UNIVERSIDAD DE SEVILLA

MODOS DE CONVERGENCIA

Daniel Pineda Santos

MODOS DE CONVERGENCIA

Daniel Pineda Santos

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Profª. Drª. Mª Carmen Calderón Moreno
Prof. Dr. José Antonio Prado Bassas

Índice general

Resumen

El objetivo de este trabajo es mostrar al lector varios modos de convergencia de sucesiones de funciones, estos son: Convergencia Puntual, Uniforme, Puntual en casi todo, Uniforme en casi todo, Casi Uniforme, en Medida y en norma L^1. La convergencia Puntual y Uniforme son conocidas para los estudiantes del Grado en Matemáticas. Sin embargo, los otros cinco modos de convergencia son menos conocidos para la mayoría de estos estudiantes. Por tanto, vamos estudiarlos con detalle, además de ver las relaciones que existen entre ellos. Finalmente, en el último Capítulo, vamos a intentar dar un paso más, y estudiaremos si la diferencia entre algunos de estos modos es muy grande en el sentido algebraico, utilizando para ello la Teoría de Lineabilidad.

Abstract

The aim of this work is to study several modes of convergence of sequences of functions, such as: Pointwise, Uniformly, Pointwise almost everywhere, Uniformly almost everywhere, Almost Uniformly, in Measure and L^1 norm convergence. Pointwise and Uniform convergence are familiar to students of the Mathematics Degree. However, the others five modes are not well known for most students. Therefore, we will study them carefully and we will see the relationships between them. Finally, in the last chapter, we will try to go further, and we are going to study if the difference between some of these modes of convergence is large in an algebraic sense, using the modern Lineability Theory.

Introducción

A lo largo de este Trabajo Fin de Grado vamos a ir desarrollando diferentes modos de convergencia de sucesiones de funciones existentes en el campo del Análisis Matemático. En este desarrollo, en primer lugar definiremos formalmente el modo de convergencia en cuestión y, en segundo lugar, daremos resultados y ejemplos para una mejor comprensión de lo que se está estudiando. Al mismo tiempo, iremos constantemente viendo la relación entre los diferentes modos de convergencia.

Así, en el Capítulo 1, nos centraremos en estudiar la convergencia Puntual y la convergencia Uniforme de una sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, siendo X un conjunto cualquiera. Como ya se ha mencionado, estos dos modos de convergencia son conocidos por los estudiantes del Grado en Matemáticas, por lo que se omitirán muchas demostraciones (que pueden verse en [3]). Además, también veremos que si establecemos una medida en X, esto nos generará otros dos nuevos modos de convergencia, la convergencia Puntual e.c.t. X y la convergencia Uniforme e.c.t. X.

Siguiendo en la misma línea, es decir, trabajando sobre un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, en el Capítulo 2, estudiaremos la convergencia Casi uniforme y la convergencia en Medida. Además, observaremos que las diferentes relaciones entre estos dos modos de convergencia y los anteriores podrán verse modificados si nuestro conjunto X posee medida finita o infinita. Así, haremos una distinción entre ambos casos, cuyos resultados serán resumidos en dos tablas distintas al final del mismo Capítulo. La gran mayoría de resultados incluidos en este Capítulo pueden consultarse en

[4, 5, 6, 7].

En el Capítulo 3, vamos a estudiar la convergencia en norma L^1. Si bien es cierto que seguiremos trabajando sobre un espacio de medida como en el Capítulo anterior, en este nuevo modo de convergencia por su propia naturaleza, necesitaremos recordar algunas definiciones y resultados que tratan sobre normas y espacios normados, los cuáles deben ser vistos en un curso básico de Análisis Funcional. Otra particularidad adicional, aparte de la hipótesis de finitud de $\mu(X)$, se presenta cuando nuestra sucesión de funciones está “dominada” por una función absolutamente integrable. Así, de nuevo veremos cómo cambian las relaciones entre los distintos modos de convergencia, teniendo en cuenta estos dos factores y dando un esquema general al final del capítulo, donde recogemos todas las relaciones vistas a lo largo de la memoria, bajo todas las hipótesis adicionales que nos han ido surgiendo. La gran mayoría de resultados incluidos en este Capítulo pueden consultarse en [6, 8].

Por último, en el Capítulo 4, veremos si la diferencia entre algunos de estos modos de convergencia es grande en un sentido algebraico. Para ello, vamos a valernos de una teoría relativamente reciente en Matemáticas, la Teoría de Lineabilidad. La idea será utilizar ejemplos como los que hemos ido dando a lo largo de la memoria para demostrar que conjuntos cuyos elementos son sucesiones de funciones que convergen de algún modo de los que hemos visto, pero no en otro modo distinto, contiene, salvo la sucesión nula, un espacio vectorial de dimensión “grande”. La gran mayoría de resultados incluidos en este Capítulo pueden consultarse en [1, 2, 4].

1 Convergencias Simples

En este primer Capítulo, vamos a recordar los dos modos de convergencias que se suelen ver en el Grado en Matemáticas: la convergencia Puntual y la convergencia Uniforme. Daremos algunos resultados también vistos en el Grado, por lo que omitiremos su demostración, además de ejemplos y algunas gráficas para entender y visualizar mejor lo que se está estudiando.

1.1 Convergencia Puntual y Uniforme

Todos los resultados de esta sección serán omitidos por lo explicado anteriormente, no obstante, podemos encontrar su demostración con detalle en [3].

1.1.1 Convergencia Puntual

En primer lugar, vamos a definir lo que es una sucesión de funciones:

Definición 1.1. *Sea X un conjunto cualquiera y sea $\mathcal{F}(X) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$. Una sucesión de funciones de X es una aplicación $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(X)$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\varphi(n) = f_n$. Denotaremos la sucesión de funciones por $(f_n)_n$ o simplemente f_n.*

En segundo lugar vamos a ver el concepto de convergencia Puntual, para ello veamos las siguientes definiciones:

Definición 1.2. *Sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ una sucesión de funciones y consideremos el conjunto $B := \left\{ x \in X : \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \right\}$. La función $f : B \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ se denomina función límite puntual de la sucesión $(f_n)_n$.*

Definición 1.3 (Convergencia Puntual). *Decimos que la sucesión de funciones $(f_n)_n$ converge Puntualmente hacia f en B, si $f(x)$ es la función límite puntual de la sucesión $(f_n)_n$.*

Observación 1.1. Observemos que el conjunto B no tiene por qué ser igual a todo X en todos los casos. Por ejemplo, si consideramos la sucesión de funciones $f_n(x) := x^n$ definida sobre $X = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, vemos que $-1 \in X$ pero en cambio $-1 \notin B$, pues no existe $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$.

Observación 1.2. Por definición de límite, también se puede definir la convergencia puntal de la siguiente forma. Decimos que la sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ converge puntualmente hacia una función $f(x)$ cuando para cada $x \in X$ y cada $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ (que depende de x y de ε) tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para cada $n \geq k$.

A continuación, vamos a ver un par de ejemplos de sucesiones de funciones que convergen Puntualmente hacia una función límite puntual como hemos visto anteriormente. Por simplicidad, supondremos que $f_n : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, es decir, nuestro conjunto X va a ser un subconjunto A de la recta real.

Ejemplo 1.1. La sucesión de funciones $f_n(x) := \dfrac{x}{1+nx}$ $(n \geq 1)$ definida sobre $A = [0, 1]$ converge Puntualmente hacia la función nula en A.

Ejemplo 1.2. La sucesión de funciones $f_n(x) := x^n$ $(n \geq 1)$ definida sobre $A = [0, 1]$ converge Puntualmente hacia la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

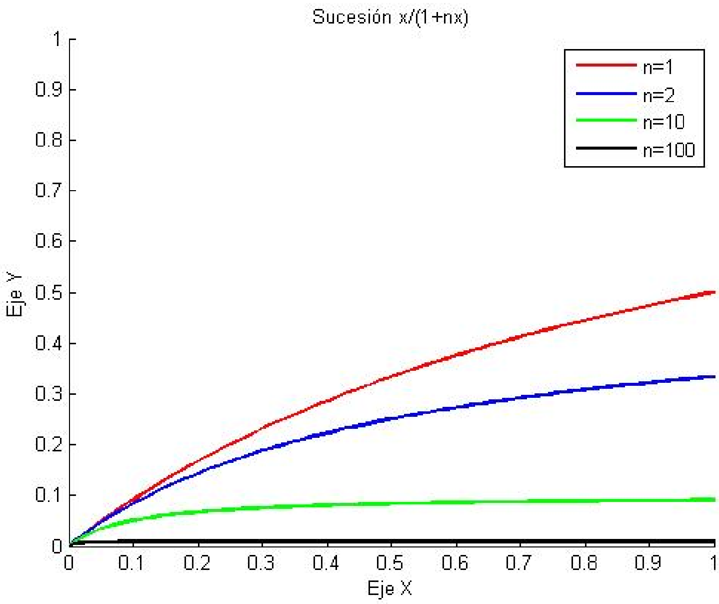

Figura 1.1: Gráfica correspondiente al Ejemplo 1.1

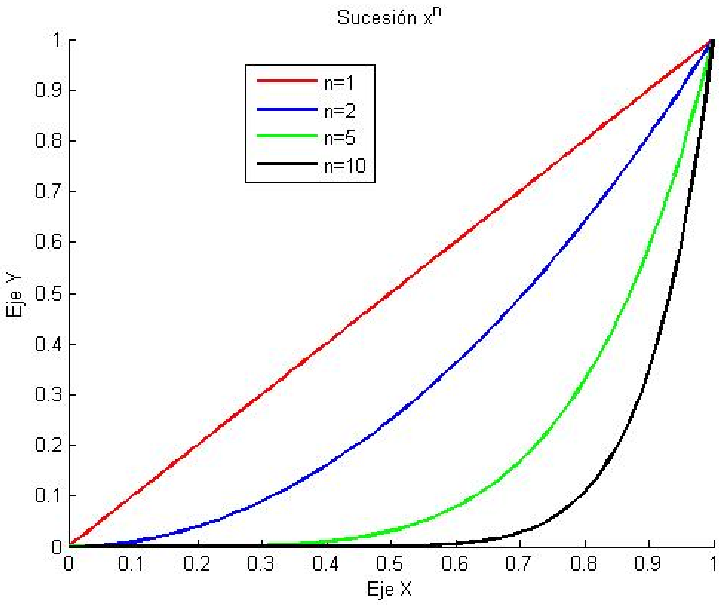

Figura 1.2: Gráfica correspondiente al Ejemplo 1.2

Se puede apreciar de forma clara en la Figura 1.1, que conforme vamos aumentando el valor de n, la sucesión de funciones cada vez se "pega" más al Eje X, es decir,

$(f_n)_n$ tiende a la función nula.

De igual forma, podemos apreciar en la Figura 1.2, que conforme vamos aumentando el valor de n, la sucesión de funciones tiende a la función nula en $[0, 1)$, y cuando se aproxima a $x = 1$, cada vez se "pega" más a la recta vertical ya mencionada.

Observación 1.3. Ya vimos en la Observación 1.1 que los conjuntos A y B no tienen por qué ser iguales.

En el Ejemplo 1.1, la sucesión de funciones converge a la función $f(x) = 0$ si $x \in A$, es decir, los conjuntos A y B son los mismos.

En el Ejemplo 1.2, la sucesión de funciones converge a la función a trozos que hemos dado si $x \in A$, es decir, los conjuntos A y B son los mismos, pero en este caso se tiene que las funciones de la sucesión son continuas A, mientras que la función límite puntual no lo es.

Para evitar esto y propiciar que la función límite herede las "buenas propiedades" de la sucesión de funciones, como pueden ser continuidad, derivabilidad o integrabilidad, necesitamos una definición de convergencia más potente. Esta será la convergencia Uniforme.

1.1.2 Convergencia Uniforme

Definición 1.4 (Convergencia Uniforme). *Sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ una sucesión de funciones, $B \subseteq X$ y $f : B \to \mathbb{R}$. Decimos que $(f_n)_n$ converge Uniformemente hacia f en B (o que f es la función límite uniforme de $(f_n)_n$ en B) cuando para cada $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ (que solo depende de ε) tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para cada $n \geq k$ y para cada $x \in B$.*

Observación 1.4. El k de la definición anterior depende de ε pero no depende de x. El sentido geométrico de esto es que, a partir de la k-ésima función de (f_n), todas las siguientes funciones se sitúan en una banda de anchura 2ε centrada en f (ver Figura 1.3 en la Observación 1.5).

A continuación, vamos a ver una serie de propiedades interesantes, que se dan cuando el dominio de la sucesión de funciones es un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$.

Teorema 1.1 (Condición de Cauchy). *Sea $f_n : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ una sucesión de funciones. Los siguientes enunciados son equivalentes:*
a) $(f_n)_n$ converge Uniformemente a alguna función definida en A.
b) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, para cada $m, n \geq k$ y cada $x \in A$.

Este resultado, aunque no tenga mucha utilidad práctica, es importante desde el punto de vista teórico, pues nos dice si una sucesión de funciones converge o no sin necesidad de conocer la función límite uniforme.

Teorema 1.2. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*
a) $(f_n)_n$ converge Uniformemente a f en A.
b) $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$, donde $M_n := sup\left\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\right\}$.

Este resultado es interesante desde el punto de vista práctico, pues hay veces que resulta complicado demostrar la convergencia Uniforme aplicando directamente la definición. A continuación vamos a ver algún ejemplo.

Ya vimos en el Ejemplo 1.1 que la sucesión de funciones $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$ $(n \geq 1)$ definida sobre $A = [0, 1]$ converge Puntualmente hacia la función nula en A. Veamos ahora que también tenemos convergencia Uniforme. En efecto, dado que

$$\left|\frac{x}{1+nx} - 0\right| = \frac{x}{1+nx} < \frac{1}{n},$$

fijado $\varepsilon > 0$, como $1/n$ tiende a 0, se deduce la existencia de $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$ para todo $n \geq k$, luego $\left|\dfrac{x}{1+nx} - 0\right| < \varepsilon$, para cada $x \in A$ y cada $n \geq k$.

Si aplicamos el Teorema 1.2 que acabamos de ver, tendremos que:

$$M_n = sup\left\{\frac{x}{1+nx} : x \in A\right\} \leq \frac{x}{nx} = \frac{1}{n} \text{ y } \lim_{n\to\infty} M_n = 0$$

por lo tanto f_n converge Uniformemente a la función nula en A.

Observación 1.5. De igual forma, se comprueba que f_n converge Uniformemente a la función nula en $[0, +\infty)$. Aquí, tenemos la representación gráfica, y en ella podemos observar lo que dijimos en la Observación 1.4, a partir de $k = 5$, todas las funciones f_n con $n \geq 5$ quedan "encerradas" en una banda de anchura $\varepsilon = 0,2$.

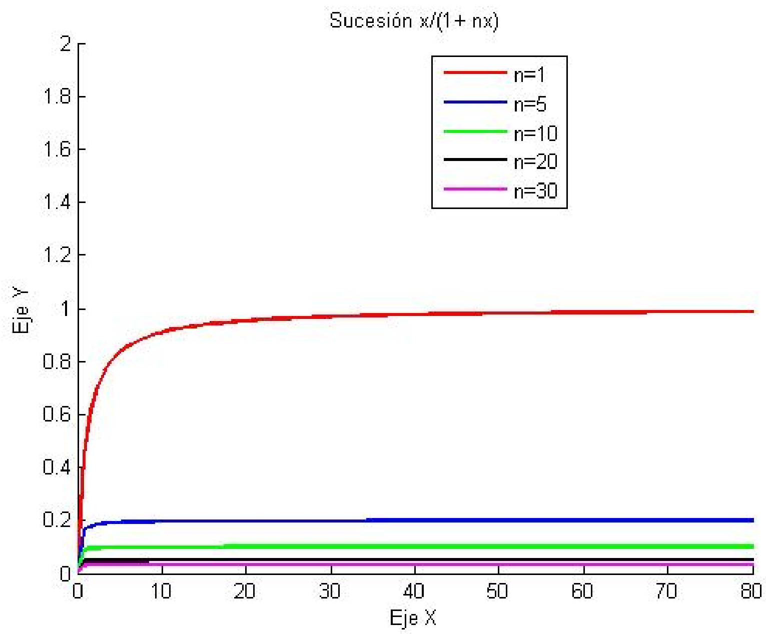

Figura 1.3: Gráfica correspondiente a la Observación 1.5 anterior

Más adelante (Observación 1.8) veremos un ejemplo de lo que ocurre cuando la convergencia no es Uniforme, para así poder comparar gráficamente las diferencias presentes cuando se tiene la convergencia Uniforme y cuando no.

