



Facultad de Matemáticas
Dpto. de Análisis Matemático

La función de Takagi

Miguel Ángel Cejas Peláez

Trabajo Fin de Grado
Curso académico 2019/2020

Tutor: José A. Facenda Aguirre

Índice general

Lista de figuras	v
Abstract	vii
Introducción	ix
1. Preliminares	1
1.1. Representación de un número en base p	1
1.2. Desarrollos binarios	5
1.3. Funciones suma de dígitos binarios	6
1.4. La función distancia al entero más próximo	7
2. La función de Takagi	13
2.1. Construcción de la función de Takagi a partir de funciones lineales a trozos . . .	13
2.2. La función de Takagi a partir de la función distancia al entero más cercano . . .	16
2.3. Definición original de Takagi	24
2.4. Valor máximo	26
2.5. Ecuaciones funcionales	30
2.6. La función de Takagi sobre los racionales	36
3. Continuidad en el sentido de Hölder y diferenciabilidad	39
3.1. Continuidad en el sentido de Hölder	39
3.2. Diferenciabilidad de la función de Takagi	43
3.2.1. Prueba de Billingsley	43
3.2.2. Segunda demostración	45
3.2.3. Tercera demostración	56
3.3. Orden del cociente incremental	59
4. El teorema de Banach-Mazurkiewicz	61
4.1. El teorema de Baire	61
4.2. El teorema de Banach-Mazurkiewicz	63
Bibliografía	69

Índice de figuras

2.1. Extensión periódica de $h(x) = x $, $x \in [-1, 1]$	13
2.2. Extensión periódica de h_1	14
2.3. Gráfica de la suma parcial $g_1(x)$	15
2.4. Gráfica de la suma parcial $g_2(x)$	15
2.5. Gráfica de la suma parcial $g_3(x)$	15
2.6. Gráfica de la suma parcial $g_4(x)$	15
2.7. Función de Takagi construida a partir de la extensión periódica de $ x $ en $[-1, 1]$	16
2.8. Extensión periódica de $\varphi(x)$	17
2.9. Función $\varphi(8x)$ en $[0, 1]$	17
2.10. Gráfica de las funciones $\varphi(2^k x)/2^k$ para $k = 0, 1, 2, 3$	18
2.11. Suma parcial τ_4 de la función de Takagi.	20
2.12. Sumas parciales τ_1 , τ_2 y τ_3 de la función de Takagi.	21
2.13. Funciones g y τ	21
2.14. Ilustración de la relación $\tau(x) = \tau_{m-1}(x) + \tau(2^m x)/2^m$ para $m = 1$ y $m = 2$	22
2.15. Pastel típico “blancmange”.	24
2.16. Gráfica de $\varphi(x) + \varphi(2x)/2$	27
2.17. Gráficas de φ_2 y φ_3	28
2.18. Conjuntos A_1 , A_2 y A_3	28
3.1. Gráfica de $\varphi(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$ en el intervalo $[2^j i/2^k, 2^j(i+1)/2^k]$	57
4.1. Función continua y poligonal inscrita.	63

Abstract

Takagi's function is defined, using modern notation as

$$\tau(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi(2^n x),$$

where $\varphi(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$, the distance from x to the nearest integer.

This function was introduced by Teiji Takagi (1875–1960) in 1903. Takagi is famous for his work in number theory. He proved the fundamental theorem of Class Field Theory (1920, 1922).

He was sent to Germany 1897-1901. He visited Berlin and Göttingen, saw Hilbert. Takagi (1903) showed that the function $\tau(x)$ is continuous on $[0, 1]$ and has no derivative at each point $x \in [0, 1]$ on either side. Van der Waerden (1930) discovered the base 10 variant, proved non-differentiability. De Rham (1956) also rediscovered the Takagi function.

The Takagi function has been extensively studied in all sorts of ways, during its 100 year history, often in more general contexts. It has some surprising connections with number theory and (less surprising) with probability theory.

We present below a brief summary of the content of this work.

- We start by studying the p -base development of a real number.

In the case of binary expansions, we introduce the functions “digit sums” and “deficient digit function”, that Takagi handles them in the original definition of $\tau(x)$

- In chapter 2 we present three definitions of Takagi function.

For the first one, we consider the absolute value function, $h(x) = |x|$ in the interval $[-1, 1]$ and its periodical extension to all \mathbb{R} . The Takagi function is

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(x)}{2^n}, \quad \text{where } h_n(x) = h(2^n x).$$

More common is to define the Takagi function using the nearest integer distance function that we denote $\varphi(x)$, and we get the definition given at the beginning. The relationship between this two functions is

$$\tau(x) = \frac{1}{2}g(2x).$$

Using the functions digit sum and deficient digit function we present the Takagi original definition.

In this chapter we also study the maximum of the Takagi function, and we prove that the set where it reaches that maximum is perfect and of Lebesgue zero measure. We end this chapter by demonstrating some functional equations that verify the Takagi function (it is the only one that verifies certain equations) and proving that it takes rational into rational, and in particular, dyadics into dyadics.

- In the third chapter we study two properties of the Takagi function. On the one hand, continuity in Hölder's sense and on the other, its differentiability.

We show that it is Hölder continuous of class α para todo $\alpha \in (0, 1)$ and we present three demonstrations that the Takagi function does not admit a derivative (neither finite nor infinite) at any point in the interval $[0, 1]$. Even that it does not have a finite lateral derivative at any point of the interval $[0, 1]$

- We finish this work studying the theorem of Banach-Mazurkiewicz. For this purpose, we need Baire's theorem, of which we give a proof.

In 1929, the problem on the massiveness of the set of non-differentiable functions in the space of continuous functions was formulated by Steinhaus. In 1931, this problem was solved independently and by different ways by Banach and Mazurkiewicz. They proved that the set of non-differentiable functions in the space $C([0, 1])$ of functions, that are continuous on $[0, 1]$, with the uniform metric is a set of the second category.

Introducción

Hasta el siglo XIX se creía que cualquier función continua carecía de derivadas en no más de un número finito de puntos, como le sucede a la función valor absoluto. Pero en 1872, Karl Weierstrass dio un contraejemplo con una función continua en todo su dominio pero no derivable, rechazando así esta conjetura.

Unos treinta años después, en 1903, el japonés Teiji Takagi encontró otro ejemplo de función de este tipo, con continuidad en $[0, 1]$, y para su definición hizo uso de expansiones binarias. Dicha función, usando terminología actual, se define de la siguiente forma:

$$\tau(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k},$$

donde $\varphi(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$ es la función distancia al entero más próximo.

Como veremos en este trabajo, Takagi definió su función de una manera diferente y esto, en combinación con el aislamiento que sufría Japón a comienzos del siglo XX, puede ser una razón de porqué se pasó por alto esta función en occidente. A diferencia de lo que sucede con el ejemplo de Weierstrass, es fácil probar que la función de Takagi no tiene en ningún punto derivada finita.

La función de Takagi fue redescubierta independientemente por otros matemáticos, como por ejemplo Knopp en 1918, Van der Waerden en 1930, usando la base 10 y Hildebrandt en 1933, que usó desarrollos binarios llegando así a la definición original de Takagi (véase [10], [25] y [8], respectivamente). En el artículo citado de Hildebrandt, el editor de la revista añade una nota en la que pone de manifiesto la sencillez del ejemplo dado en ese artículo y propone la cuestión (interesante y probablemente no muy difícil) de saber en qué puntos, si existen, la función definida por Hildebrandt tiene derivada infinita. Sorprendentemente, se tardó 77 años en contestar esta pregunta correctamente, quizás porque la respuesta no es tan fácil de adivinar. Rham ([16]) también la estudió en 1957.

En 1939, el matemático noruego Ralph Tambs-Lyche ([22]) redescubrió también la función de Takagi, motivado por el deseo de dar “un ejemplo fácil de entender para los principiantes en el estudio del Análisis” e inspirado por el artículo de Van der Waerden. Tambs-Lyche usó un fórmula distinta de la dada al principio de esta introducción y de la original de Takagi para definir la función. Fue el primero en publicar un gráfico, dibujado a mano pero con una precisión y un nivel de detalle asombrosos.

En 1957, una vez más, un matemático volvió a fijar su atención en la función de Takagi; esta vez, fue de Rham, aparentemente inconsciente de los trabajos de Hildebrandt y Tombs-Lyche, quien dio un gran paso para ayudar a conocer en más profundidad esta función, contribuyendo a identificarla como miembro de una clase de funciones más general, que son solución de ciertas ecuaciones funcionales, si hablamos con el lenguaje matemático actual.

Por la década de los 60 del siglo pasado, las funciones de Takagi y Van der Waerden eran suficientemente conocidas para poder utilizarlas como elementos clave en la resolución de otros problemas, tanto en el análisis real clásico como en la teoría de números. Lipinski ([12]) la utilizó en su caracterización de conjuntos de puntos en los que se anulan las funciones continuas no diferenciables en ningún punto, siguiendo el trabajo realizado anteriormente por Schubert ([17]). Asimismo, Trollope ([23]) se sirvió de la función de Takagi para finiquitar el problema que se tenía con la suma digital binaria; su demostración fue simplificada y ampliada aún más por Delange ([5]).

En las dos últimas décadas, los temas relacionados con la función de Takagi parecen haber crecido exponencialmente, pudiendo clasificarse estos trabajos en tres categorías:

- Artículos sobre la función de Takagi en sí misma.
- Artículos que tratan principalmente de aplicaciones.
- Artículos que tratan diversas generalizaciones y variaciones.

Comentamos a continuación el contenido de este trabajo.

- Takagi construyó su función usando el desarrollo binario de un número real. Por ello, comenzamos el primer capítulo exponiendo el desarrollo en base arbitraria $p \in \mathbb{N}$ de un número real. Particularizando en el caso $p = 2$, definiremos las funciones suma de dígitos binarios, (que denotamos $N_n^1(x)$ y que cuenta el número de unos en los primeros n términos del desarrollo binario de x), suma de dígitos, suma de ceros (que denotamos $N_n^0(x) = n - N_n^1(x)$ y que cuenta el número de ceros en los primeros n términos del desarrollo binario de x) y suma deficiente de dígitos, $D_n(x) = N_n^0(x) - N_n^1(x)$, que usaremos en el tercer capítulo.
- En el segundo capítulo presentamos tres definiciones de la función de Takagi.

En la primera de ellas se considera la función $h(x) = |x|$ en el intervalo $[-1, 1]$ y se extiende periódicamente a todo \mathbb{R} , obteniendo una función con forma de dientes de sierra. Para cada entero $n \geq 0$ se considera la función

$$h_n(x) = \frac{1}{2^n} h(2^n x)$$

que es una función periódica de periodo $\frac{1}{2^{n-1}}$ y valor máximo $\frac{1}{2^n}$. La función de Takagi se define como la suma de una serie, en concreto

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(2^n x)}{2^n}.$$

Se trata de una función periódica, de periodo 2, par y continua.

A continuación construimos la función de Takagi considerando la función distancia al entero más próximo, que denotamos φ . Si $x \in [0, 1]$ entonces

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1/2); \\ 1 - x, & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

La función de Takagi es entonces una suma de una serie también,

$$\tau(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n}.$$

En este proceso que usamos tanto en este caso como en el anterior para la construcción de la función de Takagi, vamos sumando funciones triangulares más pequeñas pero con más dientes, en el segundo paso hay 2, en el tercero 4 y así sucesivamente. Obtenemos en este caso una función periódica, de periodo 1, par y continua. La relación con g es clara, se cumple

$$\tau(x) = \frac{1}{2}g(2x).$$

La última construcción que hacemos es la original de Takagi. Probamos que

$$\tau(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\ell_m}{2^m},$$

donde $0 \leq \ell_m = \ell_m(x) \leq m$, cuenta el número de dígitos que hay antes del término que se encuentra en la posición m y son diferentes a este. Es decir, se tiene que

$$\ell_m(x) = \#\{i : 1 \leq i < m, a_i \neq a_m\} = \begin{cases} N_{m-1}^1(x), & a_m = 0; \\ N_{m-1}^0(x), & a_m = 1. \end{cases}$$

En la literatura inglesa es habitual referirse a la función de Takagi como la “blancmange function”. Ello se debe al parecido de la gráfica de la función con este pastel, Tall (véase [20] y [21]) lo cuenta, como exponemos en ese trabajo.

Una vez definida la función de Takagi, nos preocupamos de estudiar su máximo y vemos que $\tau([0, 1]) = [0, 2/3]$. Probamos que el conjunto donde alcanza el máximo, $2/3$, es un conjunto perfecto de medida de Lebesgue nula.

Terminamos este capítulo demostrando algunas ecuaciones funcionales que cumple τ (y de hecho la caracterizan) y viendo su comportamiento sobre los racionales, en concreto que transforma racionales en racionales y diádicos en diádicos.

- El tercer capítulo está dedicado a dos aspectos de la función de Takagi.

Probamos que es continua en el sentido de Hölder para cualquier $\alpha \in (0, 1)$. Y demostramos que no es derivable en ningún punto del intervalo $[0, 1]$, de hecho, que no tiene siquiera derivada lateral finita en ningún punto del intervalo.

Damos tres demostraciones de la no derivabilidad, considerando tanto la función g como τ construidas en el capítulo anterior. La demostración más natural es la debida a Billingsley ([3]).

Terminamos el capítulo probando que aunque τ no tiene derivada finita en ningún punto, su cociente incremental está controlado, se cumple que

$$\tau(x+h) - \tau(x) = O\left(h \log \frac{1}{|h|}\right).$$

- En el último capítulo estudiamos la solución dada por Banach y Mazurkiewicz a un problema planteado por Hugo Steinhaus en 1929. Este matemático planteó la cuestión del tamaño de las funciones continuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que no tiene derivada en ningún punto del intervalo. Stefan Banach en 1931 y Stefan Mazurkiewicz en 1932 resolvieron este problema, aunque la respuesta de Banach fue más completa.

El teorema hoy conocido como de Banach-Mazurkiewicz prueba que el conjunto de las funciones que no tienen derivada en ningún punto del intervalo forman un conjunto de segunda categoría en el espacio de las funciones continuas. Este resultado es consecuencia del teorema de Baire, que también incluimos en este capítulo.

Preliminares

Un tercio de siglo después de que Karl Weierstrass presentara una función continua no derivable en ningún punto, apareció Teiji Takagi ([19]) para ofrecer otro ejemplo menos complejo de dichas funciones en el intervalo $[0, 1]$. Takagi usó la representación binaria de un número $x \in [0, 1]$ y probó que la definición era consistente para los números diádicos, que poseen dos representaciones binarias.

De esta forma, veremos algunas nociones básicas sobre la representación de un número real en la base $p \in \mathbb{N}$, para luego ver el caso binario ($p = 2$). Definiremos las funciones sumas de dígitos binarios, usada por Takagi en la construcción de su función. Seguimos en este capítulo la exposición de [7].

1.1. Representación de un número en base p

Dado $p \in \mathbb{N}$, vamos a comenzar viendo la construcción de la representación de un número $x \in [0, 1]$ en base p . El resultado es el que enunciamos y probamos a continuación.

Teorema 1.1. *Sea $x \in [0, 1]$ y sea $p \in \mathbb{N}$. Existe una única sucesión (a_i) de números tal que $a_i \in \{0, \dots, p-1\}$ para todo $i \geq 1$ y se tiene que*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{p^i}, \quad (1.1)$$

salvo en los puntos de la forma $x = \frac{k}{p^l}$, con $k \in \mathbb{Z}$ y $l \in \mathbb{N}$, donde existen dos representaciones.

Demostración. Empecemos haciendo una partición del intervalo $[0, 1)$ en p intervalos de longitud $\frac{1}{p}$ de la forma $\left[\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}\right)$, donde $k \in \{0, \dots, p-1\}$, o sea,

$$[0, 1) = \bigcup_{k=0}^{p-1} \left[\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}\right).$$

Se cumple que si $k \neq l$, es

$$\left[\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}\right) \cap \left[\frac{l}{p}, \frac{l+1}{p}\right) = \emptyset.$$

De esta forma, dado un $x \in [0, 1)$, existe un único $k_0 \in \{0, \dots, p-1\}$ tal que

$$x \in \left[\frac{k_0}{p}, \frac{k_0+1}{p}\right)$$

y definiendo los términos

$$a_1 = k_0, \quad S_1 = a_1 p^{-1},$$

tenemos que $x = S_1 + r_1$, con $0 \leq r_1 < p^{-1}$. Si $r_1 = 0$, entonces

$$x = \frac{k_0}{p}$$

y tenemos la representación en base p de x y hemos terminado.

En caso contrario (si $r_1 \neq 0$), dividimos el intervalo

$$\left[\frac{k_0}{p}, \frac{k_0 + 1}{p} \right)$$

en p partes iguales de longitud $\frac{1}{p^2}$ de la forma

$$\left[\frac{k_0}{p} + \frac{k}{p^2}, \frac{k_0}{p} + \frac{k+1}{p^2} \right), \quad k \in \{0, \dots, p-1\}.$$

Así, obtenemos una partición de $\left[\frac{k_0}{p}, \frac{k_0 + 1}{p} \right)$,

$$\left[\frac{k_0}{p}, \frac{k_0 + 1}{p} \right) = \bigcup_{k=0}^{p-1} \left[\frac{k_0}{p} + \frac{k}{p^2}, \frac{k_0}{p} + \frac{k+1}{p^2} \right),$$

cumpléndose que

$$\left[\frac{k_0}{p} + \frac{k}{p^2}, \frac{k_0}{p} + \frac{k+1}{p^2} \right) \cap \left[\frac{k_0}{p} + \frac{l}{p^2}, \frac{k_0}{p} + \frac{l+1}{p^2} \right) = \emptyset, \quad k \neq l.$$

Luego existe un único $k_1 \in \{0, \dots, p-1\}$ tal que

$$x \in \left[\frac{k_0}{p} + \frac{k_1}{p^2}, \frac{k_0}{p} + \frac{k_1+1}{p^2} \right),$$

y definiendo

$$a_2 = k_1, \quad S_2 = a_1 p^{-1} + a_2 p^{-2},$$

se tiene que

$$x = S_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < p^{-2}.$$

Si $r_2 = 0$, entonces

$$x = S_1 + \frac{k_1}{p^2}$$

y ya hemos encontrado su representación en base p . En cambio, si $r_2 \neq 0$, dividimos de nuevo el intervalo

$$\left[\frac{k_0}{p} + \frac{k_1}{p^2}, \frac{k_0}{p} + \frac{k_1+1}{p^2} \right)$$

en p partes iguales y utilizando el mismo procedimiento que en el paso anterior concluimos que existe un único $k_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ tal que

$$x \in \left[\frac{k_0}{p} + \frac{k_1}{p^2} + \frac{k_2}{p^3}, \frac{k_0}{p} + \frac{k_1}{p^2} + \frac{k_2+1}{p^3} \right).$$

Realizando este procedimiento en el n -ésimo paso, llegamos a que al dividir el intervalo

$$\left[\frac{k_0}{p} + \frac{k_1}{p^2} + \cdots + \frac{k_{n-2}}{p^{n-1}}, \frac{k_0}{p} + \frac{k_1}{p^2} + \cdots + \frac{k_{n-2} + 1}{p^{n-1}} \right)$$

en p partes iguales, existe un único $k_{n-1} \in \{0, \dots, p-1\}$ tal que

$$x \in \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{k_i}{p^{i+1}}, \sum_{i=0}^{n-2} \frac{k_i}{p^{i+1}} + \frac{k_{n-1} + 1}{p^n} \right)$$

y definiendo

$$a_n = k_{n-1}, \quad S_n = a_1 p^{-1} + \cdots + a_n p^{-n},$$

se tiene que

$$x = S_n + r_n, \quad 0 \leq r_n < p^{-n}.$$

Si $r_n = 0$, entonces $x = S_n$ y si $r_n \neq 0$, repetimos el proceso anterior. Así, concluimos que si $r_n = 0$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{p^i}.$$

Veamos si la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{p^i}$$

es convergente, que se plantea este problema si $a_n \neq 0$ para todo n . Para ello, nos será suficiente con demostrar que la sucesión de sumas parciales es convergente. Sabemos que

$$r_n = x - S_n, \quad 0 \leq r_n < p^{-n}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y denotemos

$$N_\varepsilon = \left\lceil \frac{\log(\varepsilon)}{-\log(p)} \right\rceil + 1.$$

de forma que si $n \geq N_\varepsilon$, entonces

$$n > \frac{\log(\varepsilon)}{-\log(p)},$$

por lo que

$$\frac{1}{p^n} < \varepsilon.$$

Así,

$$0 \leq x - S_n < \frac{1}{p^n} < \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

es decir, S_n converge a x y, por ende,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} = x \in [0, 1].$$

La representación para los puntos de la forma $\frac{k}{p^l}$ cambia si consideramos intervalos semiabiertos a la izquierda en vez de a la derecha, de modo que para $n > l$ la representación terminará en unos en vez de ceros.

□

A partir de ahora, solo consideraremos intervalos semiabiertos a la derecha.

Para saber cómo es la representación en base p de cualquier $t \in \mathbb{Z}$, estudiamos primero el caso de los enteros positivos.

