $G \simeq F_G/ker(f)$ por el primer teorema de isomorfía. □

Proposición 1.37 (Propiedad universal de los grupos libres)**.** *Sean S un conjunto no vacío, G un grupo y $f\colon S \to G$ una aplicación. Existe un único homomorfismo $\varphi\colon F_S \to G$ de manera que $\varphi \circ i = f$, donde i es la inclusión de S en F_S.*

Esta proposición nos dice, entre otras cosas, que para determinar un homomorfismo de grupos cuyo dominio sea un grupo libre, solo es necesario conocer las imágenes de los generadores de dicho grupo libre. Es más, cualquier elección de estas imágenes determina un homomorfismo bien definido.

1.7 Acción de un grupo sobre un conjunto

Definición 1.38. Sea X un conjunto y G un grupo. Decimos que $\varphi\colon G \times X \to X$ es una acción por la izquierda de G sobre X si:

1. $\varphi(e, x) = x \quad \forall x \in X$
2. $\varphi(gh, x) = \varphi(g, \varphi(h, x)) \quad \forall g, h \in G$

Definición 1.39. Sea X un conjunto y G un grupo. Decimos que $\varphi\colon X \times G \to X$ es una acción por la derecha de G sobre X si:

1. $\varphi(x, e) = x \quad \forall x \in X$
2. $\varphi(x, gh) = \varphi(\varphi(x, g), h) \quad \forall g, h \in G$

Nota. Si notamos una acción por la izquierda $\varphi(g,x)$ como ${}^{g}x$, podemos escribir la segunda propiedad de la definición de acción por la izquierda como ${}^{gh}x = {}^{g}({}^{h}x)$. Del mismo modo, si notamos una acción por la derecha $\varphi(x,g)$ como x^g, la segunda propiedad se escribiría como $x^{gh} = (x^g)^h$.
Dada una acción por la derecha, siempre tenemos una acción por la izquierda correspondiente y viceversa, de modo que podríamos elegir trabajar exclusivamente con acciones por la izquierda o por la derecha.

Más concretamente, si $\varphi\colon G\times X \to X$ es una acción por la izquierda, entonces $\psi\colon X\times G \to X$ dada por $\psi(x,g) = \varphi(g^{-1},x)$ es una acción por la derecha.

Alternativamente, podríamos definir una acción por la izquierda de G sobre X como una aplicación $\varphi\colon G \to S_X$ que sea homomorfismo de grupos.

1.8 Producto directo y semidirecto

Definición 1.40. Dados dos grupos G y H, definimos el *producto directo* de G y H como sigue:

1. El conjunto subyacente es el producto cartesiano $G \times H$.
2. La operación se realiza componente a componente. Esto es, $(g_1,h_1)(g_2,h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$.

Nota. Abusando de la notación, notaremos al producto directo con la misma notación que el producto cartesiano. Cuando veamos $G\times H$, entenderemos que la estructura de grupo es la de producto directo definida anteriormente.

Proposición 1.41. *Sean G y H grupos. Se tiene:*

1. *El elemento neutro de $G\times H$ es (e_G, e_H)*
2. *El elemento inverso de (g,h) es (g^{-1},h^{-1}).*
3. *Las aplicaciones $\pi_1\colon G\times H \to G, \pi_1(g,h) = g$ y $\pi_2\colon G\times H \to H, \pi_2(g,h) = h$ son homomorfismos de grupos sobreyectivos.*
4. *Las aplicaciones $i_1\colon G \to G\times H, i_1(g) = (g, e_h)$ e $i_2\colon H \to G\times H, i_2(h) = (e_G, h)$ son homomorfismos de grupos inyectivos.*
5. *$i_1(G) \lhd G\times H$ e $i_2(H) \lhd G\times H$.*
6. *$G\times H$ es isomorfo a $H\times G$*
7. *Si G y H son abelianos, $G\times H$ también lo es.*
8. *Si G y H son finitos, $|G\times H| = |G||H|$*

Definición 1.42. Dados dos grupos G y H y un homomorfismo $\varphi\colon H \to Aut(G)$ (una acción que para cada elemento de H induce no solo una permutación, sino un automorfismo en G), podemos construir un nuevo grupo con una estructura diferente a la del producto directo, que llamaremos *producto semidirecto* de G y H mediante la acción φ. Este grupo viene dado por:

1. Los elementos son los de $G \times H$.
2. La operación $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1\varphi_{h_1}(g_2), h_1h_2)$.

Notaremos a este grupo como $G \rtimes_\varphi H$. En ocasiones, si φ está clara por el contexto, podremos escribir simplemente $G \rtimes H$.

Proposición 1.43. *Sean G y H grupos y $\varphi\colon H \to Aut(G)$ un homomorfismo. Se tiene:*

1. *$G \rtimes_\varphi H$ tiene estructura de grupo con la operación descrita anteriormente.*
2. *El elemento neutro de $G \rtimes_\varphi H$ es (e_G, e_H).*
3. *El elemento inverso de (g, h) es $(g, h)^{-1} = (\varphi_{h^{-1}}(g^{-1}), h^{-1})$*
4. *Las aplicaciones $i_1\colon G \to G \rtimes_\varphi H, g \mapsto (g, e_H)$ e $i_2\colon H \to G \rtimes_\varphi H, h \mapsto (e_G, h)$ son homomorfismos inyectivos.*
5. *$i_1(G) \lhd G \rtimes_\varphi H$*
6. *$i_2(H) \leq G \rtimes_\varphi H$*
7. *$i_2(H) \lhd G \rtimes_\varphi H \iff G \rtimes_\varphi H \simeq G \times H \iff \varphi_h = id_G \quad \forall h \in H.$*
8. *Si G y H son finitos, $|G \rtimes_\varphi H| = |G||H|$*

Prueba. 1. Puesto que veremos los elementos neutro e inverso en 2 y 3, solo queda ver la propiedad asociativa.

$$[(g_1, h_1)(g_2, h_2)]\,(g_3, h_3) = (g_1\varphi_{h_1}(g_2), h_1h_2)(g_3, h_3) = (g_1\varphi_{h_1}(g_2)\varphi_{h_1h_2}(g_3), h_1h_2h_3) =$$
$$(g_1\varphi_{h_1}(g_2)\varphi_{h_1}(\varphi_{h_2}(g_3)), h_1h_2h_3) = (g_1\varphi_{h_1}(g_2\varphi_{h_2}(g_3)), h_1h_2h_3) =$$
$$(g_1, h_1)(g_2\varphi_{h_2}(g_3), h_2h_3) = (g_1h_1)\,[(g_2, h_2)(g_3, h_3)]$$

2. Elemento neutro:

$$(g, h)(e_G, e_H) = (g\varphi_{e_H}(e_G), he_H) = (ge_G, he_H) = (g, h)$$
$$(e_G, e_H)(g, h) = (e_G\varphi_{e_H}(g), e_Hh) = (e_Gid(g), h) = (e_Gg, h) = (g, h)$$

3. Elemento inverso:

$$(g, h)(\varphi_{h^{-1}}(g^{-1}), h^{-1}) = (g\varphi_h(\varphi_{h^{-1}}(g^{-1})), hh^{-1}) =$$
$$= (g\varphi_{hh^{-1}}(g^{-1}), e_H) = (g\varphi_{e_H}(g^{-1}), e_H) = (gg^{-1}, e_H) = (e_G, e_H)$$
$$(\varphi_{h^{-1}}(g^{-1}), h^{-1})(g, h) = (\varphi_{h^{-1}}(g^{-1})\varphi_{h^{-1}}(g), h^{-1}h) =$$
$$= (\varphi_{h^{-1}}(g^{-1}g), e_H) = (\varphi_{h^{-1}}(e_G), e_H) = (e_G, e_H)$$