Teorema 1.3 (Convergencia Uniforme ⇒ Convergencia Puntual). *Sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ una sucesión de funciones que converge Uniformemente a una función $f : B \subseteq X \to \mathbb{R}$ en B, entonces $(f_n)_n$ converge Puntualmente hacia f en B.*

Demostración. Supongamos que $(f_n)_n$ converge Uniformemente a f en B, entonces por definición se tiene que:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall n \geq k \text{ y } \forall x \in B.$$

Así, tomando $x = t$ tenemos que $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$, para todo $n > k$ y esto lo que quiere decir es que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ para todo $t \in B$, es decir f es la función límite puntual de $(f_n)_n$ en B. ∎

Veamos que el recíproco no es cierto, es decir, si tenemos que una sucesión de funciones $(f_n)_n$ converge Puntualmente a f en B, esta no tiene necesariamente que converger a f Uniformemente en B.

Ejemplo 1.3 (Convergencia Puntual $\not\Rightarrow$ Convergencia Uniforme). Vamos a utilizar la sucesión de funciones $f_n(x) = x^n$ $(n \geq 1)$ definida sobre $A = [0, 1]$ vista en el Ejemplo 1.2, donde ya demostramos que era Puntualmente convergente hacia la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Aplicando el Teorema 1.2, se puede ver que

$$M_n = \sup\left\{|f_n(x) - f(x)| \,:\, x \in A\right\} \geq \sup\left\{x^n \,:\, x \in [0, 1)\right\} = 1,$$

luego $\lim\limits_{n\to\infty} M_n \neq 0$ y por tanto no hay convergencia Uniforme.

Además, la convergencia Uniforme posee algunas propiedades algebraicas que la convergencia Puntual no tiene. Antes de verlas vamos a ver una definición interesante que nos servirá para enunciar dichas propiedades. De nuevo, por comodidad vamos a suponer que están definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$.

Definición 1.5. *Una sucesión de funciones $(f_n)_n$ se dice que es Uniformemente acotada en A cuando existe $M \in (0, +\infty)$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para cada $x \in A$ y cada $n \in \mathbb{N}$.*

Proposición 1.1. Sean $(f_n)_n$ y $(g_n)_n$ dos sucesiones de funciones definidas en un mismo $A \subset \mathbb{R}$, tales que ambas convergen Uniformemente a f y g respectivamente en A. Entonces se cumple lo siguiente:

a) La sucesión $f_n + g_n$ converge Uniformemente a $f + g$ en A.

b) Si $(f_n)_n$ y $(g_n)_n$ son Uniformemente acotadas, entonces se tiene que $f_n \cdot g_n$ converge Uniformemente a $f \cdot g$.

Aparte de estas propiedades algebraicas, la convergencia Uniforme también respeta la continuidad, derivabilidad e integrabilidad.

Proposición 1.2 (Continuidad). Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones que converge Uniformemente a f en $A \subset \mathbb{R}$. Si cada función f_n es continua en A (es decir, en todos los puntos de A), entonces f es continua en A.

Observación 1.6. Observemos que el ejemplo típico de una sucesión de funciones $(f_n)_n$ que converge Puntualmente hacia una función límite puntual f, pero no lo hace Uniformemente es aquel en el que todas las funciones de $(f_n)_n$ son continuas en su dominio de definición pero la función límite puntual no lo es. Ejemplo de esto es la sucesión de funciones $f_n(x) = x^n$ definida sobre $A = [0, 1]$, que como vimos en el Ejemplo 1.2 converge Puntualmente hacia la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

pero posteriormente vimos que no converge Uniformemente hacia dicha función (en el Ejemplo 1.3 aplicando el Teorema 1.2). Bien, pues con esta nueva herramienta, como la función límite puntual no es continua en A y todas las funciones de f_n sí que lo son, sin necesidad de hacer ningún cálculo, podemos asegurar que f_n no converge Uniformemente hacia f.

Observación 1.7. Aunque como hemos dicho anteriormente, lo más usual que nos podemos encontrar es una sucesión $(f_n)_n$ que converja Puntualmente en un intervalo hacia una función f y que no lo haga Uniformemente por el hecho de que, todas las funciones de dicha sucesión son continuas en dicho intervalo pero la función límite no lo es.

Sin embargo, podemos dar ejemplos en los cuales, todas las funciones de $(f_n)_n$ son continuas en el intervalo de definición, la función límite puntual f también lo es y en cambio, la convergencia no es Uniforme. Ejemplo de esto es la sucesión de funciones $f_n(x) := \dfrac{1 + xlog(x)}{nx + x}$ con $x \in (0, +\infty)$. Es claro que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \; \forall x \in (0, +\infty)$, de donde se deduce la convergencia Puntual hacia la función nula en $(0, +\infty)$. Además, todas las funciones de f_n son continuas en $(0, +\infty)$ y la función nula también lo es. En cambio la convergencia no es Uniforme pues, aplicando el Teorema 1.2,

$$M_n \geq f_n(1/n) = \frac{n - log(n)}{n+1}$$

y $\lim_{n\to\infty} \frac{n - log(n)}{n+1} = 1$ por lo que $M_n \not\to 0$, cuando $n \to \infty$. Luego queda demostrada la no convergencia Uniforme.

Observación 1.8. Aquí tenemos la representación gráfica de la sucesión de funciones que hemos visto en la Observación anterior. Al contrario de lo que vimos en la Observación 1.5, como esta sucesión de funciones no converge Uniformemente hacia la función nula, se ve de forma muy intuitiva que no podemos encontrar ningún $k \in \mathbb{N}$ (dependiente de algún ε) como hicimos en la Observación 1.5, de forma que las gráficas de f_n queden encerradas, totalmente, en una banda de altura ε, para todo $n \geq k$.

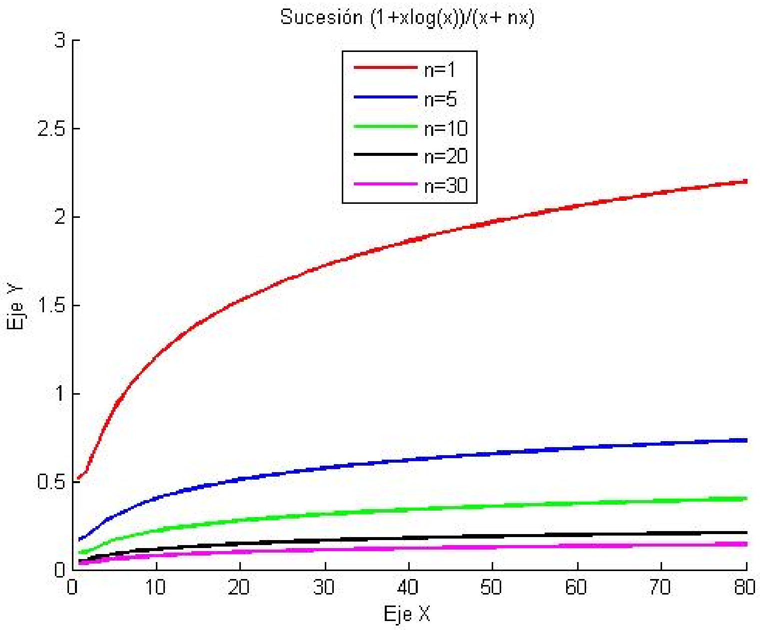

Figura 1.4: Gráfica correspondiente a la Observación 1.8

Veamos los resultados para derivabilidad e integrabilidad.

Proposición 1.3 (Derivabilidad). Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones todas ellas derivables en A tales que:

a) $(f'_n)_n$ converge Uniformemente hacia una función $g(x)$ en A.

b) Existe $x_0 \in A$ de modo que la sucesión numérica $(f_n(x_0))_n$ converge.

Entonces existe $f : A \to \mathbb{R}$ tal que f_n converge Uniformemente a f en A, f es derivable en A y $f'(x) = g(x)$ para cada $x \in A$.

Proposición 1.4 (Integrabilidad). Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones todas ellas integrables (en el sentido Riemann) en A tal que $(f_n)_n$ converge Uniformemente hacia una función f en A, entonces f es integrable Riemann en A y, además,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Observación 1.9. El recíproco no es cierto, pues puede cumplirse que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

pero f_n no necesariamente tiene que converger Uniformemente hacia f. Ejemplo de ello es la sucesión de funciones $f_n(x) := nx(1-x)^n$ con $x \in [0,1]$. Vamos a verlo con mayor detalle.

Por un lado $\lim_{n\to\infty} nx(1-x)^n = 0$ si $x \in [0,1]$. En efecto, $f_n(0) = f_n(1) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y si $x \in (0,1)$, entonces $0 < 1-x < 1$ y es claro que $nx(1-x)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Luego f_n converge Puntualmente hacia la función nula $f(x) = 0$.

Por otro lado

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx(1-x)^n dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)} = 0 = \int_0^1 f(x)dx.$$

Por último, vamos a comprobar la no convergencia Uniforme, para lo que vamos a utilizar el Teorema 1.2. Calculemos en primer lugar $M_n = sup\left\{|f_n(x) - 0| : x \in [0,1]\right\}$. Como $f_n(0) = f_n(1) = 0$ debe existir un valor $\alpha_n \in [0,1]$ donde f_n alcance su máximo, esto es, α_n tal que $f_n(x) \leq f_n(\alpha_n)\ \forall x \in [0,1]$. Para calcular dicho α_n, derivamos $f_n(x)$ e igualamos a cero (calcular su máximo en $[0,1]$):

$$f'_n(x) = n(1-x)^n - n^2x(1-x)^{n-1} = n(1-x)^{n-1}\,(1-(n+1)x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1+n},$$

por tanto, $\alpha_n = \dfrac{1}{1+n}$ y se tiene que

$$M_n = f_n(\alpha_n) = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Así pues, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \dfrac{1}{e} \neq 0$ y concluimos que no hay convergencia Uniforme.

De esta forma hemos visto cómo la condición de convergencia Uniforme es suficiente pero no necesaria para que el límite de las integrales coincida con la integral del límite.

Observación 1.10. Dado que la convergencia Uniforme implica la convergencia Puntual, la función límite puntual y uniforme, en caso de existir, son la misma, es decir, una sucesión de funciones $(f_n)_n$ en caso de converger Puntualmente y Uniformemente en X, lo hace hacia una misma función f.

Si bien es cierto que estos dos tipos de convergencia de sucesiones de funciones son los más habituales en el Grado en Matemáticas, existen otros tipos de convergencia, las cuales vamos a estudiar en este Trabajo Fin de Grado. En las siguientes secciones de este Capítulo, introduciremos algunos modos de convergencia, en los cuales se precisa de un espacio de medida.

1.2 Convergencia Puntual y Uniforme en casi todo

Hasta ahora hemos estado trabajando con funciones definidas en conjuntos. Pero si en dicho conjunto establecemos una medida, podemos definir otros modos de convergencia en base a esta nueva situación. La principal diferencia con lo visto anteriormente es que ahora podemos hablar de convergencia "en casi todo" el conjunto de definición.

1.2.1 Convergencia Puntual en casi todo

En primer lugar, vamos a recordar el concepto de un espacio de medida.

Definición 1.6. *Un espacio de medida es una terna* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *donde:*
a) X *es un conjunto cualquiera distinto del vacío.*
b) $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ *es un* σ*-álgebra de* X*.*
c) μ *es una medida sobre el espacio medible* $(X, \mathcal{M})$*.*

Recordemos también algunos conceptos interesantes que nos han salido en la definición anterior o nos van a aparecer próximamente.

Definición 1.7. *Un conjunto* $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ *es un* σ*-álgebra de* X *si se cumple que:*
1) $X \in \mathcal{M}$*.*
2) Si $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$*.*
3) Si $(A_n)_n \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$*.*
Al espacio $(X, \mathcal{M})$ *se le llama espacio medible y a los conjuntos que están en* $\mathcal{M}$ *se le llaman conjuntos medibles para la* σ*-álgebra* $\mathcal{M}$*.*

Definición 1.8. *Una medida* μ *sobre* $(X, \mathcal{M})$ *es una aplicación* $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ *que cumple:*
1) $\mu(\emptyset) = 0$*.*
2) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *para toda colección de* $(A_n)_n$ *de conjuntos medibles de* X *y disjuntos dos a dos.*

Definición 1.9. *Sea* $(X, \mathcal{M})$ *un espacio medible cualquiera, se dice que* $f : X \to \mathbb{R}$ *es una función medible si el subconjunto* $f^{-1}(G)$ *de* X *es medible para todo conjunto abierto* G *de* $\mathbb{R}$*.*

A todas estas definiciones previas, se le pueden añadir proposiciones y teoremas que las complementan, pero no nos serán de gran utilidad en el trabajo (ver [3]). Ahora sí, vamos a ver la definición de convergencia Puntual en casi todo X:

Definición 1.10 (Convergencia Puntual e.c.t. X). *Sea* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espacio de medida y sean* $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ *funciones medibles. Decimos que* $(f_n)_n$ *converge Puntualmente en casi todo* X *(Puntualmente e.c.t.* X*) si:*

$$\mu\left(\left\{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}\right) = 0.$$

Observación 1.11. En todo este capítulo, vamos a suponer que la medida de X, $\mu(X)$, puede ser cualquiera, es decir, puede ser tanto finita como infinita. Más adelante, veremos que si nos restringimos al caso finito ($\mu(X) < +\infty$), algunas relaciones pueden variar.

Observación 1.12 (Convergencia Puntual $\Rightarrow$ Convergencia Puntual e.c.t. X). Es fácil ver esto pues, si $f_n \to f$ Puntualmente en X, entonces se tiene que:

$$\mu\left(\left\{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}\right) = \mu(\emptyset) = 0$$

por tanto $f_n \to f$ Puntualmente e.c.t. X. Luego, cualquier ejemplo de sucesión de funciones $(f_n)_n$ (en las condiciones de la definición anterior) que converge Puntualmente hacia una determinada función f, también lo hará Puntualmente e.c.t. X.

De igual forma, es trivial ver que el recíproco no es cierto.

Observación 1.13 (Convergencia Puntual e.c.t. $X \not\Rightarrow$ Convergencia Puntual). Veamos que la convergencia Puntual e.c.t. X de una sucesión de funciones f_n hacia una función f no implica la convergencia Puntual. Para ver esto vamos a considerar como espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mathrm{m})$, donde m es la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{M}$ la σ-álgebra de conjuntos medibles Lebesgue; y haremos uso del Ejemplo 1.2. En dicho ejemplo, se daba la sucesión de funciones $f_n(x) = x^n$ ($n \geq 1$) definida sobre $[0, 1]$. Es trivial ver que $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ e.c.t. $[0, 1]$, pues

$$m\left(\left\{x \in [0, 1] : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}\right) = m(\{1\}) = 0,$$

luego f_n converge Puntualmente e.c.t. $[0, 1]$ hacia la función nula $f(x) = 0$. En cambio, f_n no converge Puntualmente en $[0, 1]$ hacia $f(x) = 0$ sino que lo hace como ya vimos a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Observación 1.14. La convergencia Puntual en casi todo X tiene una forma análoga en el contexto probabilístico. Así, si tenemos un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, es decir, un espacio de medida donde $P(\Omega) = 1$, y una muestra aleatoria $Y_1, Y_2, ...Y_n$

de una variable aleatoria Y, decir que Y_n converge casi seguro a Y es lo mismo que decir que la "sucesión de funciones" $f_n := Y_n$ converge Puntualmente e.c.t. X hacia la función $f = Y$, (donde X es el dominio de la Variable Aleatoria Y y de las Y_n).

1.2.2 Convergencia Uniforme en casi todo

Estando en las mismas condiciones que hemos nombrado antes, definimos la convergencia Uniforme en casi todo X.

Definición 1.11 (Convergencia Uniforme e.c.t. X). *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ funciones medibles. Decimos que $(f_n)_n$ converge Uniformemente en casi todo X (Uniformemente e.c.t. X) si para cada $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para cada $n \geq k$ y e.c.t. X, o lo que es lo mismo,*

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Observación 1.15 (Convergencia Uniforme $\Rightarrow$ Convergencia Uniforme e.c.t. X). Al igual que ocurría con la convergencia Puntual, es trivial ver que la convergencia Uniforme implica convergencia Uniforme e.c.t. X.