Teorema 1.2. *Sea $t \in \mathbb{Z}$. Dado un $p \geq 1$ entero positivo, entonces existen un $n \in \mathbb{N}$ y enteros $b_1, b_2, \dots, b_n \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ tales que*

$$t = \sum_{i=0}^n b_i p^i. \quad (1.2)$$

Demostración. Si dividimos t entre p , teniendo en cuenta el algoritmo de Euclides, existen enteros q_0, b_0 tales que

$$t = q_0 p + b_0, \quad b_0 \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

A continuación, dividimos el cociente q_0 entre p y del algoritmo de la división de Euclides, obtenemos la igualdad

$$q_0 = q_1 p + b_1, \quad b_1 \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

Repetimos el mismo procedimiento para cada cociente q_i y obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} q_1 &= q_2 p + b_2, & b_2 &\in \{0, 1, 2, \dots, p-1\} \\ &\vdots \\ q_{n-3} &= q_{n-2} p + b_{n-2}, & b_{n-2} &\in \{0, 1, 2, \dots, p-1\} \\ q_{n-2} &= q_{n-1} p + b_{n-1}, & b_{n-1} &\in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}. \end{aligned}$$

Como es lógico, conforme vayamos dividiendo cada cociente q_i entre p , q_{i+1} será estrictamente menor que su antecesor y cuando lleguemos a uno que sea menor que p , tendremos $q_{n-1} = b_n$.

Así, sustituyendo el valor de q_{n-1} en la igualdad anterior, obtenemos

$$q_{n-2} = b_n p + b_{n-1}.$$

Asimismo, sustituyendo el valor de q_{n-2} en la igualdad anterior, obtenemos

$$q_{n-3} = b_n p^2 + b_{n-1} p + b_{n-2}.$$

Repetiendo el procedimiento sucesivamente, conseguiremos una representación de t en función de los coeficientes b_i y en potencias de p :

$$\begin{aligned} &\vdots \\ q_1 &= b_n p^{n-2} + b_{n-1} p^{n-3} + \dots + b_3 p + b_2, \\ q_0 &= b_n p^{n-1} + b_{n-1} p^{n-2} + \dots + b_3 p^2 + b_2 p + b_1, \\ t &= b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0. \end{aligned}$$

□

Si t es un entero negativo, también admitirá una representación en la base p , siendo la demostración de este suceso análoga a la del teorema 1.2, con la salvedad de que los $b_i \in \{-(p-1), \dots, -2, -1, 0\}$. De esta forma, tenemos una representación en base p para cualquier $t \in \mathbb{Z}$. Además, hay que destacar que todo entero tendrá una representación finita en la base p .

Si $x \in \mathbb{R}$, lo podemos escribir como

$$x = t + \alpha, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Gracias a lo visto con anterioridad, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.3. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{N}$, se cumple que existen exactamente una sucesión (a_i) , $n \in \mathbb{N}$ y enteros b_0, b_1, \dots, b_n , tales que $a_i \in \{0, \dots, p-1\}$ para todo $i \geq 1$ y $b_0, b_1, \dots, b_n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ y se tiene que

$$x = \sum_{i=0}^n b_i p^i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{p^i}.$$

1.2. Desarrollos binarios

A continuación nos centraremos en la representación en la base $p = 2$, también conocida como representación binaria. Esta sección nos ayudará en la construcción de la función de Takagi, así como a demostrar algunas de sus particulares propiedades.

Dado $x \in [0, 1]$, existe una única sucesión $a_i \in \{0, 1\}$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}, \quad (1.3)$$

excepto para los puntos de la forma $x = \frac{k}{2^l}$, donde $k \in \mathbb{Z}$ y $l \in \mathbb{N}$, que poseen dos representaciones.

Los puntos de la forma $\frac{p}{2^l}$, llamados diádicos, son muy importantes, puesto que la función de Takagi, que estudiaremos en este trabajo, cumple ciertas propiedades exclusivas para estos números. Nos centraremos en los intervalos semiabiertos por la derecha.

Como ya vimos en la sección anterior, los números enteros poseen una representación en base p ; por ende, esto es cierto para el caso en el que $p = 2$, donde tenemos que si $t \in \mathbb{Z}$, su representación binaria es

$$t = \sum_{i=0}^n b_i 2^i, \quad (1.4)$$

donde $b_i \in \{0, 1\}$.

Sabemos que cualquier número $x \in \mathbb{R}$ se puede escribir de la forma

$$x = t + \alpha, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Haciendo uso de las representaciones dadas en (1.3) y (1.4), llegamos a que

$$x = \sum_{i=0}^n b_i 2^i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i},$$

donde $a_i, b_i \in \{0, 1\}$.

Además de la expresión dada en (1.3), haremos uso de la expresión que aparece a continuación para representar un número $x \in [0, 1]$ en base 2:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = 0.a_1a_2a_3 \dots \quad (1.5)$$

con $a_i \in \{0, 1\}$, que nos servirá en el próximo capítulo para simplificar algunos resultados.

1.3. Funciones suma de dígitos binarios

Teiji Takagi construyó la función de Takagi a partir de una función que medía el número de unos o ceros que hay antes de un determinado dígito en la representación binaria de un número $x \in [0, 1]$. Esta función se conoce como la función suma de dígitos binarios y está definida tanto para números enteros como para números que pertenecen al intervalo $[0, 1]$.

Cabe destacar que, debido al hecho de que los números que pertenecen al intervalo $[0, 1]$ tienen infinitos términos en su representación binaria, la función solo contará la cantidad de dígitos que hay en los primeros n términos de su representación. Como los racionales diádicos (puntos de la forma $k/2^l$) tienen dos representaciones binarias, las funciones asociadas serán dependientes del tipo de representación que se utilice. Con todo esto, nosotros utilizaremos la representación que termina en ceros.

Definición 1.4. Sea $t \in \mathbb{Z}^+$, cuya representación en base 2 viene dada en (1.4). Se define la función suma de dígitos binarios como sigue

$$s(t) = \sum_{i=0}^n b_i. \quad (1.6)$$

Esta función simplemente cuenta el número de dígitos $b_i = 1$ que tiene el número t en su representación binaria. Y dependiendo de la paridad del número t podemos caracterizar esta función, como vemos a continuación.

Proposición 1.5. La función suma de dígitos binarios verifica las siguientes propiedades

$$s(2t) = s(t) \quad (1.7)$$

$$s(2t + 1) = s(t) + 1 \quad (1.8)$$

Demostración. Sea $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ cuya representación binaria es $t = \sum_{i=0}^n 2^i b_i$. Entonces, $2t$ tendrá la siguiente representación en base 2:

$$2t = 2 \sum_{i=0}^n 2^i b_i = \sum_{i=0}^n 2^{i+1} b_i = \sum_{i=1}^{n+1} 2^i b_{i-1},$$

y, por tanto,

$$s(2t) = \sum_{i=1}^{n+1} b_{i-1} = \sum_{i=0}^n b_i = s(t).$$

Asimismo, la representación binaria de $2t + 1$ viene dada como

$$2t + 1 = \sum_{i=1}^{n+1} 2^i b_{i-1} + 1$$

y, por tanto,

$$s(2t + 1) = \sum_{i=1}^{n+1} b_{i-1} + 1 = s(t) + 1.$$

□

Como los números pertenecientes al intervalo $[0, 1]$ tienen una representación binaria con una cantidad infinita de términos, la función suma de dígitos solo ofrecerá el número de ceros o unos que haya en los primeros n términos de la representación.

Definición 1.6. Dado $x \in [0, 1]$ tal que su desarrollo binario es el siguiente

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = 0.a_1 a_2 a_3 \dots,$$

con $a_i \in \{0, 1\}$, definimos para todo $i \geq 1$ las siguientes funciones con valores enteros:

1. La función suma de dígitos

$$N_n^1(x) = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad (1.9)$$

la cual determina la cantidad de unos en los primeros n términos de la expansión binaria de x .

2. La función suma de ceros

$$N_n^0(x) = n - N_n^1(x). \quad (1.10)$$

En este caso, la ecuación determina el número de ceros en los primeros n términos de la expansión binaria de x .

3. La función suma de dígitos deficiente, que viene dada por la siguiente expresión:

$$D_n(x) = N_n^0(x) - N_n^1(x) = n - 2N_n^1(x) = n - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \quad (1.11)$$

En este caso, esta función hace un balance entre el número de ceros y unos que hay en los primeros n términos, de forma que será positiva si hay más ceros que unos. Será negativa, si se da el caso opuesto.

1.4. La función distancia al entero más próximo

Con motivo de obtener de una manera más simple ciertos resultados sobre la función de Takagi, veremos una función que mide la distancia de un número x al entero más cercano. De esta forma, y a partir de ella, podremos dar una construcción alternativa de la función del nipón.

Definición 1.7. Dado un $x \in \mathbb{R}$, se define la función distancia al entero más cercano como

$$\varphi(x) = \inf_{m \in \mathbb{Z}} |x - m|.$$

Proposición 1.8. *La función φ goza de las siguientes propiedades:*

1. Si $x \in [0, 1)$, entonces tenemos

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ 1 - x, & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases} \quad (1.12)$$

2. Si $x \in \mathbb{R}$, entonces tenemos

$$\varphi(2^n x) = \begin{cases} 2^n x - t, & \text{si } x \in \left[\frac{2t}{2^{n+1}}, \frac{2t+1}{2^{n+1}}\right), t \in \mathbb{Z}, \\ t - 2^n x, & \text{si } x \in \left[\frac{2t-1}{2^{n+1}}, \frac{2t}{2^{n+1}}\right), t \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Demostración. 1. Podemos expresar el intervalo $[0, 1]$ como una partición:

$$[0, 1] = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right).$$

Así, si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, tenemos que

$$\inf_{m \in \mathbb{Z}} |x - m| = |x - 0| = x.$$

Asimismo, si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, tenemos que

$$\inf_{m \in \mathbb{Z}} |x - m| = |x - 1| = 1 - x,$$

por lo que llegamos a (1.12).

2. Por otra parte, dado un entero $n \geq 0$ fijado, podemos particionar el conjunto de los números reales de la manera siguiente:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{t \in \mathbb{Z}} \left(\left[\frac{2t-1}{2^{n+1}}, \frac{2t}{2^{n+1}} \right) \cup \left[\frac{2t}{2^{n+1}}, \frac{2t+1}{2^{n+1}} \right) \right).$$

Por tanto, existe un único t_0 tal que

$$x \in \left[\frac{2t_0-1}{2^{n+1}}, \frac{2t_0}{2^{n+1}} \right) \cup \left[\frac{2t_0}{2^{n+1}}, \frac{2t_0+1}{2^{n+1}} \right).$$

Ahora bien

$$x \in \left[\frac{2t_0-1}{2^{n+1}}, \frac{2t_0}{2^{n+1}} \right) \Rightarrow 2^n x \in \left[\frac{2t_0-1}{2}, t_0 \right),$$

por lo que

$$\varphi(2^n x) = \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^n x - m| = |2^n x - t_0| = t_0 - 2^n x.$$

Y en el otro caso,

$$x \in \left[\frac{2t_0}{2^{n+1}}, \frac{2t_0 + 1}{2^{n+1}} \right) \Rightarrow 2^n x \in \left[t_0, \frac{2t_0 + 1}{2} \right),$$

por lo que

$$\varphi(2^n x) = \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^n x - m| = |2^n x - t_0| = 2^n x - t_0.$$

De aquí, deducimos (1.13). □

En el siguiente resultado vemos cómo definir la función distancia al entero más próximo usando los desarrollos binarios.

Proposición 1.9. *Sea $x \in [0, 1]$ tal que $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = 0.a_1 a_2 \dots$, con $a_i \in \{0, 1\}$. Se tiene lo siguiente:*

1.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0.a_1 a_2 a_3 \dots, & \text{si } a_1 = 0, \\ 0.\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \dots, & \text{si } a_1 = 1. \end{cases} \quad (1.14)$$

2.

$$\varphi(2^n x) = \begin{cases} 0.a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots, & \text{si } a_{n+1} = 0, \\ 0.\bar{a}_{n+1} \bar{a}_{n+2} \bar{a}_{n+3} \dots, & \text{si } a_{n+1} = 1. \end{cases} \quad (1.15)$$

Siendo $\bar{a} = 1 - a$ para $a = 0$ o $a = 1$ el complemento del dígito binario.

Demostración. 1. Al igual que en la demostración de la proposición anterior, expresaremos el intervalo $[0, 1]$ como una partición:

$$[0, 1] = \left[0, \frac{1}{2} \right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1 \right).$$

Así, si $x \in \left[0, \frac{1}{2} \right)$, i.e. $a_1 = 0$, se cumple

$$\varphi(x) = \inf_{m \in \mathbb{Z}} |x - m| = |x - 0| = x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = 0.a_1 a_2 \dots$$

Asimismo, si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right)$ (i.e. $a_1 = 1$), tenemos que

$$\varphi(x) = \inf_{m \in \mathbb{Z}} |x - m| = |x - 1| = 1 - x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_i}{2^i} = 0.\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \dots$$

Con lo que hemos probado (1.14).

2. Asimismo, dado un $n \geq 0$ fijado, podemos particionar el intervalo $[0, 1]$ de la manera siguiente:

$$[0, 1] = \bigcup_{t=0}^{2^n-1} \left(\left[\frac{2t}{2^{n+1}}, \frac{2t+1}{2^{n+1}} \right) \cup \left[\frac{2t+1}{2^{n+1}}, \frac{2t+2}{2^{n+1}} \right) \right).$$

Para un punto $x \in [0, 1]$, el término a_{n+1} de su representación binaria será

$$\begin{cases} 0, & \text{si } x \in \left[\frac{2t}{2^{n+1}}, \frac{2t+1}{2^{n+1}} \right), \\ 1, & \text{si } x \in \left[\frac{2t+1}{2^{n+1}}, \frac{2t+2}{2^{n+1}} \right). \end{cases}$$

Por tanto, si $x \in [0, 1]$, existe un único $t_0 \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ tal que

$$x \in \left[\frac{2t_0}{2^{n+1}}, \frac{2t_0+1}{2^{n+1}} \right) \cup \left[\frac{2t_0+1}{2^{n+1}}, \frac{2t_0+2}{2^{n+1}} \right).$$

y, por tanto,

$$2^n x \in \left[\frac{2t_0}{2}, \frac{2t_0+1}{2} \right) \cup \left[\frac{2t_0+1}{2}, \frac{2t_0+2}{2} \right).$$

Si $2^n x \in \left[\frac{2t_0}{2}, \frac{2t_0+1}{2} \right)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(2^n x) &= \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^n x - m| = 2^n x - t_0 = \sum_{i=0}^{\infty} 2^n \frac{a_i}{2^i} - t_0 \\ &= \sum_{i=0}^n 2^{n-i} a_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{n-i} a_i - t_0 \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{n-i} a_i - t_0 = 0.a_{n+1}a_{n+2}\dots \end{aligned}$$

Pero si $2^n x \in \left[\frac{2t_0+1}{2}, \frac{2t_0+2}{2} \right)$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi(2^n x) &= \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^n x - m| = t_0 + 1 - 2^n x = t_0 + 1 - \sum_{i=0}^{\infty} 2^n \frac{a_i}{2^i} \\ &= t_0 + 1 - \sum_{i=0}^n 2^{n-i} a_i - \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{n-i} a_i \\ &= 1 - \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{n-i} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1-a_i}{2^i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{a}_i = 0.\bar{a}_1\bar{a}_2\dots \end{aligned}$$

Y hemos probado (1.15).

□

Cabe destacar otra forma de expresión de la función distancia que estamos viendo para un $x \in [0, 1]$:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(1 - a_1) + (1 - a_i)a_1}{2^i} \quad (1.16)$$

y

$$\varphi(2^n x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{n+i}(1 - a_{n+1}) + (1 - a_{n+i})a_{n+1}}{2^i}, \quad (1.17)$$

con $a_i \in \{0, 1\}$.

Pues en el primer caso, si $a_1 = 0$ la igualdad de (1.16) se reduce a

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$$

mientras que si $a_1 = 1$, es

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_i}{2^i},$$

y esto no es más que lo probado en (1.14). De igual modo, de (1.15) se deduce (1.17).

La función de Takagi

Vamos a ver en este capítulo dos construcciones habituales de la función de Takagi, la primera usando funciones lineales a trozos y la segunda con la función distancia al entero más próximo. También veremos la construcción original del propio Takagi.

2.1. Construcción de la función de Takagi a partir de funciones lineales a trozos

Partamos de la función $h(x) = |x|$ en $[-1, 1]$ y tomemos su extensión periódica de periodo 2, poniendo $h(x+2) = h(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Dicha extensión periódica viene representada a continuación:

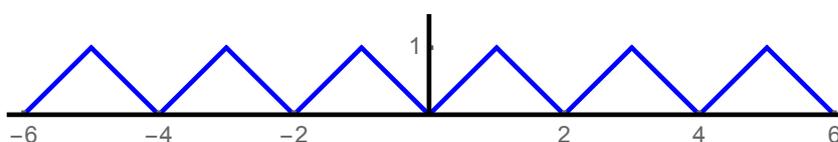


Figura 2.1: Extensión periódica de $h(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$.

Es sencillo ver que

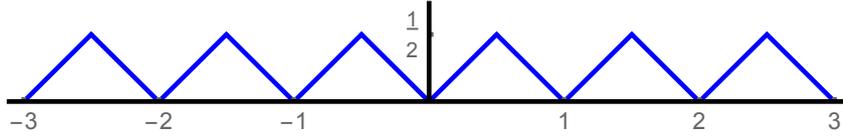
$$h(x) = \begin{cases} x - 2t, & \text{si } x \in [2t, 2t + 1], t \in \mathbb{Z}, \\ 2t - x, & \text{si } x \in [2t - 1, 2t], t \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Tenemos que h es una función par y además, $h(2t) = 0$ y $h(2t - 1) = 1$, para todo $t \in \mathbb{Z}$. Vamos a considerar las funciones

$$h_n(x) = \frac{1}{2^n} h(2^n x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

para cada $n \geq 0$ entero.

Veamos cómo se comporta $h_1(x) = \frac{1}{2} h(2x)$ en el intervalo $[-2, 2]$. Puesto que estamos duplicando el argumento de la función h , el dominio se contrae en $\frac{1}{2}$ y, por tanto, h_1 es otra función periódica, aunque de periodo 1 en este caso. Como multiplicamos $h(2x)$ por $\frac{1}{2}$, las alturas tomadas por h se verán contraídas en $\frac{1}{2}$. En la siguiente figura vemos representada la función h_1 en $[-2, 2]$.

Figura 2.2: Extensión periódica de h_1 .

Explícitamente, tenemos

$$h_1(x) = \begin{cases} x - t, & \text{si } x \in \left[t, \frac{2t+1}{2} \right], \text{ para } t \in \mathbb{Z}, \\ t - x, & \text{si } x \in \left[\frac{2t-1}{2}, t \right], \text{ para } t \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Con un procedimiento similar, podemos hallar el comportamiento de $h_2(x) = \frac{1}{2^2}h(2^2x)$ siendo su forma explícita para todo número real x

$$h_2(x) = \begin{cases} x - \frac{t}{2}, & \text{si } x \in \left[\frac{t}{2}, \frac{2t+1}{4} \right], t \in \mathbb{Z}, \\ \frac{t}{2} - x, & \text{si } x \in \left[\frac{2t-1}{4}, \frac{t}{2} \right], t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (2.4)$$

donde $h_2(x)$ una función periódica de periodo $\frac{1}{2}$.

Más generalmente, toda h_n es una función par, periódica de periodo $\frac{1}{2^{n-1}}$. Asimismo,

$$h_n\left(\frac{2t}{2^n}\right) = 0, \quad h_n\left(\frac{2t-1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

y además,

$$|h_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

De forma explícita se tiene que

$$h_n(x) = \begin{cases} x - \frac{t}{2^{n-1}}, & \text{si } x \in \left[\frac{t}{2^{n-1}}, \frac{2t+1}{2^n} \right], t \in \mathbb{Z}, \\ \frac{t}{2^{n-1}} - x, & \text{si } x \in \left[\frac{2t-1}{2^n}, \frac{t}{2^{n-1}} \right], t \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Al extender periódicamente cada h_n , estas definen una función en forma de dientes de sierra que conforme n crece el periodo se reduce un factor de $\frac{1}{2^{n-1}}$.

La suma de estas h_n nos servirá para definir la función de Takagi. El resultado de estas sumas son funciones lineales en los intervalos que tienen por extremo a los racionales diádicos y además en cada uno de estos intervalos la pendiente de la recta varía y como es de esperarse a medida que estos intervalos se vayan haciendo más pequeños, la suma de las pendientes de las rectas afectadas tienden a $+\infty$ o $-\infty$.

La suma parcial de nivel N de la función de Takagi viene dada por

$$g_N(x) = \sum_{n=0}^N h_n(x) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} h(2^n x). \tag{2.7}$$

A continuación, vemos la gráfica de g_N para $N = 1, 2, 3, 4$.