4. Está claro que ambas aplicaciones son inyectivas, así que solo queda comprobar que son homomorfismos.

$$i_1(g_1g_2) = (g_1g_2, e_H) = (g_1\varphi_{e_H}(g_2), e_H) = (g_1, e_H)(g_2, e_H) = i_1(g_1)i_1(g_2)$$

$$i_2(h_1h_2) = (e_G, h_1h_2) = (e_G, h_1)(e_G, h_2) = i_2(h_1)i_2(h_2)$$

5. Sean $(g, e_H) \in i_1(G)$ y $(g_1, h) \in G \rtimes_\varphi H$

$$(g_1, h)(g, e_H)(g_1, h)^{-1} = (g_1\varphi_h(g), h)(\varphi_{h^{-1}}(g_1^{-1}), h^{-1}) =$$
$$= (g_1\varphi_h(g)\varphi_h(\varphi_{h^{-1}}(g_1^{-1})), e_H) = (g_1\varphi_h(g)g_1^{-1}, e_H) \in i_1(G)$$

6. La imagen de un homomorfismo siempre es un subgrupo.

7. Las implicaciones hacia la izquierda son obvias a partir de las propiedades que hemos visto del producto directo. Para terminar la cadena, veamos que $i_2(H) \lhd G \rtimes_\varphi H \implies \varphi_h = id_G \quad \forall h \in H$. Sean $h \in H$ y $(g, h_1) \in G \rtimes_\varphi H$ arbitrarios. Entonces:

$$(g, h_1)(e_G, h)(g, h_1)^{-1} = (g, h_1h)(\varphi_{h_1^{-1}}(g^{-1}), h_1^{-1}) =$$
$$(g\varphi_{h_1h}(\varphi_{h_1^{-1}}(g^{-1})), h_1hh_1^{-1}) = (g\varphi_{h_1hh_1^{-1}}(g^{-1}), h_1hh_1^{-1}).$$

Como estamos suponiendo que $i_2(H) \lhd G \rtimes_\varphi H$, se tiene que $g^{-1} = \varphi_{h_1hh_1^{-1}}(g^{-1}) \quad \forall g \in G$. De aquí se deduce que $\varphi_{h_1hh_1^{-1}} = id_G \quad \forall h \in H$. Pero entonces,

$$id_G = \varphi_{h_1^{-1}} \circ id_G \circ \varphi_{h_1} = \varphi_{h_1^{-1}} \circ \varphi_{h_1hh_1^{-1}} \circ \varphi_{h_1} =$$
$$\varphi_{(h_1^{-1}h_1)h(h_1^{-1}h_1)} = \varphi_h \quad \forall h \in H$$

8. Como conjunto, $G \rtimes_\varphi H$ es igual que $G \times H$, de modo que si G y H son finitos, el número de elementos se calcula de la misma manera.

□

Además de construir un producto semidirecto a partir de dos grupos y una acción, en ocasiones es posible descomponer un grupo dado en un producto semidirecto si se dan ciertas condiciones.

Proposición 1.44. *Sea G un grupo, $N \lhd G$ y $K \leq G$. Si se tienen:*

1. $N \cap K = \{e\}$

2. $G = NK$

Entonces existe un homomorfismo $\varphi : K \to Aut(N)$ de manera que $G \simeq N \rtimes_\varphi K$.

Prueba. La segunda hipótesis nos dice que dado $g \in G$, podemos escribirlo como $g = nk$ con $n \in N$ y $k \in K$. Veamos que esta escritura es única. Supongamos que $n_1k_1 = n_2k_2$. Entonces, $n_2^{-1}n_1 = k_2k_1^{-1}$. Pero como N y K son subgrupos de G, cada lado de la igualdad es un elemento de N y de K, respectivamente. Por tanto, por la primera hipótesis, $n_2^{-1}n_1 = e = k_2k_1^{-1}$, lo que implica que $n_1 = n_2$ y $k_1 = k_2$. Ahora, definimos $\varphi\colon K \to Aut(N)$ como $\varphi_k(n) = knk^{-1}$. Usando esta definición, se tiene que φ es un homomorfismo.

Veamos finalmente que $G \simeq N \rtimes_\varphi K$. Vamos a definir $\psi\colon G \to N \rtimes_\varphi H$ como $\psi(g) = (n, k)$ donde $g = nk$ es la única descomposición de g de la forma dada por la segunda condición. Ya hemos visto que ψ es inyectiva y está claro que es sobreyectiva, así que queda probar que es un homomorfismo. Sean $g = n_1k_1$ y $h = n_2k_2$. Se tiene

$$\begin{gathered}\psi(gh) = \psi(n_1k_1n_2k_2) = \psi(n_1k_1n_2k_1^{-1}k_1k_2) = \\ \psi(n_1\varphi_{k_1}(n_2)k_1k_2) = (n_1\varphi_{k_1}(n_2), k_1k_2)\end{gathered}$$

Por otro lado,

$$\psi(g)\psi(h) = (n_1, k_1)(n_2, k_2) = (n_1\varphi_{k_1}(n_2), k_1k_2)$$

Por tanto, ψ es un isomorfismo y se tiene el resultado. □

Un ejemplo (similar a otros que veremos más tarde) de producto semidirecto que se usa habitualmente es, por ejemplo, $\mathbb{Z}^n \rtimes S_n$, donde S_n actua sobre $\mathbb{Z}^n$ permutando las coordenadas. Este ejemplo también nos sirve para ver que con la estructura de producto semidirecto, podemos obtener grupos no abelianos a partir de grupos abelianos.

Tomemos $g_1 = ((1, 0), ()) \in \mathbb{Z}^2 \rtimes S_2$ y $g_2 = ((-1, 1), (12)) \in \mathbb{Z}^2 \rtimes S_2$. Tenemos que $g_1g_2 = ((0, 1), (12))$ pero $g_2g_1 = ((-1, 2), (12))$, a pesar de que tanto $\mathbb{Z}^2$ como S_2 son abelianos.

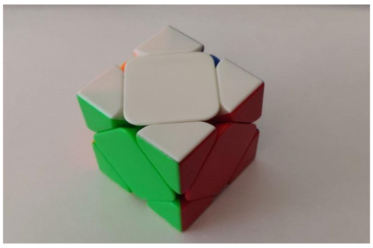
Capítulo 2

El Skewb

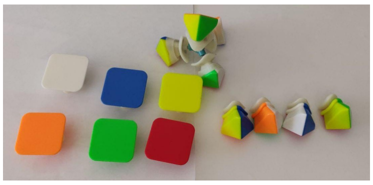
El *Skewb* es un puzzle de la familia del cubo de Rubik. Su nombre proviene de la combinación en inglés de las palabras *skew* (torcido, oblicuo) y *cube* (cubo)

Al igual que el cubo de Rubik, tiene forma de cubo. Sin embargo, a diferencia del cubo de Rubik original, tiene 4 ejes de giro en lugar de 3, que son las rectas que pasan por pares de vértices diametralmente opuestos. El puzzle consta de 8 esquinas y 6 centros con forma de cuadrado cuyos vértices están en el centro de las aristas del cubo. Al girar alrededor de una esquina, se mueve la mitad del puzzle que rodea a dicha esquina, es decir, la propia esquina, los tres centros adyacentes a ella y las otras 3 esquinas adyacentes a ella.

Mecánicamente, el *Skewb* consta de un núcleo de plástico del que salen cuatro tornillos a los que están unidas permanentemente cuatro de las ocho esquinas. El resto de piezas se pueden separar de este núcleo. Utilizaremos este hecho más adelante cuando tratemos de determinar la estructura de grupo asociada al *Skewb*.



(a) Skewb del autor



(b) Skewb desmontado

2.1 Notación

Para poder describir bien las las matemáticas asociadas al *Skewb*, necesitaremos una notación para describir los movimientos que realicemos y tener nombres claros para cada una de las piezas del puzzle.

En lo que sigue, consideraremos que nuestro *Skewb* tiene la disposición de colores estándar. Esto es, las caras son de color blanco, verde, rojo, azul, naranja y amarillo. Los pares de caras opuestas son blanco-amarillo, verde-azul y rojo-naranja. Las caras blanca, verde y roja están situadas alrededor de una esquina, y se recorren en ese orden en sentido antihorario.