Sin embargo, el recíproco no es cierto en general tal y como se verá más adelante en el Ejemplo 1.5.

Teorema 1.4 (Convergencia Uniforme e.c.t. X $\Rightarrow$ Convergencia Puntual e.c.t. X). *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ funciones medibles. Tenemos que si $(f_n)_n$ converge Uniformemente e.c.t. X hacia f, entonces $(f_n)_n$ converge Puntualmente e.c.t. X hacia f.*

Demostración. Si $(f_n)_n$ converge Uniformemente a f e.c.t. X, entonces $(f_n)_n$ converge Uniformemente a f en $X \setminus A$, donde $A \in \mathcal{M}$ y $\mu(A) = 0$. En particular $(f_n)_n$ converge Puntualmente a f en $X \setminus A$, y tenemos la convergencia Puntual e.c.t. X. ∎

De igual forma, es fácil ver que el recíproco no es cierto en general. De ahora en adelante, en todos los ejemplos, salvo que se diga lo contrario, X será la recta real $\mathbb{R}$

(o algún intervalo suyo), $\mathcal{M}$ será la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue en $\mathbb{R}$ y $\mu = m$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.4 (Convergencia Puntual e.c.t $X \not\Rightarrow$ Convergencia Uniforme e.c.t X). Consideremos la sucesión de funciones $f_n(x) := \chi_{[n,n+1]}(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Esta sucesión converge Puntualmente a la función nula en $\mathbb{R}$ (y por tanto Puntualmente e.c.t. $\mathbb{R}$), pero no lo hace Uniformemente e.c.t. $\mathbb{R}$. En efecto, sabemos que

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{si } x \notin [n, n+1], \end{cases}$$

luego tenemos que para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 < N$, y tenemos $f_n(x_0) = 0$ para todo $n \geq N$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$ y f_n converge Puntualmente a $f = 0$ (y por tanto lo hace Puntualmente e.c.t. $\mathbb{R}$). Pero no lo hace Uniformemente e.c.t. $\mathbb{R}$, pues para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $0 < \varepsilon < 1$,

$$m(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\}) = m([n, n+1]) = 1 \neq 0,$$

y por tanto, la convergencia no es Uniforme e.c.t. $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.5 (Convergencia Uniforme e.c.t. $X \not\Rightarrow$ Convergencia Uniforme). Consideremos $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ y sea $\mathbb{Q}^+$ el conjunto de los números racionales positivos. Consideremos la siguiente sucesión de funciones en $\mathbb{R}^+$ definida como:

$$f_n(x) := \left(\frac{x}{1+nx}\right) \chi_{\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+}(x) + \chi_{\mathbb{Q}^+}(x).$$

Tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ e.c.t. $\mathbb{R}^+$ ($\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \neq 0$ cuando $x \in \mathbb{Q}^+$, de hecho $f_n(x) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$), por tanto $f_n(x)$ converge Puntualmente a la función nula e.c.t. $\mathbb{R}^+$, pues sabemos que $m(\mathbb{Q}^+) = 0$. Además, también vemos que la convergencia no es Puntual en $\mathbb{R}^+$.

Ahora, si vemos $\mathbb{R}^+$ como $\mathbb{R}^+ = (\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+) \sqcup \mathbb{Q}^+$, donde $\sqcup$ simboliza la unión disjunta de conjuntos, vemos que $f_n(x)$ converge Uniformemente e.c.t. $\mathbb{R}^+$ hacia la función nula, pues por un lado, en la Observación 1.5 vimos que $\dfrac{x}{1+nx}$ converge Uniformemente en $\mathbb{R}^+$ (así que converge Uniformemente en $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+$) y por otro lado,

$$m\left(\{x \in X : |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\}\right) = m(\mathbb{Q}^+) = 0.$$

Por tanto, $f_n(x)$ converge Uniformemente e.c.t. $\mathbb{R}^+$.

Sin embargo, es claro que f_n no converge Uniformemente a la función nula en $\mathbb{R}^+$, puesto que no converge Puntualmente.

Veamos un cuadro resumen de lo que llevamos:

$\Rightarrow$	Puntual	Uniforme	Puntual e.c.t.	Uniforme e.c.t.
Puntual	=	No. Ej 1.3	Sí. Obs 1.12	No. Ej 1.4
Uniforme	Sí. Teor 1.3	=	Sí. Teor 1.3 y Obs 1.12	Sí. Obs 1.15
Puntual e.c.t.	No. Obs 1.13	No. Ej 1.5	=	No. Ej 1.4
Uniforme e.c.t.	No. Ej 1.5	No. Ej 1.5	Sí. Teor 1.4	=

2 Convergencia Casi Uniforme y en Medida

En este Capítulo vamos a introducir dos nuevos modos de convergencia, la convergencia Casi Uniforme y la convergencia en Medida. Si bien es cierto que supondremos las mismas condiciones que dimos anteriormente, es decir, vamos a suponer que tenemos $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, $(f_n)_n$ una sucesión de funciones medibles en X y f otra función medible, haremos un inciso para ver qué ocurre cuando la medida de nuestro dominio X es finita.

2.1 Convergencia Casi Uniforme

Definición 2.1 (Convergencia Casi Uniforme). *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ funciones medibles. Se dice que $(f_n)_n$ converge Casi Uniformemente hacia f con respecto a la medida μ en X si para cada $\delta > 0$, existe $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(X \setminus E) < \delta$, tal que $(f_n)_n$ converge Uniformemente hacia f en E.*

Más concretamente, si dados $\varepsilon, \delta > 0$, existe $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(X \setminus E) < \delta$ y existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para cada $n \geq n_0$ y cada $x \in E$.

Observemos que si la definimos así: dados $\varepsilon, \delta > 0$, existe $A \in \mathcal{M}$ con $\mu(A) < \delta$ y existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para cada $n \geq n_0$ y cada $x \in X \setminus A$, la definición es análoga, pues se tendría la relación $E = A^c$ entre una y otra.

Veamos algunas propiedades que posee este tipo de convergencia.

Proposición 2.1 (Unicidad del punto límite). Situados en el marco de la Definición 2.1, si $f_n \to f$ y $f_n \to g$ Casi Uniformemente en X, entonces $f = g$ e.c.t X.

Demostración. Por reducción al absurdo supongamos que

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) > 0.$$

Por comodidad, llamamos $E = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ y por hipótesis, como $f_n \to f$ Casi Uniforme en X, tomando $\delta = \mu(E)/2 > 0$, tenemos que existe $F \in \mathcal{M}$ tal que

$$\mu(X \setminus F) < \mu(E)/2 \text{ y } f_n \text{ converge a } f \text{ Uniformemente en } F.$$

De igual modo, como $f_n \to g$ Casi Uniforme en X, tomando $\delta = \mu(E)/2 > 0$, tenemos que existe $G \in \mathcal{M}$ tal que

$$\mu(X \setminus G) < \mu(E)/2 \text{ y } f_n \text{ converge a } f \text{ Uniformemente en } G.$$

Sea entonces $D = F \cap G \in \mathcal{M}$, como $X \setminus D = (X \setminus F) \cup (X \setminus G)$ tenemos que

$$\mu(X \setminus D) < \mu(E) \text{ y } f_n \text{ converge Uniformemente a } f \text{ y } g \text{ en } D.$$

Esto implica que $f = g$ en D y, por tanto, $D \cap E = \emptyset$. Pero entonces $E \subset X \setminus D$ y tenemos que $\mu(E) \leq \mu(X \setminus D) < \mu(E)$, luego hemos llegado a contradicción. ▮

Proposición 2.2. En las condiciones de la Definición 2.1, si $f_n \to f$ y $g_n \to g$ Casi Uniformemente en X y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces:

1) $f_n + g_n \to f + g$ Casi Uniformemente en X.

2) $\lambda f_n \to \lambda f$ Casi Uniformemente en X.

3) Si existe $M < +\infty$ tal que $|f_n| \leq M$ e.c.t. X, entonces $|f| \leq M$ e.c.t. X.

4) Si existe $M < +\infty$ tal que $|f_n|, |g_n| \leq M$ e.c.t. X, entonces $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ Casi Uniformemente en X.

Demostración.

1)

Para $\delta > 0$ arbitrario existe $F \in \mathcal{M}$ tal que

$$\mu(X \setminus F) < \delta/2 \text{ y } f_n \text{ converge a } f \text{ Uniformemente en } F$$

y existe $G \in \mathcal{M}$ tal que

$$\mu(X \setminus G) < \delta/2 \text{ y } g_n \text{ converge a } g \text{ Uniformemente en } G.$$

Tomando $B = F \cap G$, tenemos que $\mu(X \setminus B) < \delta$ y que f_n y g_n convergen Uniformemente respectivamente hacia f y g en B.

Luego $f_n + g_n \to f + g$ Uniformemente en B (por las propiedades de la convergencia Uniforme en X) y por tanto, de aquí concluimos que $f_n + g_n \to f + g$ Casi Uniforme en X.

2)

Este resultado es trivial si $\lambda = 0$. Si $\lambda \neq 0$, también es fácil de probar, pues $\lambda f_n \to \lambda f$ Casi Uniforme en X si, dado $\delta > 0$, existe $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(X \setminus E) < \delta$ y $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda f_n(x) - \lambda f(x)| < \varepsilon$ $\forall n \geq k$ y $\forall x \in E$. Pero esto es lo mismo (aplicando la propiedad de multiplicación de escalares por valor absoluto) que: $\mu(X \setminus E) < \delta$ y $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/|\lambda|$ $\forall n \geq k$ y $\forall x \in E$, y esto último es cierto porque $(f_n)_n$ converge Casi Uniformemente a f.

3)

Por reducción al absurdo, supongamos que $\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x)| > M\right\}\right) > 0$. Llamemos $E = \left\{x \in X : |f_n(x)| > M\right\}$. Por definición de convergencia Casi Uniforme, dado $\delta = \mu(E) > 0$, podemos encontrar $B \in \mathcal{M}$ con $\mu(X \setminus B) < \mu(E)$ tal que $f_n \to f$ Uniformemente en B. Entonces se tiene que $|f| \leq M$ en B y por tanto $\mu(B \cap E) = 0$. Luego $\mu(E) = \mu(E \setminus B) \leq \mu(X \setminus B) < \mu(E)$ y esto es una contradicción, luego nuestra suposición era falsa y se tiene lo que queremos.

4)

Como en la demostración de 1), para cada $\delta > 0$, $\exists B \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(X \setminus B) < \delta$ y f_n , g_n convergen Uniformemente a f, g respectivamente, en B. Por 3) $|f| \leq M$ e.c.t. X y por tanto existe $C \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(X \setminus C) = 0$ tal que $|f_n|, |g_n|, |f| \leq M$ en C. Sea $D = B \cap C$, tenemos que $\mu(X \setminus D) = \mu(X \setminus B) < \delta$. Ahora, en B tenemos que

$$\begin{aligned} |f_n \cdot g_n - f \cdot g| &\leq |f_n \cdot g_n - f \cdot g_n| + |f \cdot g_n - f \cdot g| \\ &\leq M|f_n - f| + M|g_n - g| \end{aligned}$$

y por tanto $f_n \cdot g_n$ converge Uniformemente en D y concluimos que $f_n \cdot g_n$ converge a $f \cdot g$ Casi Uniformemente en X. ∎

Veamos ahora las relaciones que mantiene esta nueva convergencia con las anteriormente definidas.

Proposición 2.3 (Convergencia Uniforme e.c.t. $X \Rightarrow$ Convergencia Casi Uniforme). Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ funciones medibles. Si $(f_n)_n$ converge Uniformemente e.c.t. X hacia f, entonces $(f_n)_n$ converge Casi Uniformemente hacia f en X.

Demostración. Por hipótesis, como $f_n \to f$ Uniformemente e.c.t. X, por definición tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0\, , \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \;\forall n \geq k \text{ y e.c.t. X} \tag{2.1}$$

o lo que es lo mismo,

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0. \tag{2.2}$$

Llamemos $A = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$. Es claro que $A \in \mathcal{M}$ pues f_n y f son medibles. Además, por (2.2) sabemos que $\mu(X \setminus A) = 0$, luego dado $\delta, \varepsilon > 0$ hemos encontrado $k \in \mathbb{N}$ y un conjunto medible A con $\mu(X \setminus A) < \delta$ y de forma que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para cada $x \in X \setminus A$. Luego $(f_n)_n$ converge Casi Uniformemente hacia f en X. ∎

El recíproco no es cierto en general. Para ello veamos el siguiente contraejemplo.

Ejemplo 2.1 (Convergencia Casi Uniforme $\not\Rightarrow$ Convergencia Uniforme e.c.t X). Sea $X = \mathbb{R}$ y sea la sucesión de funciones en $\mathbb{R}$ dada por $f_n(x) := n\chi_{[1/n, 2/n]}(x)$. Veamos que esta sucesión de funciones converge Puntualmente en $\mathbb{R}$ (y por tanto Puntualmente e.c.t. $\mathbb{R}$) y Casi Uniformemente en $\mathbb{R}$ hacia la función nula, pero no lo hace ni Uniformemente ni Uniformemente e.c.t. $\mathbb{R}$.

La convergencia Puntual en $\mathbb{R}$ es fácil de ver puesto que

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [1/n, 2/n] \\ 0 & \text{si } x \notin [1/n, 2/n] \end{cases}$$

y por tanto, dado $x_0 > 0$ (si $x_0 \leq 0$ se tiene $f_n(x_0) = 0$ siempre) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $2/N < x_0$, luego $f_n(x_0) = 0$ para todo $n \geq N$ y tenemos que $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$. Luego ya tenemos probada la convergencia Puntual en $\mathbb{R}$ (y la Puntual e.c.t. $\mathbb{R}$).

Veamos que no hay convergencia Uniforme en $\mathbb{R}$. Por el Teorema 1.2 del Capítulo anterior,

$$M_n = sup\left\{|f_n(x) - 0| : x \in \mathbb{R}\right\} = sup\left\{|n - 0| : x \in [1/n, 2/n]\right\} = n$$

y $\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0$, luego la convergencia no es Uniforme en $\mathbb{R}$.

Veamos que tampoco es Uniforme e.c.t. $\mathbb{R}$ pues dado $0 < \varepsilon < 1$, tenemos que:

$$m(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\}) = m([1/n, 2/n]) = 1/n \neq 0. \tag{2.3}$$

Luego la convergencia no es Uniforme e.c.t. $\mathbb{R}$. Más adelante, una vez que definamos la convergencia en Medida, veremos que (2.3) implica de manera inmediata que f_n converge en Medida hacia f en $\mathbb{R}$ (ver Observación 2.1 del siguiente apartado).

Por último, lo que nos queda ver es que f_n converge Casi Uniformemente hacia la función nula en $\mathbb{R}$. En efecto, consideremos $F_n \in \mathcal{M}$ donde $F_n = \mathbb{R} \setminus [0, 2/n]$. Dado $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $2/N < \delta$. Entonces $\mu(\mathbb{R} \setminus F_n) = \mu([0, 2/N]) = 2/N < \delta$. Además $f_n(x) = 0$ para todo $x \in F_n$ y todo $n \geq N$, luego esto implica que $f_n(x)$ converge de forma Casi Uniforme hacia la función nula en $\mathbb{R}$.

Proposición 2.4 (Convergencia Casi Uniforme $\Rightarrow$ Convergencia Puntual e.c.t. X). Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ funciones medibles. Si $(f_n)_n$ converge Casi Uniformemente a f en X, entonces se tiene que $(f_n)_n$ converge a f Puntualmente e.c.t. X.

Demostración. Como $f_n \to f$ Casi Uniformemente, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $E_n \in \mathcal{M}$ con $\mu(E_n) < 1/2^n$ y $f_n \to f$ Uniformemente en $X \setminus E_n$. Consideremos ahora para cada $m \in \mathbb{N}$ los conjuntos

$$F_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n$$

y sea F el conjunto definido por

$$F = \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m.$$

Tomando medidas se tiene que:

$$\mu(F_m) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \mu(E_n) < \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{m-1}}$$

luego $\mu(F) \leq \mu(F_m) < \dfrac{1}{2^{m-1}}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, de donde se deduce que $\mu(F) = 0$.