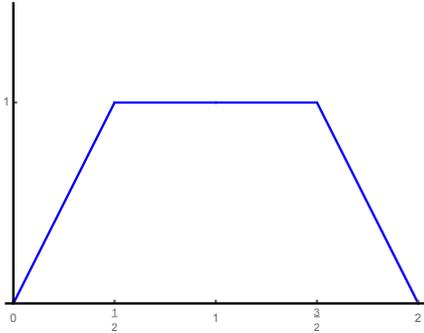


Figura 2.3: Gráfica de la suma parcial $g_1(x)$.

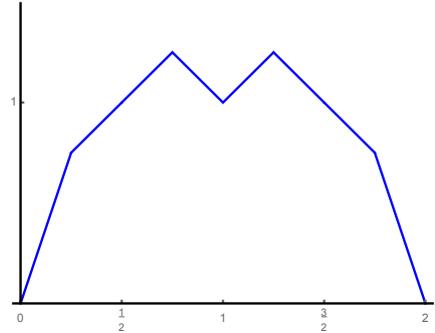


Figura 2.4: Gráfica de la suma parcial $g_2(x)$.

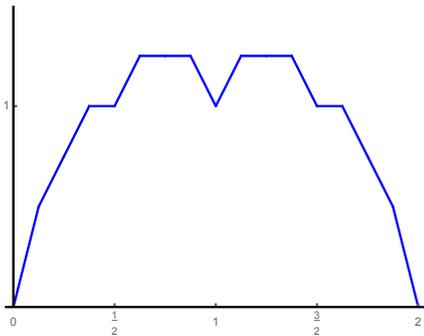


Figura 2.5: Gráfica de la suma parcial $g_3(x)$.

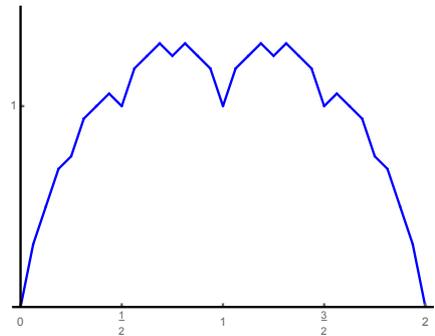


Figura 2.6: Gráfica de la suma parcial $g_4(x)$.

Definición 2.1. Se define la función de Takagi como

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} h(2^n x), \tag{2.8}$$

donde h_n representa a las funciones definidas en la ecuación (2.2).

Teorema 2.2. Para todo $x \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} h(2^n x)$$

es convergente.

Demostración. Basta aplicar el criterio M de Weierstrass teniendo en cuenta la desigualdad (2.5), que nos dice que la serie (2.8) está mayorada por una serie geométrica convergente. Así pues, esta serie es absoluta y uniformemente convergente en \mathbb{R} .

□

Gracias a este teorema, podemos asegurar que la función de Takagi se puede construir mediante aproximaciones lineales. A continuación, vemos una representación gráfica de g .

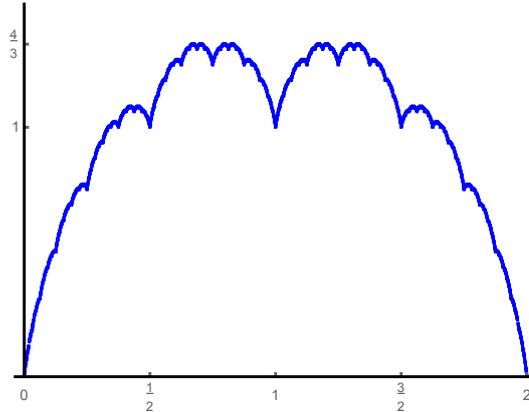


Figura 2.7: Función de Takagi construida a partir de la extensión periódica de $|x|$ en $[-1, 1]$.

Enunciamos y probamos a continuación algunas propiedades interesantes de esta función.

Proposición 2.3. *La función de Takagi cumple las siguientes propiedades:*

1. *La función g es periódica de periodo 2.*
2. *La función g es par.*
3. *La función g es continua.*

Demostración. 1. Al ser h una función par y periódica de periodo 2, podemos demostrar esta primera propiedad. Así, si $x \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que

$$g(2+x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(2+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} h(2^{n+1} + 2^n x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} h(2^n x) = g(x).$$

2. Dado un $x \in \mathbb{R}$, puesto que toda función h_n es par,

$$g(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) = g(x).$$

3. Por último, basta tener en cuenta que (h_n) es una sucesión de funciones continuas y que la convergencia de la serie (2.8) es uniforme.

□

2.2. La función de Takagi a partir de la función distancia al entero más cercano

En esta sección, construiremos la función de Takagi a partir de la función distancia al entero más cercano, que vimos en la última sección del primer capítulo. Partiremos de la función $\varphi(x)$

en $[0, 1]$ y tomaremos su extensión periódica (de periodo 1) al considerar $\varphi(x + 1) = \varphi(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que tendremos una función como la que vemos en la siguiente figura.

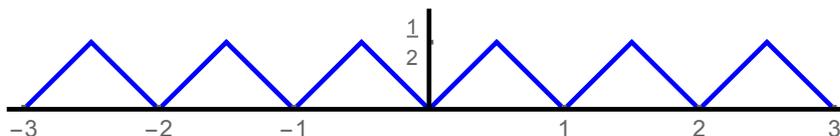


Figura 2.8: Extensión periódica de $\varphi(x)$.

Esta extensión da lugar a una función con forma de dientes de sierra, igual que en el caso anterior, que no es derivable en los múltiplos enteros de $1/2$. A diferencia de la función h de la sección anterior, esta tiene una contracción de $1/2$ en las alturas y su periodo es 1. Se cumple que

$$\varphi(x) = \begin{cases} x - t, & \text{si } x \in \left[\frac{2t}{2}, \frac{2t+1}{2} \right), t \in \mathbb{Z}, \\ t - x, & \text{si } x \in \left[\frac{2t-1}{2}, \frac{2t}{2} \right), t \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Si consideramos la transformación $x \rightarrow nx$ siendo n natural, es claro que si $x \in [0, 1]$ entonces $nx \in [0, n]$, así que la función $x \rightarrow \varphi(nx)$ reproduce n veces el comportamiento de φ en el intervalo $[0, 1]$ y, por tanto, no será derivable en $2n - 1$ puntos interiores al intervalo como vemos en la figura 2.9, en la que se muestra la gráfica de $\varphi(8x)$, que reproduce 8 veces el comportamiento de $\varphi(x)$ en $[0, 1]$. Se observan también los 15 puntos interiores al intervalo donde no existe la derivada.

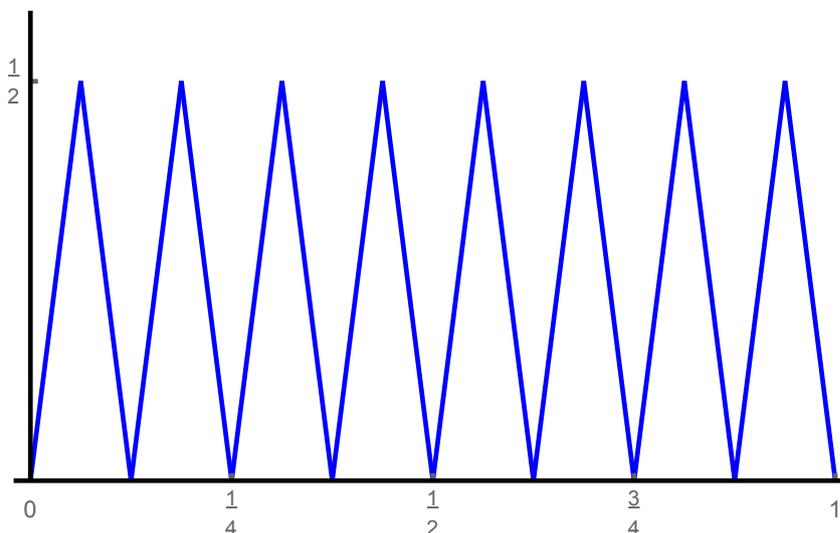


Figura 2.9: Función $\varphi(8x)$ en $[0, 1]$.

Es obvio que tomando n tan grande como sea necesario, podemos construir una función continua en $[0, 1]$ que no será derivable en el número impar de puntos que se desee.

Siguiendo el mismo esquema de la pregunta anterior, definimos la función de Takagi de la siguiente forma.

Definición 2.4. La función de Takagi viene dada por

$$\tau(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n}. \quad (2.10)$$

Así pues, la función de Takagi se construye partiendo de una V invertida en el intervalo $[0, 1]$, que se subdivide sucesivamente y se reduce a la mitad su altura, formando una poligonal como dientes de sierra. La suma infinita de estos dientes de sierra es la curva de Takagi. En la figura 2.10 vemos la gráfica de los cuatro primeros términos de esta serie en la que se aprecia perfectamente lo que comentamos.

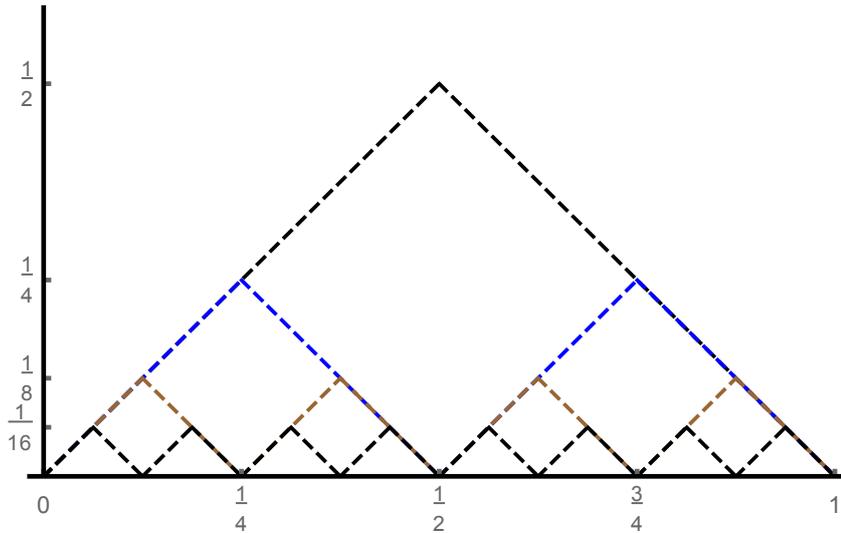


Figura 2.10: Gráfica de las funciones $\varphi(2^k x)/2^k$ para $k = 0, 1, 2, 3$.

Podemos calcular valores concretos de esta función, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \tau\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} + 0 + 0 + \dots = \frac{1}{2}. \\ \tau\left(\frac{3}{4}\right) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 + 0 + \dots = \frac{1}{2}. \\ \tau\left(\frac{1}{16}\right) &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + 0 + 0 + \dots = \frac{1}{4}. \\ \tau\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) = \frac{2}{3}. \\ \tau\left(\frac{1}{5}\right) &= \frac{1}{5} \left(1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots\right) = \frac{2}{5} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots\right) = \frac{8}{15}. \\ \tau\left(\frac{1}{7}\right) &= \frac{1}{7} \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \dots\right)\right) = \frac{22}{49}. \end{aligned}$$

En general, $\tau(x)$ es una suma finita si x es un número diádico. Para racionales no diádicos se obtiene su valor sumando series geométricas.

Ahora, nos centraremos en demostrar que la serie (2.10) es convergente.

Teorema 2.5. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n} \quad (2.11)$$

es convergente.

Demostración. Sabemos que

$$\varphi(2^n x) \leq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \geq 0,$$

así que el criterio M de Weierstrass nos permite deducir la convergencia absoluta y uniforme de la serie en \mathbb{R} . □

El siguiente lema nos servirá para demostrar el próximo teorema, que muestra una comparación entre las dos representaciones de la función de Takagi que hemos visto.

Lema 2.6. *Para cualquier $x \in [0, 1]$, se satisface la siguiente relación:*

$$\varphi(2^n x) = 2^n h_{n+1}(x).$$

Demostración. Como ya sabemos, la función φ es una contracción de la función h en un factor de $1/2$ en el dominio y también en un factor de $1/2$ en las alturas, por lo que

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}h(2x) = h_1(x).$$

En el caso general, si observamos las ecuaciones (2.9) y (2.6), vemos que se cumple la igualdad enunciada en el lema. □

La relación entre la función de Takagi construida en la sección anterior y esta queda expuesta en el siguiente resultado.

Teorema 2.7. *Para cada $x \in [0, 1]$, se cumple que*

$$\tau(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n} = \frac{1}{2}g(2x).$$

Demostración. Del lema 2.6, tenemos que

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n h_{n+1}(x)}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(2(2^n x))}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} h_n(2x) = \frac{1}{2}g(2x). \end{aligned}$$

□

Las sumas parciales de la serie que define τ son

$$\tau_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}.$$

Estas sumas parciales son similares a las g_n que vimos en la sección anterior. Son funciones lineales a trozos (poligonales) en las que cada sumando se asemeja a un diente de sierra, con vértices en los números diádicos $k/2^n$ con $1 \leq k \leq 2^n - 1$. Todos los segmentos que la componen tiene pendientes enteras, que oscilan entre $-n$ y n . La pendiente máxima $+n$ se alcanza en el intervalo

$$\left[0, \frac{1}{2^n}\right]$$

y la mínima $-n$ en

$$\left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right].$$

En la figura 2.11 vemos la suma parcial τ_4 donde aparecen indicadas las pendientes de los segmentos. Estas sumas parciales τ_n coinciden con τ en todos los diádicos racionales $k/2^n$. Y los valores que alcanzan en los diádicos estas sumas parciales permanecen ya constantes, es decir,

$$\tau_n\left(\frac{k}{2^n}\right) = \tau_{n+j}\left(\frac{k}{2^n}\right).$$

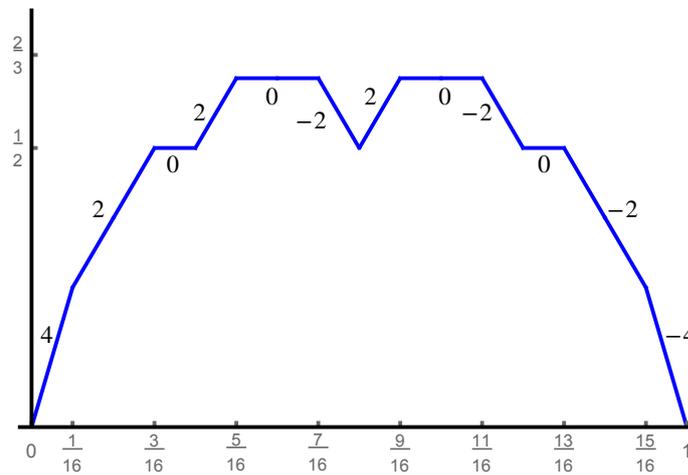


Figura 2.11: Suma parcial τ_4 de la función de Takagi.

Como consecuencia,

$$\tau\left(\frac{k}{2^n}\right) = \tau_n\left(\frac{k}{2^n}\right).$$

En la figura 2.12 se observa este comportamiento.

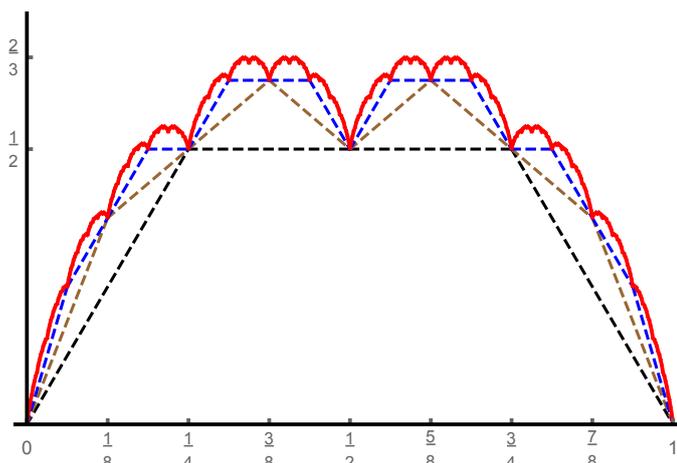


Figura 2.12: Sumas parciales τ_1 , τ_2 y τ_3 de la función de Takagi.

La sucesión (τ_n) es no decreciente y va aproximando a la función de Takagi. Es decir, se cumple que

$$\tau_1(x) \leq \tau_2(x) \leq \tau_3(x) \leq \dots$$

Nótese que τ y la función g dada en la definición (2.1) no son exactamente iguales, sino que τ presenta una contracción en $1/2$ del dominio g (y, por ende, es de periodo 1) y una contracción de $1/2$ en las alturas. Vemos a continuación en la figura 2.13 las gráficas de ambas funciones.

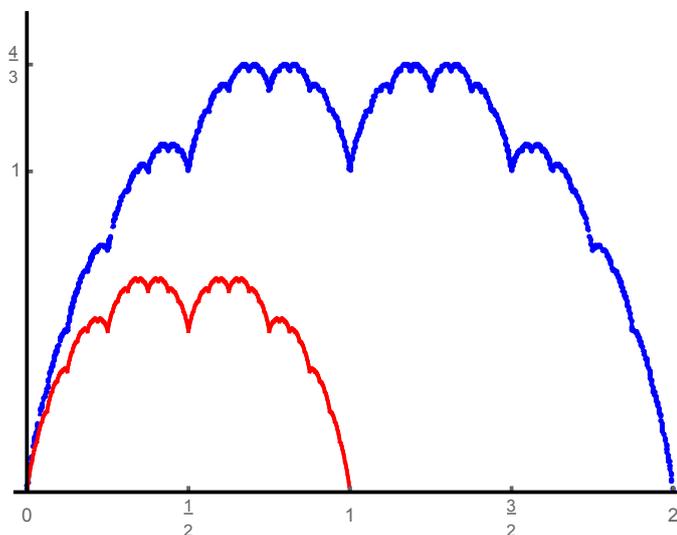


Figura 2.13: Funciones g y τ .

Es habitual encontrar en la literatura actual el término “*blancmange function (curva del manjar blanco)*” refiriéndose a la función de Takagi. Tall ([20]) lo propone en su artículo de 1982, donde da la “receta” para construirla, aunque le atribuye el nombre a un colega suyo, John Mills que vio la gráfica de esta función de forma similar a un pudín inglés hecho de gelatina de leche, véase la figura 2.15. El propio Tall cuenta la anécdota (véase [21]) de que la palabra

inglesa “blancmange” se compone de dos palabras francesas “blanc” (blanco) y “mange” (comer). Cuando esta función se presentó por primera vez a los académicos y profesores franceses en un seminario en París, la audiencia quedó muy perpleja. ¿Qué es esta comida blanca?, se preguntaron. Se explicó el origen del nombre y los franceses quedaron satisfechos. Es lo que los franceses llaman un “puddín”. Como siempre, los franceses y los ingleses tienen algunas dificultades para entenderse entre sí, en este caso porque los ingleses usan el término francés “blancmange” y los franceses usan el término inglés “pudding”.

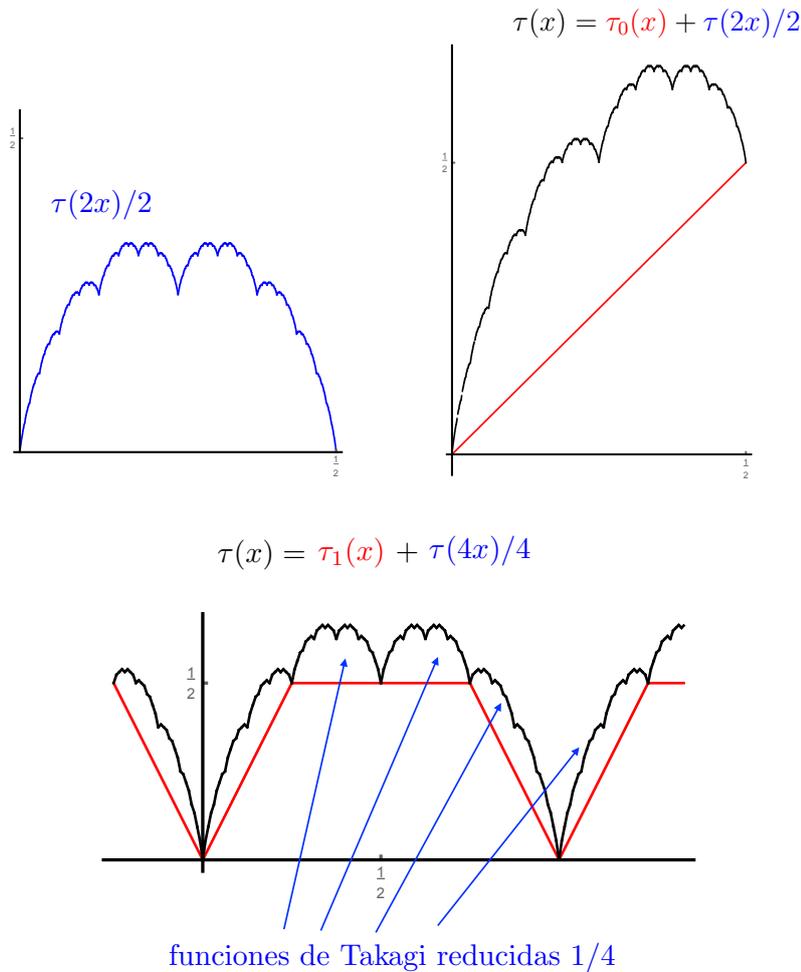


Figura 2.14: Ilustración de la relación $\tau(x) = \tau_{m-1}(x) + \tau(2^m x)/2^m$ para $m = 1$ y $m = 2$.