2.1.1 Esquinas

Lo primero de lo que nos damos cuenta es que cada esquina del *Skewb* define un movimiento, y que cada par de esquinas diametralmente opuesto produce el mismo movimiento, puesto que mueven mitades complementarias del puzzle. Por tanto, para describir los movimientos del *Skewb* solo necesitamos tener un nombre para 4 de las 8 esquinas. Si además elegimos estas 4 esquinas de manera que sean los vértices de un tetraedro regular, las 4 esquinas elegidas siempre quedarán fijas en su sitio, aunque quizás con una orientación distinta a la correcta. Definiremos la orientación estándar del *Skewb* como sigue:

1. Con el Skewb resuelto, colocamos la esquina blanco-rojo-verde mirando hacia nosotros.
2. Colocamos la cara blanca del *Skewb* mirando hacia arriba.

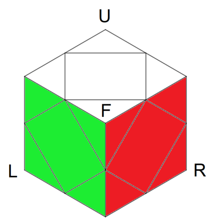


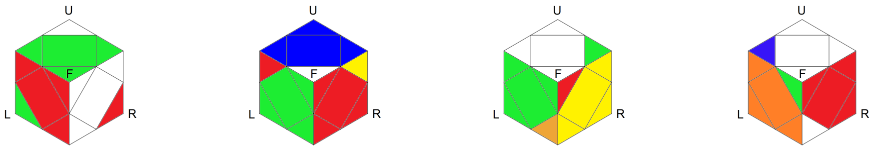
Figura 2.2: Esquinas fijas

A partir de aquí, llamaremos **F** a la esquina de la capa superior que mira hacia nosotros (blanco-rojo-verde), **U** a la esquina de la capa superior que mira hacia la parte trasera del *Skewb* (blanco-naranja-azul), **R** a la esquina de la capa inferior que mira hacia la derecha (amarillo-rojo-azul) y **L** a la esquina de la capa inferior que mira hacia la izquierda (amarillo-naranja-verde). De esta manera, podemos describir cualquier secuencia de movimientos como giros alrededor de estas cuatro esquinas, que nunca se moverán de sus correspondientes sitios. En adelante, nos referiremos a este conjunto de esquinas como $E_f \coloneqq \{F, L, R, U\}$

Una secuencia de movimientos estará formada por estas 4 letras, seguidas o no de un apóstrofe. La letra sola significa girar en sentido horario alrededor de la esquina indicada, y la letra con apóstrofe significa girar en sentido antihorario alrededor de dicha esquina. Es importante notar que dada una secuencia de movimientos, entenderemos que se realizan **de izquierda a derecha**.

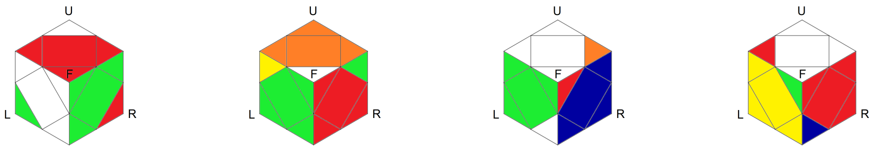
Para facilitar la visualización, incluimos el resultado de girar cada esquina en sentido horario y antihorario.

Figura 2.3: Giros horarios



F U R L

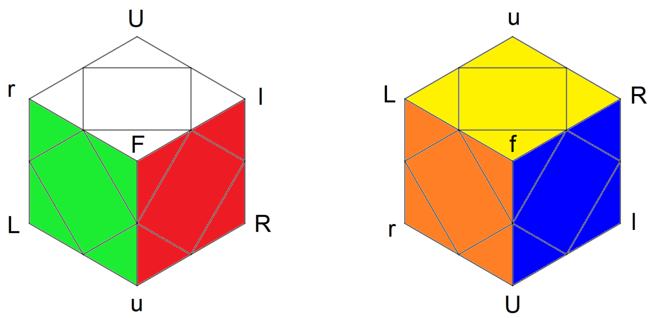
Figura 2.4: Giros antihorarios



F' U' R' L'

Aunque no vayamos a utilizarlas como notación para los movimientos, necesitaremos tener un nombre para las otras esquinas del *Skewb*, puesto que a diferencia de las esquinas fijas, estas sí pueden cambiar de posición entre ellas. Las nombraremos con la letra minúscula correspondiente a la esquina diametralmente opuesta, que siempre será una de las esquinas fijas. Este será el conjunto de esquinas móviles $E_m := \{f, l, r, u\}$.

De este modo, la nomenclatura de las esquinas queda como sigue:



Vista frontal Vista trasera

Figura 2.5: Esquinas

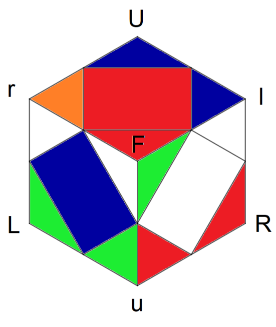
Orientación

Dado que cada esquina puede estar en un lugar dado en tres orientaciones diferentes, necesitamos una manera de definir sin ambigüedad cuándo una esquina está orientada correctamente y cuándo no. Para ello, fijada una esquina, el primer paso es determinar a cuál de los dos conjuntos de esquinas pertenece. Una vez hecho esto, observaremos si la esquina está bien orientada respecto del resto de esquinas de su mismo tipo.

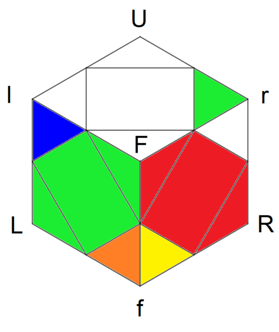
Para ello, elijamos una esquina x. Observemos que x tiene tres colores, y cada uno de estos colores aparece exactamente en una de las otras tres esquinas del mismo tipo que x. Si cada color de x está en la misma cara que la otra esquina de su tipo que contiene ese color, diremos que su orientación es $0 \in \mathbb{Z}_3$, lo que significará que está bien orientada. Si fuera necesario girar la esquina en cuestión en sentido antihorario para que estuviera bien orientada, diremos que su orientación es $1 \in \mathbb{Z}_3$. Finalmente, si fuera necesario girar la esquina en sentido horario, diremos que su orientación es $2 \in \mathbb{Z}_3$.

Determinar la orientación de las esquinas fijas es relativamente sencillo, puesto que nunca se mueven de su sitio siguiendo la notación explicada anteriormente. Sin embargo, la orientación de las esquinas móviles puede depender de cómo estén permutadas entre ellas. Por ejemplo, en el estado que resulta de aplicar la secuencia $L'ULF'$, vemos que las esquinas móviles siguen en su lugar, y que l y r no están bien orientadas. Más concretamente, la orientación de l es 2 y la orientación de r es 1.

Sin embargo, si aplicamos $RL'R'L$, las esquinas móviles sí cambian de lugar. Por ejemplo, l y r están intercambiadas. En este caso, l está bien orientada puesto que el lado blanco, que apunta a r, efectivamente lo hace. Sin embargo, r no está bien orientada porque su lado blanco apunta hacia f en lugar de hacia l como debería. Como habría que girarla en sentido horario para que lo estuviera, su orientación es 2.



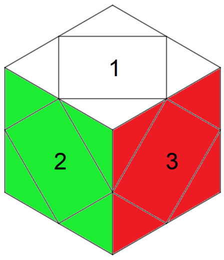
$L'ULF'$



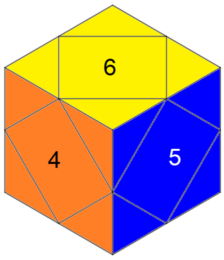
$RL'R'L$

2.1.2 Centros

La notación para los centros es, comparada con la de las esquinas, bastante simple. Puesto que solo tienen una orientación, solo es necesario darles un nombre. Lo haremos asignando a cada centro un número del 1 al 6 de manera que, en el estado resuelto, centros opuestos sumen 7. Asignaremos el 1 al centro blanco, el 2 al verde y el 3 al rojo. De este modo, el resto de centros queda unívocamente determinado.



