



Facultad de Matemáticas

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

Trabajo Fin de Grado

**Problemas de Elasticidad Lineal:
Resultados Teóricos Y Numéricos
Aplicaciones**

Dirigido por:

Enrique Fernández Cara

Fdo: **Miguel Ángel Jiménez Jiménez**

English Abstract

Solid mechanics studies the physical behavior of solids in general, establishing within it a distinction between rigid solids and deformable solids. Our study is included within the latter, but since it is a fairly extensive field we will impose some additional hypotheses, with which we manage to narrow the study and also facilitate the mathematical approach to the problem.

We will assume that when our deformable solid is subjected to external forces, these will give rise to small displacements and small deformations, also having an elastic and linear behavior. In these specific circumstances we will find our object of study, the linear elasticity problems.

In order to study these problems, we will resort to continuous media mechanics, with which a mathematical model is created whose geometric points are identified with the material particles of the body that we intend to study.

The model that we will use in the theory of elasticity is continuous, elastic and is endowed with properties of homogeneity and isotropy. In the development of this work the implication that these properties have will be shown.

As a previous step we will need to familiarize ourselves with the concepts of strain tensor, internal stress tensor, elastic constant tensor and finally we will see the relationship that exists between them.

Introducción

La mecánica de sólidos estudia el comportamiento físico de los sólidos en general, estableciéndose dentro de ella una distinción entre sólidos rígidos y sólidos deformables. Nuestro estudio se engloba dentro de estos últimos, pero dado que es un campo bastante extenso impondremos algunas hipótesis adicionales, con las cuales conseguimos acotar el estudio y además facilitamos el planteamiento matemático del problema.

Supondremos que cuando nuestro sólido deformable se vea sometido a fuerzas externas, éstas darán lugar a pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones, teniendo además un comportamiento elástico y lineal. En estas circunstancias concretas nos encontraremos con nuestro objeto de estudio, los problemas de elasticidad lineal.

Para poder estudiar estos problemas recurriremos a la mecánica de medios continuos, con la cual se crea un modelo matemático cuyos puntos geométricos se identifican con las partículas materiales del cuerpo que se pretende estudiar.

El modelo que utilizaremos en la teoría de la elasticidad es continuo, elástico y está dotado de propiedades de homogeneidad e isotropía. En el desarrollo de este trabajo se mostrará la implicación que tienen estas propiedades.

Como paso previo necesitaremos familiarizarnos con los conceptos de tensor de deformación, tensor de tensiones internas, tensor de constantes elásticas y finalmente veremos la relación que existe entre ellos.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Elasticidad Lineal | 9 |
| 1.1. Tensor de tensiones | 9 |
| 1.2. Tensor de deformaciones | 11 |
| 1.3. Ley de Hooke generalizada | 13 |
| 1.3.1. Caso Particular: Isotropía - Coeficientes de Lamé | 14 |
| 1.4. EDPs de elasticidad lineal | 16 |
| 1.4.1. Formulación clásica | 16 |
| 1.4.2. Formulación variacional | 19 |
| 2. Existencia y unicidad de solución | 23 |
| 2.1. Problema estacionario | 24 |
| 2.2. Problema de evolución | 27 |
| 3. Aproximación de la solución. | |
| Métodos de elementos finitos. | 31 |
| 3.1. MEFs para el sistema estacionario de Lamé | 32 |
| 3.1.1. Elementos finitos de Lagrange | 36 |
| 3.2. Aproximación en espacio y en tiempo del problema de evolución (8) | 42 |
| 3.3. Algunos resultados de convergencia | 45 |
| 3.3.1. Problema estacionario discretizado | 45 |

ÍNDICE GENERAL

| | |
|--|-----------|
| 3.3.2. Problema de evolución discretizado | 47 |
| 4. Aplicaciones | 49 |
| 4.1. Experiencia numérica. Tubería a presión | 50 |
| 4.2. Experiencia numérica. Plataforma | 52 |
| 4.3. Experiencia numérica. Presa de gravedad | 54 |
| Bibliografía | 57 |

1 | Elasticidad Lineal

En este primer capítulo, describiremos el fenómeno de elasticidad lineal de forma general, para posteriormente centrarnos en el caso concreto del sistema de Lamé. Comenzaremos definiendo algunos conceptos, que serán fundamentales en el desarrollo del capítulo, como son los tensores de tensión interna, de deformación y de constantes elásticas. Así, de forma natural, llegaremos a la Ley de Hooke Generalizada, que será el paso previo necesario a la formulación clásica de las EDPs de elasticidad lineal. El lector que desee una mayor profundización en los conceptos que tratamos en el capítulo, puede consultar [10, 4, 5], donde se estudia de forma más extensa.

1.1 Tensor de tensiones

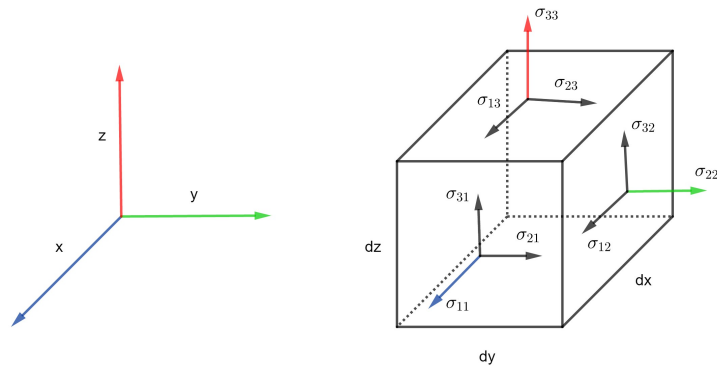
Definición 1.1. *El tensor de tensiones es una representación matemática en forma de matriz del estado tensional al que se encuentra sometido un punto de un sólido, estará asociado a un sistema de referencia ortogonal definido en dicho punto.*

Definición 1.2. *Se denomina estado tensional a la distribución de tensiones existentes en las caras de un elemento cúbico infinitesimal situado en dicho punto.*

Empezaremos considerando un sistema de referencia cartesiano ortogonal y consideramos un cubo infinitesimal con aristas \mathbf{dx} \mathbf{dy} \mathbf{dz} , que contiene a un punto \mathbf{P} interior del material objeto de estudio.

Sobre cada una de sus caras existe un vector tensión cuyas componentes intrínsecas normales tendrán las direcciones de los ejes coordenados respectivamente. Por otra parte las componentes tangenciales podrán descomponerse en las direcciones de los ejes paralelos a la cara que se considere.

1. Elasticidad Lineal



Tensiones normales: σ_{ij} con $i = j$ $i, j = 1, 2, 3$

Tensiones tangenciales: σ_{ij} con $i \neq j$ $i, j = 1, 2, 3$

Este cubo se encuentra en equilibrio estático y equilibrio elástico, que se traduce en dos condiciones fundamentales:

1.- La suma de todas las fuerzas que actúan sobre el sólido es igual a cero, es decir, la resultante es nula.

2.- El momento resultante de todas las fuerzas respecto de cualquier punto es igual a cero.

A partir de la condición (1) se deduce que la fuerza sobre dos caras opuestas son iguales y de signo contrario, por tanto las tensiones también, dado que las áreas de las caras opuestas son iguales.

Con la condición (2) y descomponiendo el momento resultante:

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

siendo $\vec{i} \vec{j} \vec{k}$ los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^3 , tenemos:

$$M_x = 0 : \quad \sigma_{yz} dx dy dz - \sigma_{zy} dx dy dz = 0$$

$$M_y = 0 : \quad \sigma_{zx} dx dy dz - \sigma_{xz} dx dy dz = 0$$

$$M_z = 0 : \quad \sigma_{xy} dx dy dz - \sigma_{yx} dx dy dz = 0$$

Por tanto:

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz} \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

Se observa que de los 18 valores desconocidos que teníamos inicialmente, tres por cada cara del cubo infinitesimal, sólo hay seis valores independientes, pudiéndose calcular el resto a partir de ellos.

Podemos entonces escribir la matriz del tensor simétrico de orden dos de tensiones como sigue:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

1.2 Tensor de deformaciones

Definición 1.3. *Cuando actúan fuerzas externas sobre un sólido elástico, las posiciones relativas de las partículas que lo componen varían. Este efecto recibe el nombre de deformación.*

Definición 1.4. *El tensor de deformaciones es una representación matemática en forma de matriz del estado de deformación al que se encuentra sometido un punto de un cuerpo, estará asociado a un sistema de referencia ortogonal definido en dicho punto.*

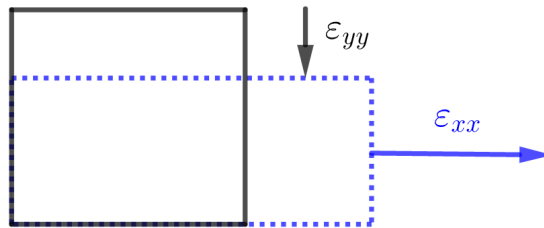
Nuestro objetivo será estudiar las deformaciones en un medio continuo elástico, pero reduciéndolo a los casos de pequeñas deformaciones. Si las deformaciones superan cierto tamaño crítico, véase [8], no estaríamos en condiciones de elasticidad.

Los desplazamientos de los puntos del sólido elástico que se produzcan en función del tiempo estarán representados por:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_x(\mathbf{x}, t), u_y(\mathbf{x}, t), u_z(\mathbf{x}, t)) \quad \text{con} \quad \mathbf{x} = (x, y, z)$$

Empezaremos distinguiendo dos tipos de deformaciones que pueden tener lugar en un elemento infinitesimal:

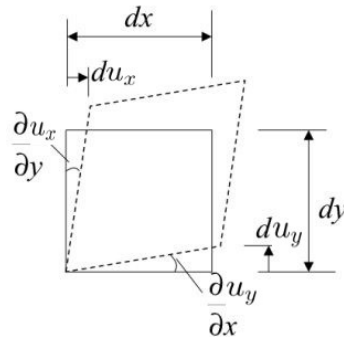
Deformación longitudinal unitaria: es aquella que se produce en las direcciones de los ejes coordenados.



Cuyas componentes asociadas a la matriz del tensor de deformaciones son los elementos de la diagonal:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Deformación transversal unitaria: representa la variación angular experimentada en cada plano por un ángulo inicialmente recto de lados paralelos a dos cualesquiera de los ejes coordenados.



Teniendo en cuenta que son desplazamientos muy pequeños los que tienen lugar, se puede deducir que la expresión de la componente correspondiente del tensor será tal que:

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

Análogamente obtendríamos las expresiones:

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)$$

Teniendo en cuenta que el tensor de deformaciones es simétrico tenemos:

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} \quad \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} \quad \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy}$$

Por tanto, ya tendríamos todas las componentes de la expresión matricial del tensor de orden dos de deformaciones, quedando de la siguiente forma:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Sería lógico plantearnos que teniendo un material elástico pudiese existir alguna relación entre el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones. Esta cuestión será abordada en la siguiente sección.

1.3 Ley de Hooke generalizada

Dado que deformación y tensión son causa y efecto es de esperar que las componentes del tensor de deformaciones y las componentes del tensor de tensiones estén relacionados entre sí.

Si suponemos que la relación entre ambos tensores es lineal, tenemos la ley de Hooke generalizada:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^N \mathbb{T}_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Siendo:

\mathbb{T}_{ijkl} los elementos del tensor de cuarto orden de constantes elásticas.