En el artículo de divulgación [13], se explica la complejidad del gráfico de la función de Takagi de una manera muy sencilla que exponemos a continuación. Es fácil ver que si $m \geq 1$ es natural, se cumple

$$\tau(x) = \tau_{m-1}(x) + \frac{\tau(2^m x)}{2^m}.$$

Pues basta observar que

$$\tau(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n} = \tau_{m-1}(x) + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n} = \tau_{m-1}(x) + \frac{1}{2^m} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^{n-m}}$$

$$= \tau_{m-1}(x) + \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^{m+k}x)}{2^k} = \tau_{m-1}(x) + \frac{1}{2^m} \tau(2^m x).$$

Así que en cada intervalo

$$\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m} \right]$$

con k entero, la gráfica de $\tau(x)$ viene dada por una parte finita más una copia similar a toda la gráfica de $\tau(x)$ en $[0, 1]$ pero reducida por un factor $1/2^m$.

Esta relación, que vemos en la figura 2.14 para $m = 1$ y $m = 2$, nos dice que la función de Takagi está formada por una infinidad de minicopias a todas las escalas de sí misma. Así que al hacer una ampliación en un entorno de un punto no encontraremos que la gráfica no se parece a una recta, sino a copias de la gráfica zigzagueante inicial.

La función τ tiene las propiedades análogas a g vistas en la proposición 2.3.

Proposición 2.8. *La función τ tiene las siguientes propiedades.*

1. *La función τ es periódica de periodo 2.*
2. *La función τ es par.*
3. *La función τ es continua.*

Demostración. Las propiedades señaladas son consecuencia de resultados anteriores, en concreto del teorema 2.7 y la proposición 2.3.

1. Tenemos que

$$\tau(x+1) = \frac{1}{2}g(2(x+1)) = \frac{1}{2}g(2x+2)$$

y, como g es periódica de periodo 2,

$$\tau(x+1) = \frac{1}{2}g(2x) = \tau(x).$$

2. Ya vimos que g es una función par, luego τ también lo es, pues

$$\tau(-x) = \frac{1}{2}g(2(-x)) = \frac{1}{2}g(-2x) = \frac{1}{2}g(2x) = \tau(x).$$

3. Por último, τ es continua, ya que las funciones $\left(\frac{\varphi(2^n x)}{2^n}\right)$ son continuas y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n}$ converge uniformemente a τ .

□

Una generalización inmediata de la función de Takagi es considerar, dado $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, la función

$$\tau_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(r^n x)}{r^n}.$$

La función que definió Van der Waerden (véase [25]) fue τ_{10} . Probó que no era diferenciable en ningún punto.

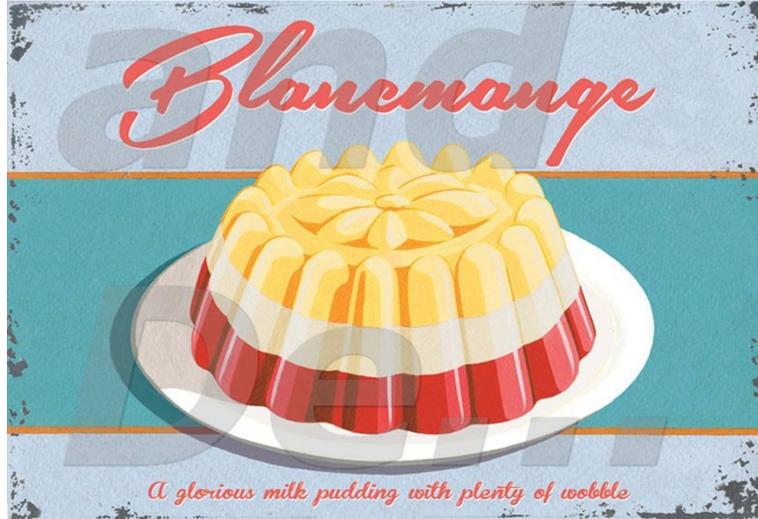


Figura 2.15: Pastel típico “blancmange”.

2.3. Definición original de Takagi

Las representaciones más comunes de la función de Takagi son las que ya hemos visto en (2.8) y en (2.10). Vamos a ver en esta sección la definición original de Takagi, publicada en su artículo de 1903, véase [19]. Takagi definió su función a partir de las funciones sumas de dígitos binarios que vimos en el primer capítulo.

El siguiente teorema se debe a Lagarias y Maddock (véase [11]). En él se prueba que la definición original de Takagi ([19]) coincide con la función τ que vimos en la sección anterior.

Teorema 2.9. Si $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = 0.a_1a_2a_3\dots$ la función de Takagi viene dada por

$$\tau(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\ell_m}{2^m}, \quad (2.12)$$

donde $0 \leq \ell_m = \ell_m(x) \leq m$ es el número de dígitos que hay antes del término que se encuentra en la posición m y son diferentes a este, es decir,

$$\ell_m(x) = \#\{i : 1 \leq i < m, a_i \neq a_m\}^1.$$

En términos de la función suma de dígitos (véase la definición (1.6), página 7), se tiene que

$$\ell_m(x) = \begin{cases} N_{m-1}^1(x), & \text{si } a_m = 0, \\ N_{m-1}^0(x), & \text{si } a_m = 1. \end{cases}$$

Equivalentemente,

$$\ell_m(x) = a_m N_{m-1}^0(x) + (1 - a_m) N_{m-1}^1(x).$$

¹Como es habitual, $\#A$ representa el cardinal del conjunto A .

Demostración. Para ver que las funciones definidas en (2.10) y (2.12) son la misma vamos a usar la igualdad dada en (1.17) que vimos al finalizar el primer capítulo. De ella deducimos que

$$\frac{\varphi(2^n x)}{2^n} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{n+i}(1 - a_{n+1}) + (1 - a_{n+i})a_{n+1}}{2^{n+1}}, \quad (2.13)$$

así que sustituyendo esta expresión en (2.10), tenemos que

$$\tau(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{n+i}(1 - a_{n+1}) + (1 - a_{n+i})a_{n+1}}{2^{n+i}},$$

que poniendo $m = n + i$ nos da

$$\tau(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{a_m(1 - a_{n+1}) + (1 - a_m)a_{n+1}}{2^m},$$

e intercambiando las series,

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a_m(1 - a_{n+1}) + (1 - a_m)a_{n+1}}{2^m} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a_m}{2^m} \left(\sum_{n=0}^{m-1} (1 - a_{n+1}) \right) + \frac{(1 - a_m)}{2^m} \left(\sum_{n=0}^{m-1} a_{n+1} \right) \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a_m}{2^m} \left(\sum_{n=1}^m (1 - a_n) \right) + \frac{(1 - a_m)}{2^m} \left(\sum_{n=1}^m a_n \right) \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Observemos que en (2.14) tendremos una contribución de $\frac{1}{2^m}$ siempre que $a_n = 0$ y $a_m = 1$; y por otra parte, la suma $\sum_{n=1}^m a_n$ nos da una contribución de $\frac{1}{2^m}$ siempre que $a_n = 1$ y $a_m = 0$. Es decir, cada una de estas sumas parciales cuenta el número de a_n con $1 \leq n < m$ que tienen valor contrario a a_m y si $a_m = 0$ la suma $\sum_{n=1}^m a_n$ cuenta la cantidad de unos que hay antes de a_m . En definitiva, en términos de las funciones suma de dígitos y sumas de ceros se tiene que

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a_m}{2^m} \left(\sum_{n=1}^m (1 - a_n) \right) + \frac{(1 - a_m)}{2^m} \left(\sum_{n=1}^m a_n \right) \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m N_{m-1}^0(x) + (1 - a_m) N_{m-1}^1(x)}{2^m} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\ell_m}{2^m}. \end{aligned}$$

□

2.4. Valor máximo

Vamos a ver que la función de Takagi es acotada. En concreto, vamos a estudiar el máximo de la función de Takagi. Es claro que como el máximo de $\varphi(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$ es $1/2$, se tiene que

$$\tau(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \varphi(2^k x) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Jean Pierre Kahane ([9]) probó que el máximo de la función de Takagi es $2/3$. Vamos a probar este hecho siguiendo las ideas de [2] y [6].

Teorema 2.10. *Se cumple que $0 \leq \tau(x) \leq 2/3$.*

Demostración. Es claro que el mínimo de la función de Takagi es 0, valores que alcanza en los puntos 0 y 1.

Veamos en primer lugar que si $x \in [0, 1]$ y $k \geq 1$ es

$$\frac{\varphi(2^{2k-2}x)}{2^{2k-2}} + \frac{\varphi(2^{2k-1}x)}{2^{2k-1}} \leq \frac{2}{4^k}. \quad (2.15)$$

Equivalentemente,

$$\varphi(2^{2k-2}x) + \frac{1}{2}\varphi(2^{2k-1}x) \leq \frac{1}{2}. \quad (2.16)$$

Como φ es periódica de periodo 1, la desigualdad anterior equivale a

$$\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(2x) \leq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (2.17)$$

Recordemos que

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 3/2 \\ 2-x, & 3/2 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

lo que implica que

$$\varphi(2x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/4 \\ 1/2-x, & 1/4 \leq x \leq 1/2 \\ x-1/2, & 1/2 \leq x \leq 3/4 \\ 1-x, & 3/4 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

y, por tanto,

$$\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(2x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/4 \\ 1/2, & 1/4 \leq x \leq 3/4 \\ 2-2x, & 3/4 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Es obvio que se cumple (2.17) (véase la figura 2.16). De la periodicidad de φ deducimos (2.15).

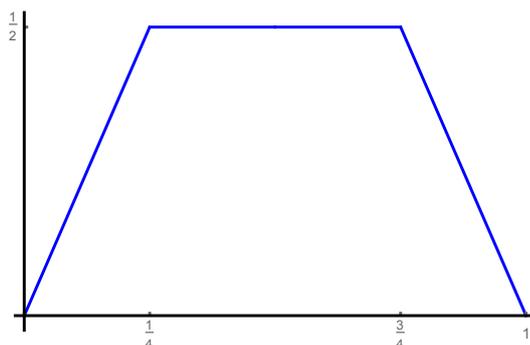


Figura 2.16: Gráfica de $\varphi(x) + \varphi(2x)/2$.

Usamos (2.15) para obtener

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(2x) + \frac{1}{2^2}\varphi(2^2x) + \frac{1}{2^3}\varphi(2^3x) + \dots \\ &= \left(\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(2x)\right) + \left(\frac{1}{2^2}\varphi(2^2x) + \frac{1}{2^3}\varphi(2^3x)\right) + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2k-2}}\varphi(2^{2k-2}x) + \frac{1}{2^{2k-1}}\varphi(2^{2k-1}x)\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{4^k} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Así pues, $\tau(x) \leq 2/3$. Veamos que existen x tales que $\tau(x) = 2/3$. Estos x deben satisfacer la igualdad en (2.15) para todo k .

Vamos a buscar los x de modo que (2.16) sea una igualdad. Para ello, escribimos

$$\varphi_k(x) = \varphi(2^{2k-2}x) + \frac{1}{2}\varphi(2^{2k-1}x)$$

y observamos que

$$\begin{aligned} \varphi_k\left(\frac{1}{4^{k-1}} + x\right) &= \varphi\left(2^{2k-2}\left(\frac{1}{4^{k-1}} + x\right)\right) + \frac{1}{2}\varphi\left(2^{2k-1}\left(\frac{1}{4^{k-1}} + x\right)\right) \\ &= \varphi(1 + 2^{2k-2}x) + \frac{1}{2}\varphi(2 + 2^{2k-1}x) \\ &= \varphi(2^{2k-2}x) + \frac{1}{2}\varphi(2^{2k-1}x) = \varphi_k(x). \end{aligned}$$

Nótese que hemos usado la periodicidad de φ , es decir, $\varphi(x + 1) = \varphi(x)$.

Por tanto, φ_k es periódica con periodo $1/4^{k-1}$ y la gráfica de φ_k es la unión de 4^{k-1} “copias” de φ_1 con la misma altura $1/2$, pero con anchura $1/4^{k-1}$.

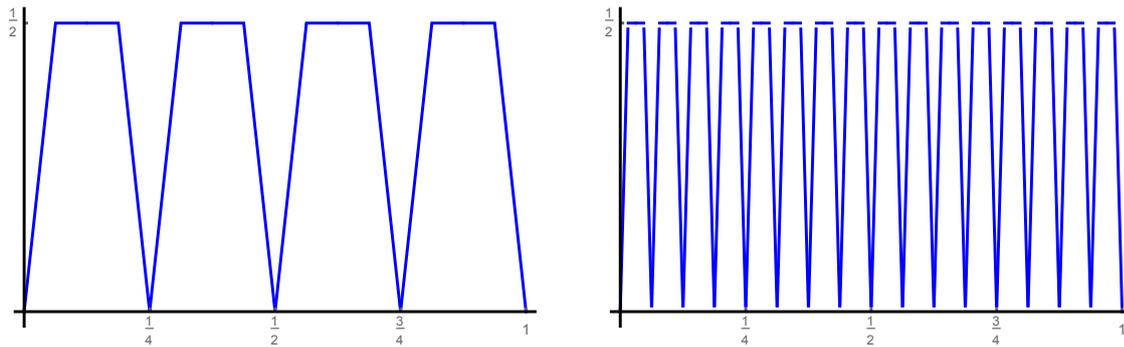


Figura 2.17: Gráficas de φ_2 y φ_3 .

En la figura 2.16 vemos la gráfica de φ_1 y en la figura 2.17 vemos las gráficas de φ_2 y φ_3 . Se aprecia la periodicidad que hemos probado anteriormente. Observemos que φ_k es igual a $1/2$ en la unión de 4^{k-1} subintervalos de $[0, 1]$ cada uno de longitud $2/4^k$.

Así que definimos

$$A_1 = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right]$$

y, para cada $k \geq 1$ construimos A_{k+1} como la unión de los 2^k subintervalos de longitud $2/4^{k+1}$ donde φ_{k+1} es igual a $1/2$ y que estén contenidos en A_k . Por ejemplo,

$$A_2 = \left[\frac{5}{16}, \frac{7}{16} \right] \cup \left[\frac{9}{16}, \frac{11}{16} \right]$$

y

$$A_3 = \left[\frac{21}{64}, \frac{23}{64} \right] \cup \left[\frac{25}{64}, \frac{27}{64} \right] \cup \left[\frac{37}{64}, \frac{39}{64} \right] \cup \left[\frac{41}{64}, \frac{43}{64} \right].$$

En la figura 2.18 vemos los tres primeros conjuntos construidos de esta manera.

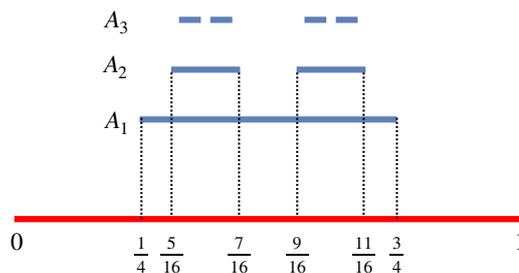


Figura 2.18: Conjuntos A_1, A_2 y A_3 .

Tenemos una sucesión (A_k) de conjuntos compactos encajados que por el teorema de intersección de Cantor debe tener intersección no vacía, es decir, existe

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Tal x de la intersección cumple $\tau(x) = 2/3$.

□

Se pueden caracterizar los puntos del conjunto A usando la expansión cuaternaria (es decir, en base 4) de sus puntos, pues de la construcción del conjunto A se deduce que

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{4^i} : a_i = 1, 2 \right\}.$$

Por ejemplo.

$$\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i},$$

luego $1/3 \in A$ y es $\tau(1/3) = 2/3$.

El conjunto A es perfecto de medida cero. En efecto, es perfecto porque todos los puntos de A son de acumulación pues si $x \in A$ y

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{4^i}; \quad a_i \in \{1, 2\}$$

entonces

$$x_n = x + \frac{3 - 2a_n}{4^n} \in A$$

porque la diferencia es que hemos intercambiado los dígitos 1 y 2 y se cumple que $x_n \rightarrow x$. Por último, tiene medida cero porque la representación de $x \in A$ no contiene al menos un dígito, en este caso el 0 y el 3.

Se puede demostrar que A es homeomorfo al conjunto de Cantor, aunque en la construcción del conjunto A cada intervalo disjunto de la k -ésima etapa es reescalado con factor $1/4$ para después ser duplicado.

Este conjunto A también tiene otra propiedad. Y es que es autosimilar. Recordemos que un conjunto compacto K en un espacio métrico X se dice autosimilar si existen contracciones $f_1, \dots, f_N : X \rightarrow X$ de modo que

$$K = f_1(K) \cup \dots \cup f_N(K).$$

Por ejemplo en \mathbb{R} si $I = [0, 1]$ tenemos que

$$I = f_1(I) \cup f_2(I),$$

donde

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x, \quad f_2(x) = \frac{1}{2}(x + 1).$$

Volviendo a nuestro conjunto A , podemos escribir

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{4^i} : a_i = 1, 2 \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{4} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_i}{4^i} : a_i = 1, 2 \right\} \cup \left\{ \frac{2}{4} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_i}{4^i} : a_i = 1, 2 \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{4^i} : a_i = 1, 2 \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{4^i} : a_i = 1, 2 \right\}. \end{aligned}$$

Así que podemos escribir

$$A = f_1(A) \cup f_2(A)$$

donde f_1 y f_2 son las contracciones

$$f_1(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x, \quad f_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x,$$

ambas con factor de contracción $1/4$.

Conocido el valor máximo de la función de Takagi, podemos decir que la sucesión de sumas parciales $(\tau_n(x))$ converge uniformemente a la función de Takagi, pues se cumple que

$$|\tau_n(x) - \tau(x)| \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

2.5. Ecuaciones funcionales

Pasamos a ver a continuación algunas ecuaciones funcionales que satisface la función de Takagi.

Teorema 2.11. *La función de Takagi satisface las siguientes ecuaciones funcionales.*

1. *Ecuación de reflexión:*

$$\tau(x) = \tau(1-x). \quad (2.18)$$

2. *Ecuaciones de autosimilaridad diádica:*

$$\tau\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tau(x) \quad (2.19)$$

$$\tau\left(\frac{1+x}{2}\right) = \frac{1-x}{2} + \frac{1}{2}\tau(x) \quad (2.20)$$

Demostración. 1. Usando el resultado del teorema 2.7, tenemos que

$$\tau(1-x) = \frac{1}{2}g(2(1-x)) = \frac{1}{2}g(2-2x).$$

Pero por otra parte, la proposición 2.3 nos dice que g es una función par de periodo 2, luego

$$\tau(1-x) = \frac{1}{2}g(2-2x) = \frac{1}{2}g(-2x) = \frac{1}{2}g(2x) = \tau(x).$$

Esta ecuación nos dice que la función de Takagi es simétrica.

2. Si $x \in [0, 1]$, tenemos que

$$\begin{aligned} \tau\left(\frac{x}{2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^{n-1}x)}{2^n} = \frac{\varphi(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(2^{n-1}x)}{2^n} \\ &= \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tau(x), \end{aligned}$$

y hemos probado (2.19).

Probemos ahora (2.20). Tenemos que

$$\begin{aligned}\tau\left(\frac{1+x}{2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^{n-1}(1+x))}{2^n} = \frac{\varphi(1+x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(2^{n-1}x)}{2^n} \\ &= \frac{1-x}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n} = \frac{1-x}{2} + \frac{1}{2}\tau(x),\end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$0 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2},$$

así como

$$0 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1+x}{2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi\left(\frac{1+x}{2}\right) = \frac{1-x}{2}.$$

□

Corolario 2.12. *La función de Takagi es la única función acotada que satisface las ecuaciones de autosimilaridad diádica.*

Demostración. Es consecuencia del teorema del punto fijo de Banach. Sea \mathcal{B} el espacio de Banach de todas las funciones acotadas en $[0, 1]$, dotado de la norma del supremo. Consideremos la aplicación $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ dada por

$$T(f)(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}f(2x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x + \frac{1}{2}f(2x-1), & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

donde $x \in [0, 1]$. Observemos que dadas $f, g \in \mathcal{B}$,

$$|T(f)(x) - T(g)(x)| = \begin{cases} \frac{1}{2}|f(2x) - g(2x)|, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}|f(2x-1) - g(2x-1)|, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Dado que

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x \in [0, 1] \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad x \in [0, 1],$$

concluimos que

$$\|T(f) - T(g)\| \leq \frac{1}{2}\|f - g\|, \quad f, g \in \mathcal{B}.$$

Ahora bien, τ es punto fijo de T , es decir, $T(\tau) = \tau$ por cumplir τ las ecuaciones de autosimilaridad diádica, pues

$$T(\tau)(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}\tau(2x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x + \frac{1}{2}\tau(2x-1), & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

En el primer caso, de (2.19) deducimos que τ cumple $2\tau(x) = 2x + \tau(2x)$, es decir,

$$\tau(2x) = 2\tau(x) - 2x,$$

así que

$$x + \frac{1}{2}\tau(2x) = \tau(x).$$

En el segundo caso, de (2.20) deducimos que

$$2\tau\left(\frac{1+x}{2}\right) = 1 - x + \tau(x) \quad \Rightarrow \quad 2\tau(x) = 2 - 2x + \tau(2x - 1),$$

por lo que

$$1 - x + \frac{1}{2}\tau(2x - 1) = \tau(x).$$

Dado que T es una contracción, el teorema del punto fijo de Banach implica que τ es el único punto fijo de T .