Vista frontal



Vista trasera

2.2 La estructura de grupo del skewb

Una vez descrita la notación para el *Skewb*, podemos comenzar a estudiar la estructura de grupo que hay detrás de este puzzle. En primer lugar, tenemos que justificar que, en efecto, existe tal estructura de grupo.

Consideremos el conjunto de todas las secuencias de movimientos finitas que podemos aplicar al *Skewb*. Dichas secuencias de movimientos, como ya hemos visto, son palabras en $E_f \cup E_f'$. Llamemos W al conjunto de todas esas palabras y consideremos la operación interna que consiste en la concatenación de palabras, que dota a W de la estructura de monoide. Por otro lado, observemos que un *Skewb* tiene 30 pegatinas diferentes (3 en cada una de las 8 esquinas y una en cada centro), y que una secuencia de movimientos induce una permutación de esas 30 pegatinas, que podremos considerar como un elemento de S_{30}. Nos referiremos a estas permutaciones como *estados* del *Skewb*.

Nota. A lo largo del resto del trabajo, para ser consistentes y poder leer los movimientos de izquierda a derecha, también leeremos las permutaciones de izquierda a derecha. Para ello, consideraremos S_n y A_n con la operación $\cdot$ definida como $\sigma \cdot \tau := \tau \circ \sigma$.

Es importante notar que no nos interesan todos los estados posibles del *Skewb*, sino solo aquellos a los que se puede acceder desde el estado resuelto aplicando movimientos. Tal como lo hemos definido, S_{30} contiene estados que suponen intercambiar una pegatina de una esquina con una de un centro, por ejemplo, algo que obviamente no puede ocurrir en un *Skewb* solo mediante movimientos.

Para determinar exactamente qué estados son válidos, vamos a definir una aplicación $\alpha\colon W \to S_{30}$ de manera que asociemos a cada secuencia de movimientos el estado en que esta deja al *Skewb*. Esta aplicación envía la operación de W (la concatenación) en la operación $\cdot$ de S_{30}, de modo que es un morfismo entre monoides. Veamos que $im(\alpha) \leq S_{30}$. Sean $\sigma_1, \sigma_2 \in im(\alpha)$. Entonces, existen $w_1, w_2 \in W$ con $\alpha(w_i) = \sigma_i, i = 1, 2$. De la manera en que hemos definido α, se tiene que $\alpha(A') = \alpha(A)^{-1} \quad \forall A \in E_f$. Con esto y usando que α preserva la concatenación, podemos decir que $\sigma_1 \cdot \sigma_2^{-1} = \alpha(w_1 w_2^{-1}) \in im(\alpha)$, entendiendo por w_2^{-1} la palabra que resulta de invertir el orden de w_2 y cambiar los movimientos en sentido horario por movimientos antihorarios y viceversa. Tenemos entonces que $im(\alpha)$, que llamaremos G en adelante, es un grupo formado por los estados válidos de α y lo llamaremos el *grupo del Skewb*.

Observemos ahora atentamente la factorización canónica de $\alpha = i \circ \overline{\alpha} \circ \pi_S$, donde:

- $\pi_S\colon W \to W/\sim_S$ es la proyección natural de W en $W/\sim_S$ donde $\sim_S$ es la relación de equivalencia que relaciona palabras con la misma imagen por α. π_S es sobreyectiva y preserva la concatenación de palabras.
- $\overline{\alpha}\colon W/\sim_S \to G$ es una aplicación biyectiva que lleva la concatenación de representantes de las clases en el producto $\cdot$ en S_{30}.
- $i\colon G \to S_{30}$ es la inclusión, que es inyectiva y preserva la operación $\cdot$.

Como podemos observar, tenemos a $W/\sim_S$ en biyección con G, que es un grupo. Además, esta biyección lleva la concatenación en $W/\sim_S$ en el producto $\cdot$ de S_{30}, lo que hace a $W/\sim_S$ un grupo (isomorfo a G) con la operación interna que consiste en concatenar representantes de las clases. Podemos entonces identificar $W/\sim_S$ con el grupo del *Skewb*, y en adelante lo denotaremos por M.

Por otro lado, observamos que, si $\sim$ es la relación de equivalencia que da lugar al grupo libre, dos palabras equivalentes por $\sim$ también lo son por $\sim_S$, puesto que las secuencias de la forma AA' dejan al *Skewb* en el mismo estado en que estuviera. Por tanto, podemos definir las aplicaciones $\pi_F\colon W \to F_{E_f}$ y $\pi\colon F_{E_f} \to M$ de manera que $\pi_S = \pi \circ \pi_F$ y π es sobreyectiva y preserva la concatenación de palabras, por lo que es un homomorfismo de grupos. Por el primer teorema de isomorfía, tenemos además que $F_{E_f}/\ker\pi \simeq M \simeq G$. En adelante llamaremos N a $\ker\pi$. Es interesante observar que N es, por definición, el conjunto de secuencias de movimientos que dejan al *Skewb* invariante.

Con lo que hemos visto hasta ahora, tenemos el siguiente diagrama:

$$W \overset{\pi_F}{\twoheadrightarrow} F_{E_f} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M \xrightarrow{\overline{\alpha}} G \overset{i}{\hookrightarrow} S_{30}$$

Y tenemos tres maneras de ver los elementos del grupo del *Skewb*:

- Como secuencias de movimientos en F_{E_f}, considerando dos de ellas equivalentes si al aplicar una seguida de la inversa de la otra, no afectamos al *Skewb*.
- Como palabras de W, considerando dos de ellas equivalentes cuando tienen la misma imagen por α.
- Como permutaciones de S_{30}

Sin embargo, estas representaciones no aportan detalle acerca de la estructura de grupo del *Skewb*, por lo que tendremos que encontrar una manera más explícita de expresar cada estado del puzzle. Para ello, vamos a considerar el grupo $V := \mathbb{Z}_3^4 \times (\mathbb{Z}_3^4 \rtimes_\varphi A_4) \times A_6$, con $\varphi\colon A_4 \to Aut(\mathbb{Z}_3^4)$ dada por $\varphi_\sigma(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, a_{\sigma(4)})$. La operación en V queda como sigue:

$$(\mathbf{u_1}, \mathbf{v_1}, \sigma_1, \tau_1)(\mathbf{u_2}, \mathbf{v_2}, \sigma_2, \tau_2) = (\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}, \mathbf{v_1} + \varphi_{\sigma_1}(\mathbf{v_2}), \sigma_1 \cdot \sigma_2, \tau_1 \cdot \tau_2)$$

Antes de proseguir, vamos a justificar brevemente la elección de este producto, que a priori podría parecer totalmente arbitrario.

Este grupo es un producto directo de otros tres grupos, que se corresponden a los tres tipos de piezas distintas que tiene el *Skewb*:

- El primer $\mathbb{Z}_3^4$ recoge la información sobre la orientación de las 4 esquinas fijas.
- El factor $\mathbb{Z}_3^4 \rtimes A_4$ se corresponde con las esquinas móviles. Aquí recogemos tanto su orientación como su permutación. Notamos que escogemos A_4 puesto que cualquier giro en el *Skewb* realiza un 3-ciclo en las esquinas móviles, de modo que todas las permutaciones que podremos alcanzar son pares. El producto semidirecto aparece, como veremos, porque si hacemos dos secuencias de movimientos seguidas, después de la primera las esquinas móviles podrían no estar en su sitio, y de esta manera los cambios de orientación provocados por la segunda secuencia se aplican a las esquinas correctas.
- A_6 se corresponde con la permutación de los centros que, de nuevo, es siempre par porque cada giro produce un 3-ciclo de centros.

Más adelante veremos que el grupo del *Skewb* no es isomorfo a V completo, sino que es isomorfo a un subgrupo suyo.