Además, sabemos que:

$$F^c = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_n^c.$$

Como f_n converge Uniformemente y, por tanto, Puntualmente en cada E_n^c, se deduce que f_n converge Puntualmente a f en F^c. Como vimos que que $\mu(F) = 0$, tenemos entonces que f_n converge a f Puntualmente e.c.t. X.

El reciproco es cierto si el conjunto X es de medida finita, es decir, si $\mu(X) < +\infty$, resultado conocido como Teorema de Egorov.

Teorema 2.1 (Egorov). *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida con $\mu(X) < +\infty$ y sean $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ funciones medibles. Si $(f_n)_n$ converge Puntualmente e.c.t. X hacia f, entonces $(f_n)_n$ converge Casi Uniformemente hacia f en X.*

Demostración. Supongamos que $(f_n)_n$ converge Puntualmente e.c.t. hacia f y dados $k, j \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto:

$$E_k^j = \left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < 1/j \text{ para todo } n \geq k\right\}.$$

Claramente cada E_k^j es medible pues:

$$E_k^j = \bigcap_{n \geq k} \left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < 1/j\right\}$$

y las f_n y f son funciones medibles.
Observamos que cuanto mayor es el valor de k, menos restrictiva es la condición de define E_k^j, es decir, tenemos que la sucesión:

$$E_1^j \subset E_2^j \subset E_3^j \subset \ldots \subset E_k^j \subset E_{k+1}^j \subset \ldots$$

es creciente. Por tanto, si llamamos $E^j = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^j$ tendremos que:

$$\lim_{k\to\infty} \mu(E_k^j) = \mu(E^j).$$

En consecuencia, fijado $\varepsilon > 0$, para cada $j \in \mathbb{N}$ podemos elegir un $k_0 = k_0(j) \in \mathbb{N}$ de manera que:

$$\mu(E^j \setminus E_{k_0}^j) < \varepsilon/2^j.$$

Hecha esta elección, denotemos $E_\varepsilon = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_{k_0}^j$. Es evidente que E_ε es medible y además observamos que si $x \in E_\varepsilon$, entonces $x \in E_{k_0}^j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, por lo que para cada j y cada $n \geq k_0(j)$ se tiene que:

$$|f_n(x) - f(x)| < 1/j$$

y como j es arbitrario, esto prueba que $f_n(x)$ converge uniformemente en E_ε.

Por tanto, ahora nos queda probar que $\mu(E_\varepsilon^c) < \varepsilon$. Por las leyes de De Morgan:

$$E_\varepsilon^c = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_{k_0}^j)^c. \tag{2.4}$$

Pero nosotros sabemos que:

$$(E_{k_0}^j)^c \subset (E^j)^c \cup (E^j \setminus E_{k_0}^j) \tag{2.5}$$

luego se tiene que $(E^j)^c \subset \left\{x \in X : f_n(x) \nrightarrow f(x)\right\}$ pues si $x \notin E^j$, para todo k existirá un $j \geq k$ tal que $|f_n(x) - f(x)| > 1/j$. Por consiguiente, $\mu(X \setminus E^j) = 0$, ya que, por hipótesis, f_n converge a f Puntualmente e.c.t. X.
Luego por (2.5) tenemos que:

$$\mu((E_{k_0}^j)^c) \leq \mu((E^j)^c) + \mu(E_j \setminus E_{k_0}^j) = 0 + \mu(E^j \setminus E_{k_0}^j) < \varepsilon/2^j$$

y utilizando (2.4) y la σ-aditividad de la medida, deducimos que:

$$\mu(E_\varepsilon^c) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu((E_{k_0}^j)^c) < \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon/2^j = \varepsilon$$

y esto es lo que queríamos probar. ∎

En el siguiente ejemplo vamos a ver que es imprescindible el hecho de tener la hipótesis $\mu(X) < +\infty$.

Ejemplo 2.2. Sea $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_C)$ el espacio de medida definido sobre $\mathbb{N}$, donde $\mu_C =$"medida cardinal" respecto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, es decir, dado $A \subset \mathbb{N}$, tenemos que

$$\mu_C(A) = \begin{cases} \infty & \text{si A es infinito} \\ |A| & \text{si A es finito} \end{cases}$$

siendo $|A|$ el cardinal del conjunto A, es decir, el número de elementos que posee.

Consideremos ahora la sucesión de funciones $(f_n)_n$ definida sobre $\mathbb{N}$ como

$$f_n(m) = \begin{cases} 1 & 1 \leq m \leq n \\ 0 & m > n. \end{cases}$$

Esta sucesión de funciones converge Puntualmente hacia $f \equiv 1$ en $\mathbb{N}$ (y por tanto Puntual e.c.t. $\mathbb{N}$). En cambio, la convergencia no es Casi Uniforme, y esto es debido al hecho de que $\mu_C(\mathbb{N}) = \infty$. En efecto, para cada $0 < \varepsilon < 1$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mu_C(\{x \in \mathbb{N} : |f_n(x) - 1| \geq \varepsilon\}) &= \lim_{n\to\infty} \mu_C(\{n+1, n+2, \ldots\}) \\ &= \lim_{n\to\infty} +\infty = +\infty \neq 0. \end{aligned}$$

Esto veremos en la siguiente sección (concretamente en la Observación 2.1 y la Observación 2.3) que significará que f_n no converge en Medida hacia $f \equiv 1$ en $\mathbb{N}$. Y además, también veremos que la convergencia Casi Uniforme implica la convergencia en Medida, por tanto, suponiendo momentáneamente que este hecho es cierto, como hemos visto que no converge en Medida hacia $f \equiv 1$ en $\mathbb{N}$, tampoco converge Casi Uniformemente hacia $f \equiv 1$ en $\mathbb{N}$.

Tanto en el Ejemplo 2.1 como en este último, hemos hablado de la existencia de una nueva forma de convergencia, la convergencia en Medida. En este último ejemplo, además, hemos dado por supuesto el hecho de que la convergencia Casi Uniforme implica la convergencia en Medida. Por tanto, en la siguiente sección vamos a definir dicha convergencia y vamos a demostrar con rigor el resultado supuesto para dotar de total rigor estos dos ejemplos.

2.2 Convergencia en Medida

Definición 2.2 (Convergencia en Medida). *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ funciones medibles. Se dice que $(f_n)_n$ converge en Medida hacia f en X si para cada $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Por tanto, una vez que hemos definido la convergencia en Medida, vamos a aclarar de manera formal lo que dijimos en el Ejemplo 2.1 y en el Ejemplo 2.2.

Observación 2.1. En el Ejemplo 2.1, por (2.3) tenemos en particular que:

$$\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\right\}\right) = 1/n,$$

y como $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, se tiene que f_n converge en Medida hacia la función nula en $\mathbb{R}$.

En el Ejemplo 2.2, como tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mu_C\left(\left\{x \in \mathbb{N} : |f_n(x) - 1| \geq \varepsilon\right\}\right) &= \lim_{n\to\infty} \mu_C\left(\{n+1, n+2, \ldots\}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} +\infty = +\infty \neq 0, \end{aligned}$$

por definición significa que f_n no converge en Medida hacia $f \equiv 1$ en $\mathbb{N}$.

A continuación, vamos a dar una definición que posteriormente nos será de gran utilidad para enunciar varios resultados importantes.

Definición 2.3. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ una sucesión de funciones medible en X. Se dice que $(f_n)_n$ es una sucesion de Cauchy en Medida si toda función f_n es finita e.c.t. X y para todo $\varepsilon > 0$,*

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\right\}\right) \to 0 \text{ cuando } n, m \to \infty.$$

Observación 2.2. Es trivial ver que si $(f_n)_n$ converge en Medida hacia f en X, entonces $(f_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en Medida. En efecto, como consecuencia de la desigualdad triangular y la subaditividad de la medida tenemos que:

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\right\}\right) \\ + \mu\left(\left\{x \in X : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\right\}\right)$$

y como $(f_n)_n$ converge en medida a f, los sumandos de la parte derecha de la desigualdad tienden a cero cuando n y m, respectivamente, tienden a infinito, por lo que:

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\right\}\right) \to 0 \text{ cuando } n, m \to \infty.$$

Luego tenemos que $(f_n)_n$ es de Cauchy en Medida como queríamos ver.

Proposición 2.5 (Unicidad del punto límite). Situados en el marco de la Definición 2.2, si $f_n \to f$ y $f_n \to g$ en Medida en X, entonces $f = g$ e.c.t. X.

Demostración. Haciendo un razonamiento análogo al anterior, tenemos que:

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}\right) \leq \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\right\}\right) \\ + \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon/2\right\}\right)$$

y como por hipótesis $f_n \to f$ y $f_n \to g$ en Medida en X, haciendo que n tienda a infinito, nos queda que:

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) = 0 \text{ para cada } \varepsilon > 0. \tag{2.6}$$

Ahora escribimos el conjunto $\{x \in X : |f(x) - g(x)| \neq 0\}$ como

$$\{x \in X : |f(x) - g(x)| \neq 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq 1/k\}$$

y como todos los elementos de la unión por (2.6), tienen medida nula, gracias a la subaditividad de la medida tenemos que

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| \neq 0\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq 1/k\}) = 0$$

por lo que se deduce que $f = g$ e.c.t. X. ∎

Veamos ahora, algunas propiedades generales que cumple la convergencia en Medida.

Proposición 2.6. En las condiciones de la Definición 2.2, si $f_n \to f$ y $g_n \to g$ en Medida en X y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces:
1) $f_n + g_n \to f + g$ en Medida en X.
2) $\lambda f_n \to \lambda f$ en Medida en X.
3) Si $\exists M < +\infty$ tal que $|f_n| \leq M$ e.c.t. X, entonces $|f| \leq M$ e.c.t. X.
4) Si $\exists M < +\infty$ tal que $|f_n|, |g_n| \leq M$ e.c.t. X, entonces $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ en Medida en X.

Demostración.
1)
Se obtiene de la misma forma que las demostraciones anteriores

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in X : |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| \geq \varepsilon\}) \\ \leq \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\}\right) \\ +\mu\left(\{x \in X : |g_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon/2\}\right) \to 0 \; (n \to \infty).\end{aligned}$$

2)
Observamos que el caso $\lambda = 0$ es trivial. Suponiendo $\lambda \neq 0$, por la propiedad del valor absoluto multiplicado por escalares:

$$\begin{aligned}\mu\left(\{x \in X \; : \; |\lambda f_n(x) - \lambda g_n(x)| \geq \varepsilon\}\right) \\ \leq \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - g_n(x)| \geq \varepsilon/|\lambda|\}\right) \to 0 \; (n \to \infty)\end{aligned}$$

3)
Seguimos un proceso análogo al de la demostración de la Proposición 2.5

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq M + \varepsilon\}) &\leq \mu\left(\{x \in X : |f_n(x)| \geq M + \varepsilon/2\}\right) \\ &\quad +\mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\}\right) \\ &= 0 + \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\}\right) \to 0\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, luego $\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq M + \varepsilon\}) = 0$ para cada $\varepsilon > 0$. Ahora, tenemos que

$$\{x \in X : |f(x)| > M\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X : |f(x)| \geq M + 1/k\}$$

y como todos los conjuntos de esa unión tienen medida nula tenemos que:

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0$$

luego ya lo tenemos.

4)

$$\begin{aligned}
&\mu(\{x \in X : |(f_n(x)g_n(x)) - (f(x)g(x))| \geq \varepsilon\}) \\
&\qquad\qquad \leq \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x)| \geq \varepsilon/2\right\}\right) \\
&\qquad\qquad\quad +\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \geq \varepsilon/2\right\}\right) \\
&\qquad\qquad \leq \mu\left(\left\{x \in X : |g_n(x) - g(x))| \geq \varepsilon/2M\right\}\right) \\
&\qquad\qquad\quad +\mu\left(\left\{x \in X : |(f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2M\right\}\right)
\end{aligned}$$

y esto tiende a 0 cuando $n \to \infty$. ∎

Teorema 2.2 (Riesz). *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones de Cauchy en Medida en X, entonces se cumple lo siguiente:*
1) Existe una subsucesión $(f_{n_k})_k$ y una función $f : X \to \mathbb{R}$, de modo que $(f_{n_k})_k$ converge Puntualmente e.c.t. X hacia f.
2) $(f_n)_n$ converge en Medida hacia f en X.

Demostración. Como $(f_n)_n$ es Cauchy en Medida en X, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe otro entero n_k tal que:

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq 1/2^k\right\}\right) < 1/2^k \text{ para cada } n, m \geq n_k.$$

Obviamente podemos suponer que $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$, con lo que queda determinada la sucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Llamamos E_k al conjunto

$$E_k = \left\{x \in X : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geq 1/2^k\right\},$$

tendremos que $\mu(E_k) < 1/2^k$ para todo k. Consideramos entonces el conjunto:

$$N = \operatorname{lím\,sup} E_k = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} E_k.$$

Para cada i, observamos que $N \subset \bigcup_{k=i}^{\infty} E_k$, luego:

$$\mu(N) \leq \sum_{k=i}^{\infty} \mu(E_k) \leq \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{i-1}}$$

por lo tanto deducimos que $\mu(N) = 0$.

Si $x \in X \setminus N$, existe un entero i tal que $x \in X \setminus \bigcup_{k=i}^{\infty} E_k$, y por lo tanto si $k \geq i$,

$$|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < 1/2^k.$$

Por tanto se tiene que

$$\sum_{k=i}^{+\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < \frac{1}{2^{i-1}}$$

y esto implica que la serie

$$f_{n_1}(x) + (f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)) + (f_{n_3}(x) - f_{n_2}(x)) + \ldots + (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) + \ldots$$

cuyas sumas parciales forman la sucesión

$$f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \ldots, f_{n_k}(x), \ldots$$

es absolutamente convergente si $x \in X \setminus N$.

Podemos definir entonces una función $f : X \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) & \text{si } x \in X \setminus N \\ 0 & \text{si } x \in N \end{cases}$$

y por tanto, $f(x) = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}$ para todo $x \in X \setminus N$. Luego f_{n_k} converge Puntualmente e.c.t X hacia f, pues vimos antes que $\mu(N) = 0$.

Veamos ahora que la sucesión completa converge en Medida. Para ello, vamos a ver antes que nuestra subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ también converge en Medida hacia f en X. Notemos que si $x \in X \setminus N$,

$$f(x) = f_{n_k}(x) + (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) + (f_{n_{k+2}}(x) - f_{n_{k+1}}(x)) + \ldots$$

en consecuencia:

$$f(x) - f_{n_k}(x) = (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) + (f_{n_{k+2}}(x) - f_{n_{k+1}}(x)) + \ldots$$

Dado $\delta > 0$ elegimos i_0 tal que $1/2^{i_0-1} < \delta$. Entonces:

$$\left\{x \in X : |f(x) - f_{n_i}(x)| \geq \delta\right\} \subset N \cup \left(\bigcup_{k=i}^{\infty} E_k\right) \text{ si } i \geq i_0,$$

pues si $x \in X \setminus N$ y $|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < 1/2^k$ para todo $k \geq i$, se deduce de lo anterior que

$$|f(x) - f_{n_i}(x)| \leq \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{i-1}} < \delta \text{ si } i \geq i_0.$$

En consecuencia:

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f(x) - f_{n_i}(x)| \geq \delta\right\}\right) \leq \mu(N) + \sum_{k=i}^{\infty} \mu(E_k) \leq \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{i-1}} < \delta \text{ si } i \geq i_0$$

y esto prueba que la subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que hemos construido también converge en Medida hacia f en X.