σ_{ij} los elementos del tensor de segundo orden de tensiones.

ϵ_{kl} los elementos del tensor de segundo orden de deformaciones.

La expresión anterior determina la ecuación constitutiva para un material elástico lineal.

El tensor \mathbb{T} tiene 81 componentes, sin embargo debido a que los tensores σ y ϵ son simétricos, \mathbb{T} presentará las siguientes simetrías:

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{T}_{ijkl} &= \mathbb{T}_{jikl} \\ \mathbb{T}_{ijkl} &= \mathbb{T}_{ijlk} \end{aligned} \right\} \text{Simetrías mayores}$$
$$\left. \begin{aligned} \mathbb{T}_{ijkl} &= \mathbb{T}_{klij} \end{aligned} \right\} \text{Simetrías menores}$$

Teniendo en cuenta estas simetrías, las constantes distintas en \mathbb{T} se reducen a 21.

Si sometemos nuestro sólido elástico a fuerzas externas, la deformación y la tensión creada en él dependerá de la estructura interna del material, por lo que materiales distintos tendrán valores distintos en las constantes de \mathbb{T} . Surgiendo por tanto la necesidad de conocer dichas constantes.

Para obtener la relación entre deformación y tensión de un material concreto tendremos que hacerlo por vía experimental en un laboratorio. De esta forma conoceremos las constantes \mathbb{T}_{ijkl} .

1.3.1 Caso Particular: Isotropía - Coeficientes de Lamé

Definición 1.5. *Se denomina material isótropo a aquel que tiene las mismas propiedades en todas las direcciones.*

Dado que cuando tenemos un material elástico lineal las propiedades elásticas están contenidas en el tensor \mathbb{T} , pasaremos a ver la implicación que tiene sobre él el caso particular que surge de considerar que nuestro material sea isótropo.

La isotropía del material tendrá como consecuencia que las componentes del tensor de constantes elásticas \mathbb{T} deberán tomar siempre los mismos valores, con independencia del cambio de base que se realice.

Definición 1.6. *Los tensores que verifican la propiedad anteriormente mencionada se denominan tensores isotrópicos.*

Pasamos a ver algunas de las propiedades de los tensores de cuarto orden isotrópicos:

- 1.- El producto de un escalar por un tensor isotrópico da lugar a otro tensor isotrópico.
- 2.- La suma de tensores isotrópicos será un tensor isotrópico.
- 3.- Un tensor isotrópico de orden cuatro se puede definir mediante el producto de dos tensores de orden dos isotrópicos.

Sean $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{D}$ tensores de cuarto orden isotrópicos distintos. Teniendo en cuenta las propiedades 1 y 2, es posible descomponer nuestro tensor de constantes elásticas como sigue:

$$\mathbb{T} = \lambda \mathbb{A} + \mu \mathbb{B} + \mu \mathbb{D} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Ahora, teniendo en cuenta la propiedad 3, que los tensores $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{D}$ son distintos entre sí y que el único tensor de orden dos isotrópico es el tensor "delta de Kronecker", se deduce fácilmente que

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{ijkl} &= \delta_{ij} \delta_{kl} \\ \mathbb{B}_{ijkl} &= \delta_{ik} \delta_{jl} \\ \mathbb{D}_{ijkl} &= \delta_{il} \delta_{jk} \end{aligned}$$

Finalmente, el tensor puede expresarse en la forma:

$$\mathbb{T}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$$

Veamos entonces la ley de Hooke generalizada para un material isótropo.

Partiendo de

$$\sigma_{ij} = \mathbb{T}_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

y sustituyendo el tensor \mathbb{T} por las expresión anterior, se tiene que

$$\sigma_{ij} = (\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk}) \epsilon_{kl} .$$

Teniendo en cuenta que:

$$(\lambda \delta_{ij} \delta_{kl}) \epsilon_{kl} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk}$$

$$(\mu \delta_{ik} \delta_{jl}) \epsilon_{kl} = \mu \delta_{ik} \epsilon_{jk} = \mu \epsilon_{ij}$$

$$(\mu \delta_{il} \delta_{jk}) \epsilon_{kl} = \mu \delta_{il} \epsilon_{jl} = \mu \epsilon_{ij}$$

obtenemos finalmente:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \left(\sum_{k=1}^3 \epsilon_{kk} \right) + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (2)$$

1. Elasticidad Lineal

Se observa en consecuencia que al considerar el material isótropo las constantes de elasticidad se reducen a dos, λ y μ .

En notación matricial se tendría:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^t) \quad (3)$$

Las constantes λ y μ pueden expresarse en función de dos constantes dependientes de cada material; el módulo de Young (E) y el coeficiente de Poisson (ν).

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)}$$

A las constantes elásticas λ y μ se las denomina coeficientes de Lamé en honor del matemático francés Gabriel Lamé (1795-1870). En 1852, este científico publicó su “Teoría Matemática de la Elasticidad”, donde se dedujeron por vez primera estas expresiones.

1.4 EDPs de elasticidad lineal

En esta sección vamos a desarrollar la formulación clásica del problema de elasticidad lineal. Nos centraremos en el caso isótropo para posteriormente llegar a la formulación variacional del problema.

1.4.1 Formulación clásica

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto poligonal o poliédrico ocupado durante un intervalo de tiempo $[0, T]$ por un medio elástico. Pongamos $Q := \Omega \times (0, T)$.

Denotaremos $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ el campo de desplazamientos de las partículas del medio durante dicho intervalo y supondremos que los desplazamientos son suficientemente pequeños, con $\mathbf{x} \in \Omega$ y $t \in [0, T]$.

Sea $B \subset \Omega$ una bola. La resultante $\mathbf{G}(B, t)$ en cada instante de tiempo de las fuerzas elásticas que las partículas situadas en puntos exteriores a B ejercen sobre las partículas situadas en puntos interiores viene determinada por:

$$\mathbf{G}(B, t) = \int_{\partial B} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

donde σ es el tensor simétrico de tensiones internas visto en las secciones anteriores y \mathbf{n} determina la normal unitaria exterior a B en ∂B .

Dadas las funciones $\rho \in L^\infty(\Omega)$ y $\mathbf{F} \in L^2(\Omega)^3$, el principio de conservación de la cantidad de movimiento enunciado en la segunda ley de Newton nos dice que, para cada bola $B \subset \Omega$ y cada $t \in (0, T)$, se tiene:

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u}_t \, d\mathbf{x} = \int_{\partial B} \sigma \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_B \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}$$

donde $\rho = \rho(x)$ es la densidad de masa del medio y $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ es una densidad de esfuerzos exteriores.

Por el Teorema de Gauss (fórmula de la divergencia), tenemos que:

$$\int_{\partial B} \sigma \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_B \nabla \cdot \sigma \, d\mathbf{x},$$

de donde

$$\int_B (\rho(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{tt} - \nabla \cdot \sigma) \, d\mathbf{x} = \int_B \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}$$

Como B es una bola arbitraria y t es un tiempo arbitrario en $(0, T)$, se deduce el sistema de EDPs

$$\rho(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{tt} - \nabla \cdot \sigma = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in Q, \quad (4)$$

llamado sistema de elasticidad lineal.

Componente a componente quedaría:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_j}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^3 \partial_i \sigma_{ij} = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}, t), \quad j = 1, 2, 3$$

Para completar el sistema nos faltaría añadir condiciones de contorno sobre $\partial\Omega \times (0, T)$ y condiciones iniciales en $t = 0$.

Sea $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ una partición de $\partial\Omega$ con los Γ_m medibles y

$$\int_{\Gamma_0} d\Gamma > 0.$$

Pongamos $\Sigma_m := \Gamma_m \times (0, T)$. Sean $\bar{\mathbf{u}} \in H^1(\Omega)^3$ y $g \in L^2(\Sigma_0)^3$. Vamos a imponer las condiciones de contorno

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad \text{sobre } \Sigma_0$$

y

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = g(\mathbf{x}, t) \quad \text{sobre } \Sigma_1.$$

Sobre Σ_0 los desplazamientos de las partículas vienen determinados por los valores de $\bar{\mathbf{u}}$. Esta condición se conoce como condición de contorno de tipo Dirichlet.

Sobre Σ_1 suponemos que actúan fuerzas externas tales que los valores de la componente normal $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ coinciden con los de g . Esta condición se conoce como condición de contorno de tipo Neuman.

Dados los campos de desplazamientos y velocidades iniciales $u_0 \in H^1(\Omega)^3$ y $u_1 \in L^2(\Omega)^3$, fijamos las condiciones de Cauchy

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}_t(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Aquí $H^1(\Omega)$ es el espacio de Sobolev habitual definido por

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \partial_i u \in L^2(\Omega) \quad i = 1, 2, 3\}$$

Por tanto, llegamos al siguiente problema de Cauchy-Dirichlet-Neuman para las EDPs de elasticidad lineal 3D:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho(\mathbf{x})\mathbf{u}_{tt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in Q \\ \sigma_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^N \mathbb{T}_{ijk\ell}(\mathbf{x})\varepsilon_{k\ell}, \quad \varepsilon_{k\ell} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\ell}{\partial k} + \frac{\partial u_k}{\partial \ell}\right) & \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), & (\mathbf{x}, t) \in \Sigma_0 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = g(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \Sigma_1 \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}_t(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \end{array} \right. \quad (5)$$

En lo que sigue utilizaremos la notación $D\mathbf{u} := \nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}'$. En el caso particular de material isótropo resultará un sistema de ecuaciones que recibe el nombre de *sistema de Lamé*:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho(\mathbf{x})\mathbf{u}_{tt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad \boldsymbol{\sigma} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})I + \mu D\mathbf{u}, & (\mathbf{x}, t) \in Q \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), & (\mathbf{x}, t) \in \Sigma_0 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \Sigma_1 \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}_t(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \end{array} \right. \quad (6)$$

Si $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ y el medio ha llegado a una situación estacionaria, esto es, independiente de t , en los problemas (5) y (6) desaparecen las derivadas temporales y las condiciones iniciales. Así, en el caso de medio isótropo en estado estacionario, el problema se reduce a

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\sigma} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})I + \mu D\mathbf{u}, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), & (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_0 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (7)$$

1.4.2 Formulación variacional

A continuación vamos a ver cómo, partiendo de la formulación clásica (6), podemos llegar a la formulación variacional (también llamada formulación débil) del problema de elasticidad lineal.

Supongamos $\mathbf{F} \in L^2(Q)^3$, $\mathbf{g} \in L^2(\Sigma_1)^3$, $\mathbf{u}_1 \in L^2(\Omega)$ y $\mathbf{u}_0 \in V$, donde

$$V = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3 : \mathbf{v} = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}.$$

Es bien conocido que V es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)^3$ y, por tanto, un nuevo espacio de Hilbert para el producto escalar habitual de $H^1(\Omega)^3$. De hecho, en V las aplicaciones

$$v \mapsto \|\nabla v\|_{L^2} \quad v \mapsto \|Dv\|_{L^2}$$

son normas Hilbertianas equivalentes a $\|\cdot\|_{H^1}$.

Por simplicidad, supondremos que $\bar{\mathbf{u}} = 0$. Como se puede observar, la condición de contorno de Dirichlet ha sido incorporada a la definición del espacio V (no es posible hacer lo mismo con la condición de Neuman).