En primer lugar, vamos a definir una aplicación $g\colon G \to V$ de la siguiente manera: dado un estado del *Skewb*, $s \in G$, necesitamos aportar la siguiente información:

- La orientación de las esquinas fijas (como está definida en la sección anterior), que colocaremos en orden alfabético (esto es, FLRU) en un vector $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}_3^4$.

- La orientación de las esquinas móviles, que colocaremos igualmente en orden alfabético (flru) en otro vector $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_3^4$.
- La permutación σ de las esquinas móviles, de manera que las esquinas estén numeradas de 1 a 4 en orden alfabético (f=1, l=2, r=3, u=4).
- La permutación τ de los centros, utilizando la numeración de la sección anterior.

Con esto, construimos $g(s) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \sigma, \tau)$.

Proposición 2.1. *g es un homomorfismo de grupos inyectivo.*

Prueba. En primer lugar, probaremos que g es un homomorfismo: supongamos que tenemos un estado del cubo $s_1 \in G$, le aplicamos uno de los generadores (por ejemplo $\overline{\alpha}(F)$) y obtenemos s_2. Supongamos también que:

$$g(s_1) = ((a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), \sigma, \tau)$$
$$g(s_2) = g(s_1 \cdot \overline{\alpha}(F)) = ((a'_1, a'_2, a'_3, a'_4), (b'_1, b'_2, b'_3, b'_4), \sigma', \tau')$$

y veamos detalladamente qué ocurre al realizar el movimiento F.

- Todas las esquinas fijas permanecen orientadas como estuvieran salvo F, que hemos girado en sentido horario. Por tanto, $a'_1 = a_1 + 1$ y $a'_i = a_i, i = 2, 3, 4$.
- Los centros que están en las posiciones 1, 3 y 2 se han movido en un 3-ciclo (en este mismo orden), de modo que $\tau' = \tau \cdot (132)$.
- Las esquinas móviles l, u, y r (que se corresponden con 2, 4 y 3 respectivamente en nuestra representación) se han movido en un 3-ciclo en ese mismo orden, así que $\sigma' = \sigma \cdot (243)$.
- La esquina móvil que estuviera en la posición de f gira en sentido horario respecto de las demás esquinas móviles. El resto de esquinas móviles permanece con la misma orientación que tenga antes de realizar F, puesto que el movimiento mantiene unidas a las otras tres esquinas. Por tanto, $b'_{\sigma^{-1}(1)} = b_{\sigma^{-1}(1)} + 1$ y $b'_i = b_i$ en otro caso.

Por otro lado, si calculamos directamente $g(s_1)g(\overline{\alpha}(F))$ en V ($g(\overline{\alpha}(F))$ se determina como explicamos antes) tenemos:

$$g(s_1)g(\overline{\alpha}(F)) = ((a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), \sigma, \tau)((1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (243), (132))$$
$$= ((a_1 + 1, a_2, a_3, a_4), (b'_1, b'_2, b'_3, b'_4), \sigma \cdot (243), \tau \cdot (132)) = g(s_2) = g(s_1 \cdot \overline{\alpha}(F))$$

Esta misma comprobación se puede hacer para el resto de generadores y sus inversos. Por inducción en el número de generadores de una secuencia (teniendo en cuenta que g envía el elemento neutro de G en el elemento neutro de V), esto demuestra que g preserva productos, es decir, que es un homomorfismo de grupos. Además, es claro que g es inyectivo porque si un estado del *Skewb* se envía al elemento neutro de V, ese estado tiene que ser el estado resuelto.

□

A partir de g, podemos definir una aplicación $f\colon F_{E_f} \to V$ simplemente como $f = g \circ \overline{\alpha} \circ \pi$. Notemos que gracias a la propiedad universal de los grupos libres, nos basta conocer las imágenes de los elementos de E_f para determinar la imagen por f de cualquier otro elemento de F_{E_f}. Esas imágenes son:

- $F \mapsto ((1,0,0,0),(1,0,0,0),(243),(132))$
- $L \mapsto ((0,1,0,0),(0,1,0,0),(134),(264))$
- $R \mapsto ((0,0,1,0),(0,0,1,0),(142),(356))$
- $U \mapsto ((0,0,0,1),(0,0,0,1),(123),(145))$

Proposición 2.2. $\ker f = N$

Prueba. Puesto que $f = g \circ \overline{\alpha} \circ \pi$ y tanto g como $\overline{\alpha}$ son inyectivas, $\ker f = \ker \pi = N$. □

Proposición 2.3. *G es isomorfo a $im(f)$.*

Prueba. Por el primer teorema de isomorfía, $F_{E_f}/\ker f \simeq im(f)$. Como $\ker f = N$, $im(f) \simeq F_{E_f}/\ker f \simeq F_{E_f}/N \simeq M \simeq G$ □

A continuación veremos exactamente cuál es la imagen de f. Para ello, necesitamos definir antes una aplicación especial.

A_4 tiene un subgrupo normal propio $K_4 = \{(),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$, que suele llamarse *grupo de Klein*. Al tomar el cociente de A_4 por K_4, obtenemos tres clases por la izquierda, que son:

- $K_4 = \{(),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$
- $(123)K_4 = \{(123),(134),(142),(243)\}$
- $(132)K_4 = \{(132),(143),(124),(234)\}$

El homomorfismo $\kappa\colon A_4/K_4 \to \mathbb{Z}_3$ determinado por $\kappa((123)K_4) = 1$ es un isomorfismo de grupos, y a partir de él podemos definir $\lambda\colon A_4 \to \mathbb{Z}_3$ como $\lambda(\sigma) = \kappa(\pi(\sigma))$, donde π es la proyección natural de A_4 en el cociente A_4/K_4. Con esta definición, podemos determinar $im(f)$.

Proposición 2.4.

$$im(f) = H := \left\{(\mathbf{u},\mathbf{v},\sigma,\tau) \middle| \sum_{i=1}^{4} u_i = \sum_{i=1}^{4} v_i = \lambda(\sigma)\right\} \subseteq \mathbb{Z}_3^4 \times (\mathbb{Z}_3^4 \rtimes A_4) \times A_6$$

Prueba. Por doble inclusión:

- $\subseteq$ Dada una secuencia $s \in F_{E_f}$, tenemos que demostrar que $f(s) \in H$. Lo haremos por inducción en la longitud de s.

  $k = 1$ Se comprueba que para los cuatro generadores y sus inversos se tiene la condición: si denotamos por $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \sigma, \tau)$ a las imágenes de los generadores, para todos se tiene que $\sum_{i=1}^4 u_i = \sum_{i=1}^4 v_i = \lambda(\sigma) = 1$ y para los inversos, $\sum_{i=1}^4 u_i = \sum_{i=1}^4 v_i = \lambda(\sigma) = 2$

  $k \implies k+1$ Sea $s = m_1 \dots m_{k+1} \in F_{E_f}$. Tenemos que $f(m_1 \dots m_k), f(m_{k+1}) \in H$ por hipótesis de inducción. Veamos que $f(s) \in H$. Llamemos $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \sigma, \tau) = f(m_1 \dots m_k)$ y $(\mathbf{u}', \mathbf{v}', \sigma', \tau') = f(m_{k+1})$. Entonces

  $$f(s) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \sigma, \tau)(\mathbf{u}', \mathbf{v}', \sigma', \tau') = (\mathbf{u} + \mathbf{u}', \mathbf{v} + \varphi_\sigma(\mathbf{v}'), \sigma \cdot \sigma', \tau \cdot \tau')$$

  Antes de continuar, notamos que las coordenadas de $\mathbf{v}'$ y las de $\varphi_\sigma(\mathbf{v}')$ tienen la misma suma, puesto que el segundo vector no es más que una reordenación del primero.