Veamos por último que la sucesión completa $(f_n)_n$ converge en Medida a f en X. Para ello utilizaremos que $(f_n)_n$ es de Cauchy en Medida y que existe una subsucesión de ella que converge en Medida hacia f. Por la desigualdad triangular,

$$\left\{|f(x) - f_n(x)| > \delta\right\} \subset \left\{|f(x) - f_{n_k}(x)| > \delta/2\right\} \cup \left\{|f_{n_k}(x) - f_n(x)| > \delta/2\right\}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} \mu\left(\left\{|f(x) - f_n(x)| > \delta\right\}\right) &\leq \mu\left(\left\{|f(x) - f_{n_k}(x)| > \delta/2\right\}\right) \\ &\quad + \mu\left(\left\{|f_{n_k}(x) - f_n(x)| > \delta/2\right\}\right) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

El primer término es menor que $\varepsilon/2$ eligiendo $k \geq k_0(\varepsilon)$, pues f_{n_k} converge en Medida hacia f, y el segundo término también es menor que $\varepsilon/2$ si $k,n \geq n_1(\varepsilon)$ (notamos que $n \geq k$) pues $(f_n)_n$ es de Cauchy en Medida en X. Por tanto, tomando $k \geq \text{máx}(k_0, n_1)$ ya lo tenemos. Luego $f_n \to f$ en medida en X. ∎

Corolario 2.1. Si $(f_n)_n$ converge en Medida hacia una función f, entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_k$ que converge Puntualmente e.c.t. X hacia f.

Demostración. El resultado es consecuencia inmediata de la Observación 2.2 y el Teorema de Riesz. ∎

Teorema 2.3 (Convergencia Casi uniforme ⇒ Convergencia en Medida). *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ funciones medibles. Si $(f_n)_n$ converge Casi Uniformemente hacia f en X, entonces $(f_n)_n$ converge en Medida hacia f en X.*

Demostración. Supongamos que $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones que converge Casi Uniformemente a la función f. Sean $\delta, \varepsilon > 0$ arbitrarios, entonces existe un conjunto $E \in \mathcal{M}$ y un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(X \setminus E) < \delta$ y $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in E$ y $\forall n \geq n_0$. Pero entonces

$$\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\right\} \subset X \setminus E$$

y tomando medidas:

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \mu(X \setminus E) < \delta$$

para todo $n \geq n_0$. Como ε y δ son dos números reales positivos arbitrarios, esto solo significa que $(f_n)_n$ converge en Medida a f en X. ∎

El recíproco de este Teorema no es cierto en general. Como contraejemplo, veamos al conocida *Sucesión de Telegrafista.*

Ejemplo 2.3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la sucesión de funciones $f_n(x) := \chi_{\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]}(x)$ en $X = [0, 1]$ donde para cada $n \in \mathbb{N}$, los enteros no negativos j y k vienen determinados de manera única por $n = 2^k + j$, con $0 \leq j < 2^k$. Vamos a ver que $(f_n)_n$ converge en Medida hacia la función nula en X pero no lo hace Puntual e.c.t. X (y por tanto, tampoco lo hace de forma Casi Uniforme).

Antes de ello, vamos a estudiar con detalle esta sucesión. Veamos los primeros valores de $n \in \mathbb{N}$ para ver que forma va tomando la sucesión.
$n = 1,\ k = 0, j = 0 \longrightarrow f_1(x) = \chi_{[0,1]}(x)$

$n = 2,\ \ k = 1, j = 0 \longrightarrow f_2(x) = \chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}(x)$
$n = 3,\ \ k = 1, j = 1 \longrightarrow f_3(x) = \chi_{\left[\frac{1}{2},1\right]}(x)$
$n = 4,\ \ k = 2, j = 0 \longrightarrow f_4(x) = \chi_{\left[0,\frac{1}{4}\right]}(x)$
$n = 5,\ \ k = 2, j = 1 \longrightarrow f_5(x) = \chi_{\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]}(x)$
$n = 6,\ \ k = 2, j = 2 \longrightarrow f_6(x) = \chi_{\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]}(x)$
$n = 7,\ \ k = 2, j = 3 \longrightarrow f_7(x) = \chi_{\left[\frac{3}{4},1\right]}(x).$

Luego la sucesión actúa de la siguiente manera: cuando n es una potencia de 2 ($n = 2^i$), se hace una partición del intervalo $[0, 1]$ en $2^{i+1} - 2^i$ partes iguales y se tiene que la sucesión de funciones va tomando el valor 1 conforme va avanzando el $n \in \{2^i, 2^i + 1, ..., 2^{i+1} - 1\}$ en dicho intervalo. Por ejemplo, cuando $n = 2^1$, se parte el intervalo $[0, 1]$ en $2^2 - 2^1 = 2$ partes iguales, que son $[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]$ respectivamente y conforme va avanzando $n \in \{2, 3\}$, $f_n(x) = 1$ en dichos intervalos (observar gráfica).

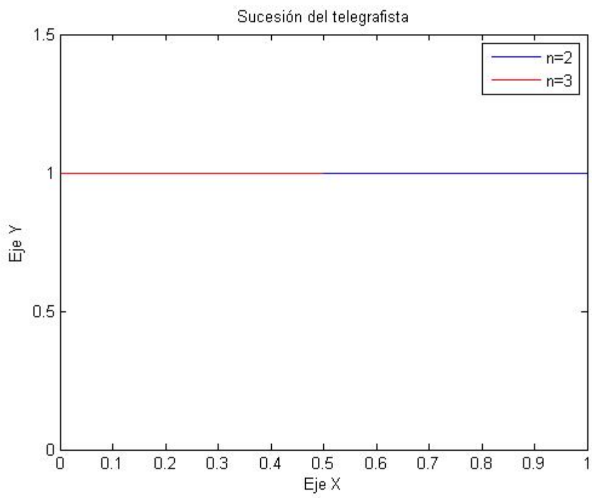

Figura 2.1: Gráficas de la Sucesión del Telegrafista

De igual modo, cuando $n = 2^2$, se parte el intervalo $[0, 1]$ en $2^3 - 2^2 = 4$ partes iguales, que son $[0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], [\frac{3}{4}, 1]$ respectivamente y conforme va avanzando $n \in \{4, 5, 6, 7\}$, $f_n(x) = 1$ en dichos intervalos (observar gráfica).

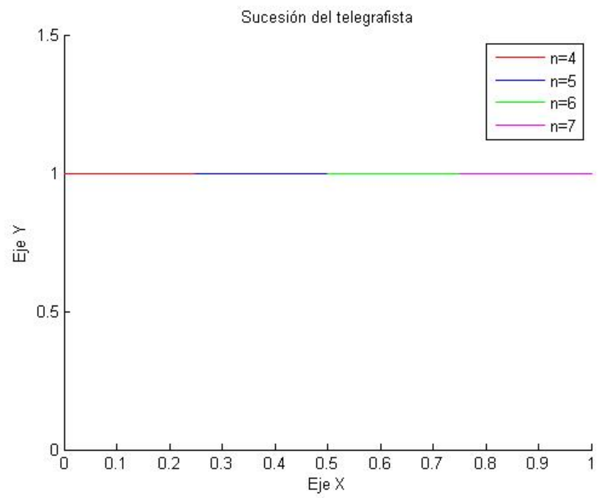

Figura 2.2: Gráficas de la Sucesión del Telegrafista

Sin más, veamos la convergencia en Medida. Para ello, tomemos $0 < \varepsilon < 1$,

$$\mu\left(\left\{x \in X \,:\, |f_n(x) - 0| > \varepsilon\right\}\right) = \mu\left(\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]\right) = 1/2^k.$$

Tomando límites, si $n \to \infty$, entonces $k \to \infty$ (pues $n = 2^k + j$) y esto nos daría que converge en Medida hacia f en X, pues $\lim\limits_{n\to\infty} 1/2^k = 0$ (recordemos que $n = 2^k + j$). Luego tenemos convergencia en Medida.

Veamos ahora que no hay convergencia Puntual e.c.t X. Consideremos un $x_0 \in X$ arbitrario pero fijo y veamos la convergencia de $(f_n(x_0))_n$. Fijado $k \in \mathbb{N}$, el punto x_0 vemos que estará en 1 o en 2 como máximo, intervalos de la forma $\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]$ con $j = 0, 2, ..., 2^k - 1$. Luego por la propia definición de $(f_n)_n$, la sucesión $(f_n(x_0))_n$ tomará infinitas veces el valor 0 e infinitas veces el valor 1, sea cual sea el x_0. Por tanto, esto demuestra que no hay convergencia Puntual en ningún punto de X, luego no hay convergencia Puntual e.c.t. X y por tanto, la convergencia tampoco es Casi Uniforme, que es lo que queremos probar.

Observación 2.3. En el Ejemplo 2.2 de la sección anterior, supusimos el hecho de que la convergencia Casi Uniforme implica la convergencia en Medida, sin embargo, este resultado no ha sido probado hasta ahora en el Teorema 2.3. Por tanto, ahora sí que podemos asegurar que el razonamiento utilizado en dicho ejemplo es totalmente válido.

Aunque hemos visto en el Ejemplo 2.3 que la convergencia en Medida no implica la convergencia Casi Uniforme, sí que hay una relación importante entre ellas.

Teorema 2.4. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ funciones medibles. Si $(f_n)_n$ converge en Medida hacia f en X, entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_k$ que converge Casi Uniformemente hacia f en X.*

Demostración. La demostración de este resultado se basa en el mismo mecanismo que utilizábamos en la demostración del Teorema de Riesz. Supongamos que $(f_n)_n$ converge en Medida hacia f en X. Entonces, dado $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq 1/2^k\right\}\right) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

es decir, existe n_k tal que para todo $n \geq n_k$ es

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq 1/2^k\right\}\right) < 1/2^k.$$

Asumiendo $n_k < n_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos una subsucesión $(f_{n_k})_k$ tal que

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq 1/2^k\right\}\right) < 1/2^k$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Llamemos ahora $E_k = \left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq 1/2^k\right\}$ y $F_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} E_k$ con $i \in \mathbb{N}$. Entonces tenemos que:

$$\mu(F_i) = \mu\left(\bigcup_{k=i}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=i}^{\infty} \mu(E_k) < \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{i-1}} \text{ para cada } i \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte si $x \in X \setminus F_i$ entonces $x \in X \setminus E_k$ para todo $k \geq i$. Así pues, se tiene que $|f_{n_k}(x) - f(x)| < 1/2^k$ para todo $k \geq i$. Luego:

$$\sup_{x \in X \setminus F_i} |f_{n_k}(x) - f(x)| < 1/2^k \text{ para todo } k \geq i$$

y por lo tanto $\sup_{x \in X \setminus F_i} |f_{n_k}(x) - f(x)| \to 0$ cuando $k \to \infty$, y f_{n_k} converge Uniformemente a f en $X \setminus F_i$. Esto último, junto con $\mu(F_i) < 1/2^{i-1}$, concluye que f_{n_k} converge Casi Uniforme a f en X. ∎

Veamos de nuevo, un cuadro resumen añadiéndole los dos nuevos tipos de convergencia vistos en este capítulo:

$\Rightarrow$	Puntual	Uniforme	Puntual e.c.t.	Uniforme e.c.t.	Casi Uniforme	Medida
Puntual	=	No. Ej 1.3	Sí. Obs 1.12	No. Ej 1.4	No. Consecuencia del Ej 1.4 *(A)	No. Consecuencia del Ej 1.4 *(B)
Uniforme	Sí. Teor 1.3	=	Sí. Teor 1.3 y Obs 1.12	Sí. Obs 1.15	Sí. Obs 1.15 y Prop 2.3	Sí. Obs 1.15, Prop 2.3 y Teor 2.3
Puntual e.c.t.	No. Obs 1.13	NO. Ej 1.5	=	No. Ej 1.4	No. Consecuencia del Ej 1.4 *(A)	No. Consecuencia del Ej 1.4 *(B)
Uniforme e.c.t.	No. Ej 1.5	No. Ej 1.5	Sí. Teor 1.4	=	Sí. Prop 2.3	Sí. Prop 2.3 y Teor 2.3
Casi Uniforme	No. Consecuencia del Ej 1.5 *(C)	No. Ej 2.1	Si. Prop 2.4	No. Ej 2.1	=	Si. Teor 2.3
Medida	No. Ej 2.3	No. Ej 2.3	No. Ej 2.3	No. Ej 2.3	No. Ej 2.3	=

*(A), *(B) Consecuencia del Ejemplo 1.4. Como vimos que:

$$\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 0| > \varepsilon\right\}\right) = \mu([n, n+1]) = 1.$$

Entonces tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 0| > \varepsilon\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$$

y esto significa que f_n no converge en Medida a 0 en $\mathbb{R}$ (B), y por tanto, tampoco converge Casi Uniforme, por el Teorema 2.3 (A).

*(C) Consecuencia del Ejemplo 1.5 tenemos que dicha sucesión converge Casi Uniforme hacia la función nula en $\mathbb{R}^+$. Vamos a verlo con detalle. Por definición, tenemos que ver que: $\forall \delta > 0, \exists E \in \mathcal{M}$ con $\mu(X \setminus E) < \delta$, tal que $(f_n)_n$ converge Uniformemente hacia f en E. Tomando $E = (\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+) \in \mathcal{M}$, tenemos que $\mu(X \setminus E) = \mu(\mathbb{Q}^+) = 0$ y además, vimos que $f_n(x)$ converge Uniformemente hacia la función nula en E, por tanto la convergencia es Casi Uniforme en X. Además vimos que no era Puntual, luego ya tenemos el contraejemplo deseado. (C)

Este cuadro resumen no tiene en cuenta la finitud del conjunto X en el que estemos trabajando. Si ahora, nos restringimos a espacios de medida finita, $\mu(X) < \infty$, la tabla nos varía ligeramente debido al Teorema de Egorov (ver tabla en la página siguiente).

En el siguiente capítulo completaremos aún más la tabla con las relaciones entre las convergencias añadiendo un nuevo tipo: la convergencia en L^1. Veremos como hemos hecho hasta ahora, las diversas implicaciones con las ya anteriores y contraejemplos cuando no se den. Distinguiremos cuando se trate de un espacio de medida finita o infinita, como hemos hecho en este capítulo. Además, haremos una distinción más, que será cuando la sucesión de funciones esté "dominada". Veremos que algunas implicaciones pueden variar cuando esto ocurra y por tanto, lo estudiaremos con detalle.

$\Rightarrow$	Puntual	Uniforme	Puntual e.c.t.	Uniforme e.c.t.	Casi Uniforme	Medida
Puntual	=	No. Ej 1.3	Sí. Obs 1.12	No. Ej 1.4	Si. Obs 1.12 y Teor Egorov	Sí. Obs 1.12, Teor de Egorov y Teor 2.3
Uniforme	Sí. Teor 1.3	=	Sí. Teor 1.3 y Obs 1.12	Sí. Obs 1.15	Sí. Obs 1.15 y Prop 2.3	Sí. Obs 1.15, Prop 2.3 y Teor 2.3
Puntual e.c.t.	No. Obs 1.13	NO. Ej 1.5	=	No. Ej 1.4	Sí. Teor de Egorov	Si. Teor de Egorov y Teor 2.3
Uniforme e.c.t.	No. Ej 1.5	No. Ej 1.5	Sí. Teor 1.4	=	Sí. Prop 2.3	Sí. Prop 2.3 y Teor 2.3
Casi Uniforme	No. Consecuencia Ej 1.5	No. Ej 2.1	Si. Prop 2.4	No. Ej 2.1	=	Si. Teor 2.3
Medida	No. Ej 2.3	No. Ej 2.3	No. Ej 2.3	No. Ej 2.3	No. Ej 2.3	=

3 Convergencia en L^1

En este capitulo, como hemos mencionado antes, vamos a introducir la convergencia en el espacio $L^1(X)$. La convergencia en L^1 es un tanto diferente a las que hemos visto hasta ahora, pues en ella trabajaremos con integrales, por tanto, la naturaleza de este modo de convergencia no tiene mucho que ver, a priori, con las que hemos estado viendo hasta ahora. Sin embargo, veremos que este tipo de convergencia implica la convergencia en Medida, y que por tanto sí que hay un lazo de unión entre lo que hemos estado viendo y lo que vamos a ver.

Por otro lado, como también hemos mencionado, veremos qué ocurre cuando la sucesión de funciones está dominada por otra función.

3.1 Conceptos generales

Vamos a recordar en primer lugar una serie de conceptos y resultados que nos harán falta posteriormente. Estos conceptos se imparten en cualquier curso básico de Análisis Funcional, por lo que omitiremos las demostraciones de los resultados que veamos.

Definición 3.1. *Sea X un espacio vectorial. Una norma sobre X es una aplicación $||.|| : X \to \mathbb{R}$ tal que:*
a) $||x|| \geq 0 \ \ \forall x \in X$.
b) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

c) $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x|| \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ *y* $\forall x \in X$.
d) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \ \ \forall x, y \in X$.