□

Los resultados anteriores pueden generalizarse, como vemos a continuación.

Proposición 2.13. *Si $\ell \in \mathbb{N}$ y $x \in [0, 1]$, la función de Takagi verifica las siguientes ecuaciones funcionales.*

$$\tau\left(\frac{k+x}{2^\ell}\right) = \tau\left(\frac{k}{2^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s(k)}{2^\ell}x + \frac{1}{2^\ell}\tau(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2^\ell - 1. \quad (2.21)$$

$$\tau\left(\frac{k-x}{2^\ell}\right) = \tau\left(\frac{k}{2^\ell}\right) + \frac{2s(k-1) - \ell}{2^\ell}x + \frac{1}{2^\ell}\tau(x), \quad k = 1, 2, \dots, 2^\ell - 1. \quad (2.22)$$

Siendo s la función suma de dígitos, que vimos en la definición (1.4). Además, si $x = n/2^\ell$ con $n = 1, 2, \dots, 2^\ell$, la función τ tiene la representación

$$\tau\left(\frac{n}{2^\ell}\right) = \frac{n\ell}{2^\ell} - \frac{1}{2^{\ell-1}} \sum_{k=0}^{n-1} s(k). \quad (2.23)$$

Demostración. Para probar (2.21) vamos a hacer uso del principio de inducción. Si $\ell = 1$, entonces $k = 0$ o bien $k = 1$.

- Si $k = 0$, se sigue de (2.19) que

$$\tau\left(\frac{k+x}{2^\ell}\right) = \tau\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tau(x).$$

Además,

$$\tau\left(\frac{k}{2^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s(k)}{2^\ell} + \frac{1}{2^\ell}\tau(x) = \tau(0) + \frac{1 - 2s(0)}{2}x + \frac{1}{2}\tau(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tau(x),$$

pues $\tau(0) = s(0) = 0$. Es decir, que si $\ell = 1$ y $k = 0$ se cumple (2.21).

- Si $k = 1$, de (2.20) se sigue que

$$\tau\left(\frac{k+x}{2^\ell}\right) = \frac{1-x}{2} + \frac{1}{2}\tau(x).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \tau\left(\frac{k}{2^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s(k)}{2^\ell}x + \frac{1}{2^\ell}\tau(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1 - 2s(1)}{2}x + \frac{1}{2}\tau(x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1-2}{2}x + \frac{1}{2}\tau(x) = \frac{1-x}{2} + \frac{1}{2}\tau(x) \end{aligned}$$

y concluimos que (2.21) es cierta para $\ell = 1$ y $k = 1$.

Supongamos cierta la igualdad para un $\ell \geq 1$, es decir, para todo $k \in \{0, 1, \dots, 2^\ell - 1\}$ y $x \in [0, 1]$ se tiene que

$$\tau\left(\frac{k+x}{2^\ell}\right) = \tau\left(\frac{k}{2^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s(k)}{2^\ell}x + \frac{1}{2^\ell}\tau(x). \quad (2.24)$$

Siendo esta nuestra hipótesis de inducción, veamos que se cumple para $\ell + 1$, es decir, hay que demostrar que si $k \in \{0, 1, \dots, 2^{\ell+1} - 1\}$ y $x \in [0, 1]$, entonces

$$\tau\left(\frac{k+x}{2^{\ell+1}}\right) = \tau\left(\frac{k}{2^{\ell+1}}\right) + \frac{\ell + 1 - 2s(k)}{2^{\ell+1}}x + \frac{1}{2^{\ell+1}}\tau(x).$$

Si k es par, existe $n_k \in \{0, 1, \dots, 2^\ell - 1\}$ tal que $k = 2n_k$ y usando la hipótesis de inducción, (2.19) y (1.7), tenemos

$$\begin{aligned} \tau\left(\frac{k+x}{2^{\ell+1}}\right) &= \tau\left(\frac{n_k + \frac{x}{2}}{2^\ell}\right) = \tau\left(\frac{n_k}{2^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s(n_k)}{2^\ell} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^\ell}\tau\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \tau\left(\frac{2n_k}{2^{\ell+1}}\right) + \frac{\ell - 2s(n_k)}{2^{\ell+1}}x + \frac{x}{2^{\ell+1}} + \frac{1}{2^{\ell+1}}\tau(x) \\ &= \tau\left(\frac{2n_k}{2^{\ell+1}}\right) + \frac{\ell + 1 - 2s(2n_k)}{2^{\ell+1}}x + \frac{1}{2^{\ell+1}}\tau(x) \\ &= \tau\left(\frac{k}{2^{\ell+1}}\right) + \frac{\ell + 1 - 2s(k)}{2^{\ell+1}}x + \frac{1}{2^{\ell+1}}\tau(x). \end{aligned}$$

Si k es impar, existe $n_k \in \{0, 1, \dots, 2^\ell - 1\}$ tal que $k = 2n_k + 1$ y se tiene por la hipótesis de inducción y (2.20) que

$$\begin{aligned} \tau\left(\frac{k+x}{2^{\ell+1}}\right) &= \tau\left(\frac{2n_k + 1 + x}{2^{\ell+1}}\right) = \tau\left(\frac{n_k + \frac{x+1}{2}}{2^\ell}\right) = \tau\left(\frac{n_k}{2^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s(n_k)}{2^\ell} \frac{x+1}{2} + \frac{1}{2^\ell}\tau\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &= \tau\left(\frac{n_k}{2^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s(n_k)}{2^{\ell+1}}(x+1) + \frac{1-x}{2^{\ell+1}} + \frac{1}{2^{\ell+1}}\tau(x) \\ &= \tau\left(\frac{n_k}{2^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s(2n_k)}{2^{\ell+1}} + \frac{1}{2^{\ell+1}} + \frac{\ell - 2s(2n_k)}{2^{\ell+1}} - \frac{x}{2^{\ell+1}} + \frac{1}{2^{\ell+1}}\tau(x) \end{aligned}$$

$$= \tau\left(\frac{n_k}{2^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s(n_k)}{2^{\ell+1}} + \frac{1}{2^{\ell+1}} + \frac{\ell - 1 - 2s(2n_k)}{2^{\ell+1}}x + \frac{1}{2^{\ell+1}}\tau(x).$$

Usando la hipótesis de inducción con $x = 1/2$ obtenemos

$$\begin{aligned} \tau\left(\frac{2n_k + 1}{2^{\ell+1}}\right) &= \tau\left(\frac{n_k + \frac{1}{2}}{2^\ell}\right) = \tau\left(\frac{n_k}{2^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s(n_k)}{2^\ell} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^\ell} \tau\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \tau\left(\frac{n_k}{2^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s(n_k)}{2^{\ell+1}} + \frac{1}{2^{\ell+1}} \end{aligned}$$

y, usando (1.8),

$$\begin{aligned} \tau\left(\frac{k+x}{2^{\ell+1}}\right) &= \tau\left(\frac{n_k}{2^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s(n_k)}{2^{\ell+1}} + \frac{1}{2^{\ell+1}} + \frac{\ell - 1 - 2s(n_k)}{2^{\ell+1}}x + \frac{1}{2^{\ell+1}}\tau(x) \\ &= \tau\left(\frac{2n_k + 1 + x}{2^{\ell+1}}\right) + \frac{\ell - 1 - 2(s(2n_k + 1) - 1)}{2^{\ell+1}} + \frac{1}{2^{\ell+1}}\tau(x) \\ &= \tau\left(\frac{2n_k + 1 + x}{2^{\ell+1}}\right) + \frac{\ell + 1 - 2s(2n_k + 1)}{2^{\ell+1}} + \frac{1}{2^{\ell+1}}\tau(x) \\ &= \tau\left(\frac{k}{2^{\ell+1}}\right) + \frac{\ell + 1 - 2s(k)}{2^{\ell+1}} + \frac{1}{2^{\ell+1}}\tau(x), \end{aligned}$$

y hemos probado que las $2^{\ell+1}$ igualdades son ciertas y, por tanto, (2.21) es cierta.

Para demostrar (2.22), si $k \in \{1, 2, \dots, 2^\ell\}$ y $x \in [0, 1]$, entonces $k-1 \in \{0, 1, \dots, 2^\ell - 1\}$ y $1-x \in [0, 1]$, así que de (2.21) obtenemos

$$\tau\left(\frac{k-x}{2^\ell}\right) = \tau\left(\frac{k-1+1+x}{2^\ell}\right) = \tau\left(\frac{k-1}{2^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s(k-1)}{2^\ell}(1-x) + \frac{1}{2^\ell}\tau(1-x).$$

Si aplicamos (2.21) para $x = 1$,

$$\tau\left(\frac{k}{2^\ell}\right) = \tau\left(\frac{k-1+1}{2^\ell}\right) = \tau\left(\frac{k-1}{2^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s(k-1)}{2^\ell} + \frac{1}{2^\ell}\tau(1).$$

Dado que $\tau(1) = 0$, concluimos que

$$\tau\left(\frac{k-1}{2^\ell}\right) = \tau\left(\frac{k}{2^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s(k-1) - \ell}{2^\ell}.$$

La periodicidad de τ implica que

$$\frac{1}{2^\ell}\tau(x) = \frac{1}{2^\ell}\tau(1-x).$$

Así que

$$\begin{aligned} \tau\left(\frac{k-x}{2^\ell}\right) &= \tau\left(\frac{k-1}{2^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s(k-1)}{2^\ell} + \frac{2s(k-1) - \ell}{2^\ell}x + \frac{1}{2^\ell}\tau(x) \\ &= \tau\left(\frac{k}{2^\ell}\right) + \frac{2s(k-1) - \ell}{2^\ell} + \frac{\ell - 2s(k-1)}{2^\ell} + \frac{2s(k-1) - \ell}{2^\ell}x + \frac{1}{2^\ell}\tau(x) \end{aligned}$$

$$= \tau\left(\frac{k}{2^\ell}\right) + \frac{2s(k-1) - \ell}{2^\ell} + \frac{1}{2^\ell}\tau(x)$$

y hemos probado (2.22).

Para demostrar (2.23), usaremos (2.21) con $x = 1$ y el hecho de que $\tau(0) = \tau(1) = 0$.

Para $n = 1$ y $\ell \in \mathbb{N}$ fijo, se tiene que

$$\begin{aligned} \tau\left(\frac{1}{2^\ell}\right) &= \tau\left(\frac{0+1}{2^\ell}\right) = \tau\left(\frac{0}{2^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s(0)}{2^\ell} + \frac{1}{2^\ell}\tau(1) \\ &= \frac{\ell}{2^\ell} - \frac{1}{2^{\ell-1}}s(0), \end{aligned}$$

luego para $n = 2$ tenemos

$$\begin{aligned} \tau\left(\frac{2}{2^\ell}\right) &= \tau\left(\frac{1+1}{2^\ell}\right) = \tau\left(\frac{1}{2^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s(1)}{2^\ell} + \frac{1}{2^{\ell-1}}\tau(1) \\ &= \frac{\ell}{2^\ell} - \frac{1}{2^{\ell-1}}s(0) + \frac{\ell}{2^\ell} - \frac{1}{2^{\ell-1}}s(1) \\ &= \frac{2\ell}{2^\ell} - \frac{1}{2^{\ell-1}}\sum_{k=0}^1 s(k). \end{aligned}$$

Si suponemos que es cierto para $n = N$,

$$\tau\left(\frac{N}{2^\ell}\right) = \frac{N\ell}{2^\ell} - \frac{1}{2^{\ell-1}}\sum_{k=0}^{N-1} s(k).$$

Veamos que se cumple también para $N + 1$. Por (2.21)

$$\begin{aligned} \tau\left(\frac{N+1}{2^\ell}\right) &= \tau\left(\frac{N}{2^\ell}\right) + \frac{\ell - 2s(N)}{2^\ell} + \frac{1}{2^\ell}\tau(1) \\ &= \frac{N\ell}{2^\ell} - \frac{1}{2^{\ell-1}}\sum_{k=0}^{N-1} s(k) + \frac{\ell}{2^\ell} - \frac{1}{2^{\ell-1}}s(N) = \frac{(N+1)\ell}{2^\ell} - \sum_{k=0}^N s(k), \end{aligned}$$

con lo que se cumple (2.23) para $n = 1, 2, \dots, 2^\ell$.

□

Consecuencia de este resultado es que para $\ell \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, \dots, 2^\ell - 1\}$ y $x \in [0, 1]$ la función de Takagi satisface

$$\tau\left(\frac{k+x}{2^\ell}\right) - \tau\left(\frac{k-x}{2^\ell}\right) = \frac{\ell - s(k) - s(k-1)}{2^{\ell-1}}x.$$

Si $k = \ell = 1$ y $x \in [0, 1]$, la igualdad anterior es

$$\tau\left(\frac{1+x}{2}\right) - \tau\left(\frac{1-x}{2}\right) = (1 - s(1) - s(0))x = 0$$

y expresa la simetría de la función de Takagi con respecto a la recta $x = \frac{1}{2}$.

2.6. La función de Takagi sobre los racionales

Vamos a estudiar el comportamiento de la función de Takagi sobre los racionales. En concreto, que lleva racionales a racionales. El resultado es el siguiente (véase [14]).

Teorema 2.14. *Si $x \in \mathbb{Q}$ entonces $\tau(x) \in \mathbb{Q}$.*

Demostración. Recordemos que

$$\tau(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k},$$

siendo $\varphi(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$ la función distancia al entero más próximo. Es obvio que si $x \in \mathbb{Q}$ entonces $\varphi(x) \in \mathbb{Q}$. Vamos a distinguir dos casos.

Caso 1. Supongamos que x es un racional diádico. Entonces, para n suficientemente grande, se tiene que $2^n x$ es entero, por lo que $\varphi(2^n x) = 0$, así que

$$\tau(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k} = \sum_{k=0}^N \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}.$$

Pero cualquiera que sea k , como x es racional, también lo es $\varphi(2^k x)$ y la suma anterior es por tanto un número racional.

Caso 2. Si x es racional no diádico, podemos escribir su desarrollo binario como

$$x = 0.b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1} \dots b_{n+m} \dots b_{n+1} \dots b_{n+m} \dots = 0.b_1 b_2 \dots b_n \overline{b_{n+1} \dots b_{n+m}}.$$

Esto implica que $m > 1$, porque los diádicos son los únicos números racionales en los que se repite un dígito en el desarrollo binario. Entonces,

$$\tau(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}}_{\text{racional}} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k},$$

así que basta demostrar que el segundo sumando es racional. Ahora bien,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^k x')}{2^k},$$

donde $x' = \overline{0.b_{n+1} \dots b_{n+m}}$. En definitiva, podemos suponer que $x = \overline{0.b_1 \dots b_m}$.

Cualesquiera que sean los enteros k y k_0 se tiene por la periodicidad de φ que

$$\varphi(2^{mk+k_0} x) = \varphi(2^{mk} \cdot 2^{k_0} x) = \varphi(2^{k_0} x),$$

por lo que

$$\tau(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(2^{k+jm} x)}{2^{k+jm}}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(2^k x)}{2^{k+jm}} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{S_m}{2^{jm}} = S_m \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{jm}},$$

donde

$$S_m = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k}.$$

Ahora bien,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{jm}} = \frac{1}{1-2^{-m}}$$

es racional porque $-m < -1 < 0$ y S_m es una suma finita de racionales y, por tanto, racional. En definitiva, $\tau(x) \in \mathbb{Q}$.

□

Corolario 2.15. *La función de Takagi transforma diádicos en diádicos.*

Demostración. Basta ver el primer caso del teorema anterior; si x es diádico, $\tau(x)$ es una suma finita de diádicos. Por tanto, $\tau(x)$ es diádico.

□

El recíproco de este corolario es falso, por ejemplo

$$\tau\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Si bien la función de Takagi lleva racionales a racionales, el recíproco es un problema abierto, es decir, no se sabe si dado un racional $0 \leq r \leq 2/3$, existe otro racional r' de modo que $\tau(r') = r$.

También está abierto el siguiente problema. ¿Existe un diádico racional $y = \ell/2^k$ con $0 < y < 2/3$ de modo que no exista diádico racional x con $\tau(x) = y$?

Continuidad en el sentido de Hölder y diferenciabilidad

En este capítulo vamos a ver que la función de Takagi es continua en el sentido de Hölder y que no es diferenciable en ningún punto del intervalo $[0, 1]$. De esta última afirmación daremos dos pruebas.

3.1. Continuidad en el sentido de Hölder

Comenzamos recordando el concepto de función continua en el sentido de Hölder.

Definición 3.1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es continua en el sentido de Hölder de clase α en $[a, b]$ si existen constantes $C > 0$ y $\alpha \in (0, 1)$ tales que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|^\alpha$$

para cualesquiera $x_1, x_2 \in [a, b]$.

La continuidad en el sentido de Hölder implica la continuidad uniforme pues dado que $\alpha < 1$, se cumple

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|^\alpha \leq C|x_1 - x_2|.$$

También es fácil ver que si se satisface la condición de Hölder para un exponente $\alpha > 1$ la función es constante. Pues dados $x \neq y$ en el intervalo $[a, b]$, dividimos el intervalo $[x, y]$ en n subintervalos de longitud $\frac{1}{n} \cdot |x - y|$. La continuidad de Hölder nos proporciona la cota

$$C \left(\frac{1}{n} \cdot |x - y| \right)^\alpha$$

en cada subintervalo y la desigualdad triangular nos indica que

$$|f(x) - f(y)| \leq nC \left(\frac{1}{n} \cdot |x - y| \right)^\alpha = C|x - y|^\alpha \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Basta hacer $n \rightarrow \infty$ para concluir que f es constante.

Dado que para estudiar la continuidad de Hölder de τ necesitaremos evaluar $|\tau(x) - \tau(y)|$, vamos a ver primero cómo manejar diferencias del tipo $|\varphi(2^n x) - \varphi(2^n y)|$, que es lo que vamos a hacer en el siguiente lema.

Lema 3.2. Para todo $x, y \in [0, 1]$ y $n \geq 0$ se cumple que

$$|\varphi(2^n x) - \varphi(2^n y)| \leq 2^n |x - y|.$$

Demostración. Sea $n \geq 0$ y $x, y \in [0, 1]$. Sea $k \in \mathbb{Z}$ el entero más cercano a $2^n y$. Entonces,

$$\begin{aligned} \varphi(2^n x) &= \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^n x - m| \leq |2^n x - k| \leq |2^n x - 2^n y| + |2^n y - k| \\ &= 2^n |x - y| + \varphi(2^n y). \end{aligned}$$

Así que hemos probado

$$\varphi(2^n x) - \varphi(2^n y) \leq 2^n |x - y|.$$

Pero de modo totalmente análogo podemos probar también que

$$\varphi(2^n y) - \varphi(2^n x) \leq 2^n |x - y|,$$

así que en definitiva tenemos lo que queremos,

$$|\varphi(2^n x) - \varphi(2^n y)| \leq 2^n |x - y|.$$

□

Pasamos entonces a enunciar y probar el resultado principal de esta sección (véase [18]).

Teorema 3.3. La función de Takagi es continua en el sentido de Hölder de clase α para todo $\alpha \in (0, 1)$.

Demostración. Sea $\alpha < 1$. Sean $x, t \in \mathbb{R}$ con $t \neq 0$. Supongamos primero que $0 < |t| \leq 1$. Sea $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ tal que

$$\frac{1}{2^{n+1}} < |t| \leq \frac{1}{2^n}.$$

En particular,

$$|t|^{1-\alpha} \leq \left(\frac{1}{2^n}\right)^{1-\alpha},$$

o lo que es igual,

$$|t| \leq \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}} |t|^\alpha. \quad (3.1)$$

Por el lema anterior y (3.1)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{\varphi(2^k(x+t))}{2^k} - \frac{\varphi(2^k x)}{2^k} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |t| = n|t| \leq n \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}} |t|^\alpha. \quad (3.2)$$

Dado que

$$0 \leq \frac{\varphi(2^k x)}{2^k} \leq \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \forall k \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

se sigue que cualquiera que sea $k \geq 0$ es

$$\left| \frac{\varphi(2^k(x+t))}{2^k} - \frac{\varphi(2^k x)}{2^k} \right| \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Por tanto,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left| \frac{\varphi(2^k(x+t))}{2^k} - \frac{\varphi(2^k x)}{2^k} \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n} \leq 2|t| \leq 2|t|^\alpha, \quad (3.3)$$

donde hemos usado que dada la elección de n ,

$$\frac{1}{2^{n+1}} < |t| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2^n} < 2|t|.$$

De (3.1) y (3.3) podemos deducir que

$$\begin{aligned} |\tau(x+t) - \tau(x)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\varphi(2^n(x+t))}{2^n} - \frac{\varphi(2^n x)}{2^n} \right| \leq n \frac{1}{2^{n(1-\alpha)}} |t|^\alpha + 2|t|^\alpha \\ &= \left(2 + \frac{n}{2^{n(1-\alpha)}} \right) |t|^\alpha. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{n}{2^{n(1-\alpha)}} \right) = 2,$$

esta sucesión está acotada. Si M_α es tal que

$$\left| 2 + \frac{n}{2^{n(1-\alpha)}} \right| \leq M_\alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

luego

$$|\tau(x+t) - \tau(x)| \leq M_\alpha |t|^\alpha$$

siempre que $0 < |t| \leq 1$.