1. Elasticidad Lineal

Para obtener la formulación variacional, multiplicaremos la EDP por una función $\mathbf{v} \in V$ arbitraria e integraremos en espacio, obteniendo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{tt} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I})) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\mu \mathbf{D}\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned}$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta que $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ y que $\mathbf{v} = 0$ sobre Γ_0 , vemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{tt} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_1} (\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ - \int_{\Gamma_1} \mu \mathbf{D}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mu(\mathbf{D}\mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Agrupando y usando que si A es simétrica se tiene $A : B = A : (B + B')/2$, resulta la igualdad

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{tt} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} [\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{\mu}{2}(\mathbf{D}\mathbf{u} : \mathbf{D}\mathbf{v})] \, d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \end{aligned}$$

Finalmente, como $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}$ sobre Σ_1 , conseguimos que

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{tt} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b(t)(\mathbf{v}),$$

donde

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} [\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{\mu}{2}(\mathbf{D}\mathbf{u} : \mathbf{D}\mathbf{v})] \, d\mathbf{x}$$

y

$$b(t)(\mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma.$$

Nos encontramos ahora en disposición de formular correctamente el problema de Cauchy-Dirichlet-Neuman para el sistema de Lamé:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \mathbf{u} \in C^0([0, T]; \mathcal{V}) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)^3) \text{ tal que} \\ (\rho(\mathbf{x})\mathbf{u}_{tt}, \mathbf{v})_{L^2} + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b(t)(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \text{ c.p.d en } (0, T), \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_t|_{t=0} = \mathbf{u}_1. \end{array} \right. \quad (8)$$

La solución que se obtiene al resolver la formulación variacional recibe el nombre de *solución débil* de (6).

Supongamos de nuevo que \mathbf{F} y \mathbf{g} son independientes de t : $\mathbf{F} \in L^2(\Omega)^3, \mathbf{g} \in L^2(\Gamma_1)^3$. Obviamente, podemos partir de (7) y, razonando de igual manera, llegar a la siguiente formulación del problema estacionario:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \mathbf{u} \in \mathcal{V} \text{ tal que} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \end{array} \right. \quad (9)$$

donde, por definición,

$$b(\mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma.$$

Se dice que (9) es la formulación débil del problema de Dirichlet-Neuman para el sistema estacionario de Lamé.

2 | Existencia y unicidad de solución

La existencia y unicidad de solución de las EDPs que se utilizan en los modelos matemáticos, utilizados en diversidad de situaciones de la vida real, tienen una importancia fundamental.

Cuando estamos estudiando cualquier fenómeno y se modeliza matemáticamente, es imperioso saber si existe solución bajo las condiciones concretas en las que lo estudiamos. Efectivamente, necesitamos un resultado de existencia para estar seguros de que la formulación no es contradictoria. De igual forma y no con menos importancia, surge la necesidad de saber si la solución es única, puesto que según las necesidades del estudio, la unicidad podrá tener una importancia más relativa o por el contrario resultará esencial. Así, solo después de probar un resultado de unicidad quedará claro que la formulación elegida describe de manera completa el fenómeno bajo estudio.

En este capítulo, enunciaremos los resultados teóricos que nos aportaran la existencia y unicidad de solución de los problemas que hemos planteado en el capítulo anterior. Veremos que tanto en el caso estacionario, como en el de evolución, se pueden aplicar los resultados teóricos correspondientes. Así, en este contexto nos encontraremos en condiciones de poder afirmar la existencia y unicidad en ambos casos.

Dado que hemos planteado nuestros problemas tanto en forma clásica como variacional, tendría sentido preguntarnos qué relación existirá entre las propiedades de la solución clásica y la solución débil de ellos.

La respuesta nos la aporta el hecho de que toda solución clásica es débil, por tanto demostrando la existencia y unicidad de la solución débil tendremos en particular que, si existe solución clásica, es necesariamente única.

El motivo fundamental por el cual conviene trabajar en el contexto débil es que, en general, con datos poco regulares, no existe solución clásica de los problemas considerados. De hecho, ni siquiera existe solución clásica de la EDP de Poisson con condición Dirichlet homogénea y segundo miembro continuo acotado.

2.1 Problema estacionario

Empezaremos enunciando algunos resultados que vamos a necesitar en el desarrollo de esta sección.

Definición 2.1. Sea X un espacio de Hilbert. Se dice que la forma bilineal

$$\begin{aligned} a : X \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto a(u, v) \end{aligned}$$

es continua si existe una constante $C > 0$ tal que

$$a(u, v) \leq C \|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X,$$

y que es coerciva si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

Cuando existan C y α , se les denominará constantes de continuidad y coercividad, respectivamente.

Teorema 2.1 (Lax-Milgram). Sean X un espacio de Hilbert y $a(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal, continua y coerciva. Entonces para cada $f \in X'$ (f lineal y continua) existe un único elemento $u \in X$ tal que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in X.$$

Si además $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica, entonces u se puede caracterizar como la única solución del problema de mínimos

$$\min_{v \in X} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle f, v \rangle \right\}$$

La demostración puede consultarse en [3].

Procederemos entonces con el problema estacionario. La idea será ver si, con definiciones adecuadas de X , $a(\cdot, \cdot)$ y f , estamos en las condiciones del Teorema de Lax-Milgram, de esta forma podríamos aplicarlo y concluir la existencia y unicidad.

En los desarrollos que efectuaremos a continuación surgirá la necesidad de utilizar algunos resultados teóricos auxiliares. Procederemos a enunciarlos conforme los vayamos necesitando.

Recordemos previamente la formulación variacional del problema estacionario

$$\begin{cases} \text{Hallar } \mathbf{u} \in V & \text{tal que} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V, \end{cases}$$

donde $V = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3 : \mathbf{v} = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}$,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} [\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{\mu}{2}(\mathbf{D}\mathbf{u} : \mathbf{D}\mathbf{v})] d\mathbf{x}$$

y

$$b(\mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1} g(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} d\Gamma.$$

Tenemos que probar entonces que, con $X = V$, esta forma bilineal y esta forma lineal verifican las hipótesis del Teorema de [Lax-Milgram](#).

Empezaremos por las propiedades de la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$:

• **$a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal:**

Tenemos que probar que, para cualesquiera $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$ y $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) &= \alpha_1 \beta_1 a(u_1, v_1) + \alpha_1 \beta_2 a(u_1, v_2) \\ &\quad + \alpha_2 \beta_1 a(u_2, v_1) + \alpha_2 \beta_2 a(u_2, v_2) \end{aligned}$$

lo cual se deduce por la propia construcción de la forma bilineal, dado que tanto el gradiente como la integral son operadores lineales.

• **$a(\cdot, \cdot)$ es continua:**

Tenemos que probar que existe $C^* > 0$ tal que $|a(u, v)| \leq C^* \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$ para todo par de funciones $u, v \in V$.

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} [\lambda(\nabla \cdot u)(\nabla \cdot v) + \frac{\mu}{2}(\mathbf{D}\mathbf{u} : \mathbf{D}\mathbf{v})] d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \lambda \int_{\Omega} |(\nabla \cdot u)(\nabla \cdot v)| d\mathbf{x} + \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{D}\mathbf{u} : \mathbf{D}\mathbf{v}| d\mathbf{x} \\ &\stackrel{(\star^1)}{\leq} C_1 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\stackrel{(\star^2)}{\leq} C^* \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u, v \in V. \end{aligned}$$

Hemos utilizado en (\star^1) la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|(u, v)_{L^2(\Omega)}| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \tag{10}$$

y además

$$\|\nabla \cdot u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

donde $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ representa la norma matricial componente a componente.

2. Existencia y unicidad de solución

Por otra parte, en (\star^2) hemos tenido en cuenta que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \equiv \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

y aplicado

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2} \equiv \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

- $a(\cdot, \cdot)$ es **coerciva**:

Tenemos que probar que existe una constante $\alpha > 0$ tal que $a(u, u) \geq \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$, para todo $u \in V$.

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} [\lambda(\nabla \cdot u)(\nabla \cdot u) + \frac{\mu}{2}(\mathbf{D}\mathbf{u} : \mathbf{D}\mathbf{u})] dx \\ &\stackrel{(\star^3)}{=} \lambda \int_{\Omega} |\nabla \cdot u|^2 dx + 2\mu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 |\varepsilon_{ij}|^2 dx \\ &\stackrel{(\star^4)}{\geq} 2\mu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 |\varepsilon_{ij}|^2 dx \geq 2\mu \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} |\varepsilon_{ij}|^2 dx \\ &\geq 2\mu \sum_{i,j=1}^3 \|\varepsilon_{ij}\|_{L^2(\Omega)}^2 \stackrel{(\star^5)}{\geq} C^* \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Hemos utilizado en (\star^3) la siguiente igualdad:

$$(\mathbf{D}\mathbf{u} : \mathbf{D}\mathbf{u}) = 4 \sum_{i,j=1}^3 |\varepsilon_{ij}|^2$$

En (\star^4) hemos tenido en cuenta que $\lambda > 0$ y que

$$\int_{\Omega} |\nabla \cdot u|^2 dx > 0$$

Por último, en (\star^5) hemos tenido en cuenta que $\mu > 0$ y hemos utilizado la desigualdad de Korn, que enunciaremos a continuación:

Desigualdad de Korn

Supongamos que Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^d de frontera Γ de clase C^1 a trozos. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $\mathbf{v} \in V$ se tiene

$$\sum_{i,j=1}^d \|\varepsilon_{ij}\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq C \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

donde

$$V = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3 : \mathbf{v} = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}.$$

Esta desigualdad está probada en [5]

Veamos a continuación las propiedades de $b(\cdot)$:

• **$b(\cdot)$ es lineal:**

Tenemos que probar que, para cualesquiera $v_1, v_2 \in V$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,

$$b(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 b(v_1) + \alpha_2 b(v_2)$$

Se deduce por la propia construcción de $b(\cdot)$, dado que la integral es un operador lineal.

• **$b(\cdot)$ es continua:**

Tenemos que probar que existe $C^* > 0$ tal que $|b(v)| \leq C^* \|v\|_{H^1(\Omega)}$ para toda función $v \in V$.

$$\begin{aligned} |b(v)| &= \left| \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot v \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1} g(\mathbf{x}) \cdot v \, d\Gamma \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\mathbf{F}(\mathbf{x})| \cdot |v| \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1} |g(\mathbf{x})| \cdot |v| \, d\Gamma \\ &\stackrel{(\star_1)}{\leq} \|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \\ &\leq (\|\mathbf{F}\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}) \|v\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{(\star_2)}{\leq} C^* \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

En (\star_1) hemos utilizado la desigualdad de Cauchy-Schwarz (10)

y en (\star_2) hemos tenido en cuenta que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \equiv \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$$

y por tanto

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

La conclusión es que el Teorema de Lax-Milgram puede ser aplicado y el problema estacionario (9) del capítulo precedente posee solución única.