Si se cumplen estas cuatro condiciones, decimos que el par $(X, ||\cdot||)$ *es un espacio normado.*

Además, si X es completo, es decir, si toda sucesión de Cauchy contenida en X es convergente hacia un elemento de X, entonces decimos que $(X, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach.

Definición 3.2. *Sea* X *un espacio vectorial. Un producto escalar en* X *es una aplicación* $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ *tal que:*
a) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *y* $\forall x, y, z \in X$.
b) $(x, y) = (y, x) \ \forall x, y \in X$.
c) $(x, x) \geq 0 \ \ \forall x \in X$.
d) $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \ \forall x \in X$.

Si se cumplen estas cuatro condiciones, decimos que el par $(X, (\cdot,\cdot))$ *es un espacio prehilbertiano.*

Observación 3.1. Todo espacio prehilbertiano es un espacio normado, cuya norma es $||x|| = \sqrt{(x, x)}$.

Además, si el espacio prehilbertiano X es completo, es decir, X es un espacio de Banach con la norma anterior, entonces decimos que $(X, (\cdot,\cdot))$ es un espacio de Hilbert.

Como podemos imaginar, existen gran cantidad de espacios normados, de Banach, o de Hilbert. Sin ir más lejos, en $\mathbb{R}^N$, la norma más común es, dado $1 \leq p < \infty$:

$$||x||_p = \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p \right)^{1/p} \quad \forall x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$$

que para el caso $p = 2$, es la norma euclídea.

Por otro lado, el conjunto $l^p = \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$ es un espacio de

Banach con la norma

$$||x||_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p}$$

y para $p = 2$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot y_j$.

A nosotros, el conjunto que más nos interesa es el siguiente:

Definición 3.3. *Dado $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medible y dado $1 \leq p < \infty$, el conjunto*

$$L^p(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \text{ medibles} : \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

es un conjunto de Banach con la norma $||f||_{L^p(X)} := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$ y para el caso particular en que $p = 2$, es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(f, g)_{L^2(X)} := \int_X fg\, d\mu.$$

Observación 3.2. Como veremos la convergencia en $L^1(X)$, nos centraremos en el caso $p = 1$.

Por último, vamos a enunciar un Teorema importante que nos ayudará a demostrar algunos resultados más adelante.

Teorema 3.1 (Desigualdad de Hölder). *Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y sean $f \in L^p(X)$, $g \in L^q(X)$, se tiene que*

$$\int_X |f| \cdot |g| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

3.2 Convergencia L^1

Sin más, veamos lo que es la convergencia en L^1

Definición 3.4 (Convergencia en L^1). *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ funciones medibles. Se dice que $(f_n)_n$ converge en norma L^1 hacia f en X si:*

$$||f_n - f||_{L^1} = \int_X |f_n - f| d\mu \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Ahora, al igual que hicimos en la convergencia en Medida, vamos a dar una definición que nos será de gran ayuda más adelante.

Definición 3.5. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ una sucesión de funciones. Se dice que $(f_n)_n$ es de Cauchy en norma L^1 si toda función f_n es finita e.c.t. X y*

$$||f_n - f_m||_{L^1} = \int_X |f_n - f_m| d\mu \to 0 \text{ cuando } n, m \to \infty.$$

Observación 3.3. Es trivial ver que si $(f_n)_n$ converge en norma L^1 hacia f en X, entonces $(f_n)_n$ es una sucesión Cauchy en norma L^1. En efecto, como consecuencia de la desigualdad triangular y la linealidad de la integral tenemos que:

$$0 \leq \int_X |f_n - f_m| \leq \int_X |f_n - f| d\mu + \int_X |f_m - f| d\mu \tag{3.1}$$

y como las dos integrales de la derecha tienden a cero respectivamente cuando $n, m \to \infty$ por ser $(f_n)_n$ convergente a f en norma L^1, ya lo tenemos.

Veamos algunas propiedades generales que se dan en la convergencia en norma L^1.

Proposición 3.1 (Unicidad del punto límite). Situados en el marco de la Definición 3.4, si $f_n \to f$ y $f_n \to g$ en norma L^1 en X, entonces $f = g$ e.c.t. X.

Demostración. Por un razonamiento análogo al que acabamos de ver en la anterior observación, tenemos que:

$$0 \leq \int_X |f - g| \leq \int_X |f_n - f| d\mu + \int |f_n - g| d\mu$$

y como las dos integrales de la derecha tienden a cero respectivamente cuando $n \to \infty$ por hipótesis, eso implica que $\int_X |f - g| d\mu = 0$, de donde se deduce que $f = g$ e.c.t. X. ∎

Proposición 3.2. En las condiciones de la Definición 3.4, si $f_n \to f$ y $g_n \to g$ en norma L^1 en X y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces:

1) $f_n + g_n \to f + g$ en norma L^1 en X.

2) $\lambda \cdot f_n \to \lambda \cdot f$ en norma L^1 en X.
3) Si existe $M < +\infty$ tal que $|f_n| \leq M$ e.c.t. X, entonces $|f| \leq M$ e.c.t. X.
4) Si existe $M < +\infty$ tal que $|f_n|, |g_n| \leq M$ e.c.t. X, entonces $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ en norma L^1 en X.

Demostración. Las dos primeras son triviales pues:
1) Consecuencia de la desigualdad triangular tenemos que:

$$\int_X |(f_n + g_n) - (f + g)| d\mu \leq \int_X |f_n - f| d\mu + \int_X |g_n - g| d\mu$$

y como las dos integrales de la derecha tienden a cero cuando $n \to \infty$ por hipótesis, ya lo tenemos.
2)

$$\int_X |\lambda \cdot f_n - \lambda \cdot f| d\mu = |\lambda| \int_X |f_n - f| d\mu$$

y como la integral de la derecha de la igualdad tiende a cero cuando $n \to \infty$ por hipótesis, ya lo tenemos.
3) Por el Teorema 3.4 que vamos a ver a continuación, tenemos que existe una subsucesión f_{n_k} que converge hacia f puntualmente e.c.t. X. Además, también veremos que f_n converge hacia f puntualmente e.c.t. X, y por tanto $|f| \leq M$ e.c.t. X.
4) De nuevo por la desigualdad triangular y por la hipótesis del enunciado,

$$\begin{aligned} \int_X |f_n \cdot g_n - f \cdot g| d\mu &\leq \int_X |f_n \cdot g_n - f \cdot g_n| d\mu + \int_X |f \cdot g_n - f \cdot g| d\mu \\ &\leq M \cdot \int_X |f_n - f| d\mu + M \cdot \int_X |g_n - g| d\mu \end{aligned}$$

y estas dos últimas integrales tienden a cero cuando $n \to \infty$ por hipótesis, luego ya lo tenemos. ∎

En general, es decir, sin suponer la finitud del espacio, ninguna de las convergencias vistas anteriormente implica este nuevo modo de convergencia. Para ello, vamos a dar un ejemplo de una sucesión de funciones la cual converge en todos los modos dados anteriormente pero no lo hace en este.

Ejemplo 3.1. Sea $X = \mathbb{R}$ y sea la sucesión de funciones en X dada por $f_n(x) := \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}(x)$. Vemos que converge en todos los modos vistos anteriormente hacia la función nula en $\mathbb{R}$, pero no en norma L^1.

La convergencia Puntual en $\mathbb{R}$ (y por tanto la Puntual e.c.t. $\mathbb{R}$) es sencilla. En efecto, como

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x \in [0,n] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,n] \end{cases}$$

$f_n(x_0) = 0$ para cada $x_0 < 0$; y si $x_0 \geq 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \leq n$ para todo $n \geq n_0$, luego $f_n(x_0) = 1/n$ para cada $n \geq n_0$ y claramente $f_n(x_0) \to 0$. Así pues, hemos visto que (f_n) converge Puntualmente hacia la función nula.

Veamos ahora la convergencia Uniforme. Tenemos que

$$M_n = sup\left\{|f_n - 0| \,:\, x \in \mathbb{R}\right\} = sup\left\{|1/n| \,:\, x \in [0,n]\right\} = 1/n$$

y $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$. Por tanto la convergencia es Uniforme en $\mathbb{R}$ (y por tanto Uniforme e.c.t. $\mathbb{R}$). Por las distintas implicaciones ya estudiadas, podemos deducir también la convergencia en Medida y Casi Uniforme en $\mathbb{R}$. Veamos sin embargo que la convergencia en norma L^1 no se tiene. En efecto,

$$\int_X |f_n - 0|\,d\mu = \int_0^n 1/n\,d\mu = 1$$

y $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$. Por tanto, no converge en norma L^1.

En cambio, sí que es cierto que esta nueva convergencia implicará la convergencia en Medida.

Teorema 3.2 (Convergencia en L^1 $\Rightarrow$ Convergencia en Medida). *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ funciones medibles. Si $(f_n)_n$ converge en norma L^1 hacia f en X, entonces $(f_n)_n$ converge en Medida hacia f en X.*

Demostración. Supongamos que $(f_n)_n$ converge en norma L^1 hacia f en X. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $A_n = \left\{x \in X \,:\, |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\right\}$, entonces tenemos que

$$||f_n - f||_{L^1} = \int_X |f_n - f|\,d\mu \geq \int_{A_n} |f_n - f|\,d\mu \geq \int_{A_n} \varepsilon\,d\mu = \varepsilon\mu(A_n),$$

y como $(f_n)_n$ converge en norma L^1 hacia f

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon\mu(A_n) \leq 0 = \lim_{n\to\infty} ||f_n - f||.$$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ lo cual quiere decir que $(f_n)_n$ converge en Medida hacia f en X. ∎

Además, aunque sabemos que la convergencia en norma L^1 no implica la convergencia Puntual e.c.t X, sí que tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones de Cauchy en norma L^1 en X, entonces tenemos que:*
1) Existe una subsucesión $(f_{n_k})_k$ y una función $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $(f_{n_k})_k$ converge hacia f Puntualmente e.c.t. X.
2) $(f_n)_n$ converge en norma L^1 hacia f en X.

Demostración.
1)
En primer lugar, fijado $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\int_X |f_n - f_m| d\mu < 1/2^k$ para todos $n, m \geq n_k$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que n_k es tan grande como queremos y que $n_k < n_{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$. Por tanto, suponiendo esto, tenemos que (f_{n_k}) es una subsucesión de (f_n) tal que:

$$\int_X |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| d\mu < 1/2^k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, la función medible $G : X \to [0, +\infty]$ definida como

$$G(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

cumple que:

$$\int_X G d\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_X |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| d\mu \leq 1 < +\infty.$$

Por tanto, $G < +\infty$ e.c.t. X y por tanto, la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ converge e.c.t. X. Luego, existe $B \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(X \setminus B) = 0$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ converge para todo $x \in B$. Definimos ahora la función medible $f : X \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} f_{n_1} + \sum_{k=1}^{+\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \in B^c. \end{cases}$$

En B tenemos que $f = f_{n_1} + \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K-1}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = \lim_{K\to\infty} f_{n_K}$ y por tanto, f_{n_K} converge a f Puntualmente e.c.t. X.

2)

Además, también tenemos en B que $|f_{n_K} - f| = |f_{n_K} - f_{n_1} - \sum_{k=1}^{+\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})| = |\sum_{k=1}^{K-1}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) - \sum_{k=1}^{+\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})| \leq \sum_{k=K}^{+\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$ para todo K. Por tanto

$$\begin{aligned} \int_X |f_{n_K} - f| d\mu &\leq \sum_{k=K}^{+\infty} \int_X |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| d\mu \\ &< \sum_{k=K}^{+\infty} 1/2^k = 1/2^{K-1} \to 0 \end{aligned}$$

cuando $K \to +\infty$.

Así, recordando que f_k es de Cauchy en norma L^1, cuando $n_K \to \infty$ tenemos que

$$\int_X |f_k - f| d\mu \leq \int_X |f_k - f_{n_K}| d\mu + \int_X |f_{n_K} - f| d\mu \to 0$$

cuando $k \to \infty$ y concluimos que f_k converge hacia f en norma L^1. ∎

Una vez visto este Teorema, es trivial el siguiente resultado.

Corolario 3.1. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ una sucesión de funciones que converge en norma L^1 hacia una función $f : X \to \mathbb{R}$, entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_k$ que converge Puntualmente e.c.t. X hacia f.

Demostración. La demostración es consecuencia de la Observación 3.3 y el Teorema anterior. ∎

3.2.1 Conjuntos de medida finita

Los dos resultados vistos en la sección anterior son de carácter general, es decir, sin considerar hipótesis de finitud o dominación, como hablamos al comienzo del Capítulo. Veamos qué variaciones hay cuando consideramos que el espacio X es de medida finita ($\mu(X) < \infty$).

Teorema 3.4 (Convergencia Uniforme ⇒ Convergencia en L^1). *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, con $\mu(X) < \infty$ y sean $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ funciones medibles. Si $(f_n)_n$ converge Uniformemente hacia f en X, entonces $(f_n)_n$ converge en norma L^1 hacia f en X.*

Demostración. Supongamos que $(f_n)_n$ converge Uniformemente hacia f en X. Entonces tenemos que dado$\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \text{ y } \forall x \in X.$$

Por tanto, como $\mu(X) < \infty$ por hipótesis, se tiene que:

$$||f_n - f||_{L^1(X)} = \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu \leq \varepsilon \cdot \mu(X)$$

para todo $n \geq n_0$ lo que implica que $f \in L^1(X)$ y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se deduce que f_n converge en norma L^1 hacia f en X. ∎

Ya vimos (ver Ejemplo 3.1) que si no hay finitud en nuestro conjunto X de muestro espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, ninguna de las convergencias estudiadas anteriormente implica esta última convergencia, en cambio, si suponemos la finitud de dicho X, sí que hemos visto que la convergencia Uniforme implica la convergencia en norma L^1. Veamos un nuevo ejemplo sencillo que muestra lo que estamos diciendo.

Ejemplo 3.2. Sea $X = [0, +\infty)$, con la medida de Lebesgue m. Consideremos la sucesión de funciones $f_n(x) := \dfrac{x}{1 + nx}$ en X.

Recordemos que en el Capítulo 1, Observación 1.5, vimos que esta sucesión de funciones converge de forma Puntual y Uniforme hacia la función nula en X. En cambio, no se tiene convergencia en norma L^1 pues:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left|\frac{x}{1+nx}\right|dx &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{n}dx-\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+nx}dx=\\ &=\left[\frac{x}{n}-\frac{log(1+nx)}{n^2}\right]_0^{+\infty}=+\infty.\end{aligned}$$

Pero, ¿qué ocurre si en vez de tomar $X=[0,+\infty)$ tomamos $X=[0,1]$? Veámoslo. La convergencia Puntual y Uniforme como es normal no varían. En cambio, ahora sí tenemos convergencia en norma L^1 pues:

$$\begin{aligned}\int_0^{1}\left|\frac{x}{1+nx}\right|dx &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{n}dx-\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+nx}dx=\\ &=\left[\frac{x}{n}-\frac{log(1+nx)}{n^2}\right]_0^{+\infty}=\frac{n-\log(1+n)}{n^2}\end{aligned}$$

y $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-\log(1+n)}{n^2}=0$. Por lo tanto, como no puede ser de otra forma, se cumple nuestro Teorema y de esta forma volvemos a comprobar que la hipótesis sobre la finitud no se puede suprimir.

3.2.2 Convergencia Dominada

Veamos ahora lo que ocurre cuando nuestra sucesión de funciones $(f_n)_n$ está dominada por una función g. Para ello en primer lugar, vamos a definir formalmente el concepto "dominada".

Definición 3.6. *Sea $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espacio de medida y sea $f_n : X\to\mathbb{R}$ $(n\in\mathbb{N})$ una sucesión de funciones medibles. Decimos que $(f_n)_n$ está dominada por una función $g : X\to\mathbb{R}$ si: $\int_X|g|d\mu<\infty$ y $|f_n|\le g$ e.c.t. X y $\forall n\in\mathbb{N}$.*

Antes de demostrar los enunciados que nos interesan, vamos a enunciar el Teorema de la Convergencia Dominada, ya que es un resultado importante que nos servirá de ayuda para demostrar resultados posteriores y cuya demostración puede verse en [3].

Teorema 3.5 (de la Convergencia Dominada). *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ una sucesión de funciones medibles que converge Puntualmente e.c.t. X a una cierta función $f : X \to \mathbb{R}$. Supongamos que la sucesión $(f_n)_n$ está dominada por una función $g : X \to \mathbb{R}$. Entonces se cumple que f es integrable Lebesgue en X y que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f d\mu$.*

Sin más, vamos a ver los resultados que tenemos.