Veamos qué sucede si $|t| > 1$. Sabemos que

$$0 \leq \tau(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1$$

y cualquiera que sea $|t| \geq 1$ esto implica

$$|\tau(x+t) - \tau(x)| \leq 1 \leq |t|^\alpha.$$

Eligiendo la constante M_α citada antes concluimos que

$$|\tau(x+t) - \tau(x)| \leq M_\alpha |t|^\alpha$$

para todo t y esto prueba la continuidad en el sentido de Hölder de τ en \mathbb{R} .

□

De acuerdo con lo que vamos a demostrar en la siguiente sección, que τ no es derivable en ningún punto, este resultado que acabamos de demostrar es el mejor posible. No podemos tener $\alpha = 1$, pues si no, τ sería absolutamente continua y, por tanto, derivable en casi todo punto.

En [24] Luciano de Vito da una demostración de que la función de Takagi, que Georges de Rham probó en [16] que no es derivable en ningún punto, es sin embargo de clase Hölder de grado α para cualquier $\alpha \in (0, 1)$.

Recordemos que esta función es

$$\varphi(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z}) = \left| x - \left[x + \frac{1}{2} \right] \right|,$$

donde $[t]$ es la parte entera de t .

Esta función tiene las dos siguientes propiedades.

- Dado que $0 \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{2}$ se sigue que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{1}{2}. \quad (3.4)$$

- Por otra parte, también cumple que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|. \quad (3.5)$$

La desigualdad es de hecho una igualdad si $x, y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ o bien $x, y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. En el caso que queda, supongamos por ejemplo que $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$; tenemos que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - (1 - y)| = |x + y - 1|.$$

Si $|x + y - 1| = x + y - 1$ se cumple que $x + y - 1 \leq y - x = |y - x|$ porque esta desigualdad es equivalente a que $2x \leq 1$. Mientras que si fuera $|x + y - 1| = 1 - x - y$ también es $1 - x - y \leq y - x$ porque esta desigualdad es equivalente a que $2y \geq 1$.

De aquí deducimos usando (3.4) y (3.5) que cualquiera que sea $\alpha \in (0, 1)$,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi(x) - \varphi(y)|^{1-\alpha} |\varphi(x) - \varphi(y)|^\alpha \leq 2^{\alpha-1} |x - y|^\alpha. \quad (3.6)$$

Observemos que en (3.6) la igualdad se alcanza con $x = 0$ e $y = \frac{1}{2}$, así que la constante $2^{\alpha-1}$ no puede sustituirse por una menor.

Por (3.6) tenemos entonces que

$$\begin{aligned} |\tau(x) - \tau(y)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\varphi(2^k x)}{2^k} - \frac{\varphi(2^k y)}{2^k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} 2^{\alpha-1} |2^k x - 2^k y|^\alpha \\ &= 2^{\alpha-1} |x - y|^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} (2^{\alpha-1})^k \\ &= \frac{2^{\alpha-1}}{1 - 2^{\alpha-1}} |x - y|^\alpha. \end{aligned}$$

3.2. Diferenciabilidad de la función de Takagi

En esta sección vamos a dar tres demostraciones del siguiente teorema.

Teorema 3.4. *La función de Takagi no es derivable en ningún punto.*

Se han publicado varias demostraciones de este resultado. El propio Takagi lo probó ([19]), así como por ejemplo Hildebrandt ([8]) y de Rham ([16]). La demostración de Van der Waerden ([25]) para la función que él construyó no se adapta automáticamente al caso de Takagi. La prueba que dio Billingsley ([3]) es quizás la más natural y es la primera que presentamos en esta sección.

Comenzamos con un lema que nos será de utilidad.

Lema 3.5. *Sea $a < a_n < x < b_n < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $a_n \rightarrow x$ y $b_n \rightarrow x$. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f'(x)$ existe. Entonces,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x).$$

Demostración. Dado que

$$\left| \frac{b_n - x}{b_n - a_n} \right| \leq \frac{b_n - a_n}{b_n - a_n} = 1, \quad \left| \frac{x - a_n}{b_n - a_n} \right| \leq \frac{b_n - a_n}{b_n - a_n} = 1,$$

deducimos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} - f'(x) \right| &= \left| \frac{b_n - x}{b_n - a_n} \left(\frac{f(b_n) - f(x)}{b_n - x} - f'(x) \right) + \frac{x - a_n}{b_n - a_n} \left(\frac{f(a_n) - f(x)}{a_n - x} - f'(x) \right) \right| \\ &\leq \left| \frac{f(b_n) - f(x)}{b_n - x} - f'(x) \right| + \left| \frac{f(a_n) - f(x)}{a_n - x} - f'(x) \right| \\ &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Así que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x).$$

□

3.2.1. Prueba de Billingsley

Vamos a ver ahora la demostración de la no derivabilidad de la función de Takagi debida a Billingsley ([3]).

Primera demostración del teorema 3.4. Sea $x \in \mathbb{R}$ arbitrario. Supongamos que existe $\tau'(x)$ y es finito. De acuerdo con el lema anterior, si $u_n \leq x \leq v_n$ (con $u_n < v_n$) y $v_n - u_n \rightarrow 0$ entonces

$$\frac{\tau(v_n) - \tau(u_n)}{v_n - u_n} \rightarrow \tau'(x).$$

Vamos a construir dos sucesiones (u_n) y (v_n) y llegaremos a una contradicción para ver que nuestra hipótesis inicial es falsa.

Recordemos que

$$\tau(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \varphi(2^k x),$$

donde $\varphi(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$ es la función distancia al entero más próximo.

Sea $\mathbb{D} = \{i2^{-n} : i, n \in \mathbb{Z}\}$ el conjunto de los diádicos racionales. Si $u \in \mathbb{D}$ es de orden n , entonces para todo entero $k \geq n$ se cumple que $2^k u \in \mathbb{Z}$. Luego ya que $\varphi(p) = 0$ para $p \in \mathbb{Z}$, tenemos que

$$\tau(u) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \varphi(2^k u).$$

Sean $u_n, v_n \in \mathbb{D}$ números sucesivos de orden n tales que $u_n \leq x < v_n$. Entonces

$$v_n - u_n = i2^{-n} - (i-1)2^{-n} = 2^{-n}$$

y además,

$$\frac{\tau(v_n) - \tau(u_n)}{v_n - u_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \frac{\varphi(2^k v_n) - \varphi(2^k u_n)}{v_n - u_n}.$$

La función $\varphi(x)$ es lineal si $x \in [2^k u_n, 2^k v_n]$ porque

$$[2^k u_n, 2^k v_n] = \left[\frac{i-1}{2^l}, \frac{i}{2^l} \right],$$

donde $l = n - k \in \mathbb{N}$. Luego si $0 \leq k < n$,

$$\frac{1}{2^k} \frac{\varphi(2^k v_n) - \varphi(2^k u_n)}{v_n - u_n} = \frac{\pm 2^{-l}}{2^{-l}} = \pm 1,$$

lo que nos conduce a que

$$\frac{\tau(v_n) - \tau(u_n)}{v_n - u_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \pm 1.$$

cuando $n \rightarrow \infty$ la serie de la derecha no converge. Esto contradice la hipótesis de existencia de $\tau'(x)$. Dado que $x \in \mathbb{R}$ es arbitrario, hemos probado que la función de Takagi no tiene derivada en ningún punto. □

Cater ([4]) probó incluso que la función τ no tiene derivada lateral finita en ningún punto.

Teorema 3.6. *La función de Takagi no tiene derivada lateral finita en ningún punto.*

Demostración. Supongamos que por ejemplo existiera $\tau'_+(x) = \ell \in \mathbb{R}$ para algún $x \in \mathbb{R}$. Para cada natural n sean

$$u_n = \frac{i}{2^n}, \quad v_n = \frac{i+1}{r^n}, \quad \text{donde} \quad \frac{i-1}{2^n} \leq x < \frac{i}{2^n}.$$

Consideremos a continuación r_n y s_n tales que

$$\tau(u_n) - \tau(x) = (\ell + r_n)(u_n - x),$$

$$\tau(v_n) - \tau(x) = (\ell + s_n)(v_n - x).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \tau(v_n) - \tau(u_n) &= (\tau(v_n) - \tau(x)) - (\tau(u_n) - \tau(x)) \\ &= (\ell + s_n)(v_n - x) - (\ell + r_n)(u_n - x) \\ &= \ell(v_n - u_n) + s_n(v_n - x) - r_n(u_n - x) \\ &= 2^{-n}\ell + s_n(v_n - x) - r_n(u_n - x) \end{aligned}$$

y también

$$(\tau(v_n) - \tau(u)) = \ell + 2^n s_n(v_n - x) - 2^n r_n(u_n - x).$$

Dado que tenemos

$$0 < u_n - x < \frac{1}{2^n}, \quad 0 < v_n - x < \frac{1}{2^{n-1}},$$

concluimos que

$$|2^n (\tau(v_n) - \tau(u)) - \ell| \leq |r_n| + 2|s_n|.$$

Se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0,$$

por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n (\tau(v_n) - \tau(u)) = \ell.$$

Pero

$$2^n (\tau(v_n) - \tau(u)) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^n (\varphi_k(v_n) - \varphi_k(u_n)).$$

Dado que φ_k es lineal en el intervalo $[u_n, v_n]$ si $1 \leq k < n$ y $\varphi_k(u_n) = \varphi_k(v_n) = 0$ si $k > n$, concluimos

$$2^n (\tau(v_n) - \tau(u)) = \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_k)'_+(u_n),$$

donde $(\varphi_k)'_+$ indica la derivada lateral a la derecha de φ_k . Pero $(\varphi_k)'_+ = \pm 1$, así que

$$2^n (\tau(v_n) - \tau(u))$$

es par o impar dependiendo de la paridad de n . Y esto es imposible. Análogamente sucede con la derivada lateral a la izquierda (o también podemos usar la relación $\tau(x) = \tau(1 - x)$). \square

3.2.2. Segunda demostración

Como ya hemos comentado, existen varias demostraciones de la no diferenciabilidad de la función de Takagi. En esta sección vamos a presentar otra, siguiendo las ideas expuestas en [1] (pág. 144 y siguientes).

Hemos de mencionar también que usaremos la representación de la función de Takagi que vimos en primer lugar, dada en la definición (2.1),

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(2^n x)}{2^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{h(2^n x)}{2^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(x).$$

Recordemos que su gráfica la podemos ver en la figura 2.7.

Segunda demostración del teorema 3.4. Veremos la no derivabilidad en un punto x_0 cualquiera construyendo sucesiones $x_m \rightarrow x_0$ para las que el cociente

$$\frac{g(x_m) - g(x_0)}{x_m - x_0} \quad (3.7)$$

no tenga límite finito. Incluso aunque encontremos una sucesión (x_m) para la que el cociente anterior tenga límite $+\infty$ (con lo que ya probaríamos que nuestra función no tiene derivada finita en ese punto), construiremos otra sucesión $y_m \rightarrow x_0$ de modo que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{g(y_m) - g(x_0)}{y_m - x_0} = -\infty,$$

con lo que se probaría la no existencia de derivada (incluso infinita) en x_0 .

El proceso que seguiremos es el siguiente: primero estudiaremos la derivada en $x = 0$, $x = 1$ y $x = \frac{1}{2}$, para luego seguir con los racionales diádicos y terminar con cualquier $x \in \mathbb{R}$.

- Estudiemos la derivabilidad en el origen de coordenadas. Recordemos que $g(0) = 0$. Consideremos la sucesión

$$x_m = \frac{1}{2^m} \rightarrow 0$$

y estudiemos en este caso el comportamiento del límite de (3.7).

Calculemos el valor de $g(x_m)$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq m$, por lo que (recordemos que llamamos g_N a la suma parcial N -ésima de la serie que define g)

$$\begin{aligned} g_N(x_m) &= \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} h(2^n x_m) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} h(2^{n-m}) \\ &= \sum_{n=0}^m \frac{1}{2^n} h(2^{n-m}) + \sum_{n=m+1}^N \frac{1}{2^n} h(2^{n-m}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

De esta forma, si $n \leq m$, se tiene que $0 < 2^{n-m} \leq 1$, por lo que

$$h(2^{n-m}) = 2^{n-m}.$$

Para el caso en que $n > m$, entonces $2^{n-m} > 1$ y, al ser un número par,

$$h(2^{n-m}) = 0.$$

Luego, si sustituimos en (3.8),

$$g_N(x_m) = \sum_{n=0}^m \frac{1}{2^n} 2^{n-m} = \sum_{n=0}^m \frac{1}{2^m} = \frac{m+1}{2^m}.$$

Haciendo $N \rightarrow \infty$, llegamos a que

$$g(x_m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} h(2^{n-m}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m+1}{2^m} = \frac{m+1}{2^m},$$

de donde

$$\frac{g(x_m) - g(0)}{x_m - 0} = \frac{\frac{m+1}{2^m} - 0}{\frac{1}{2^m} - 0} = m + 1,$$

concluyendo por tanto que si $x_m = \frac{1}{2^m}$ es

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{g(x_m) - g(0)}{x} = +\infty,$$

que prueba ya que g no es derivable en el origen de coordenadas.

Podría pensarse que pudiera existir $g'(0) = +\infty$, pero no es el caso pues si consideramos $y_m = -\frac{1}{2^m}$ vamos a ver que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{g(y_m) - g(0)}{y_m} = -\infty.$$

Usamos el mismo razonamiento que antes. para $N > m$, se tiene que

$$g_N(y_m) = \sum_{n=0}^m \frac{1}{2^n} h(-2^{n-m}) + \sum_{n=m+1}^N \frac{1}{2^n} h(-2^{n-m}). \quad (3.9)$$

De este modo, para $n \leq m$, es $-1 \leq -2^{n-m} < 0$, así que

$$h(-2^{n-m}) = 2^{n-m}.$$

En cambio, si $n > m$, entonces $-2^{n-m} < -1$ es un número par y se tiene que

$$h(-2^{n-m}) = 0.$$

Sustituyendo en (3.9) y tomando $N \rightarrow \infty$

$$g(y_m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} 2^{n-m} = \sum_{n=0}^m \frac{1}{2^m} = \frac{m+1}{2^m},$$

de lo que se deduce que

$$\frac{g(y_m) - 0}{y_m - 0} = \frac{\frac{m+1}{2^m} - 0}{-\frac{1}{2^m} - 0} = -m - 1,$$

y concluimos que la función g no tiene derivada (incluso infinita) en el origen de coordenadas.

- Nuestro objetivo ahora es demostrar que g no es diferenciable en $x = 1$. Para dicha prueba, nos serviremos de los razonamientos aplicados en el caso anterior, $x = 0$.

Puesto que $h(2t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{Z}$, se sigue que

$$g(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} h(2^n \cdot 1) = \frac{1}{2^0} h(2^0) = h(1) = 1.$$

Si (x_m) es la misma sucesión del caso anterior, $1 + x_m \rightarrow 1$ y vamos a calcular el valor de las sumas parciales $g_N(1 + x_m)$. Tenemos que para $N > m$

$$\begin{aligned} g_N(1 + x_m) &= \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} h\left(2^n \left[\frac{1}{2^m} + 1\right]\right) \\ &= \sum_{n=0}^m \frac{1}{2^n} h(2^{n-m} + 2^n) + \sum_{n=m+1}^N \frac{1}{2^n} h(2^{n-m} + 2^n). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Si $m \geq n > 0$, se cumple que $2^{n-m} < 1$ y como h es periódica,

$$h(2^{n-m} + 2^n) = h(2^{n-m}) = 2^{n-m}.$$

Asimismo, si $n > m$ entonces $2^{n-m} > 1$ es par y por ello

$$h(2^{n-m} + 2^n) = 0.$$

Para $n = 0$, se cumple que

$$1 < \frac{1}{2^m} + 1 < 2, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

y de la ecuación (2.1) tenemos que

$$h\left(\frac{1}{2^m} + 1\right) = 2 - \left(\frac{1}{2^m} + 1\right) = 1 - \frac{1}{2^m}.$$

Si estos valores de h los sustituimos en (3.10) y hacemos $N \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} g(1 + x_m) &= \sum_{n=0}^m \frac{1}{2^n} h\left(2^n \left[\frac{1}{2^m} + 1\right]\right) = h\left(\frac{1}{2^m} + 1\right) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^n} 2^{n-m} \\ &= 1 - \frac{1}{2^m} + \frac{m}{2^m} = \frac{m-1}{2^m} + 1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

De esto deducimos que

$$\frac{g(1 + x_m) - g(1)}{1 + x_m - 1} = \frac{\frac{m-1}{2^m} + 1 - 1}{\frac{1}{2^m} + 1 - 1} = m - 1.$$

Al igual que ocurría en $x = 0$, es posible que pensemos que $g'(1) = +\infty$, pero al considerar la sucesión $y_m = -\frac{1}{2^m}$, tenemos que para $N > m$ se da que

$$g_N(1 + y_m) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} h\left(2^n \left[1 - \frac{1}{2^m}\right]\right)$$

$$= \sum_{n=0}^m \frac{1}{2^n} h(2^n - 2^{n-m}) + \sum_{n=m+1}^N \frac{1}{2^n} h(2^n - 2^{n-m}). \quad (3.12)$$

Así, cuando $0 < n \leq m$, entonces $-1 < -2^{n-m} < 0$ y por ser h periódica,

$$h(2^n - 2^{n-m}) = h(-2^{n-m}) = 2^{n-m}.$$

Cuando $n > m$, entonces -2^{n-m} es un número par, por lo que

$$h(2^n - 2^{n-m}) = 0.$$

Y para terminar, cuando $n = 0$ es

$$0 < 1 - \frac{1}{2^m} < 1, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

que con (2.1), proporciona

$$h\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) = 1 - \frac{1}{2^m} - 0 = 1 - \frac{1}{2^m}.$$

Si estos valores los sustituimos en la ecuación (3.12) y tomamos $N \rightarrow \infty$, se dará que

$$\begin{aligned} g(1 + y_m) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N h\left(2^n \left[1 - \frac{1}{2^m}\right]\right) = h\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^n} 2^{n-m} \\ &= 1 - \frac{1}{2^m} 2^{n-m} = 1 - \frac{1}{2^m} + \frac{m}{2^m} = \frac{m-1}{2^m} + 1, \end{aligned}$$

de donde tenemos que

$$\frac{g(1 + y_m) - g(1)}{1 + y_m - 1} = \frac{\frac{m-1}{2^m} + 1 - 1}{1 - \frac{1}{2^m} - 1} = 1 - m.$$

Así que al igual que razonamos para $x = 0$, llegamos a que $g'(1)$ no existe, incluso admitiendo derivada infinita en un punto.