  Finalmente, tenemos:

  $$\sum_{i=1}^{4} (\mathbf{u} + \mathbf{u}')_i = \sum_{i=1}^{4} (u_i + u_i') = \sum_{i=1}^{4} u_i + \sum_{i=1}^{4} u_i'$$

  $$\sum_{i=1}^{4} (\mathbf{v} + \varphi_\sigma(\mathbf{v}'))_i = \sum_{i=1}^{4} (v_i + v'_{\sigma(i)}) = \sum_{i=1}^{4} v_i + \sum_{i=1}^{4} v'_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{4} v_i + \sum_{i=1}^{4} v_i'$$

  $$\lambda(\sigma \cdot \sigma') = \lambda(\sigma) + \lambda(\sigma')$$

  Por la hipótesis de inducción, estos tres números son iguales, de modo que $f(s) \in H$.

- $\supseteq$ Dado un elemento $h \in H$, tenemos que encontrar una secuencia de movimientos cuya imagen sea h. Esto es equivalente a encontrar una secuencia de movimientos $s \in F_{E_f}$ que lleve h a la posición trivial $e_V = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, (), ())$, puesto que si tenemos tal secuencia $s = s_1 \dots s_k$, se obtiene fácilmente una preimagen de h:

  $$hf(s) = e_V \implies h = f(s)^{-1} = f(s^{-1}) = f(s_k^{-1} \dots s_1^{-1})$$

  Por ahora vamos a omitir esto, puesto que en la siguiente sección daremos un método de resolución, con lo cual tendremos esta inclusión.

□

Con estos resultados, ya podemos deducir algunas propiedades interesantes del Skewb, como por ejemplo:

- No se pueden intercambiar únicamente dos centros.
- Existen secuencias de movimientos que intercambian tres centros.
- No se pueden intercambiar únicamente dos esquinas móviles.

- No se puede realizar un 3-ciclo en las esquinas móviles sin cambiar la orientación de una esquina fija.

Intuitivamente, el resultado anterior nos dice que para describir G, nos "sobra" una copia de $\mathbb{Z}$ en cada uno de los factores de V relativos a los tipos de esquinas, puesto que conociendo la permutación de las esquinas móviles y la orientación de tres de las esquinas de un tipo dado, podemos determinar sin ambigüedad la orientación de la cuarta esquina de su tipo.

Aprovechando las restricciones que conocemos sobre V, podemos obtener un grupo isomorfo a G. En el siguiente resultado seguiremos usando $\cdot$ como operación interna en A_4 y A_6

Teorema 2.5. *G es isomorfo a $U := \mathbb{Z}_3^3 \times (\mathbb{Z}_3^3 \rtimes_{\varphi'} A_4) \times A_6$ con $\varphi' \colon A_4 \to Aut(\mathbb{Z}_3^3)$ dado por*

$$\varphi'_\sigma(a_1, a_2, a_3) = \delta_4(\varphi_\sigma(a_1, a_2, a_3, -\sum_{i=1}^{3} a_i))$$

donde $\delta_4(b_1, b_2, b_3, b_4) = (b_1, b_2, b_3)$ y φ es la misma que la definida para V.

Prueba. Como ya hemos visto que G es isomorfo a $H = im(f)$, vamos a determinar un isomorfismo $\psi \colon U \to H$, que definiremos de la siguiente manera:

$$\psi((u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3), \sigma, \tau) =$$
$$\left((u_1, u_2, u_3, \lambda(\sigma) - \sum_{i=1}^{3} u_i), (v_1, v_2, v_3, -\sum_{i=1}^{3} v_i) + (\lambda(\sigma), \lambda(\sigma), \lambda(\sigma), \lambda(\sigma)), \sigma, \tau\right)$$

Tenemos que comprobar que esta aplicación está bien definida, que es un homomorfismo, que es inyectiva y que es sobreyectiva.

Para ver que está bien definida, basta observar que la imagen de cualquier elemento cumple las restricciones de H, puesto que las componentes de los dos vectores suman $\lambda(\sigma)$ por construcción.

Veamos que ψ es sobreyectiva. Sea $s = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \sigma, \tau) \in H$. Es fácil comprobar que

$$((u_1, u_2, u_3), (v_1 - \lambda(\sigma), v_2 - \lambda(\sigma), v_3 - \lambda(\sigma)), \sigma, \tau) \in U$$

es una preimagen de s.

Veamos ahora que ψ es un homomorfismo. Sean $t_1 = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \sigma, \tau), t_2 = (\mathbf{u}', \mathbf{v}', \sigma', \tau')$, $t_1, t_2 \in U$. Se tiene:

$$\psi(t_1 t_2) = \psi(\mathbf{u} + \mathbf{u}', \mathbf{v} + \varphi'_\sigma(\mathbf{v}'), \sigma \cdot \sigma', \tau \cdot \tau') = ((a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), \sigma \cdot \sigma', \tau \cdot \tau')$$

donde

$$\begin{aligned}
a_1 &= u_1 + u_1' \\
a_2 &= u_2 + u_2' \\
a_3 &= u_3 + u_3' \\
a_4 &= \lambda(\sigma \cdot \sigma') - \sum_{i=1}^{3} (u_i + u_i') \\
b_1 &= v_1 + v'_{\sigma(1)} + \lambda(\sigma \cdot \sigma') \\
b_2 &= v_2 + v'_{\sigma(2)} + \lambda(\sigma \cdot \sigma') \\
b_3 &= v_3 + v'_{\sigma(3)} + \lambda(\sigma \cdot \sigma') \\
b_4 &= -\sum_{i=1}^{3} (v_i + v'_{\sigma(i)}) + \lambda(\sigma \cdot \sigma')
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la definición del producto en V, el hecho de que $\lambda(\sigma \cdot \sigma') = \lambda(\sigma) + \lambda(\sigma')$, y reorganizando las sumas convenientemente, se llega a que $\psi(t_1 t_2) = \psi(t_1)\psi(t_2)$, por lo que ψ es, en efecto, un homomorfismo. Finalmente, veamos que es inyectivo. Supongamos que $s = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \sigma, \tau)$ y que $\psi(s) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, (), ())$. Entonces, $\sigma = ()$ y $\tau = ()$. Con esto, $\lambda(\sigma) = 0$ y de ahí se tiene que $\mathbf{u} = \mathbf{v} = 0$. Como $\ker \psi = \{e_U\}$, ψ es inyectiva y por tanto un isomorfismo entre U y H. Finalmente, G y U son isomorfos mediante $\psi^{-1} \circ g$. □

Nota. A priori, se podría pensar que para pasar de V a U bastaría con eliminar una de las componentes de cada vector. Sin embargo, esto no resulta en una estructura de producto semidirecto de una manera clara. Para poder definir este isomorfismo nos hemos inspirado en la forma de determinar las orientaciones de las esquinas móviles que se utiliza en [3, Sección 1], con la que eliminar una componente de cada vector sí da un isomorfismo natural. El isomorfismo ψ no es más que una "traducción" entre ambas formas de determinar la orientación de las esquinas.

Este resultado nos permite finalmente calcular el orden de G:

Corolario 2.6. $|G| = 3^3 \cdot 3^3 \cdot \frac{4!}{2} \cdot \frac{6!}{2} = 3149280$

Como curiosidad, veamos cuál sería el número de estados del *Skewb* si tuviéramos la libertad de desmontarlo, esquinas fijas incluidas.

Puesto que el Skewb tiene 8 esquinas que podríamos permutar como quisiéramos y podrían estar en 3 orientaciones cada una, y 6 centros, que podríamos ordenar en cualquier permutación, la cantidad de posiciones posibles sería $\frac{1}{24} 3^8 \cdot 8! \cdot 6! = 7936185600$. Esto significa que la probabilidad de obtener un *Skewb* que se pueda resolver mediante movimientos válidos tras haberlo montado al azar es $3149280/7936185600 = 1/2520 = 0.000396\ldots$

Capítulo 3

Métodos de resolución

Para terminar la demostración de la proposición 2.4, debemos dar un método de resolución que lleve cualquier elemento de G (visto como su representación en V para mayor claridad) al estado resuelto. En este capítulo presentaremos tres métodos de resolución, el primero de los cuales está basado directamente en la estructura de grupo que ya hemos estudiado. Este método servirá, por tanto, como parte de la demostración de 2.4 y como tutorial para el lector interesado.