2.2 Problema de evolución

En esta sección, necesitaremos un resultado abstracto teórico que nos ayude a probar la existencia y unicidad del problema de evolución:

Teorema 2.2. *Supongamos que V y H son dos espacios de Hilbert con*

$$V \subset H, \text{ la inyección de } V \text{ en } H \text{ es continua y } V \text{ es denso en } H. \quad (11)$$

Supongamos también que existen $M, \alpha, \beta > 0$ (independientes de t) tales que

$$|a(t; u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V \quad (12)$$

y

$$a(t; v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 - \beta \|v\|_H^2 \quad \forall v \in V \quad (13)$$

para t c.p.d. en $[0, T]$. Finalmente, supongamos que, para todo $u, v \in V$,

$$t \mapsto a(t; u, v) \quad (14)$$

es continua y diferenciable c.p.d. con derivada en $L^\infty(0, T)$ y que $b \in L^2(0, T; V')$.

Entonces existe una única solución del problema siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u \in C^0([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; H) \text{ tal que} \\ \frac{d^2}{dt^2}(u, v)_H + a(t; u, v) = \langle b(t), v \rangle \quad \forall v \in V, \text{ c.p.d. en } (0, T), \\ u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1. \end{array} \right. \quad (15)$$

La demostración puede consultarse en [1]

Ahora, la idea es ver que el problema (8) satisface las propiedades del Teorema 2.2 y así poder utilizarlo.

Empezaremos por identificar los espacios V y H que menciona el Teorema 2.2 que, en nuestro caso, son

$$V = \{v \in H^1(\Omega)^3 : v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\} \text{ y } H = L^2(\Omega)^3.$$

Pasamos a continuación a ver que se verifican las propiedades que se enuncian en el citado teorema:

- La propiedad (11) se observa que se verifica por la forma en la que ha sido construido el espacio V .
- Para las propiedades (12) y (13) tendremos en cuenta que cada elemento de la familia $\{a(t; u, v)\}_{t \in [0, T]}$ de formas bilineales sobre V , puede ser tratado como un caso particular de la forma bilineal estudiada en el problema estacionario.

Por tanto, repitiendo el **razonamiento** de la continuidad y coercividad de la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ para todo $t_i \in [0, T]$ se verificarían las propiedades (12) y (13).

- La propiedad (14) es evidente en este caso. En efecto, basta darse cuenta de que, en este caso, todas las formas bilineales coinciden y, por tanto, para cada par $u, v \in V$, la función $t \mapsto a(t; u, v)$ es constante.
- Finalmente, en nuestro caso, está claro que $b \in L^2(0, T; V')$.

Por tanto, podemos concluir que existe solución del problema de evolución y ésta es única.

3 | Aproximación de la solución. Métodos de elementos finitos.

En matemáticas y en muchas facetas de la vida, una vez que modelizamos una situación concreta, nos interesa la solución del problema que se plantea. No son pocas las ocasiones, en las que no resulta posible obtener una solución analítica, ni tampoco lo son, las que siendo posible obtenerla puede entrañar una elevada dificultad. Tiene por tanto, perfecto sentido plantearnos la necesidad de obtener una aproximación de la solución, la cual en numerosas ocasiones será suficiente para resolver los problemas que se nos puedan plantear.

Dado que no solo es posible encontrar estas aproximaciones, sino que existen diferentes métodos de aproximación de soluciones de gran eficacia, nos centraremos en el método de elementos finitos.

El Método de Elementos Finitos (**MEF**) es una técnica (una familia de técnicas de hecho) diseñada para hallar soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales. Es una herramienta de cálculo muy potente, que resulta de gran importancia por su utilidad práctica, con la cual se pueden resolver infinidad de problemas. No obstante, debemos tener presente que este método no nos proporciona la solución “exacta” del problema que estamos estudiando, sino que, nos da la posibilidad de obtener una o varias soluciones aproximadas.

Este método es muy fácil de programar en un ordenador, lo cual abre un amplio abanico de posibilidades. Una de ellas será que podremos generar procesos iterados para aproximar tanto como sea necesario nuestra solución. Será entonces muy importante saber, en qué condiciones tiene sentido elevar el número de iteraciones y si éstas generan sucesiones convergentes, lo que al fin y al cabo es lo que buscamos.

3.1 MEFs para el sistema estacionario de Lamé

Empezaremos introduciendo un método que permitirá aproximar el problema (9) por un problema similar numéricamente tratable. La idea es sustituir el espacio de dimensión no finita V por un subespacio de dimensión finita $V_h \subset V$. En este nuevo subespacio que utilizamos, V_h , podremos construir las soluciones aproximadas de nuestro problema variacional.

Método de Galerkin

Una bien conocida aproximación para nuestro problema nos la da el método de Galerkin, que consiste en definir un problema similar, llamado problema discreto, sobre un subespacio finito V_h del espacio V . El problema discreto que corresponde a (9) es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{Hallar } \mathbf{u}_h \in V_h & \text{tal que} \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = b(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \end{cases} \quad (16)$$

Lo que pretendemos al discretizar el problema original (9), es obtener una solución u_h , que aproxime suficientemente bien a \mathbf{u} , solución de (9).

Es lógico plantearse si el nuevo problema discreto tendrá solución y, en caso de tenerla, si es única. Pues bien, aplicando el teorema de Lax-Milgram, podemos afirmar que este problema tendrá una única solución, que se llamará solución aproximada.

Antes de proseguir, enunciaremos algunas definiciones relativas al espacio V_h .

Definición 3.1. Se dice que la aproximación (16) es conforme si $V_h \subset V$.

Definición 3.2. Se dice que la aproximación (16) es consistente si la solución exacta \mathbf{u} verifica el problema discreto, es decir,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) = b(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h$$

Partiendo de que V_h es un subespacio de dimensión finita N_h , podemos tomar una base en dicho espacio $B_V = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h}\}$. Así, $u_h \in V_h$ se puede expresar en función de la base de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}_h = \sum_{j=1}^{N_h} U_j \varphi_j \quad (17)$$

donde $U = (U_1, \dots, U_{N_h})$ es el vector de coordenadas de \mathbf{u}_h respecto de la base B_V . Estas coordenadas identifican u_h . Esto es, calcular u_h es, en términos prácticos, calcular U .

A continuación, veremos que el problema discreto (16) es equivalente a un sistema de ecuaciones algebraicas, donde las incógnitas son las U_j .

Sea $B_V = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h}\}$ una base del espacio V_h . Entonces (16) equivale a lo siguiente:

$$\begin{cases} \text{Hallar } \mathbf{u}_h \in V_h \text{ tal que} \\ a(\mathbf{u}_h, \varphi_i) = b(\varphi_i) \quad 1 \leq i \leq N_h \end{cases} \quad (18)$$

Así, utilizando (17) tendríamos:

$$\sum_{j=1}^{N_h} U_j a(\varphi_j, \varphi_i) = b(\varphi_i) \quad i = 1, \dots, N_h$$

Por lo que puede observarse que la expresión anterior constituye un sistema lineal de ecuaciones:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

donde $\mathbf{A}_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$, que recibe el nombre de matriz de rigidez, sería la matriz de coeficientes. Los términos independientes estarían representados por $\mathbf{b}_i = b(\varphi_i)$ y, finalmente, las incógnitas serían las coordenadas de \mathbf{u}_h respecto de la base B_V . De esta forma, resolver este sistema de ecuaciones, equivale a resolver el problema (18).

Por tanto, podemos escribir el sistema aproximado de Lamé de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \text{Hallar } \mathbf{u}_h \in V_h \text{ tal que} \\ \sum_{j=1}^{N_h} U_j a(\varphi_j, \varphi_i) = b(\varphi_i) \quad 1 \leq i \leq N_h \end{cases} \quad (19)$$

donde $a(\cdot, \cdot)$ es la forma bilineal y $b(\cdot)$ es la forma lineal, asociadas al problema (9).

Método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos (MEF), que es la forma más simple del método de Galerkin, es un proceso específico de construcción de los subespacios V_h .

Antes de empezar con el desarrollo del mismo, indicaremos algunas propiedades que conviene que cumplan los espacios V_h :

3. Aproximación de la solución. Métodos de elementos finitos.

- Las funciones de base $\varphi_i \in V_h$ deben ser fáciles de manejar. Con ello se pretende que los coeficientes $a(\varphi_j, \varphi_i)$ no requieran mucho esfuerzo a nivel de computación.
- Las funciones φ_i deben tener soportes "pequeños". De esta forma la matriz de rigidez tendrá muchas posiciones con ceros, lo cual facilita el cómputo, al tratarse de una matriz hueca.
- Los elementos $a(\varphi_j, \varphi_i) \neq 0$ deberán estar próximos a la diagonal principal de la matriz de rigidez. Para ello, se utilizará una enumeración adecuada, buscando de esta forma una matriz banda, que será mas eficiente para el cálculo de u_h .
- El espacio V_h debe ser tal que $u_h \rightarrow \mathbf{u}$, donde \mathbf{u} es la solución de (9), con buenas estimaciones de error.

Se dirá entonces que V_h satisface buenas propiedades.

Definición 3.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, un abierto poligonal o poliédrico de \mathbb{R}^N ($N = 2$ o $N = 3$), de frontera Γ . Se llama triangulación \mathcal{T}_h de $\overline{\Omega}$, a toda familia finita de compactos de $\overline{\Omega}$ que verifica:

$$\overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$$

y las siguientes propiedades:

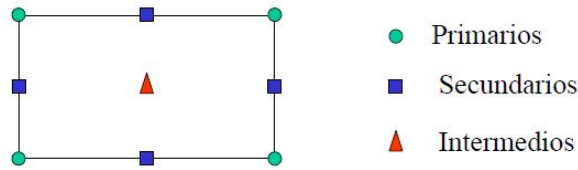
- Cada elemento K de \mathcal{T}_h es un poliedro de \mathbb{R}^N de interior no vacío.
- Los interiores de dos poliedros distintos de \mathcal{T}_h son disjuntos.
- Toda cara de un poliedro $K_1 \in \mathcal{T}_h$ es, o bien, una cara de otro poliedro K_2 , en cuyo caso K_1 y K_2 son adyacentes, o bien, una parte de la frontera Γ de Ω .

Observación 3.1. \mathcal{T}_h designará una triangulación de $\overline{\Omega}$ con $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$, donde h_K es el diámetro del poliedro K para todo K .

A continuación, veremos unos aspectos básicos en la construcción de V_h que caracterizan los MEF de tipo Lagrange en el contexto del sistema de Lamé:

- Tenemos una triangulación \mathcal{T}_h de $\overline{\Omega}$, es decir, el conjunto $\overline{\Omega}$ es subdividido en un número finito de subconjuntos poliédricos K .
- En el dominio subdividido, identificaremos ciertos puntos, llamados nodos. Estos puntos tendrán un papel fundamental en el método.

Dentro de los nodos, se incluirán todos los vértices de los poliedros. Además, para intentar mejorar la aproximación, existe la posibilidad de incluir más nodos, por ejemplo en las aristas, dividiendo éstas en un número de partes, o bien en los interiores de los poliedros. En la siguiente figura se observa la posición de los nodos, a modo de ejemplo, en un caso particular bidimensional (aproximación \mathcal{Q}_2 -Lagrange):



- Se toma $V_h = Z_h^N$ (o un subespacio de Z_h^N), donde Z_h^N es un espacio de funciones "sencillas" asociado a la triangulación \mathcal{T}_h .
- Se suele elegir una base $B_h = \{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$ del espacio Z_h con buenas propiedades. Sus elementos se denominan funciones de base, y están definidas como sigue:

Las funciones de base $\{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$ deben verificar:

- Cada φ_i es continua.
- Habrá $M \times N$ funciones, N por cada nodo, $(a_i)_{i=1}^M$.
- Cada función φ_i toma valores distintos de cero solo en aquellos elementos que contengan al nodo a_i . Más precisamente,

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- La restricción de cada función φ_i a cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$, que se denotará $\varphi_{i|_K}$, será un polinomio.
- Por tanto, las φ_i son funciones polinómicas a trozos, tomando valores no nulos en una región pequeña de Ω .