- A continuación, pasaremos al caso $x = \frac{1}{2}$. Calculemos en primer lugar el valor de la función g en $\frac{1}{2}$:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} h\left(2^n \frac{1}{2}\right) = h\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} h(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} h(2^{n-1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Sea (x_m) de nuevo la sucesión $x_m = \frac{1}{2^m}$. Es $\frac{1}{2} + x_m \rightarrow \frac{1}{2}$. Y se tiene que para $N > m$,

$$g_N\left(\frac{1}{2} + x_m\right) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} h\left(2^n \left[\frac{1}{2} + x_m\right]\right)$$

$$\begin{aligned}
&= h\left(\frac{1}{2} + 2^{-m}\right) + \frac{1}{2}h\left(1 + 2^{1-m}\right) \\
&\quad + \sum_{n=2}^m \frac{1}{2^n}h\left(2^{n-m} + 2^{n-1}\right) + \sum_{n=m+1}^N \frac{1}{2^n}h\left(2^{n-m} + 2^{n-1}\right). \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Luego para $1 < n < m$, 2^{n-1} es par y $0 < 2^{n-m} \leq 1$, así que

$$h\left(2^{n-m} + 2^{n-1}\right) = h\left(2^{n-m}\right) = 2^{n-m}.$$

Para $n > m$, $2^{n-m} + 2^{n-1} > 1$ es par y llegamos a que

$$h\left(2^{n-m} + 2^{n-1}\right) = 0.$$

Para $n = 0$, tenemos que $0 < 2^{-m} + 2^{-1} \leq 1$ para todo $m \geq 1$ entero y haciendo uso de la ecuación (2.1),

$$h\left(2^{n-m} + 2^{n-1}\right) = 2^{-m} + 2^{-1} - 0 = 2^{-1} + 2^{-m}.$$

Para $n = 1$, tenemos que $1 < 2^{1-m} + 1 \leq 2$, para todo $m \geq 1$ entero y, de nuevo de la ecuación (2.1), tenemos que

$$h\left(2^{1-m} + 2^0\right) = 2 - \left(2^{1-m} + 1\right) = 1 - 2^{1-m}.$$

Sustituyendo en (3.13) y tomando $N \rightarrow \infty$,

$$g\left(\frac{1}{2} + x_m\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[2^{-m} + 2^{-1} + \frac{1}{2}\left(1 - 2^{1-m}\right) + \sum_{n=2}^m \frac{1}{2^n} 2^{n-m} \right] = 1 + \frac{m-1}{2^m}.$$

En conclusión, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{g\left(\frac{1}{2} + x_m\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} + x_m - \frac{1}{2}} &= \frac{\frac{m-1}{2^m} + 1 - 1}{\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{m-1}{2^m}}{\frac{1}{2^m}} = m-1
\end{aligned}$$

y deducimos que g no es derivable en $\frac{1}{2}$. Al igual que en los casos anteriores, no tiene derivada $+\infty$ en ese punto pues si consideramos la sucesión $y_m = -x_m$, llegamos a que si $N > m$,

$$\begin{aligned}
g_N\left(\frac{1}{2} + y_m\right) &= \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} h\left(2^n \left[\frac{1}{2} + y_m\right]\right) \\
&= h\left(\frac{1}{2} - 2^{-m}\right) + \frac{1}{2}h\left(1 - 2^{1-m}\right) \\
&\quad + \sum_{n=2}^m \frac{1}{2^n} h\left(2^{n-1} - 2^{n-m}\right) + \sum_{n=m+1}^N \frac{1}{2^n} h\left(2^{n-1} - 2^{n-m}\right). \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Luego, para $1 < n < m$, 2^{n-1} es par y además $1 \leq -2^{n-m} < 0$, por lo que

$$h\left(2^{n-1} - 2^{n-m}\right) = h\left(-2^{n-m}\right) = 2^{n-m}.$$

Cuando $n > m$, $2^{n-1} - 2^{n-m} > 1$ es par y llegamos a

$$h(2^{n-1} + 2^{n-m}) = 0.$$

Cuando $n = 0$, se cumple que $0 \leq 2^{-1} - 2^{-m} < 1$ para todo $m \geq 1$ entero y de (2.1) se tiene que

$$h(2^{-1} - 2^{-m}) = 2^{-1} - 2^{-m} - 0 = 2^{-1} - 2^{-m}.$$

Para $n = 1$, se da que $0 \leq 1 - 2^{1-m} < 1$ para todo $m \geq 1$ entero y de (2.1) llegamos a

$$h(1 - 2^{1-m}) = 1 - 2^{1-m} - 0 = 1 - 2^{1-m}.$$

Si sustituimos en (3.14) y tomamos el límite $N \rightarrow \infty$

$$g\left(\frac{1}{2} + y_m\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[2^{-m} + 2^{-1} + \frac{1}{2}(1 - 2^{1-m}) + \sum_{n=2}^m \frac{1}{2^n} 2^{n-m} \right] = 1 + \frac{m-1}{2^m},$$

así que

$$\frac{g\left(\frac{1}{2} + y_m\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} + y_m - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{m-1}{2^m} + 1 - 1}{-\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{m-1}{2^m}}{-\frac{1}{2^m}} = 1 - m.$$

Razonando de manera similar que en el caso $x = 0$, concluimos que $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ no existe.

- Usando razonamientos similares a los anteriores podemos deducir que

$$\frac{g\left(\frac{1}{2^n} + x_m\right) - g\left(\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2^n} + x_m - \frac{1}{2^n}} = m - 1,$$

para todo $n \geq 0$ y concluir que $g'\left(\frac{1}{2^n}\right)$ no existe.

A continuación, demostraremos que g' no existe en ningún racional diádico. Sea $x = \frac{p}{2^k}$, con $p \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{N}$, un racional diádico. Calculemos el valor de

$$g\left(\frac{p}{2^k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} h\left(2^n \frac{p}{2^k}\right).$$

Si $N \geq k$, se tiene que

$$g_N\left(\frac{p}{2^k}\right) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} h\left(2^n \frac{p}{2^k}\right)$$

y sabemos que

$$p \in \{1, \dots, 2^k - 1\} \subset [1, 2^k) = \bigcup_{j=0}^{k-1} [2^j, 2^{j+1}),$$

existe un único $j \in \{1, \dots, k-1\}$ tal que $p \in [2^j, 2^{j+1})$ y, por tanto,

$$2^{j+n-k} \leq \frac{2^n p}{2^k} < 2^{j+n-k+1}.$$

Por lo que si $n \leq k-j-1$, entonces $j+n-k+1 \leq 0$ y

$$0 \leq \frac{2^n p}{2^k} < 2^0 = 1.$$

Así,

$$h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right) = \frac{2^n p}{2^k}.$$

Si $n \geq k$, se dará que 2 divide a $\frac{2^n p}{2^k}$ y, por ende,

$$h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right) = 0.$$

Ahora bien, si $n \geq k-j$, o lo que es lo mismo, $j+n-k \geq 0$, entonces

$$1 = 2^0 < \frac{2^n p}{2^k}.$$

Cuando ocurre esto, si $k-j \leq n < k$, no podremos dar el valor explícito de $h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right)$, puesto que h depende de la paridad de p . Así, si p es impar, h describe una recta de pendiente negativa, mientras que si p es par, describirá una recta con pendiente positiva. Más adelante veremos que no hace falta calcularlo. Finalmente llegamos a que

$$\begin{aligned} g_N\left(\frac{p}{2^k}\right) &= \sum_{n=0}^{k-j-1} \frac{1}{2^n} h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right) + \sum_{n=k-j}^k \frac{1}{2^n} h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right) + \sum_{n=k}^N \frac{1}{2^n} h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{k-j-1} \frac{1}{2^n} \left(\frac{2^n p}{2^k}\right) + \sum_{n=k-j}^k \frac{1}{2^n} h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right) \\ &= (k-j)p2^{-k} + \sum_{n=k-j}^k \frac{1}{2^n} h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right). \end{aligned}$$

Ahora, haciendo $N \rightarrow \infty$,

$$g\left(\frac{p}{2^k}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[(k-j)p2^{-k} + \sum_{n=k-j}^k \frac{1}{2^n} h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right) \right] = (k-j)p2^{-k} + \sum_{n=k-j}^k \frac{1}{2^n} h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right).$$

Veamos el valor de $g\left(\frac{p}{2^k} + x_m\right)$. Si $N > m$, se da que

$$\begin{aligned} g_N\left(\frac{p}{2^k} + x_m\right) &= \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} h\left(2^n \left[\frac{p}{2^k} + 2^{-m}\right]\right) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} h\left(2^{n-k} p + 2^{n-m}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{k-j-1} \frac{1}{2^n} h\left(2^{n-k} p + 2^{n-m}\right) + \sum_{n=k-j}^k \frac{1}{2^n} h\left(2^{n-k} p + 2^{n-m}\right) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=k+1}^m \frac{1}{2^n} h(2^{n-k} p + 2^{n-m}) + \sum_{n=m+1}^N \frac{1}{2^n} h(2^{n-k} p + 2^{n-m}). \quad (3.15)$$

Si $0 \leq n \leq k-j-1$, entonces $\frac{2^n p}{2^k} < 1$ y por la propiedad Arquimediana, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2^n}{2^m} < 1 - \frac{2^n p}{2^k},$$

por lo que

$$\frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m} < 1.$$

Luego, para m suficientemente grande,

$$h\left(\frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m}\right) = \frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m}.$$

Si $k+1 \leq n \leq m$, entonces $\frac{2^n p}{2^k}$ es múltiplo de 2 y $\frac{2^n}{2^m} < 1$; como h es periódica, tenemos que

$$h\left(\frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m}\right) = h\left(\frac{2^n}{2^m}\right) = \frac{2^n}{2^m}.$$

Si $m+1 \leq n \leq N$, entonces $\frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m}$ es múltiplo de 2 y por ello

$$h\left(\frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m}\right) = 0.$$

Para el caso que nos queda ($k-j \leq n \leq k$) no podemos dar el valor explícito de $h\left(\frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m}\right)$, debido a que depende de p y tendremos una recta, bien de pendiente positiva, bien de pendiente negativa, según el valor escogido. Ahora, si sustituimos en la ecuación (3.15) y hacemos $N \rightarrow \infty$, se tiene que para un m lo suficientemente grande

$$\begin{aligned} g\left(\frac{p}{2^k} + x_m\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=0}^{k-j-1} \frac{1}{2^n} \left(\frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m}\right) + \sum_{n=k-j}^k \frac{1}{2^n} h\left(\frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m}\right) + \sum_{n=k+1}^m \frac{1}{2^n} \frac{2^n}{2^m} \right] \\ &= \frac{(k-j)p}{2^k} + \frac{k-j}{2^m} + \sum_{n=k-j}^k \frac{1}{2^n} h\left(\frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m}\right) + \frac{m-k}{2^m}. \end{aligned}$$

El cociente incremental para estudiar la derivada en este punto diádico será

$$\begin{aligned} &\frac{g\left(\frac{p}{2^k} + x_m\right) - g\left(\frac{p}{2^k}\right)}{\frac{2^n p}{2^k} + x_m - \frac{2^n p}{2^k}} \\ &= \frac{\frac{(k-j)p}{2^k} + \frac{k-j}{2^m} + \sum_{n=k-j}^k \frac{1}{2^n} h\left(\frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m}\right) + \frac{m-k}{2^m} - \left[(k-j)p2^{-k} + \sum_{n=k-j}^k \frac{1}{2^n} h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right) \right]}{\frac{1}{2^m}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{m-j}{2^m} + \sum_{n=k-j}^k \frac{1}{2^n} \left[h\left(\frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^k}\right) - h\left(\frac{2^n p}{2^m}\right) \right]}{\frac{1}{2^m}}. \quad (3.16)$$

Para escribir esta suma de una forma más sencilla, consideraremos la siguiente partición

$$[1, \infty) = \bigcup_{l=1}^{\infty} [l, l+1).$$

Para $k-j \leq n \leq k$ se tiene que existe un único $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2^n p}{2^k} \in [l_0, l_0 + 1),$$

por lo que para un m lo suficientemente grande conseguimos que

$$\frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m} \in [l_0, l_0 + 1).$$

Si l_0 es par, partiendo de la ecuación (2.1) tenemos que

$$h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right) = \frac{2^n p}{2^k} - l.$$

Asimismo,

$$h\left(\frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m}\right) = \frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m} - l$$

y, por tanto,

$$h\left(\frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m}\right) - h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right) = \frac{2^n}{2^m}.$$

En cambio, si l_0 es impar, partiendo de nuevo de la ecuación (2.1) tenemos que

$$h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right) = l + 1 - \frac{2^n p}{2^k}.$$

Asimismo,

$$h\left(\frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m}\right) = l + 1 - \frac{2^n p}{2^k} - \frac{2^n}{2^m}$$

y, por tanto,

$$h\left(\frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m}\right) - h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right) = -\frac{2^n}{2^m}.$$

De esta forma, para cualquiera de los dos casos

$$h\left(\frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m}\right) - h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right) = \varepsilon_n \frac{2^n}{2^m},$$

donde $\varepsilon_n = \pm 1$. Sustituyendo la expresión que acabamos de ver en la ecuación (3.16), llegamos a que

$$\frac{g\left(\frac{p}{2^k} + x_m\right) - g\left(\frac{p}{2^k}\right)}{\frac{2^n p}{2^k} + x_m - \frac{2^n p}{2^k}} = \frac{\frac{m-j}{2^m} + \sum_{n=k-j}^k \frac{1}{2^n} \varepsilon_n \frac{2^n}{2^m}}{\frac{1}{2^m}} = m-j + \sum_{n=k-j}^k \varepsilon_n \quad (3.17)$$

y tomando $m \rightarrow \infty$, tenemos que $x_m + \frac{p}{2^k} \rightarrow \frac{p}{2^k}$, de donde

$$g'\left(\frac{p}{2^k}\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[m-j + \sum_{n=k-j}^k \varepsilon_n \right]$$

y se deduce que $g'\left(\frac{p}{2^k}\right)$ no existe.

- Para finalizar la demostración, usaremos el lema 3.5 y probaremos que g no es diferenciable para números no diádicos, tomando un $x \in [0, 1]$ cualquiera.

Si x no es diádico, fijado $m \geq 0$ el número x está entre dos diádicos consecutivos, es decir,

$$\frac{p}{2^m} < x < \frac{p+1}{2^m}.$$

Definamos

$$x_m = \frac{p}{2^m}, \quad y_m = \frac{p+1}{2^m}.$$

Repitiendo este proceso para cada m podemos construir dos sucesiones (x_m) e (y_m) tales que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = x, \quad x_m < x < y_m.$$

Supongamos que $g'(x)$ existe y consideremos las sucesiones (x_m) e (y_m) que acabamos de mencionar. Se tiene que estas sucesiones cumplen las hipótesis del lema 3.5, luego

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{g(y_m) - g(x_m)}{y_m - x_m} = g'(x).$$

Antes hemos visto que para $k > m$ se cumple que $h(2^k y_m) = h(2^k x_m) = 0$, así que nos quedaremos con el caso $0 \leq k \leq m$. Por la definición de h_n , esta función es lineal en los intervalos cuyos extremos son números racionales diádicos. Además, si $t \leq l$, se da que

$$\frac{1}{2^l} \leq \frac{1}{2^t} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{p_1}{2^l}, \frac{p_1+1}{2^l} \right] \subseteq \left[\frac{p_0}{2^t}, \frac{p_0+1}{2^t} \right].$$

Luego para $k < m$

$$[x_m, y_m] = \left[\frac{p_m}{2^m}, \frac{p_m+1}{2^m} \right] \subseteq \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k} \right]$$

para cierto $j \in \mathbb{Z}$. De esto obtenemos que (x_m) e (y_m) están sobre la misma recta, por lo que tienen la misma pendiente. De (2.1) se deduce que

$$\begin{cases} h(2^k y_m) - h(2^n x_m) = \frac{1}{2^r}, & \text{si } p \text{ es par} \\ h(2^k y_m) - h(2^n x_m) = -\frac{1}{2^r}, & \text{si } p \text{ es impar,} \end{cases}$$

siendo $r = m - k$. Por ende,

$$\frac{g(y_m) - g(x_m)}{y_m - x_m} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \frac{h(2^k y_n) - h(2^n x_n)}{y_n - x_n} = \sum_{k=0}^n \frac{\pm 2^{-l}}{2^{-l}} = \sum_{k=0}^n \pm 1.$$

Si hacemos $n \rightarrow \infty$, la serie diverge y de aquí concluimos que $g'(x)$ no existe. Así, hemos probado que g no es diferenciable en ningún $x \in \mathbb{R}$.

□

3.2.3. Tercera demostración

Veamos por último la tercera demostración, siguiendo [6].

Tercera demostración del teorema 3.4. Comenzamos estudiando el comportamiento de τ en los números diádicos de la forma $i/2^k$, $0 \leq i \leq 2^k - 1$, para k consecutivos. La función φ se anula en los enteros, así que

$$\varphi\left(2^j \frac{i}{2^k}\right) = 0, \quad \forall j \geq k.$$

Por tanto,

$$\tau\left(\frac{i}{2^k}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^j} \varphi\left(2^j \frac{i}{2^k}\right), \quad (3.18)$$

dado que el resto de sumandos es cero.

Ahora bien,

$$\begin{cases} k > j \\ i < 2^{k-j-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^j \frac{i}{2^k} = \frac{i}{2^{k-j}} \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2^j \frac{i+1}{2^k} = \frac{i+1}{2^{k-j}} \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

Si $i \geq 2^{k-j-1}$ entonces

$$2^j \frac{i}{2^k}, 2^j \frac{i+1}{2^k} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Recordemos que φ es lineal en cada uno de estos intervalos (véase la figura 3.1, a la derecha se ve el caso $i < 2^{k-j-1}$ y a la izquierda el caso $i \geq 2^{k-j-1}$); el valor de φ en el punto medio de

$$2^j \frac{i}{2^k} \quad \text{y} \quad 2^j \frac{i+1}{2^k}$$

que es

$$\frac{2i+1}{2^{k-j+1}}$$

es la media de φ en ambos, es decir,

$$\varphi\left(\frac{2i+1}{2^{k-j+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\varphi\left(\frac{2^j i}{2^k}\right) + \varphi\left(\frac{2^j(i+1)}{2^k}\right)\right).$$

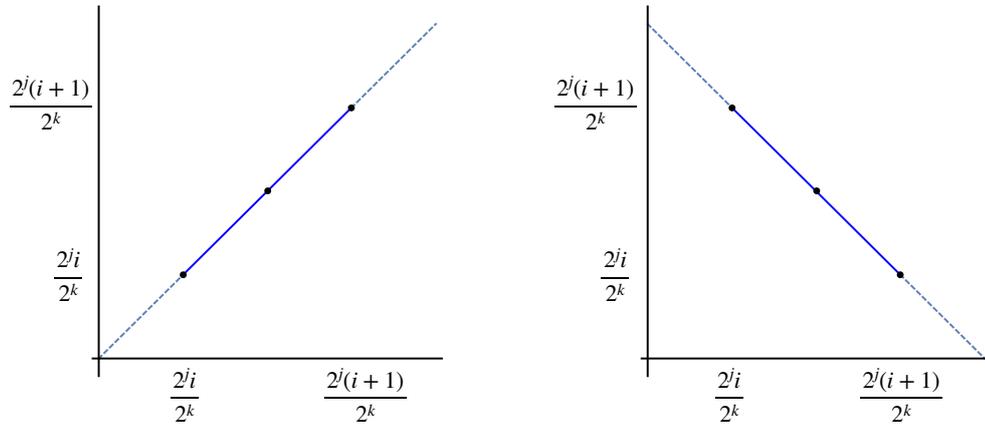


Figura 3.1: Gráfica de $\varphi(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$ en el intervalo $[2^j i / 2^k, 2^j(i+1) / 2^k]$.

Por tanto, si $0 \leq i \leq 2^k - 1$, tenemos que usando 3.18, podemos escribir

$$\begin{aligned} \tau\left(\frac{2i+1}{2^{k+1}}\right) &= \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^j} \varphi\left(2^j \frac{2i+1}{2^{k+1}}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{1}{2} \left(\varphi\left(\frac{2^j i}{2^k}\right) + \varphi\left(\frac{2^j(i+1)}{2^k}\right) \right) + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^j} \varphi\left(\frac{2^j i}{2^k}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^j} \varphi\left(\frac{2^j(i+1)}{2^k}\right) \right) + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\tau\left(\frac{i}{2^k}\right) + \tau\left(\frac{i+1}{2^k}\right) \right) + \frac{1}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Así que obtenemos las igualdades

$$\tau\left(\frac{2i+1}{2^{k+1}}\right) - \tau\left(\frac{i}{2^k}\right) = \frac{1}{2} \left(\tau\left(\frac{i+1}{2^k}\right) - \tau\left(\frac{i}{2^k}\right) \right) + \frac{1}{2^{k+1}} \quad (3.19)$$

y

$$\tau\left(\frac{i+1}{2^k}\right) - \tau\left(\frac{2i+1}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2} \left(\tau\left(\frac{i+1}{2^k}\right) - \tau\left(\frac{i}{2^k}\right) \right) - \frac{1}{2^{k+1}}. \quad (3.20)$$

Dado cualquier $x \in [0, 1]$ escribimos su desarrollo binario

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j}$$

simplemente como $.a_1a_2 \dots$, donde cada $a_j \in \{0, 1\}$, y sus sumas parciales

$$\sum_{j=1}^k \frac{a_j}{2^j}$$

como $.a_1a_2 \dots a_k$. También escribimos $.a_1a_2 \dots (a_k + 1)$ para denotar al número

$$\sum_{j=1}^k \frac{a_j}{2^j} + \frac{1}{2^k}.$$

Si escribimos

$$x = \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{2^j} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j},$$

observamos que

$$\sum_{j=1}^k \frac{a_j}{2^j} \leq x \leq \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{2^j} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{2^j} + \frac{1}{2^k},$$

así que cualquiera que sea k , se cumple

$$.a_1a_2 \dots a_k \leq x \leq .a_1a_2 \dots (a_k + 1).$$

Vamos a llegar a una contradicción suponiendo que τ es diferenciable en x . En ese caso, el límite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tau(.a_1a_2 \dots (a_k + 1)) - \tau(.a_1a_2 \dots a_k)}{2^{-k}}$$

debe existir y ser $\tau'(x)$. Si definimos por tanto

$$t_k = \frac{\tau(.a_1a_2 \dots (a_k + 1)) - \tau(.a_1a_2 \dots a_k)}{2^{-k}},$$

tenemos que (t_k) es una sucesión convergente y, en particular, de Cauchy.