Teorema 3.6 (Convergencia Puntual e.c.t. X ⇒ Convergencia Casi Uniforme). *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ funciones medibles. Si $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones dominada por $g : X \to \mathbb{R}$ que converge Puntualmente e.c.t. X hacia f, entonces $(f_n)_n$ converge Casi Uniformemente hacia f en X.*

Demostración. Si $|f_n| \leq g$ e.c.t. X para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces también $|f| \leq g$ e.c.t. X con $\int_X g d\mu < +\infty$. Luego, asumiendo sin pérdida de generalidad que $(f_n)_n$,f son finitas en X para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $|f_n - f| \leq 2g$ e.c.t. X. Luego, usando la misma notación que en el Teorema de Egorov, esto implica que:

$$E_k^j \subset \{x \in X : g(x) > 1/2j\}.$$

excepto en un conjunto de medida nula. Además para cada $k, j \in \mathbb{N}$,

$$\mu(E_k^j) \leq \mu(\{x \in X : g(x) > 1/2j\}).$$

Luego es trivial (asumiendo que $g \in L^1(X)$) que $\mu(\{x \in X : g(x) > 1/2j\}) < +\infty$. Además $\mu(E_k^j) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Luego, repitiendo el mismo proceso al que hicimos en la demostración del Teorema de Egorov, ya tenemos lo que queremos. ▮

Teorema 3.7 (Convergencia en Medida ⇒ Convergencia en norma L^1). *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ funciones medibles. Si $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones dominada por $g : X \to \mathbb{R}$ que converge en Medida hacia f en X, entonces $(f_n)_n$ converge en norma L^1 hacia f en X.*

Demostración. Supongamos que esto no es verdad, es decir, existe un $\varepsilon_0 > 0$ y una subsucesión f_{n_k} de f_n tales que $\int_X |f_{n_k} - f| d\mu \geq \varepsilon_0$ $\forall k \geq 1$. Como $(f_n)_n$ converge en Medida hacia f, entonces f_{n_k} converge también en Medida hacia f en X. Por el Teorema de Riesz, se tiene que existe una subsucesión $f_{n_{k_l}}$ de f_{n_k} que converge hacia f Puntualmente e.c.t. X. Como $|f_{n_{k_l}}| \leq g$ e.c.t. X, entonces $|f| \leq g$ e.c.t. X. Luego, por el Teorema de la Convergencia Dominada tenemos que $\int_X |f_{n_{k_l}} - f| d\mu \to 0$ cuando $l \to \infty$ y por tanto, llegamos a una contradicción. Luego, $(f_n)_n$ converge hacia f en norma L^1 en X. ∎

Observación 3.4. En el Ejemplo 2.3 del Capítulo anterior, comprobamos que la Sucesión del Telegrafista converge en Medida a la función nula en $[0, 1]$. Dicha sucesión además está claramente dominada por $g(x) = 1$ en $[0, 1]$, por lo que aplicando el Teorema que acabamos de ver, deducimos que la Sucesión del Telegrafista converge en norma L^1 a la función nula en $[0, 1]$.

Por tanto, ya hemos estudiado los siete modos de convergencia que nos propusimos al comienzo de este Trabajo Fin de Grado y todas las relaciones posibles entre ellos.

Terminaremos este Capítulo dando un esquema general de todas las implicaciones que hemos visto, así como dos tablas resumen donde se recogen las diferentes implicaciones y contraejemplos.

Veamos un esquema resumen de lo que hemos estudiado:

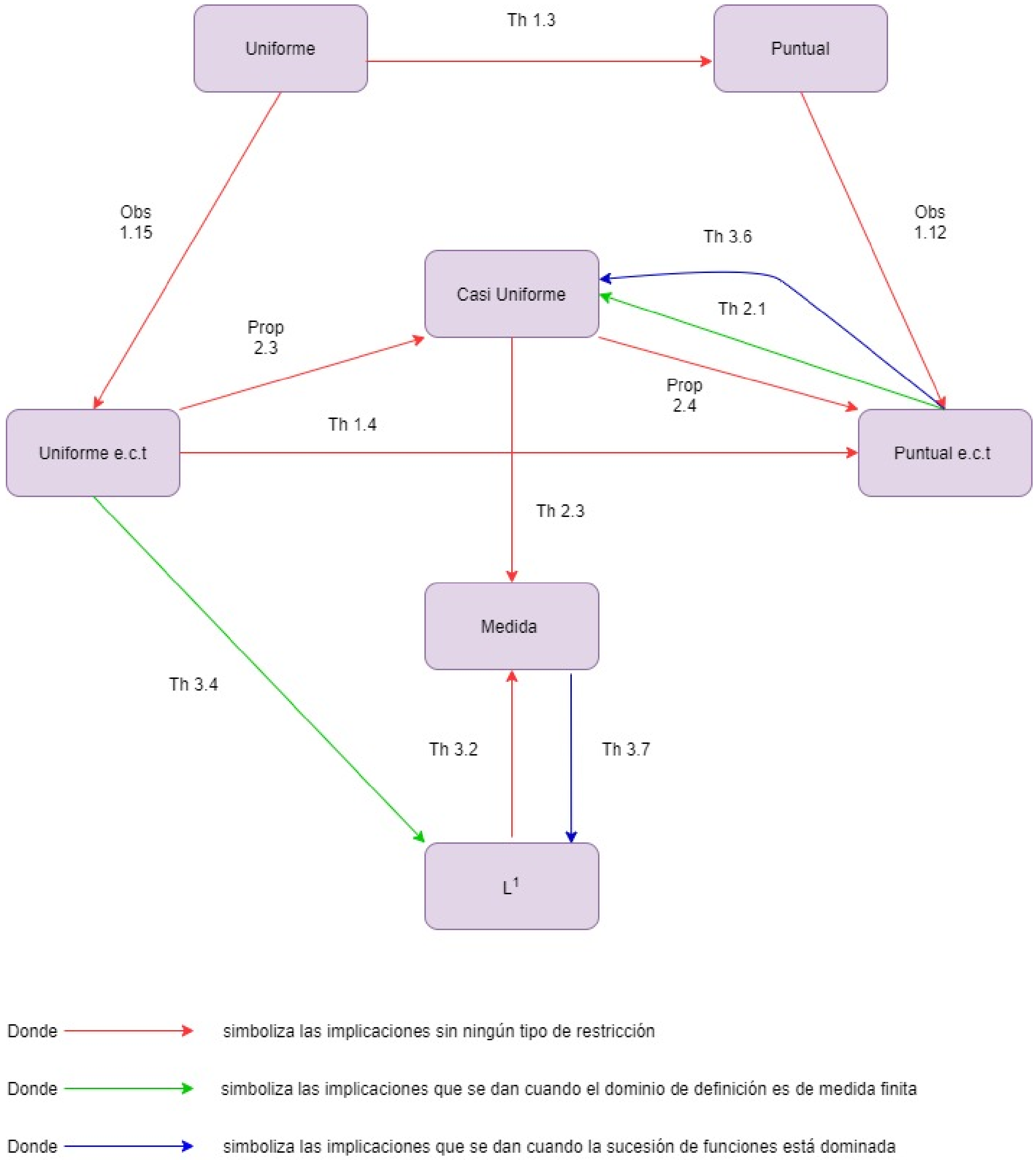

Figura 3.1: Implicaciones entre los diferentes modos de convergencia.

Veamos también, las tablas resumen de las distintas implicaciones/contraejemplos:

⇒	Puntual	Uniforme	Puntual e.c.t.	Uniforme e.c.t.	Casi Uniforme	Medida	L^1
Puntual	=	No. Ej 1.3	Sí. Obs 1.12	No. Ej 1.4	No. Consecuencia del Ej 1.4 *	No. Consecuencia del Ej 1.4 *	No. Ej 3.1
Uniforme	Sí. Teor 1.3	=	Sí. Teor 1.3 y Obs 1.12	Sí. Obs 1.15	Sí. Obs 1.15 y Prop 2.3	Sí. Obs 1.15, Prop 2.3 y Teor 2.3	No. Ej 3.1
Puntual e.c.t.	No. Obs 1.13	No. Ej 1.5	=	No. Ej 1.4	No. Consecuencia del Ej 1.4 *(A)	No. Consecuencia del Ej 1.4 *(B)	No. Ej 3.1
Uniforme e.c.t.	No. Ej 1.5	No. Ej 1.5	Sí. Teor 1.4	=	Sí. Prop 2.3	Sí. Prop 2.3 y Teor 2.3	No. Ej 3.1
Casi Uniforme	No. Consecuencia del Ej 1.5 *(C)	No. Ej 2.1	Sí. Prop 2.4	No. Ej 2.1	=	Si. Teor 2.3	No. Ej 3.1
Medida	No. Ej 2.3	No. Ej 2.3	No. Ej 2.3	No. Ej 2.3	No. Ej 2.3	=	No. Ej 3.1
L^1	No. Ej 2.3 y Obs 3.4	No. Ej 2.3 y Obs 3.4	No. Ej 2.3 y Obs 3.4	No. Ej 2.3 y Obs 3.4	No. Ej 2.3 y Obs 3.4	Si. Teor 3.2	=

Si consideramos ahora que X es de medida finita:

$\Rightarrow$	Puntual	Uniforme	Puntual e.c.t.	Uniforme e.c.t.	Casi Uniforme	Medida	L^1
Puntual	=	No. Ej 1.3	Sí. Obs 1.12	No. Ej 1.4	Si. Obs 1.12 y Teor Egorov	Sí. Obs 1.12, Teor de Egorov y Teor 2.3	No. Ej 3.1
Uniforme	Sí. Teor 1.3	=	Sí. Teor 1.3 y Obs 1.12	Sí. Obs 1.15	Sí. Obs 1.15 y Prop 2.3	Sí. Obs 1.15, Prop 2.3 y Teor 2.3	Sí. Teor 3.5
Puntual e.c.t.	No. Obs 1.13	No. Ej 1.5	=	No. Ej 1.4	Sí. Teor de Egorov	Sí. Teor de Egorov y Teor 2.3	No. Ej 3.1
Uniforme e.c.t.	No. Ej 1.5	No. Ej 1.5	Sí. Teor 1.4	=	Sí. Prop 2.3	Sí. Prop 2.3 y Teor 2.3	Sí. Teor 3.4
Casi Uniforme	No. Consecuencia Ej 1.5	No. Ej 2.1	Si. Prop 2.4	No. Ej 2.1	=	Si. Teor 2.3	No. Ej 3.1
Medida	No. Ej 2.3	No. Ej 2.3	No. Ej 2.3	No. Ej 2.3	No. Ej 2.3	=	No. Ej 3.1
L^1	No. Ej 2.3 y Obs 3.4	No. Ej 2.3 y Obs 3.4	No. Ej 2.3 y Obs 3.4	No. Ej 2.3 y Obs 3.4	No. Ej 2.3 y Obs 3.4	Si. Teor 3.2	=

4 Lineabilidad de sucesiones de funciones

En este último Capítulo trataremos de ahondar en las diferencias que presentan varios de los modos de convergencia que hemos estudiado a lo largo del trabajo. La idea es estudiar en profundidad si esta diferencia es muy grande en el sentido algebraico y para ello, vamos a utilizar la Teoría de Lineabilidad, la cuál viene siendo desarrollada por muchos matemáticos durante las últimas décadas. Además, para estudiar dicha diferencia, nos valdremos de ejemplos como los que hemos ido viendo a lo largo de este trabajo, para así establecer una unión entre lo que hemos visto y esta nueva vía que se nos abre.

4.1 Conceptos previos

Antes de estudiar esta diferencia de la que hemos hablado, necesitamos tener unos conceptos previos. Daremos algunos resultados conocidos de los cuáles no daremos su demostración, ya que no son necesarias a este nivel, pero pueden consultarse en [1, 2, 4]

Definición 4.1. *Sea Z un espacio vectorial topológico, $A \subset Z$ un subconjunto y α un número finito o infinito que indica cardinalidad.*
Decimos que A es α-lineable si existe M espacio vectorial de dimensión α tal que $M \setminus \{0\} \subset A$. Si $\alpha = \aleph_0 = card(\mathbb{N})$, decimos que A es simplemente lineable.

Definición 4.2. *En las mismas condiciones que la definición anterior:*
1) Si el espacio vectorial M de la definición anterior es cerrado, entonces decimos que A es α-espaciable, o simplemente espaciable cuando $\alpha = \aleph_0$.
2) Si el espacio vectorial M es denso en Z, decimos que A es α-denso-lineable.
3) Si además el espacio vectorial M cumple que $dim(M) = dim(Z)$, decimos que M es maximal-lineable, o maximal-denso-lineable si M es denso en Z.

Definición 4.3. *Sobre el espacio de medida de Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$, restringiendonos al intervalo $[0, 1]$, se define el conjunto L_0 como el espacio de las clases de funciones medibles Lebesgue $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, donde dos funciones pertenecen a la misma clase si son iguales e.c.t. $[0, 1]$.*

Definición 4.4. *Sobre el conjunto L_0, definimos la distancia $d : L_0 \times L_0 \to [0, +\infty)$ como:*

$$d(f, g) = \int_0^1 \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx$$

Comprobemos que realmente $d(f, g)$ es una distancia:
1) Es claro que $d(f, g) \geq 0$, pues el integrando es positivo para cualesquiera $f, g \in L_0$ y el intervalo de integración es $[0, 1]$.
2) Es claro que $d(f, g) = 0 \iff f = g$. En efecto, el numerador se anula si $f = g$ e.c.t $[0, 1]$, o lo que es lo mismo, $f = g$ en L_0.
3) Es claro que $d(f, g) = d(g, f)$, debido al valor absoluto del integrando.
4) Es claro que $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$, pues por la desigualdad triangular del valor absoluto, se tiene que $|f - g| = |f - h + h - g| \leq |f - h| + |h - g|$ y además, la función $\dfrac{t}{1+t}$ es creciente en $[0, +\infty)$.

Además esta distancia tiene la particularidad de que la topología que la genera es la de la convergencia en Medida. Vamos a estudiarlo con detalle.

Teorema 4.1. *Sea $(f_n)_n \subset L_0$ una sucesión de funciones, se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0 \iff f_n \to f \text{ en Medida.}$$

Demostración. Sea

$$I_n = \int_0^1 \frac{|f_n(x)|}{1 + |f_n(x)|} dx \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f = 0$ y por lo tanto, bastaría demostrar que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0 \iff \forall\varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$.

Antes de demostrar ambas implicaciones, observemos que para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$I_n = \int_{[0,1]} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx = \int_{\{|f_n|\geq\varepsilon\}} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx + \int_{\{|f_n|<\varepsilon\}} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx.$$

Supongamos en primer lugar que f_n converge en Medida hacia 0, entonces por definición

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

y por tanto, como $\frac{x}{1+x}$ es creciente si $x \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 \leq I_n &\leq \int_{\{|f_n|\geq\varepsilon\}} 1dx + \int_{\{|f_n|<\varepsilon\}} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}dx \\ &= \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| \geq \varepsilon\right\}\right) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Así pues, tomando límites tenemos que $0 \leq \lim_{n\to\infty} I_n \leq \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, luego, haciendo que $\varepsilon \to 0$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Recíprocamente, si $I_n \to 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx &\geq \int_{\{|f_n|\geq\varepsilon\}} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx \\ &\geq \int_{\{|f_n|\geq\varepsilon\}} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}dx = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| \geq \varepsilon\right\}\right). \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $0 \leq \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot \mu\left(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| \geq \varepsilon\}\right) \leq I_n$ y como $I_n \to 0$, se deduce la convergencia en Medida de f_n hacia la función nula. ❙

4.2 Puntual Vs Uniforme

Ya vimos en el primer Capítulo de este Trabajo Fin de Grado que la convergencia Uniforme implicaba la convergencia Puntual de una sucesión de funciones $(f_n)_n$ hacia una función f en su dominio X. Además, comprobamos que el recíproco no era cierto, basándonos en diversos ejemplos como el Ejemplo 1.3, el Ejemplo 1.4 o la Observación 1.7. Nuestro objetivo ahora será demostrar que el conjunto de sucesiones de funciones que convergen Puntualmente a la función nula pero no lo hacen Uniformemente es $\mathfrak{c}$-lineable, donde $\mathfrak{c}$ representa la cardinalidad de $\mathbb{R}$.