3.1 Método basado en la estructura de grupo

Supongamos que se nos da un *Skewb* que ha sido mezclado realizando movimientos a partir del estado resuelto. Este *Skewb* estará en una posición válida, y por tanto, si vemos la imagen de dicho estado por el homomorfismo g que vimos en la sección anterior, deberemos tener un elemento $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \sigma, \tau) \in V$ con $\sum_{i=1}^{4} u_i = \sum_{i=1}^{4} v_i = \lambda(\sigma)$. Nuestro objetivo es llevar esto hasta el elemento neutro $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, (), ()) \in V$, y lo vamos a hacer componente a componente. Por tanto, nuestro método tendrá cuatro pasos, que realizaremos en el siguiente orden:

1. Orientación de las esquinas fijas.
2. Permutación de las esquinas móviles.
3. Orientación de las esquinas móviles.
4. Permutación de los centros.

Antes de comenzar con la explicación del método, vamos a recordar las imágenes de los generadores y sus inversos por el homomorfismo g

$$
\begin{array}{ll}
F \mapsto ((1,0,0,0),(1,0,0,0),(243),(132)) & F' \mapsto ((2,0,0,0),(2,0,0,0),(234),(123)) \\
L \mapsto ((0,1,0,0),(0,1,0,0),(134),(264)) & L' \mapsto ((0,2,0,0),(0,2,0,0),(143),(246)) \\
R \mapsto ((0,0,1,0),(0,0,1,0),(142),(356)) & R' \mapsto ((0,0,2,0),(0,0,2,0),(124),(365)) \\
U \mapsto ((0,0,0,1),(0,0,0,1),(123),(145)) & U' \mapsto ((0,0,0,2),(0,0,0,2),(132),(154))
\end{array}
$$

3.1.1 Orientación de las esquinas fijas

Dada nuestra posición inicial $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \sigma, \tau)$, vamos a observar detenidamente el vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{Z}_3^4$. Vemos que para cada $u_i \neq 0$ hay exactamente un movimiento cuya primera componente es un vector que tiene $-u_i$ en la posición i y 0 en todas las demás. Por tanto, si aplicamos tales movimientos para cada $u_i \neq 0$, habremos transformado nuestra posición $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \sigma, \tau)$ en otra posición $(\mathbf{0}, \mathbf{v}', \sigma', \tau')$ (las componentes no nulas pueden cambiar dependiendo del orden en que elijamos orientar las esquinas).

Este paso, además de orientar las esquinas fijas, reduce significativamente las posibilidades del resto de componentes relacionadas con las esquinas dadas las restricciones que conocemos en H: podemos asegurar que $\sum_{i=1}^{4} v_i' = 0$ y que $\sigma' \in K_4$.

Desde el punto de vista de la estructura de grupos, el conjunto de las posiciones posibles tras este paso es un grupo isomorfo a $(\mathbb{Z}_3^3 \rtimes K_4) \times A_6$. Tras cada paso vamos a determinar el grupo al que es isomorfo el nuevo conjunto de posiciones posibles. No vamos a entrar en detalle en estas afirmaciones, pero si quisiéramos demostrarlas, se haría de manera similar a lo demostrado en el teorema 2.5.

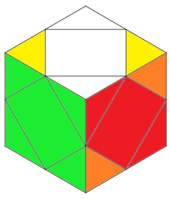
3.1.2 Permutación de las esquinas móviles

Para llevar las esquinas móviles a su lugar, en primer lugar notamos que, puesto que $\sigma' \in K_4$, la permutación será trivial o constará de dos trasposiciones disjuntas. Si encontramos una secuencia de movimientos que realice una permutación de este tipo, dada la simetría del *Skewb*, podremos usar esta misma secuencia para resolver cualquier otra permutación de K_4 tras una rotación adecuada del *Skewb*.

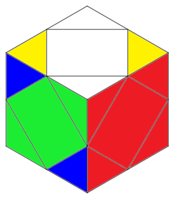
Observemos el conmutador $[R, L] = RLR'L'$. Su imagen por f es $(\mathbf{0}, (2,2,1,1), (12)(34), (256))$. Es fácil ver entonces que si aplicamos el conmutador tres veces consecutivas, obtenemos $[R, L]^3 = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, (12)(34), ())$.

De manera similar, se comprueba que dada cualquier permutación $\sigma' \in K_4$, podemos encontrar un par de movimientos cuyo conmutador realizado tres veces se corresponda con $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \sigma', ())$. Puesto que solo hay tres permutaciones no triviales en K_4, vamos a dar la lista completa de las secuencias necesarias para completar este paso.

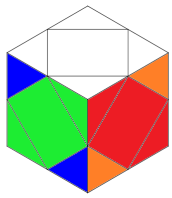
- $\sigma' = (12)(34) \longrightarrow [R, L]^3 \mapsto (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \sigma', ())$
- $\sigma' = (13)(24) \longrightarrow [R, U]^3 \mapsto (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \sigma', ())$
- $\sigma' = (14)(23) \longrightarrow [L, U]^3 \mapsto (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \sigma', ())$



$[R, L]^3$



$[R, U]^3$

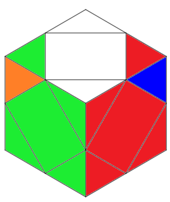


$[L, U]^3$

Una vez realizada la secuencia de movimientos correspondiente a σ', nos quedará la posición $(\mathbf{0}, \mathbf{v}', (), \tau')$. Esto reduce el grupo de posiciones posibles a $\mathbb{Z}_3^3 \times A_6$. Observemos que como esto ya es un producto directo, podemos completar los dos últimos pasos en el orden que queramos.

3.1.3 Orientación de las esquinas móviles

Para resolver la orientación de las esquinas móviles, vamos a hacer uso de la secuencia de movimientos $RL'R'FU'R'URF'L$, que se corresponde con el elemento $((0, 0, 0, 0), (0, 1, 2, 0), (), ()) \in H$. Por tanto, esta secuencia gira las esquinas l y r en sentidos opuestos. Dado nuestro $\mathbf{v}' \in \mathbb{Z}_3^4$, del que ya podemos asegurar que $\sum_{i=1}^4 v_i = 0$, seguiremos el siguiente algoritmo para llevar $\mathbf{v}'$ hasta el vector nulo aplicando la secuencia de movimientos anterior, a la que llamaremos S.



$RL'R'FU'R'URF'L$

3.0 Si $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$, hemos terminado y podemos pasar directamente al paso de permutación de centros. En caso contrario, proceder al paso 3.1

3.1 Si $\mathbf{v}'$ tiene todas las coordenadas no nulas iguales, rotar el *Skewb* de manera que dos de las esquinas correspondientes a dichas coordenadas estén en las posiciones de l y r, aplicar S, llamar $\mathbf{v}'$ a la nueva orientación de esquinas y pasar a 3.2. En caso contrario, pasar directamente a 3.2.

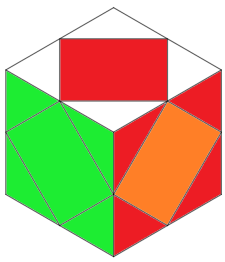
3.2 Identificar un par de coordenadas no nulas distintas en $\mathbf{v}'$, que forzosamente serán 1 y 2. Rotar el *Skewb* de manera que estas esquinas con orientaciones 1 y 2 estén en las posiciones de r y l respectivamente y aplicar S. Llamar $\mathbf{v}'$ a la nueva orientación de esquinas y volver a 3.0.

Este algoritmo termina siempre tras a lo más dos aplicaciones de la secuencia S, y nos lleva de la posición $(\mathbf{0}, \mathbf{v}', (), \tau')$ a $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, (), \tau')$, con lo que el conjunto de posiciones posibles queda reducido a A_6.