En consecuencia, las funciones $v_h \in Z_h$ son polinómicas a trozos, en el sentido que para cada $K \in \mathcal{T}_h$ el espacio $P_K = \{v_{h|_K} : v_h \in Z_h\}$ está formado por polinomios. Además, podemos observar que si tomamos una función cualquiera

$$w_h = \sum_{i=1}^N z_i \varphi_i,$$

se tiene:

$$w_h(a_j) = \sum_{i=1}^N z_i \varphi_i(a_j) = z_j.$$

Por lo que los valores de w_h en los nodos son las coordenadas de w_h respecto de la base B_V .

Aunque no serán considerados aquí, también existen técnicas similares que permiten construir espacios Z_h y V_h donde intervienen no sólo los valores de las funciones, sino también de (algunas de) sus derivadas parciales. Se trata de los MEF de Hermite.

3.1.1 Elementos finitos de Lagrange

Definición 3.4. *Un elemento finito es una terna (K, P_K, Σ_K) donde:*

- K es un conjunto compacto y conexo de interior no vacío.
- P_K es un espacio vectorial de funciones de K en \mathbb{R} de dimensión M .
- $\Sigma_K = \{\phi_1, \dots, \phi_M\}$ es una familia de formas lineales y continuas.

A los elementos de Σ_K se les llama grados de libertad.

y además, Σ_K es P_K -unisolvente, es decir,

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_M \in \mathbb{R} \quad \exists! p \in P_K : \phi_i(p) = \alpha_i \quad \forall i$$

En los elementos finitos de Lagrange, el conjunto Σ está formado por evaluaciones en M puntos distintos $\{a_1, \dots, a_M\}$, que serán los nodos de los que hemos hablado con anterioridad.

Dado que la unisolvencia es una pieza fundamental en el desarrollo del tema, veremos una condición necesaria para tenerla, y apoyándonos en ella, estableceremos algún criterio que la garantice.

Una condición necesaria para que el conjunto Σ_K sea P_K -unisolvente, es que el cardinal del conjunto Σ_K coincida con la dimensión del espacio vectorial P_K , es decir, $\text{card}(\Sigma_K) = \text{dim}(P_K) = M$. Si se verifica esta condición, tendremos dos criterios con los que poder asegurar la P_K -unisolvencia de Σ :

1. Será suficiente probar que la única función $p \in P_K$ que se anula en Σ_K es la función nula. En efecto, si se verifica esta propiedad, la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \phi_K : P_K &\rightarrow \mathbb{R}^M \\ p &\rightarrow \{\phi_i(p)\}_{i=1}^M = \{p(a_i)\}_{i=1}^M \end{aligned}$$

es inyectiva y por tanto biyectiva, dado que $\text{dim}(P) = M$.

2. Será suficiente hallar las funciones $\{p_i\}_{i=1}^M$ del espacio P_K verificando $p_i(a_j) = \delta_{ij}$. En efecto, si existen tales funciones, a toda M -tupla $\{\alpha_j\}_{j=1}^M \in \mathbb{R}^M$, le podemos asociar la función

$$p = \sum \alpha_j p_j,$$

que será una función de P_K , tal que $p(a_j) = \alpha_j \quad 1 \leq j \leq M$. Por lo tanto, tendríamos que ϕ_K es sobreyectiva y por tanto biyectiva.

En ambos casos, puede observarse que, si suponemos que se tiene la igualdad $\text{card}(\Sigma) = \text{dim}(P) = M$, la biyectividad de la aplicación lineal nos garantiza la unisolvencia.

Llegados este punto, estamos en condiciones de definir varios elementos finitos de Lagrange que servirán para resolver el problema aproximado (16). Nos centraremos en los de tipo n -simplex, aunque existen más tipos, por ejemplo los n -rectángulos, que pueden consultarse en [6].

Elementos finitos P_ℓ -Lagrange en un n -simplex

Para cada $\ell \in \mathbb{Z}^+$, denotaremos P_ℓ el espacio de todos los polinomios en las variables x_1, \dots, x_N de grado menor o igual a ℓ , con coeficientes reales en la variables x_1, \dots, x_n . Es decir, $p \in P_\ell$ si y solo si existen unos coeficientes reales $\gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ tales que:

$$p : x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \rightarrow p(x) = \sum_{\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq \ell} \gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

El espacio vectorial P_ℓ tiene dimensión $\binom{N+l}{l}$.

Definición 3.5. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$, se define el espacio $P_\ell(A)$:

$$P_\ell(A) = \{p|_A : p \in P_\ell\}$$

La dimensión del espacio $P_\ell(A)$ es la misma que la del espacio $P_\ell = P_\ell(\mathbb{R}^N)$, siempre que A no sea vacío.

Definición 3.6. Sean a_1, a_2, \dots, a_{N+1} $N + 1$ puntos de \mathbb{R}^N , con $a_j = (a_{ij})_{i=1}^N$, tales que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3. Aproximación de la solución.
Métodos de elementos finitos.

es regular (lo que equivale a decir, que para $N = 3$ los puntos no son coplanarios y para $N = 2$ los puntos no están en la misma recta). Se denomina N -simplex de vértices los a_j a la envolvente convexa de los a_j . Por tanto, tenemos que

$$K = \left\{ x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_j \mid \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1, 0 \leq \lambda_j \leq 1, \forall j = 1, \dots, n+1 \right\}$$

En casos que nos interesan, con $N = 3$, un 3-simplex es un tetraedro y, con $N = 2$, un 2-simplex es un triángulo.

Coordenadas baricéntricas

Dado un punto cualquiera x perteneciente a un N -simplex, las coordenadas baricéntricas de x respecto de los vértices a_j , son las únicas soluciones λ_j que verifican el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N+1} a_{ij} \lambda_j = x_i, & 1 \leq i \leq N+1, \\ \sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j = 1. \end{cases}$$

Se observa que las coordenadas baricéntricas son funciones afines de x_1, \dots, x_N :

$$\lambda_i(x) = \sum_{j=1}^{N+1} b_{ij} x_j + b_{i,N+1}, \quad 1 \leq i \leq N+1,$$

donde $B = (b_{ij})$ es la matriz inversa de A .

Definición 3.7. Se define el baricentro o centro de gravedad de un N -simplex K como el punto cuyas coordenadas baricéntricas son todas iguales a $1/(N+1)$

Definición 3.8. Un elemento finito P_ℓ -Lagrange es una terna $(K, P_\ell(K), \Sigma_\ell(K))$ donde:

- K es un N -simplex de \mathbb{R}^N .
- $P_\ell(K)$ es el espacio vectorial de dimensión $\binom{N+1}{\ell}$ de las funciones polinómicas de grado $\leq \ell$.
- $\Sigma_\ell(K) = \{\phi_1, \dots, \phi_M\}$, con $\phi_i(p) = p(c_i)$ para $1 \leq i \leq M$, donde $\{c_1, \dots, c_M\} = \{x : \lambda_j(x) \in \{0, \frac{1}{\ell}, \dots, \frac{\ell-1}{\ell}, 1\} \quad 1 \leq j \leq n+1\}$

y, además, $\Sigma_\ell(K)$ es $P_\ell(K)$ -unisolvante.

Nos encontramos, a estas alturas del capítulo, en disposición de especificar los elementos finitos P_ℓ -Lagrange más usuales. Nos centraremos en el caso $N = 3$, para $N = 2$ la descripción es completamente análoga y mas sencilla.

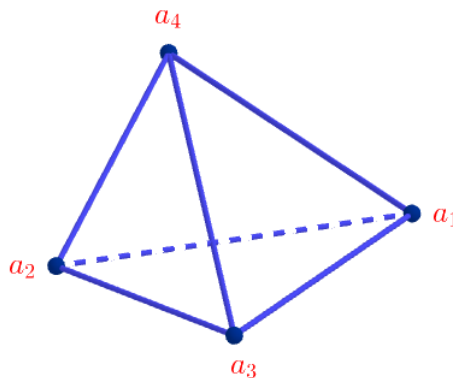
Ejemplos más comunes en la práctica

- 3-símplex lineal ($\ell = 1$)

Para un 3-símplex K , de nodos $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, tomamos $P_K = P_1(K)$, espacio de dimensión cuatro y $\Sigma_K = \{p(a_1), \dots, p(a_4)\}$. En estas condiciones, con las definiciones usuales, sabemos que cualquier $p \in P_1(K)$, puede expresarse de la forma:

$$p = \sum_{i=1}^4 p(a_i)\lambda_i \quad 1 \leq i \leq 4,$$

donde los coeficientes $p(a_i)$ se denominan grados de libertad y las funciones de base son las coordenadas baricéntricas $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$.



3-símplex lineal

- 3-símplex cuadrático ($\ell = 2$)

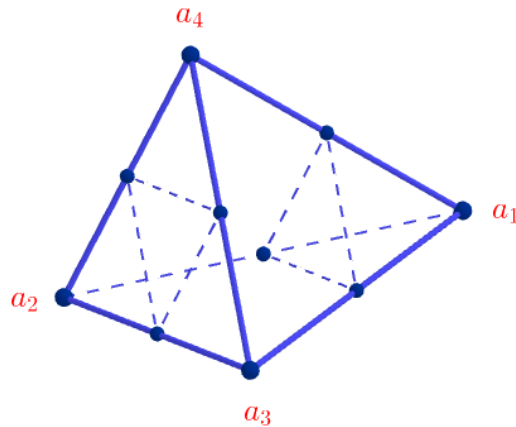
Pongamos $a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$ con $1 \leq i < j \leq 4$. Así, los a_{ij} son los puntos medios de las aristas del 3-símplex K y teniendo en cuenta que $\lambda_k(a_{ij}) = \frac{1}{2}(\delta_{ki} + \delta_{kj})$, veremos que cualquier polinomio $p \in P_2(K)$ puede expresarse como:

$$p = \sum_{i=1}^4 p(a_i)\lambda_i(2\lambda_i - 1) + \sum_{i < j} 4p(a_{ij})\lambda_i\lambda_j$$

Con esta identidad podemos definir el 3-simplex cuadrático, que tendrá las siguientes características:

3. Aproximación de la solución.
Métodos de elementos finitos.

- $P_K = P_2(K)$ con $\dim(P_2(K)) = 10$.
- $\Sigma_K = \{p(a_i) \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \{p(a_{ij}) \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$.
- Los grados de libertad son los coeficientes $p(a_i)$, $p(a_{ij})$.
- Las funciones de base son:
 $\{\lambda_i(2\lambda_i - 1) \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \{4\lambda_i\lambda_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$.