Consideremos la sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como $f_n(x) := \chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}(x)$. Es fácil ver que f_n converge Puntualmente a la función nula en $[0,1]$, pues $f_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x_0 \in (0,1]$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < x_0$ para todo $n \geq N$, luego $f_n(x_0) = 0$ para todo $n \geq N$. De donde se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.

Al mismo tiempo, vemos que la convergencia no es Uniforme en $[0,1]$, pues por el Teorema 1.2, $M_n = sup\left\{|f_n(x) - 0| : x \in [0,1]\right\} = 1$ y por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 1 \neq 0$. Luego la convergencia no es Uniforme hacia la función nula en el intervalo $[0,1]$.

Por tanto, nuestro objetivo como dijimos antes, será demostrar en este caso, que el conjunto de sucesiones de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ que convergen Puntualmente hacia la función nula en $[0,1]$ pero no lo hacen de manera Uniforme, es un conjunto $\mathfrak{c}$-lineable.

Sea $A_1 = \{(f_n)_n \in L_0^{\mathbb{N}} : f_n \longrightarrow 0 \text{ Puntualmente pero no Uniformemente en } [0,1]\}$. Vamos a ver que el conjunto A_1 es $\mathfrak{c}$-lineable, haciendo uso de la sucesión de funciones que hemos visto más arriba. Es claro que $(f_n)_n \in A_1$ y además, podemos definir $(f_n)_n$ en todo $\mathbb{R}$ como $f_n(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$.

Ahora definimos para cada $t \in (0, 1/2)$, la sucesión de funciones $f_{n,t} : [0,1] \to \mathbb{R}$ como:

$$f_{n,t}(x) = \chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}(2(x-t)) = \chi_{[\frac{1}{2(n+1)}+t,\frac{1}{2n}+t]}(x).$$

Es claro que si $x \in [0,t]$, $f_{n,t}(x) = 0$. Por otro lado, si $x \in (t,1]$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n} + t\right) = t < x$$

luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ se tiene que $f_{n,t}(x) = 0$. Por tanto hemos visto que la sucesión $(f_{n,t})_n$ converge Puntualmente a la función nula en $[0,1]$. Además, como para cada $t \in (0, 1/2)$ se tiene que

$$M_{n,t} := \sup\{|f_{n,t}(x) - 0| : x \in [0,1]\} = 1,$$

luego la sucesión $f_{n,t}$ no es Uniformemente convergente a 0 en $[0, 1]$. En resumen, hemos visto que para todo $t \in [0, 1]$, se tiene que $(f_{n,t})_n \in A_1$.

Sea ahora el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $M := \langle (f_{n,t})_n : t \in (0, 1/2) \rangle$. Veamos que el conjunto formado por los generadores de M, es un conjunto linealmente independiente. Para ello, supongamos que no, que es linealmente dependiente, luego existen $0 < t_1 < ... < t_s < 1/2$ y escalares $c_1, c_2, ..., c_s \in \mathbb{R}$ con $c_s \neq 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene la igualdad

$$c_1 \cdot f_{n,t_1}(x) + c_2 \cdot f_{n,t_2}(x) + ... + c_s \cdot f_{n,t_s}(x) = 0.$$

Pero si tomamos $x \in I_s = \left(\text{máx}\{\frac{1}{2(n+1)} + t_s, \frac{1}{2n} + t_{s-1}\}, \frac{1}{2n} + t_s \right)$, tenemos que

$$c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + ... + c_s \cdot 1 = 0,$$

luego $c_s = 0$ en contradicción a lo que dijimos y por tanto, los generadores de M son linealmente independientes y $dim(M) = dim((0, 1/2)) = \mathfrak{c}$.

Ahora tenemos que ver que $M \setminus \{0\} \subset A_1$. Sea una sucesión de funciones $(F_n)_n \in M \setminus \{0\}$. Se puede ver F_n como $F_n := (c_1 f_{n,t_1} + c_2 f_{n,t_2} + ... + c_s f_{n,t_s})_n \in M \setminus \{0\}$ con $n \in \mathbb{N}$, $0 < t_1 < ... < t_s < 1/2$ y escalares $c_1, c_2, ..., c_s \in \mathbb{R}$ no nulos. Ver que F_n converge Puntualmente a la función nula en $[0, 1]$ es consecuencia inmediata de la linealidad de la convergencia Puntual. Para ver que F_n no converge Uniformemente hacia 0 en $[0, 1]$, aplicando el Teorema 1.2, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} M_n &= sup\{|F_n(x)| : x \in [0,1]\} \geq sup\{|F_n(x)| : x \in I_s\} \\ &= sup\{|c_s \cdot f_{n,t_s}(x)| : x \in I_s\} = |c_s| > 0. \end{aligned}$$

luego $M_n \nrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ y por tanto concluimos que $M \setminus \{0\} \subset A_1$ y por consiguiente A_1 es $\mathfrak{c}$-lineable.

4.3 Medida Vs Puntual e.c.t. X

Veamos ahora que el conjunto de las sucesiones de funciones $(f_n)_n \in L_0^{\mathbb{N}}$ que convergen en Medida hacia la función nula pero no lo hacen Puntualmente e.c.t es $\mathfrak{c}$-lineable. Para demostrarlo, consideremos la sucesión $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ que dimos en el Ejemplo 2.3, la Sucesión de Telegrafista $f_n(x) = \chi_{\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]}(x)$ en $X = [0,1]$ donde para cada $n \in \mathbb{N}$, los enteros no negativos j y k vienen determinados por $n = 2^k + j$, con $0 \leq j < 2^k$ y sea $f(x) = 0$ en todo X.

Sea $A_2 = \{(f_n)_n \in L_0^{\mathbb{N}} : f_n \longrightarrow 0$ en Medida pero no Puntualmente e.c.t $[0,1]\}$. Vamos a ver que el conjunto A_2 es $\mathfrak{c}$-lineable.

En primer lugar, vamos a extender cada función f_n a todo $\mathbb{R}$ donde $f_n(x) = 0$ si $x \notin [0,1]$. Sea ahora, para $t \in (0,1/2)$ la sucesión dada por

$$f_{n,t}(x) = f_n(2(x-t)) = \chi_{\left[\frac{j}{2^{k+1}}+t, \frac{j+1}{2^{k+1}}+t\right]}(x).$$

Lo que hemos hecho es trasladar la sucesión original al intervalo $[0,1/2]$ y t unidades a la derecha. Además, vemos que para los primeros valores de n, tenemos $f_{1,t}(x) = \chi_{[t,\frac{1}{2}+t]}(x)$, $f_{2,t}(x) = \chi_{[t,\frac{1}{4}+t]}(x)$, $f_{3,t}(x) = \chi_{[\frac{1}{4}+t,\frac{1}{2}+t]}(x)$, $f_{4,t}(x) = \chi_{[t,\frac{1}{8}+t]}(x)$, $f_{5,t}(x) = \chi_{[\frac{1}{8}+t,\frac{1}{4}+t]}(x)$. Luego es evidente que $(f_{n,t})_n \in L_0^{\mathbb{N}}$ y que converge en Medida hacia la función nula y que no lo hace Puntualmente e.c.t. (por analogía a la sucesión principal que ya demostramos dicha convergencia en el Ejemplo 2.3) para cada $t \in (0,1/2)$.

Por otra parte, consideremos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $M = \langle (f_{n,t})_n : t \in (0,1/2) \rangle$ para demostrar la $\mathfrak{c}$-lineabilidad de A_2. Veamos que los generadores de M forman un conjunto linealmente independiente y para ello, vamos a suponer que no, es decir, supongamos que existen $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_s < 1/2$ y escalares $c_1, c_2, \ldots, c_s \in \mathbb{R}$ con $c_s \neq 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$c_1 \cdot f_{n,t_1} + c_2 \cdot f_{n,t_2} + \ldots + c_s \cdot f_{n,t_s} = 0 \; e.c.t \; [0,1].$$

En el caso concreto en que $n = 1$ tenemos que

$$c_1 \cdot f_{1,t_1}(x) + c_2 \cdot f_{1,t_2}(x) + \ldots + c_s \cdot f_{1,t_s}(x) = 0 \; e.c.t \; [0,1]$$

o lo que es lo mismo:

$$c_1 \cdot \chi_{[t_1,t_1+1/2]}(x) + c_2 \cdot \chi_{[t_2,t_2+1/2]}(x) + \ldots + c_s \cdot \chi_{[t_s,t_s+1/2]}(x) = 0 \; e.c.t \; [0,1].$$

Pero entonces podemos encontrar $x \in (\text{máx}\{t_s, t_{s-1} + 1/2\}, t_s + 1/2]$ tal que, al sustituyendo en la igualdad anterior, se obtiene

$$c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \ldots + c_s \cdot 1 = 0$$

luego $c_s = 0$ y llegamos a contradicción, luego M es un conjunto linealmente independiente y además, $dim(M) = dim([0,1/2]) = \mathfrak{c}$.

Por último, tenemos que probar que $M \setminus \{0\} \subset A_2$. La convergencia en Medida hacia la función nula de $(F_n)_n := (c_1 \cdot f_{n,t_1} + c_2 \cdot f_{n,t_2} + \ldots + c_s \cdot f_{n,t_s})_n \in M\{0\}$ es clara ya que cada sucesión $(f_{n,t})_n$ converge en Medida a la función nula, y por tanto como ya vimos, su suma también. Veamos ahora que $(F_n)_n$ no converge Puntualmente e.c.t. $[0,1]$ hacia la función nula. Si tomamos $x \in (\text{máx}\{t_s, t_{s-1} + 1/2\}, t_s + 1/2]$ se tiene que:

$$F_n(x) = \sum_{j=1}^{s} c_j \cdot f_{n,t_j}(x) = \sum_{j=1}^{s} c_j \cdot f_{n,t_j}(2(x - t_j)) = c_s \cdot f_n(2(x - t_s)).$$

Y como $c_s \neq 0$ y $f_n(y)$ no converge e.c.t. $y \in (\text{máx}\{0, 2(t_{s-1} - t_s) + 1\}, 1] \subset [0,1]$ se deduce que, e.c.t. $x \in (\text{máx}\{t_s, t_{s-1} + 1/2\}, t_s + 1/2]$, la sucesión $(F_n(x))_n$ no es convergente. Por tanto, ya tenemos demostrado que $M \setminus \{0\} \subset A_2$ y por tanto, A_2 es $\mathfrak{c}$-lineable.

4.4 Uniforme Vs L^1

Por último, veamos que el conjunto de las sucesiones de funciones $(f_n)_n \in L_0^{\mathbb{N}}$ que convergen Uniformemente hacia la función nula pero no lo hacen en norma L^1 es un conjunto $\mathfrak{c}$-lineable. Recordemos que la sucesión de funciones $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}(x)$ que vimos en el Ejemplo 3.1, converge en todos los modos de convergencia que hemos tratado (entre ellos Uniformemente) hacia la función nula, excepto en norma L^1.

Sea $A_3 = \{(f_n)_n \in L_0^{\mathbb{N}}([0,+\infty)) : f_n \to 0$ Uniformemente pero no en norma $L^1\}$, demostremos que A_3 es $\mathfrak{c}$-lineable.

Al igual que en el ejemplo anterior, tenemos que la sucesión $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,2n]}(x)$ pertenece a A_3. Podemos extender esta nueva sucesión de funciones a todo $\mathbb{R}$, definiendo $f_n(x) = 0$ si $x \notin [n, 2n]$. Por tanto, ahora para cada $t \in [0, 1)$ podemos considerar la sucesión de funciones definida de la forma:

$$f_{n,t}(x) = f_n(x - nt) = \frac{1}{n}\chi_{[n,2n]}(x - nt) = \frac{1}{n}\chi_{[n(t+1),n(t+2)]}(x).$$

Observamos que $f_{n,t}$ no es más que trasladar t unidades hacia delante f_n, por lo que claramente $(f_{n,t})_n \in A_3$.

Consideremos ahora el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $M = \langle (f_{n,t}) : t \in [0, 1) \rangle$, que será nuestro candidato para demostrar la lineabilidad de A_3. En primer lugar, veamos que el conjunto de los generadores de M es un conjunto linealmente independiente, y para ello vamos a razonar por reducción al absurdo. Supongamos que no, es decir, supongamos que existen $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_s < 1$ y $c_1, c_2, \ldots, c_s \in \mathbb{R}$ con $c_s \neq 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$c_1 \cdot f_{n,t_1} + c_2 \cdot f_{n,t_2} + \ldots + c_s \cdot f_{n,t_s} = 0$$

en $[0, +\infty)$. Pero si tomamos $x \in I_s$, donde

$$I_s = (\text{máx}\{n(t_{s-1} + 2), n(t_s + 1)\}, n(t_s + 2)) = (n(t_{s-1} + 2), n(t_s + 2)),$$

sustituyendo en la ecuación anterior nos quedaría:

$$c_1 \cdot f_{n,t_1}(x) + c_2 \cdot f_{n,t_2}(x) + \ldots + c_s \cdot f_{n,t_s}(x) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \ldots + c_s \cdot 1 = c_s = 0$$

en contradicción con nuestra suposición inicial de que $c_s \neq 0$. Por lo tanto, M es linealmente independiente y además $dim(M) = dim([0, 1) = \mathfrak{c}$.

Ahora tenemos que ver que $M \setminus \{0\} \subset A_3$. La convergencia Uniforme hacia la función nula de $(F_n)_n := (c_1 \cdot f_{n,t_1} + c_2 \cdot f_{n,t_2} + \ldots + c_s \cdot f_{n,t_s})_n \in M\{0\}$ es clara, ya que cada sucesión $(f_{n,t})_n$ converge Uniformemente hacia la función nula y por tanto, una combinación lineal de ellas también. Veamos ahora que $(F_n)_n$ no converge en norma L^1 hacia la función nula. Recordemos que si $x \in I_s$ tenemos

$$F_n(x) = \sum_{j=1}^{s} c_j \cdot f_{n,t_j}(x) = c_s \cdot f_{n,t_s}(x).$$

Luego:

$$\begin{aligned} ||F_n||_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}} |F_n(x)|dx \geq \int_{I_s} |F_n(x)|dx = \int_{I_s} |c_s f_{n,t_s}(x)|dx \\ &= |c_s| \cdot \int_{n(t_{s-1}+2)}^{n(t_s+2)} \frac{1}{n}\chi_{[n(t_s+1),n(t_s+2)]}dx = |c_s| \cdot (t_s - t_{s-1}) = C > 0, \end{aligned}$$

donde C es una constante. Así, tenemos que $(F_n)_n$ no converge en norma L^1 y por tanto, esto prueba que $M \setminus \{0\} \subset A_3$ y por consiguiente, A_3 es $\mathfrak{c}$-lineable.

Bibliografía

[1] G. Araújo, L. Bernal-González, G.A. Muñoz-Fernández, J.A. Prado-Bassas y J.B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability in sequence and function spaces*, Studia Mathematica, **237** (2017), 119—136.

[2] R.M. Aron, L. Bernal-González, D. Pellegrino y J.B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability: The search for linearity in Mathematics*, Monographs and Research Notes in Mathematics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton FL,

[3] L. Bernal-González, *Series de funciones e integral de lebesgue*, Universidad de Sevilla, 2015
http://personal.us.es/lbernal/php/activos/pdf/SFIL.pdf

[4] M.C. Calderón-Moreno, P.J. Gerlach-Mena y J.A. Prado-Bassas, *Lineability and modes of convergences*, RACSAM **114**, 18 (2020).
https://doi.org/10.1007/s13398-019-00743-z

[5] P.L. De Napoli, *Notas de Análisis Real*, Universidad de Buenos Aires, 2019
http://mate.dm.uba.ar/ pdenapo/apuntes-analisis-real/

[6] Ole A. Nielsen, *An Introduction to Integration and Measure Theory*, Queen's University of Kingston, 1997

[7] M.Papadimitrakis, *Notes of measure theory*, University of Crete, 2004
https://fourier.math.uoc.gr/

[8] T. Tao, *245A, Notes 4: Modes of convergence*, 2010. https://terrytao.wordpress.com/2010/10/02/245a-notes-4-modes-of-convergence/