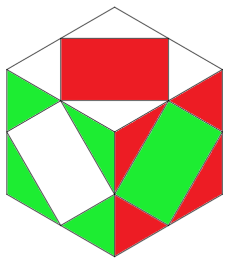
3.1.4 Permutación de centros

Es conocido que A_6 está generado por todos sus 3-ciclos. Por tanto, basta saber realizar todos los 3-ciclos de centros para terminar la resolución. Para ello, vamos a introducir una secuencia de movimientos nueva, $[F, R]\,[L, U]$, que llamaremos P y que se corresponde con el elemento $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, (), (134)) \in H$, por lo que esta secuencia realiza un 3-ciclo de centros en el *Skewb* donde dos de ellos pertenecen a caras opuestas. Además, conjugando esta secuencia por L' obtenemos $L' : P$, que corresponde al elemento $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, (), (132)) \in H$, un 3-ciclo de centros distinto, donde los tres centros están alrededor de una esquina.

Con estas dos secuencias podemos realizar cualquier permutación par de centros, ya que el soporte de cualquier 3-ciclo de centros o bien contiene dos centros de caras opuestas o no, en cuyo caso necesariamente estarán los tres centros alrededor de una misma esquina. En el primer caso, podemos permutar los centros con la secuencia P o su inversa tras una rotación adecuada. En el segundo caso, podemos resolver los centros con $L' : P$ o con su inversa, dependiendo del sentido de rotación de los centros.



3-ciclo con centros opuestos (rojo y naranja)



3-ciclo sin centros opuestos

Para terminar la demostración de la proposición 2.4, daremos un algoritmo para, dada la posición $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, (), \tau') \in H$, terminar de resolver el *Skewb*.

4.0 Si $\tau' = ()$, el *Skewb* está resuelto y hemos terminado. En caso contrario, proceder a 4.1.

4.1 Encontrar $i \in sop(\tau')$ y realizar el 3-ciclo $(\tau'(i)\ i\ k)$ donde $k \in sop(\tau') \setminus \{i, \tau'(i)\}$. Llamar τ' a la permutación de centros resultante y volver a 4.0.

El algoritmo está bien definido porque si τ es no trivial, $sop(\tau')$ tiene al menos tres elementos porque se trata de una permutación par.

El algoritmo termina porque en cada paso estamos resolviendo al menos un centro, y en el momento en que quedan tres centros por resolver, la única posibilidad es realizar exactamente el 3-ciclo que los resuelve a los tres.

3.2 Métodos de velocidad

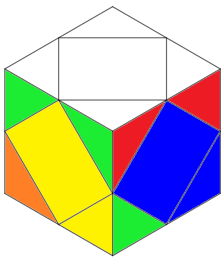
El método que acabamos de presentar, a pesar de ser simple e intuitivo una vez conocida en detalle la estructura del grupo del *Skewb*, no es el método más indicado si nuestro objetivo es resolver el *Skewb* en el menor tiempo posible.

Si queremos métodos más apropiados para este fin, lo mejor que podemos hacer es recurrir a la comunidad de los *speedcubers*, que son personas que se dedican a resolver puzzles de tipo Rubik (incluyendo el *Skewb*) en el menor tiempo posible.

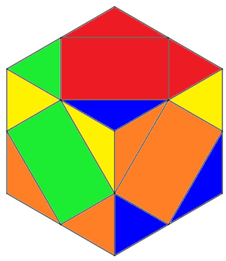
En esta sección vamos a hablar sobre dos de los métodos más populares que usan los *speedcubers* para resolver el *Skewb*: el método **Sarah**, nombrado por su creadora, la canadiense Sarah Strong [4], y el método **NS**, desarrollado por un conjunto de *speedcubers* de todo el mundo, entre ellos el navarro Julio Perugorria, del que el autor ha aprendido gran parte de lo que sabe sobre el *Skewb*.

3.2.1 Método de Sarah

El primer paso en ambos métodos es igual, de modo que solo lo explicaremos una vez. Ambos métodos comienzan la solución resolviendo una "cara", que consiste en elegir un centro y resolver las cuatro esquinas que lo rodean, como se ve en la figura.



Vista frontal



Vista trasera

Ejemplo de un Skewb con una cara resuelta

Este paso hace que todas las esquinas estén ya bien permutadas y orienta dos esquinas de cada tipo. Como además hemos resuelto un centro, hemos reducido el conjunto de posiciones posibles a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times A_5$, lo cual supone que hay 540 posiciones distintas a partir de este punto. Teniendo en cuenta que esto cuenta como distintas posiciones que son iguales salvo una rotación, obtenemos que hay 135 casos esencialmente distintos, que en el método de Sarah se resuelven aplicando repetidamente las secuencias $S = L'ULF'$ y su inversa (S'), posiblemente con rotaciones entre cada aplicación. Dependiendo de la cantidad de pasos que se den para resolver el *Skewb* una vez resuelta la cara, podemos hablar de tres variantes del método:

1. Sarah principiantes: esta variante resuelve el *Skewb* en tres pasos, que son:
   (a) Orientar las esquinas. (3 casos)
   (b) Resolver el centro opuesto al de la cara resuelta. (2 casos)
   (c) Resolver los cuatro centros restantes. (4 casos)
2. Sarah intermedio: esta variante resuelve el *Skewb* en dos pasos:
   (a) Orientar las esquinas y resolver el centro opuesto al de la cara resuelta. (11 casos)
   (b) Resolver los cuatro centros restantes. (4 casos)
3. Sarah avanzado: Tras resolver la cara, se aplica la secuencia más corta de S, S' y rotaciones que resuelve el *Skewb* (135 casos)

3.2.2 Método NS

El primer paso del método NS es, de nuevo, resolver una cara del *Skewb*. El segundo y último paso consiste en reconocer la posición del puzzle y aplicar una de 135 secuencias [5] de movimientos que lo resuelve directamente.

La diferencia entre el método NS y la versión avanzada del método de Sarah es que las secuencias de movimientos que se usan en NS no están necesariamente compuestas de S y S' y rotaciones, sino que son secuencias normalmente más cortas. Esto hace que el método sea considerablemente más rápido, pero tiene la desventaja de que requiere una gran cantidad de memorización y práctica por parte de alguien que lo quiera aprender en su totalidad. Es por esto que la mayoría de *speedcubers* que se centran en el *Skewb* utilizan una especie de híbrido entre Sarah avanzado y NS.

Podríamos preguntarnos cuál sería el método más eficiente para resolver el *Skewb*. Este sería un método que, dada cualquier posición válida, la resolvería en el mínimo número de movimientos posible.

Esto da pie a su vez a preguntarse cuál es el número de movimientos necesario para resolver cualquier posición. Este número cambia dependiendo del puzzle que estemos tratando, y se suele llamar *número de Dios* de dicho puzzle. Un hipotético método que devolviera soluciones óptimas para todos los estados se llama *método de Dios*.

En el caso del *Skewb*, el número de posiciones es lo suficientemente pequeño como para que haya programas de ordenador capaces de devolver una solución óptima para cualquier estado válido. Gracias a estos programas, sabemos que el número de Dios del *Skewb* es 11 [6], lo cual significa que cualquier posición válida se puede resolver en 11 movimientos o menos.

Bibliografía

[1] Robinson, D.J.S. *An Introduction to Abstract Algebra*, Walter De Gruyter, 2003
https://p4mriunpat.files.wordpress.com/2011/10/derek-j-s-robinson-an-introduction-to-abstract-algebra.pdf

[2] Rotman, J.J., *An Introduction to the Theory of Groups*, Springer, 4ª edición, 1999

[3] Jürgen Voigt *The Skewb Group.* Technische Universität Dresden, 2013
http://www.math.tu-dresden.de/~voigt/vopubl/vopu_n/skewb-04.pdf

[4] Método de Sarah: https://sarah.cubing.net/skewb/my-method

[5] Método NS: Jhon Taboada, Rohan Krishna, Jayden McNeill
https://drive.google.com/file/d/0B040UViKV9ljVTZFakQwMFhlWUU/view

[6] Jaap Scherpuis https://www.jaapsch.net/puzzles/skewb.htm