3-símplex cuadrático

• 3-símplex cúbico ($\ell = 3$)

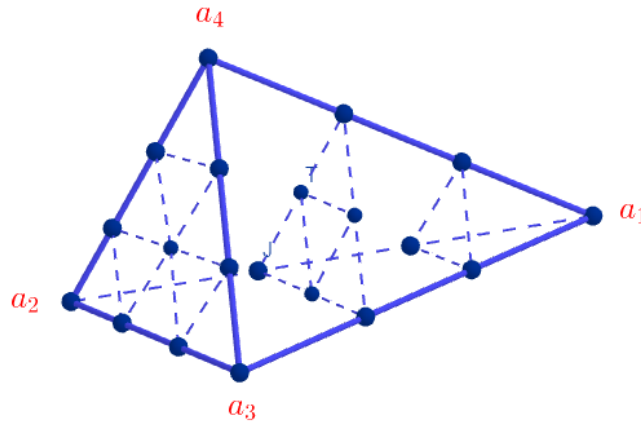
Si ponemos ahora $a_{iij} = \frac{1}{3}(2a_i + a_j)$ con $1 \leq i, j \leq 4$, $i \neq j$, $a_{ijk} = \frac{1}{3}(a_i + a_j + a_k)$ con $1 \leq i < j < k \leq 4$, se tiene que cualquier polinomio $p \in P_3(K)$ puede expresarse como:

$$p = \sum_{i=1}^4 p(a_i) \frac{1}{2} \lambda_i (3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2) + \sum_{i \neq j} p(a_{iij}) \frac{9}{2} \lambda_i \lambda_j (3\lambda_i - 1) + \sum_{i < j < k} 27 p(a_{ijk}) \lambda_i \lambda_j \lambda_k$$

lo que permite definir el 3-símplex cúbico, con las siguientes características:

- $P_K = P_3(K)$ con $\dim(P_3(K)) = 20$.
- $\Sigma_K = \{p(a_i) \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \{p(a_{iij}) \mid 1 \leq i, j \leq 4, i \neq j\} \cup \{p(a_{ijk}) \mid 1 \leq i < j < k \leq 4\}$.
- Los grados de libertad son los coeficientes $p(a_i)$, $p(a_{iij})$, $p(a_{ijk})$.
- Las funciones de base son:

$$\left\{ \frac{1}{2} \lambda_i (3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2) \mid 1 \leq i \leq 4 \right\} \cup \left\{ \frac{9}{2} \lambda_i \lambda_j (3\lambda_i - 1) \mid 1 \leq i, j \leq 4, i \neq j \right\} \\ \cup \{27 \lambda_i \lambda_j \lambda_k \mid 1 \leq i < j < k \leq 4\}.$$



3-símplex cúbico

Por último, definiremos un elemento de tipo Lagrange adicional, pero previamente necesitaremos el siguiente resultado.

Teorema 3.1. Para cada terna (i, j, k) con $i < j < k$, sea

$$\phi_{ijk}(p) = 12p(a_{ijk}) + 2 \sum_{l=i,j,k} p(a_l) - 3 \sum_{\substack{l,m=i \\ j,k,l \neq m}} p(a_{llm}).$$

Entonces cualquier función polinómica de

$$P'_3(K) = \{p \in P_3(K) : \phi_{ijk}(p) = 0, 1 \leq i < j < k \leq 4\}$$

está determinado de forma única por los valores en los a_i , $1 \leq i \leq 4$, y en los puntos a_{ij} , $1 \leq i, j \leq 4$, $i \neq j$. Además, se tienen las siguientes inclusiones estrictas:

$$P_2(K) \subset P'_3(K) \subset P_3(K)$$

La demostración de este resultado puede consultarse en [6].

Partiendo del 3-símplex cúbico y aplicando el Teorema 3.1 podemos construir un nuevo elemento adicional:

- 3-símplex cúbico reducido

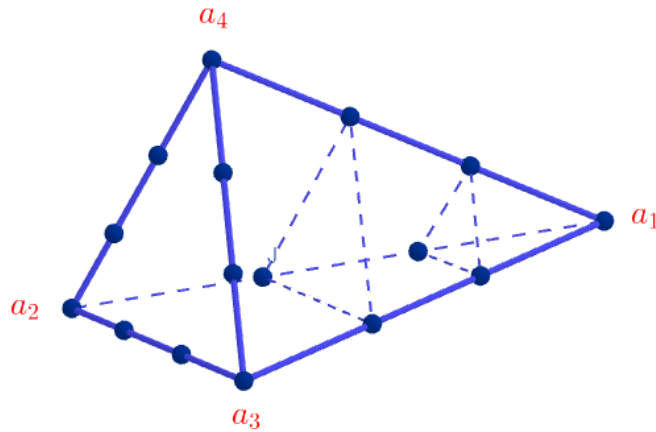
Observamos que cualquier función polinómica $p \in P'_3(K)$ puede expresarse de la forma:

$$p = \sum_{i=1}^4 p(a_i) \left(\frac{1}{2} \lambda_i (3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2) - \frac{9}{2} \lambda_i \sum_{\substack{j < k \\ j,k \neq i}} \lambda_j \lambda_k \right)$$

$$+ \sum_{i \neq j} p(a_{ij}) \left(\frac{9}{2} \lambda_i \lambda_j (3\lambda_i - 1) + \frac{27}{4} \lambda_i \lambda_j \sum_{k \neq i, j} \lambda_k \right),$$

lo cual, permite que definamos el 3-símplex cúbico reducido con las características siguientes:

- $P_K = P'_3(K)$ con $\dim(P'_3(K)) = 16$.
- $\Sigma_K = \{p(a_i) \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \{p(a_{ij}) \mid 1 \leq i, j \leq 4, i \neq j\}$.
- Los grados de libertad son los coeficientes $p(a_i)$, $p(a_{ij})$.
- Las funciones de base serían las expresiones que acompañan a $p(a_i)$, $p(a_{ij})$, con sus subíndices respectivos.



3-símplex cúbico reducido

3.2 Aproximación en espacio y en tiempo del problema de evolución (8)

En esta sección necesitamos construir un esquema numérico espacial y temporal. Con este esquema podremos aproximar en espacio y en tiempo el problema (8).

Para la aproximación en espacio, utilizaremos más adelante un método de elementos finitos. Para la aproximación en tiempo, utilizaremos el método de diferencias finitas centradas. Daremos a continuación una justificación.

Toda función continua y diferenciable $u = u(t)$ en el entorno de un punto t_1 puede ser expresada como una serie truncada de Taylor de la forma:

$$u(t) = u(t_1) + (t - t_1) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(t - t_1)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dots + \frac{(t - t_1)^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial t^n} + R_{n,t_1}(t)$$

donde

$$R_{n,t_1}(t) = \frac{(t - t_1)^{n+1}}{(n + 1)!} \frac{\partial^{n+1} u}{\partial t^{n+1}}$$

representa el error que se comete al aproximar una función por su polinomio de Taylor de grado n .

Si en la expresión anterior elegimos diferentes puntos $t = t_k$, podemos obtener un sistema de ecuaciones, en el que será posible despejar las derivadas $\frac{\partial^n u}{\partial t^n}$ en función de los valores de u y t_k . De esta forma, obtenemos el esquema de diferencias finitas centradas:

$$\mathbf{u}_{tt}(t_k) = \frac{\mathbf{u}(t_{k+1}) - 2\mathbf{u}(t_k) + \mathbf{u}(t_{k-1}))}{(\Delta t)^2} + E(\Delta t)$$

donde $E(\Delta t)$ es el error de aproximación.

El error de aproximación puede despreciarse, dado que cuando $\Delta t \rightarrow 0$, será muy pequeño frente al resto de la expresión.

Por otra parte, de forma análoga, obtendríamos la expresión de u_t :

$$\mathbf{u}_t(t_k) = \frac{\mathbf{u}(t_k) - \mathbf{u}(t_{k-1}))}{(\Delta t)}$$

Así, nos encontramos en condiciones de formular la discretización espacial y temporal del problema de evolución.

Para la discretización temporal, fijamos un entero $N_T \geq 1$, el paso de tiempo $\tau = T/N_T$ y la partición de $[0, T]$:

$$\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_T}\}$$

donde $t_k := k\tau$ para $k = 0, 1, \dots, N_T$. Las aproximaciones en tiempo serán denotadas de la forma:

$$u(\cdot, t^k) = u^k$$

Así, si evaluamos la EDP (8) en los distintos t^{k+1} con $k \geq 1$, y sustituimos las derivadas temporales por los cocientes en diferencias, tendremos el problema semi-discreto, aproximado en tiempo:

3. Aproximación de la solución.
Métodos de elementos finitos.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar los } \mathbf{u}^{k+1} \in V, \text{ con} \\ \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^0 + \tau \mathbf{u}_1 \\ \text{Para } k \geq 1 \\ (\rho(\mathbf{x}) \left(\frac{\mathbf{u}^{k+1} - 2\mathbf{u}^k + \mathbf{u}^{k-1}}{\tau^2} \right), \mathbf{v})_{L^2} + a(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) = b(t^{k+1})(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{array} \right. \quad (19)$$

donde $a(\cdot, \cdot)$ y las $b(t)(\cdot)$ son la forma bilineal y las formas lineales asociadas al problema (8).

Para cada entero $k \geq 1$, tenemos un problema equivalente al problema (8). De esta forma, estamos en las condiciones de la Sección 2.2 y cada uno de estos problemas posee solución única. Por otra parte, las técnicas que hemos descrito en la sección anterior, nos permiten construir aproximaciones numéricas de (19).

A continuación, elegimos una estrategia P_φ -Lagrange para la resolución numérica del problema (19) y suponemos dada una familia regular de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$. Para cada $\tau = T/N_T$ y cada $h > 0$, podemos construir una aproximación $\mathbf{u}_{\tau,h}$ de \mathbf{u} de la siguiente forma:

- $\mathbf{u}_{\tau,h} : [0, T] \mapsto V_h$ es continua y afín a trozos.
- $\mathbf{u}_{\tau,h}(0) = \mathbf{u}_{0,h}$ y $\mathbf{u}_{\tau,h}(\tau) = \mathbf{u}_{1,h}$, serán las aproximaciones de \mathbf{u}^0 y \mathbf{u}^1 en V_h respectivamente.
- $\mathbf{u}_{\tau,h}(t^{k+1}) = \mathbf{u}_h^{k+1}$, será la solución aproximación de (19) determinada por \mathcal{T}_h .

Finalmente, partiendo del problema (19), llegamos al siguiente problema finito-dimensional, que aproxima en espacio y tiempo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar los } \mathbf{u}_h^{k+1} \in V, \text{ con} \\ \mathbf{u}_h^0 = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_h^1 = \mathbf{u}_h^0 + \tau \mathbf{u}_1 \\ \text{Para } k \geq 1 \\ (\rho(\mathbf{x}) \left(\frac{\mathbf{u}_h^{k+1} - 2\mathbf{u}_h^k + \mathbf{u}_h^{k-1}}{\tau^2} \right), \mathbf{v}_h)_{L^2} + a(\mathbf{u}_h^{k+1}, \mathbf{v}_h) = b(t^{k+1})(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \end{array} \right. \quad (20)$$

Los problemas que dan lugar a las \mathbf{u}_h^{k+1} se pueden escribir también así:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar los } \mathbf{u}_h^{k+1} \in V, \text{ con} \\ \mathbf{u}_h^0 = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_h^1 = \mathbf{u}_h^0 + \tau \mathbf{u}_1 \\ \text{Para } k \geq 1 \\ (\rho(\mathbf{x}) (\mathbf{u}_h^{k+1}), \mathbf{v}_h)_{L^2} + \tau^2 a(\mathbf{u}_h^{k+1}, \mathbf{v}_h) = \tau^2 b(t^{k+1})(\mathbf{v}_h) \\ \quad + (\rho(\mathbf{x}) (2\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k-1}), \mathbf{v}_h)_{L^2} \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \end{array} \right. \quad (21)$$

3.3 Algunos resultados de convergencia

Una vez hemos visto cómo discretizar nuestros problemas, para así poder averiguar una solución aproximada, vamos a proceder a estudiar la convergencia de la solución aproximada hacia la solución \mathbf{u} del problema original.

Nuestro objetivo es que la solución aproximada sea lo más parecida posible a la solución real. Por lo tanto, nos interesa dar condiciones que garanticen la convergencia.

3.3.1 Problema estacionario discretizado

En primer lugar, consideramos el problema estacionario.

Teorema 3.2 (Lema de Cea). *Existe una constante $C > 0$ independiente del subespacio V_h tal que:*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1} \leq C \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{H^1}. \quad (22)$$

Demostración. Para cada $\mathbf{v}_h \in V_h$ tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1}^2 &\leq a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \\ &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \\ &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ &\leq M \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1} \leq \frac{M}{\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{H^1} \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h,$$

de donde se tiene (22). ■

3. Aproximación de la solución.
Métodos de elementos finitos.

Observación 3.2. En consecuencia, una condición suficiente para que haya convergencia, es que la familia $\{V_h\}$ de subespacios de V verifique para cada $\mathbf{u} \in V$ lo siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{H^1} = 0.$$

La desigualdad (22) no por simple deja de ser muy importante, dado que muestra que el problema de estimar el error $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|$, se reduce al problema de aproximación entre una función $\mathbf{u} \in V$ y un subespacio $V_h \subset V$:

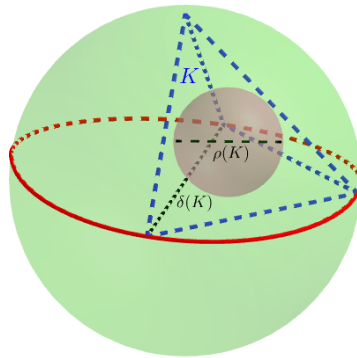
$$d(\mathbf{u}, V_h) = \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{H^1}.$$

A continuación, utilizaremos la notación:

$$\delta(K) := \sup_{x, x' \in K} |x - x'| \quad (\text{el "diámetro" de } K),$$

$$\rho(K) := \text{máx}\{\delta(B) : B \text{ es una bola, } B \subset K\} \quad (\text{el "grosor" de } K)$$

Que hacen referencia a conceptos que pueden apreciarse en la siguiente imagen tridimensional:



Teorema 3.3. Supongamos que $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ es una familia regular de triangulaciones, es decir:

1. $\delta_h := \text{máx}_{K \in \mathcal{T}_h} \delta(K) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.
2. Existe una constante $C > 0$ tal que

$$\text{máx}_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\delta(K)}{\rho(K)} \leq C \quad \forall h > 0.$$

Entonces $u_h \rightarrow u$ en V cuando $h \rightarrow 0$.

La demostración puede encontrarse en [2].

Veamos ahora un resultado que indica el orden de convergencia, suponiendo una regularidad suficiente de la solución:

| Teorema 3.4. *Supongamos que $V = Z^N$ con $Z = H^1(\Omega)$ ó $Z = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega) : \mathbf{v} = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}$, entonces:*

- $\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)} = 0$
- Si $1 \leq k \leq \ell$ y $u \in H^{k+1}(\Omega)^N$, se tiene que $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C(k)h^k \|\mathbf{u}\|_{H^{k+1}}$.

La demostración puede consultarse en [6].

Observación 3.3. Si \mathbf{u} es suficientemente regular, en función de la aproximación P_ℓ -Lagrange que tomemos, tendremos un orden de convergencia u otro. Por ejemplo, para la aproximación P_1 -Lagrange tendremos orden de convergencia uno, y para P_2 -Lagrange el orden será dos.

3.3.2 Problema de evolución discretizado

Veamos ahora un resultado de convergencia para la solución del problema aproximado de evolución (20).

| Teorema 3.5. *Supongamos que las soluciones $\mathbf{u}_{\tau,h}$ de los problemas (20) corresponden a valores de τ y h que verifican*

$$\tau \rightarrow 0^+, h \rightarrow 0^+ \quad \text{y} \quad \frac{\tau}{h} \leq C. \quad (23)$$

entonces

$$\|\mathbf{u}_{\tau,h} - \mathbf{u}\|_{L^2(0,T;V)} \rightarrow 0$$

Para la demostración, véase por ejemplo [12]

La condición (23) empezó a aparecer en los trabajos de Courant, Friedrichs y Lewy en la década de 1920. En honor a ellos recibe el nombre de condición CFL. Para una profundización mayor puede consultarse [7, 11].

4 | Aplicaciones

En el capítulo anterior hemos visto que, partiendo de un problema basado en ecuaciones diferenciales, el MEF nos conduce a un problema finito-dimensional de carácter numérico-algebraico. Con carácter general, proporciona valores numéricos en un número de puntos (nodos), para posteriormente interpolar la solución al resto del dominio. De esta forma obtenemos finalmente la solución aproximada.

En este capítulo vamos a ver experiencias numéricas basadas en el MEF. Por tanto, describiremos las tareas que son necesarias desde el punto de vista de la programación para llevar a cabo un cálculo. Se distinguen tres etapas:

- **Preproceso:** En esta etapa se define la geometría y se generan las mallas de forma adecuada, para garantizar una buena aproximación. También, se fijan los datos (en la práctica, las propiedades de los materiales que estamos considerando) y se introducen las condiciones de contorno.
- **Cálculo:** En esta etapa obtenemos los resultados numéricos. Podemos diferenciar aquí problemas de dos tipos:
 - Problemas estacionarios. En este caso se genera un sistema de N ecuaciones y N incógnitas, que se resuelve con un algoritmo adecuado.
 - Problemas dependientes del tiempo. En este caso la tarea consistirá en resolver una colección finita de sistemas de N ecuaciones y N incógnitas. Los problemas se resolverán de forma progresiva, teniendo en cuenta que los datos del problema siguiente dependen de los resultados del anterior.
- **Postproceso:** Una vez se ha realizado el cálculo y analizados los resultados, se pueden aplicar operaciones de suavizado y ajuste de mallas, con el objetivo de llevar a cabo nuevos cálculos. Por otra parte, también se pueden determinar estimaciones de errores de aproximación. Finalmente, en esta etapa procedemos a visualizar y almacenar los resultados.

4. Aplicaciones

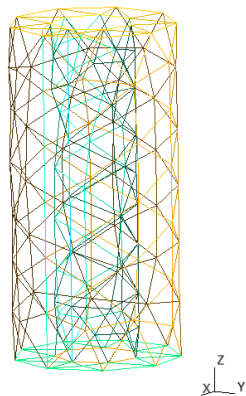
A continuación vamos a describir algunas experiencias numéricas. Previamente especificaremos los programas informáticos que se han utilizado:

- En la etapa de preproceso se ha utilizado el programa **Gmsh** para la construcción de las mallas. Se ha respetado la enumeración que realiza el programa tanto a las superficies como volúmenes que se han generado. Tal enumeración es fundamental, dado que nos permite asignar las condiciones de contorno a las superficies correspondientes.
- En la etapa de cálculo el programa utilizado ha sido **FreeFem++** [9].

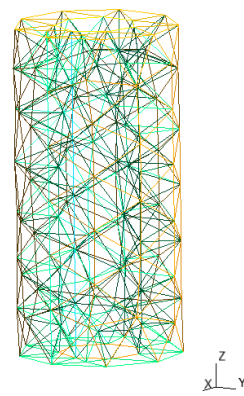
En todos los casos, hemos considerado problemas 3D estacionarios y hemos elegido una aproximación P_2 -Lagrange.

4.1 Experiencia numérica. Tubería a presión

En este primer caso se estudia la deformación que se produce en una tubería sometida a la presión interna que genera el agua. Empezaremos con la etapa de preproceso construyendo la malla. De este modo, obtenemos una triangulación 2D de las superficies y un mallado 3D, basado en tetraedros, del volumen:



Triangulación 2D



Triangulación 3D

En este caso la triangulación 3D está formada por:

- 143 nodos
- 286 triángulos
- 394 tetraedros

Los datos del problema son:

- $\mu = 8.0709 \cdot 10^5$, $\lambda = 1.2115 \cdot 10^6$ (Coeficientes de Lamé del acero, en unidades Kp/cm^2).
- $f \equiv (2x_1, 2x_2, -1)$ (expansión interior + gravedad).
- $g \equiv (0, x_3, 0)$ (efecto del viento en la dirección x_2 , proporcional a la altura).
- Se impone condición de Dirichlet $\mathbf{u} = 0$ sobre la base.

Utilizando la malla anterior pasamos a la etapa de cálculo y así vemos las deformaciones que se producen:

Fig 1. Desplazamiento en x_1

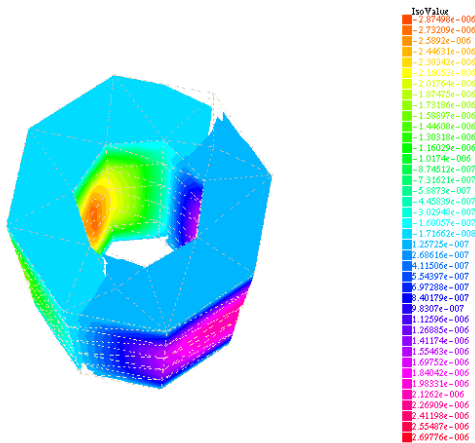


Fig 2. Desplazamiento en x_2

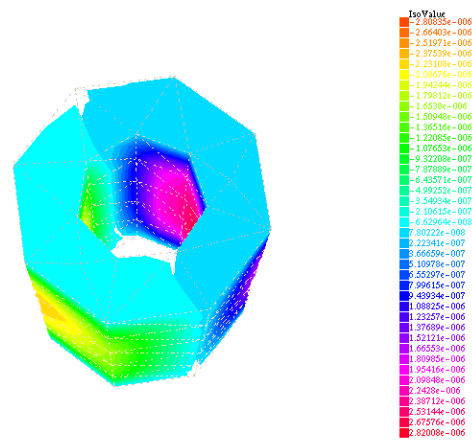


Fig 3. Desplazamiento en x_3

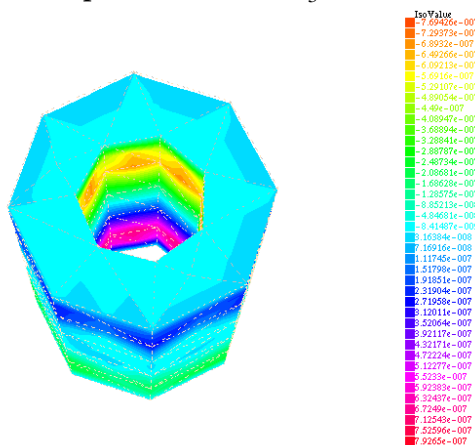
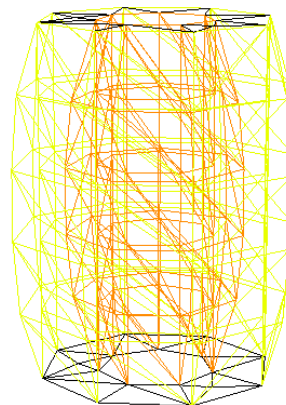


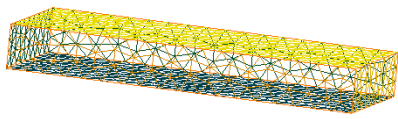
Fig 4. Mallados original y deformado



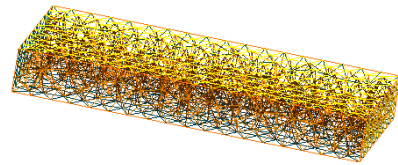
Las figuras 1, 2 y 3 describen las deformaciones, en las direcciones de los ejes cartesianos, producidas por la presión del agua en el interior de una tubería. Finalmente, en la figura 4 se superponen la malla del resultado final, generado por la presión, con el estado inicial.

4.2 Experiencia numérica. Plataforma

En este caso se analiza la deformación producida en la plataforma de un puente o viaducto, sometida a la fuerza de la gravedad, que permanece fija en los extremos. Previamente se construye la malla de la plataforma. Así, tenemos una nueva triangulación 2D de las superficies y un nuevo mallado 3D del volumen:



Triangulación 2D



Triangulación 3D

En este caso la triangulación 3D está formada por:

- 639 nodos
- 1104 triángulos
- 1998 tetraedros

Los datos del problema son:

- μ y λ como en la experiencia precedente.
- $f \equiv (0, 0, -1)$ (gravedad).
- $g \equiv (0, 0, 0)$ (no hay tracción).
- Se impone condición de Dirichlet $\mathbf{u} = 0$ sobre los apoyos laterales.

Una vez diseñada la malla se pasa a la etapa de cálculo que nos muestra las deformaciones que se producen:

Fig 5. Desplazamiento en x_1

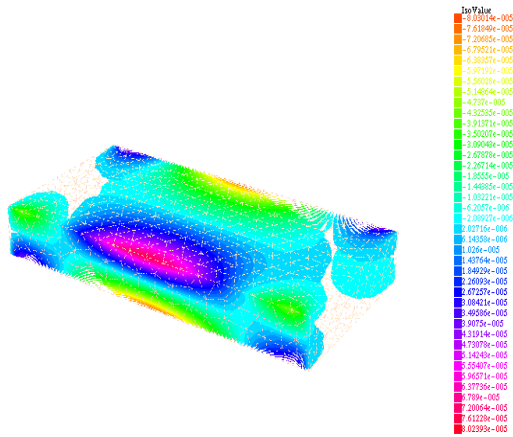


Fig 6. Desplazamiento en x_2

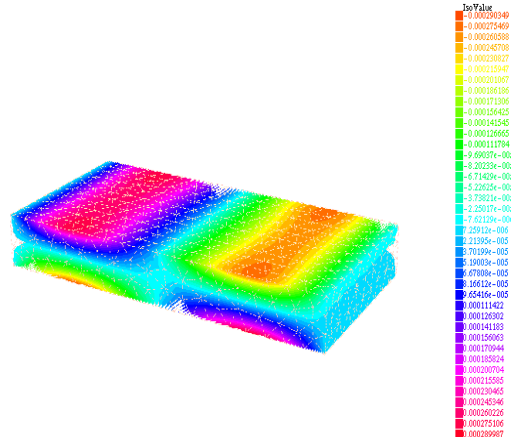


Fig 7. Desplazamiento en x_3

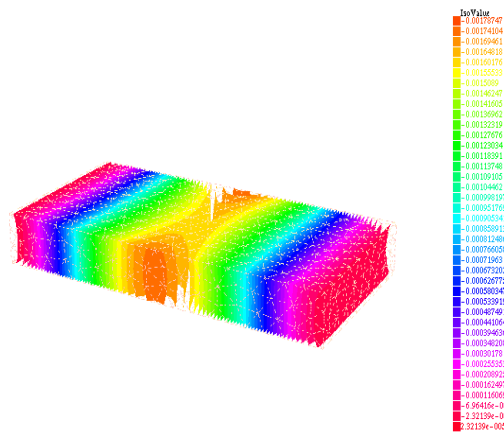
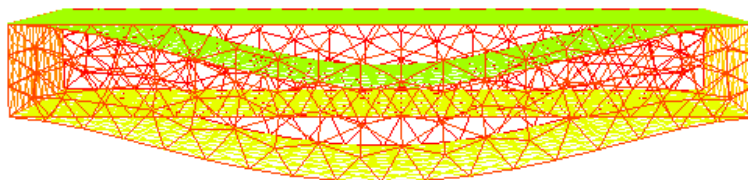


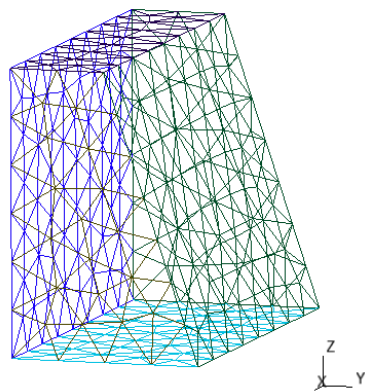
Fig 8. Mallados original y deformado



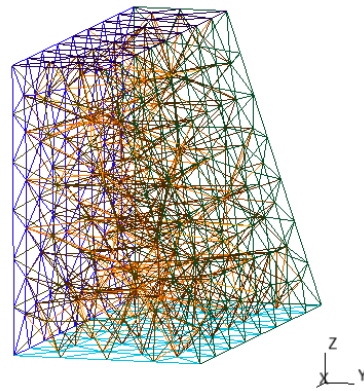
Las figuras 5, 6 y 7 describen las deformaciones, en las direcciones de los ejes cartesianos, producidas por la acción de la fuerza de la gravedad. Finalmente, en la figura 8 se superponen la malla del resultado final (obviamente amplificado), generado por la acción de la gravedad, con el estado inicial.

4.3 Experiencia numérica. Presa de gravedad

En esta ocasión se describe la deformación que se produce en una presa de gravedad. En una primera etapa se construye la malla de la forma geométrica que se considera en esta presa, resultando la triangulación y el mallado siguientes:



Triangulación 2D



Triangulación 3D

En este caso la triangulación 3D está formada por:

- 238 nodos
- 488 triángulos
- 865 tetraedros

En este caso, fijamos los datos siguientes:

- $\mu = 1.125 \cdot 10^5$, $\lambda = 7.5 \cdot 10^4$ (Coeficientes de Lamé del hormigón, en unidades Kp/cm^2).
- $f \equiv (0, 0, -1)$ (gravedad).
- $g \equiv (0, x_3, 0)$ (efecto del viento y el agua en la dirección x_2 , proporcional a la altura).
- Se impone de nuevo la condición $\mathbf{u} = 0$ sobre la base.

Utilizando la malla anterior, la etapa de cálculo describe las siguientes deformaciones:

Fig 9. Desplazamiento en x_1

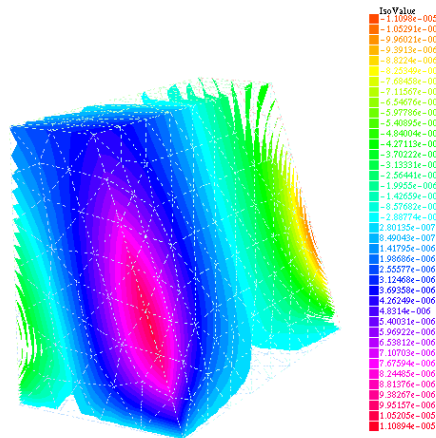


Fig 10. Desplazamiento en x_2

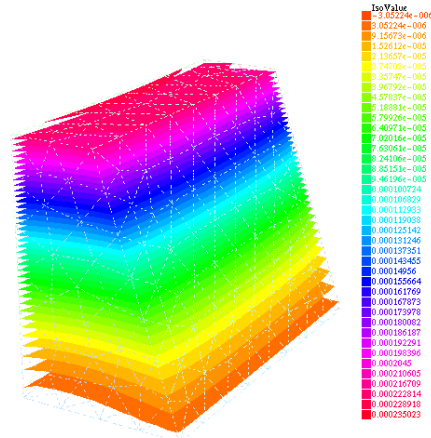


Fig 11. Desplazamiento en x_3

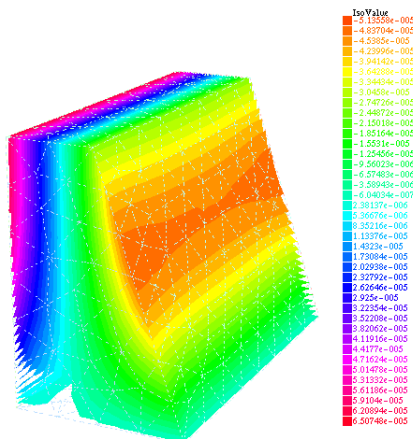
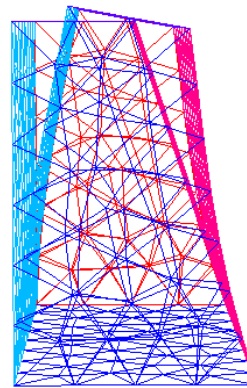


Fig 12. Mallados original y deformado



Las figuras 9, 10 y 11 describen las deformaciones, en las direcciones de los ejes cartesianos, producidas por la acción del viento y el agua sobre la presa. Finalmente, en la figura 12 se superponen la malla del resultado final, generado por la acción del viento y el agua, con el estado inicial.

Bibliografía

- [1] ALLAIRE, G. *Numerical Analysis and Optimization*. Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [2] BRENNER, S. C., AND SCOTT, L. R. *The mathematical theory of finite element methods*, 2 ed. Texts in Applied Mathematics, 15. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [3] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [4] CIARLET, P. G. *Mathematical elasticity. Vol. I. Three-dimensional elasticity*. Studies in Mathematics and its Applications, 20. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988.
- [5] CIARLET, P. G. *Mathematical elasticity. Vol. III. Theory of Shells*. Studies in Mathematics and its Applications. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1997.
- [6] CIARLET, P. G. *The finite element method for elliptic problems*. Classics in Applied Mathematics, 40. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002.
- [7] COURANT, R., FRIEDRICHS, K., AND LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM journal of Research and Development* 11, 2 (1967), 215–234.
- [8] DUVAUT, G., AND LIONS, J. L. *Inequalities in mechanics and physics*. Springer-Verlag, Berlin- New York, 1976.
- [9] HECHT, F., PIRONNEAU, O., HYARIC, A., AND OHTSUKA, K. *Manual Freefem++*.
- [10] OLIVELLA, X., AND DE SARACIBAR, C. *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Politext. Edicions de la UPC, S.L., 2002.
- [11] QUARTERONI, A., SACCO, R., AND SALERI, F. *Numerical Mathematics*, 2 ed. Texts in Applied Mathematics, 37. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

BIBLIOGRAFÍA

- [12] TEMAM, R. *Navier Stokes equations. Theory and Algorithms*. North-Holland, Amsterdam, 2001.