La relación entre t_k y t_{k+1} depende del valor de a_{k+1} .

$$a_{k+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} .a_1a_2 \dots a_k a_{k+1} = .a_1a_2 \dots a_k \\ .a_1a_2 \dots a_k (a_{k+1} + 1) = .a_1a_2 \dots a_k 1. \end{cases}$$

Dado que $.a_1a_2 \dots a_k 1$ es el punto medio entre $.a_1a_2 \dots a_k$ y $.a_1a_2 \dots (a_k + 1)$, de (3.19) deducimos que

$$t_{k+1} = t_k + 1.$$

Por otra parte,

$$a_{k+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} .a_1a_2 \dots a_k a_{k+1} = .a_1a_2 \dots a_k 1 \\ .a_1a_2 \dots a_k (a_{k+1} + 1) = .a_1a_2 \dots (a_k + 1), \end{cases}$$

así que de (3.20) deducimos que

$$t_{k+1} = t_k - 1.$$

En conclusión,

$$|t_{k+1} - t_k| = 1,$$

lo que nos indica que (t_k) no puede ser una sucesión de Cauchy. Esto contradice la existencia de $\tau'(x)$ y, por tanto, τ no es diferenciable en x .

□

3.3. Orden del cociente incremental

Que la función de Takagi no sea derivable significa que el cociente

$$\frac{\tau(x) - \tau(y)}{x - y} \tag{3.21}$$

carece de límite cuando $x \rightarrow y$. De hecho, este cociente ni siquiera está acotado. Por ejemplo, tomando $x = 0$ e $y = 2^{-N}$ con N natural tenemos que $\tau(0) = 0$ y

$$\tau(2^{-N}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^k \cdot 2^{-N})}{2^k} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2^k \cdot 2^{-N}}{2^k} = N2^{-N},$$

pues $\varphi(x) = x$ en $[0, 1/2]$ y $\varphi(x) = 0$ en los enteros. En conclusión,

$$\left| \frac{\tau(2^{-N}) - \tau(0)}{2^{-N} - 0} \right| = N,$$

lo que prueba que el cociente (3.21) no está acotado cuando $y \rightarrow x$.

No obstante, podemos ver que la relación entre el denominador, 2^{-N} , y el cociente, N , es logarítmica pues $|\log 2^{-N}| = N \log 2$. Esto es de hecho “lo peor” que puede suceder para los cocientes, a la vista del siguiente resultado.

Teorema 3.7. *Existe una constante $A > 0$ tal que para todos $x, y \in [0, 1]$ con $x \neq y$ es*

$$\left| \frac{\tau(x) - \tau(y)}{x - y} \right| \leq A \log \left(\frac{1}{|x - y|} \right).$$

Demostración. Dados $x, y \in [0, 1]$ con $x \neq y$, sea N el número natural tal que

$$2^{-N} \leq |x - y| < 2^{-N+1}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |\tau(x) - \tau(y)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^k x) - \varphi(2^k y)}{2^k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^N \frac{|\varphi(2^k x) - \varphi(2^k y)|}{2^k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|\varphi(2^k x) - \varphi(2^k y)|}{2^k} \end{aligned}$$

y de las estimaciones

$$|\varphi(2^k x) - \varphi(2^k y)| \leq \begin{cases} 2^k |x - y|, & k \leq N, \\ 1, & k > N, \end{cases}$$

deducimos que

$$\begin{aligned} |\tau(x) - \tau(y)| &\leq \sum_{k=0}^N \frac{2^k |x - y|}{2^k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= (N + 1)|x - y| + \frac{1}{2^N} \leq (N + 2)|x - y|, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $2^{-N} \leq |x - y|$. Como también es $|x - y| < 2^{-N+1}$, se tiene que $2^N|x - y| < 2$ y, en conclusión,

$$N \log 2 + \log |x - y| < \log 2.$$

Entonces,

$$N + 2 < 3 + \frac{1}{\log 2} \log \left(\frac{1}{|x - y|} \right) \leq A \log \left(\frac{1}{|x - y|} \right),$$

para una constante apropiada A . Así que

$$|\tau(x) - \tau(y)| \leq A \log \left(\frac{1}{|x - y|} \right) |x - y|.$$

□

El teorema de Banach-Mazurkiewicz

Vamos a terminar este trabajo viendo en este capítulo que la función de Takagi pertenece a un conjunto “grande” en el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$, que representamos por $C([0, 1])$.

4.1. El teorema de Baire

El teorema de las categorías de Baire tuvo su origen en 1897, cuando Osgood probó que la intersección de una sucesión de subconjuntos abiertos densos de \mathbb{R} es densa en \mathbb{R} . Dos años después, Baire se percató de que el mismo resultado seguía cumpliéndose para \mathbb{R}^n y se sirvió de este hecho en su estudio de las funciones que se obtienen como límites puntuales de sucesiones de funciones continuas (llamadas funciones de la primera clase de Baire). En 1914, Hausdorff extendió el resultado a los espacios completamente metrizables y un poco más tarde, Banach advirtió que el mencionado resultado de Osgood y Baire no sólo era cierto en \mathbb{R}^n sino también, con la misma demostración de Baire, en cualquier espacio métrico completo y en cualquier espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, dando de este modo la forma definitiva a lo que conocemos hoy día como el teorema de categoría de Baire para ambas clases de espacios.

En análisis, la validez de muchos teoremas importantes depende de la completitud de los sistemas que intervienen. Esto explica la insuficiencia del sistema de los números racionales y de la integral de Riemann (por mencionar sólo dos de los ejemplos más conocidos) y el éxito logrado por sus sustitutos, el sistema de los números reales y la integral de Lebesgue. El teorema de las categorías de Baire en espacios métricos completos es la herramienta básica en este área.

Para probar el resultado fundamental de este capítulo necesitamos el teorema de las categorías de Baire. Comenzamos con la siguiente definición.

Definición 4.1. Sea X un espacio métrico y $A \subset X$.

- Se dice que A es raro (o denso en ninguna parte) en X si su cierre, \bar{A} , tiene interior vacío.
- Se dice que A es de primera categoría (o magro) en X si es unión numerable de conjuntos raros en X .
- Se dice que A es de segunda categoría en X si no es de primera categoría.
- Se dice que A es residual si su complemento es de segunda categoría en X .

El teorema de las categorías de Baire es el siguiente.

Teorema 4.2 (Baire). Sea X un espacio métrico completo, $X \neq \emptyset$. Entonces X es de segunda categoría. Por tanto, si

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_k \text{ conjuntos cerrados,}$$

entonces al menos un conjunto A_k contiene un conjunto abierto no vacío.

La equivalencia es clara: si ningún $A_k = \bar{A}_k$ (pues son conjuntos cerrados) contiene un abierto no vacío entonces X sería de primera categoría en sí mismo. Por otra parte, si X es de segunda categoría en sí mismo no lo podemos escribir como una unión numerable de conjuntos raros, por lo que algún conjunto A_k debe contener un abierto no vacío.

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo. Si fuera

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad (4.1)$$

siendo cada conjunto A_k raro en X , vamos a construir una sucesión (x_k) de Cauchy cuyo límite x (que existe por la completitud) no está en ningún A_k , contradiciendo (4.1).

Dado que A_1 es raro en X , se tiene que \bar{A}_1 no contiene un abierto no vacío. Pero X sí (el propio X por ejemplo). Así que $\bar{A}_1 \neq X$. Luego el complementario $\bar{A}_1^c = X \setminus \bar{A}_1$ de \bar{A}_1 es no vacío y abierto y, por tanto, podemos elegir una bola dentro,

$$x_1 \in B_1 = B(x_1, \varepsilon_1) \subset \bar{A}_1^c, \quad \varepsilon_1 < \frac{1}{2}.$$

Siguiendo así, A_2 es raro en X por lo que \bar{A}_2 no contiene un abierto no vacío. En particular, no puede contener a la bola $B(x_1, \varepsilon_1/2)$. Esto implica que $\bar{A}_2^c \cap B(x_1, \varepsilon_1/2)$ es abierto no vacío así que podemos elegir una bola abierta en él,

$$x_2 \in B_2 = B(x_2, \varepsilon_2) \subset \bar{A}_2^c \cap B(x_1, \varepsilon_1/2), \quad \varepsilon_2 < \frac{1}{2}\varepsilon_1.$$

Por inducción construimos una sucesión de bolas

$$B_k = B(x_k, \varepsilon_k), \quad \varepsilon_k < \frac{1}{2^k}$$

tal que

$$B_k \cap A_k = \emptyset$$

y

$$B_{k+1} \subset B\left(x_k, \frac{1}{2}\varepsilon_k\right) \subset B_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Como $\varepsilon_k < 2^{-k}$, la sucesión (x_k) de los centros de las bolas es de Cauchy y converge, digamos $x_k \rightarrow x \in X$ dado que X es completo. También, para todo m y $n > m$ se tiene que $B_m \subset B(x_m, \varepsilon_m/2)$, por lo que

$$d(x_m, x) \leq d(x_m, x_n) + d(x_n, x) < \frac{1}{2}\varepsilon_m + d(x_n, x) \rightarrow \frac{1}{2}\varepsilon_m$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Luego $x \in B_m$ para todo m . Dado que $B_m \subset \bar{A}_m^c$, se sigue que $x \notin A_m$ para todo m así que

$$x \notin \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = X.$$

Esta contradicción prueba el teorema. □

4.2. El teorema de Banach-Mazurkiewicz

Tras el hallazgo de funciones continuas no derivables en ningún punto, la comunidad matemática de la época quedó conmocionada; hasta tal punto que el eminente matemático Charles Hermite, en una carta dirigida a Stieltjes fechada el 20 de mayo de 1893, le decía:

“Je me détourne avec horreur et effroi de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n’ont pas de dérivé.”

(“Me alejo con horror y temor de esta plaga lamentable de las funciones continuas que no poseen derivadas”). Aunque lo lógico sería pensar que este tipo de funciones son poco comunes, y de hecho es lo que pensaba la mayor parte de los matemáticos del momento, resulta que estas constituyen realmente, desde el punto de vista topológico, la regla y no la excepción, lo cual es bastante sorprendente. De hecho, el conjunto de tales funciones es tan asombrosamente cuantioso que constituye un conjunto de segunda categoría. Algunas de las muchas teorías que hacen uso de este resultado son la teoría de los movimientos Brownianos, la teoría de los fractales, la teoría del caos o la teoría de las ondas pequeñas.

En un artículo de 1929, Hugo Steinhauss planteaba el siguiente problema:

¿De qué categoría es el conjunto de todas las funciones continuas nunca diferenciables en el espacio de todas las funciones continuas?

Esta pregunta obtuvo respuesta en dos artículos diferentes. El primero de Stefan Banach en 1931 y el segundo de Stefan Mazurkiewicz en 1932. Vamos a ver una demostración de este resultado, pero antes necesitamos un lema previo sobre las funciones continuas lineales a trozos, atribuido a Lebesgue.

Definición 4.3. Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice lineal a trozos si existe una partición $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$ tal que f es lineal en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq n$, de la partición.

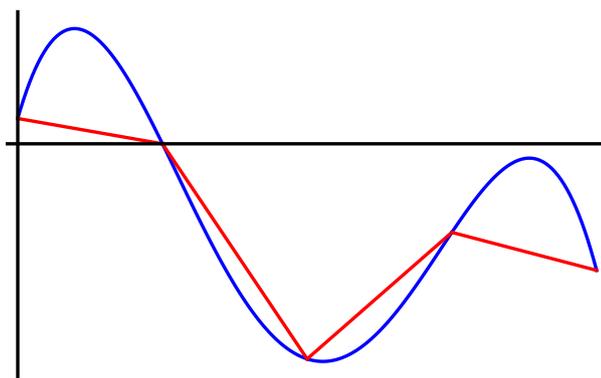


Figura 4.1: Función continua y polígono inscrito.

Denotamos como es habitual por $C([a, b])$ al espacio de Banach de las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, dotado de la norma del supremo, y por $\mathcal{P}([a, b])$ el subespacio de las funciones continuas y lineales a trozos.

Lema 4.4. *El espacio $\mathcal{P}([a, b])$ es denso en el espacio $C([a, b])$.*

Demostración. Sea $f \in C([a, b])$ una función continua arbitraria pero fija. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada partición $P_n = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ de $[a, b]$, definimos la función asociada a la partición P_n que denotamos $h_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h_n(x) = f(t_i) + \frac{x - t_i}{t_{i+1} - t_i} (f(t_{i+1}) - f(t_i)), \quad x \in [t_i, t_{i+1}], \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

Es claro que cada h_n es una función lineal a trozos y continua en $[a, b]$, pues para cada j con $0 < j < n$, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow t_j^-} h_n(x) &= \lim_{x \rightarrow t_j^-} \left(f(t_{j-1}) + \frac{x - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} (f(t_j) - f(t_{j-1})) \right) = f(t_j) \\ &= \lim_{x \rightarrow t_j^+} \left(f(t_j) + \frac{x - t_j}{t_{j+1} - t_j} (f(t_{j+1}) - f(t_j)) \right) = \lim_{x \rightarrow t_j^+} h_n(x). \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Buscamos demostrar la existencia de alguna partición P_n , de forma que la función h_n asociada a P_n cumpla que $\|f - h_n\|_\infty < \varepsilon$. En efecto, dado que f es uniformemente continua en $[0, 1]$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in [0, 1]$ se tiene que

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Tomemos una partición $P_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de $[0, 1]$ de modo que $\max_{i \in \{0, \dots, n-1\}} (t_{i+1} - t_i) < \varepsilon$. Sea $x \in [0, 1]$ y sea $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $x \in [t_i, t_{i+1}]$. Entonces,

$$\begin{aligned} |f(x) - h_n(x)| &\leq |f(x) - f(t_i)| + |f(t_i) - h_n(t_i)| + |h_n(t_i) - h_n(x)| \\ &= |f(x) - f(t_i)| + 0 + |f(t_i) - h_n(x)| \\ &\leq |f(x) - f(t_i)| + 0 + |f(t_i) - f(t_{i+1})| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $h_n(t_i) = f(t_i)$ y que $|f(t_i) - h_n(x)| \leq |f(t_i) - f(t_{i+1})|$ pues $x \in [t_i, t_{i+1}]$. Por ello,

$$\|f - h_n\|_\infty \leq \max_{i=0, \dots, n-1} \left(\sup_{x \in [t_i, t_{i+1}]} |f(x) - h_n(x)| \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

con lo que hemos terminado. □

Ya podemos enunciar y demostrar el resultado principal, siguiendo la exposición de [15] (páginas 45–46).

Teorema 4.5 (Banach-Mazurkiewicz). *El conjunto de las funciones continuas que no son diferenciables en todo punto del intervalo $[a, b]$ es de segunda categoría en el espacio de las funciones continuas $C([a, b])$.*

Demostración. Suponemos sin pérdida de generalidad que $[a, b] = [0, 1]$. Definamos

$$E_n = \left\{ f \in C([0, 1]) : \exists x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \text{ tal que } \forall h \in (0, 1 - x), |f(x+h) - f(x)| \leq nh \right\}.$$

Debemos observar que cualquier función continua en $[0, 1]$ que tenga derivada lateral a la derecha finita en algún punto $x \in [0, 1)$ pertenece a E_n para algún n . Así que la unión de estos conjuntos E_n contiene a todas las funciones de $C([0, 1])$ que tienen derivada lateral a la derecha finita en algún punto de $[0, 1)$. Veamos que cualquiera que sea n , el conjunto E_n es cerrado. Si $f \in \overline{E_n}$, existe $f_k \in E_n$ de modo que

$$f_k \rightarrow f \quad \text{uniformemente en } [0, 1].$$

Dado que $f_k \in E_n$, existe

$$x_k \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

La sucesión (x_k) es acotada así que el teorema de Bolzano-Weierstrass garantiza la existencia de una subsucesión, (x_{k_i}) , que converge a algún elemento

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_i} = x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right].$$

Sea (f_{k_i}) la subsucesión correspondiente de (f_k) . Por construcción,

$$|f_{k_i}(x_{k_i} + h) - f_{k_i}(x_{k_i})| \leq nh, \quad \forall h \in (0, 1 - x_{k_i}).$$

Como $x_{k_i} \rightarrow x$ y $0 < h < 1 - x$ podemos elegir $l_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $0 < h < 1 - x_{k_l}$ si $l \geq l_0$. Entonces, para l grande,

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &\leq |f(x+h) - f(x_{k_l} + h)| + |f(x_{k_l} + h) - f_{k_l}(x_{k_l} + h)| \\ &\quad + |f_{k_l}(x_{k_l} + h) - f_{k_l}(x_{k_l})| + |f_{k_l}(x_{k_l}) - f(x_{k_l})| + |f(x_{k_l}) - f(x)| \\ &\leq |f(x+h) - f(x_{k_l} + h)| + \|f - f_{k_l}\| + nh + \|f_{k_l} - f\| + |f(x_{k_l}) - f(x)|. \end{aligned}$$

Si hacemos $l \rightarrow \infty$, la continuidad de f en x y $x+h$ y la convergencia de f_{k_l} (en norma) da la desigualdad

$$|f(x+h) - f(x)| \leq nh, \quad \forall h \in (0, 1 - x),$$

lo que prueba que $f \in E_n$ y este conjunto es cerrado.

Consideremos a continuación el espacio $\mathcal{P}([0, 1])$ que sabemos es denso en $C([0, 1])$ por el lema anterior. Los conjuntos E_n serán raros si probamos que dada cualquier $g \in \mathcal{P}([0, 1])$ y dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $h \in C([0, 1]) \setminus E_n$ tal que $\|g - h\| < \varepsilon$.

Sea pues $\varepsilon > 0$ y designemos por M la pendiente máxima en valor absoluto de cualquier trozo lineal de los que componen g . Elijamos $m \in \mathbb{N}$ de modo que $m\varepsilon > n + M$. Sea $\varphi(x) = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|$ la función distancia al entero más próximo y definamos

$$h(x) = g(x) + \varepsilon\varphi(mx).$$

Cualquiera que sea $x \in [0, 1)$, la función $h(x)$ tiene derivada lateral a la derecha, $h'_+(x)$ tal que

$$|h'_+(x)| = \left| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h(x+t) - h(x)}{t} \right| = \left| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(x+t) + \varepsilon\varphi(m(x+t)) - g(x) - \varepsilon\varphi(mx)}{t} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(x+t) - g(x)}{t} + m\varepsilon \frac{\varphi(m(x+t)) - \varphi(mx)}{mt} \right| \\
&\geq m\varepsilon \left| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(m(x+t)) - \varphi(mx)}{mt} \right| - \left| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(x+t) - g(x)}{t} \right| \\
&\geq m\varepsilon |\pm 1| - M > n + M - M = n.
\end{aligned}$$

pues hemos elegido $m\varepsilon > n + M$. Así que $h \in C([0, 1]) \setminus E_n$. Además,

$$\|g - h\| = \sup_{x \in [0, 1]} |g(x) - (g(x) + \varepsilon\varphi(mx))| = \varepsilon \sup_{x \in [0, 1]} |\varphi(mx)| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

por lo que E_n es raro en $C([0, 1])$ y, en consecuencia,

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

es un conjunto de primera categoría en $C([0, 1])$. Este es el conjunto de todos los elementos de $f \in C([0, 1])$ con cocientes por la derecha

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h > 0$$

acotados en algún punto $x \in [0, 1]$ (es decir, el complemento de E en $C([0, 1])$ no tiene derivada lateral a la derecha finita en ningún punto de $[0, 1]$).

Ya que $C([0, 1])$ es completo, el teorema de Baire nos dice que es de segunda categoría en sí mismo, por lo que el conjunto de funciones en $C([0, 1])$ que no son diferenciables en ningún punto constituyen un conjunto de segunda categoría. □

Es de destacar que la aplicación del teorema de Baire asegura la abundancia de funciones continuas nunca diferenciables, a pesar de que no se muestra ningún ejemplo concreto de una función de ese tipo, tarea que puede resultar con frecuencia un poco ardua y a veces de muy difícil construcción. En este trabajo hemos visto una de ellas, la de Takagi. Desde el punto de vista de las categorías de Baire, abundan más funciones nunca diferenciables que las que son derivables en algún punto de $[0, 1]$. Podemos decir que lo normal o típico es que cuando metemos la mano en el saco de las funciones continuas en $[0, 1]$ y elegimos arbitrariamente una función, resulta que dicha función es, casi con toda seguridad, una función nunca diferenciable.

Nota 4.6. 1. *Banach y Mazurkiewicz no demostraron exactamente lo mismo en sus respectivos artículos. Mazurkiewicz probó que el conjunto de funciones continuas que tienen una derivada lateral finita en algún punto es de primera categoría, mientras que Banach demostró que el conjunto de funciones que tienen una derivada de Dini¹ finita en algún punto es de primera categoría. Esto hace que el teorema de Banach sea más fuerte que el resultado similar de Mazurkiewicz.*

2. *Lo que se ha demostrado en la prueba del teorema anterior es que el conjunto de funciones continuas que tienen una derivada finita a la derecha en algún punto $x \in [0, 1]$ es de primera categoría. De manera similar, considerando los conjuntos*

$$H_n = \left\{ f \in C([0, 1]) : \exists x \in \left[\frac{1}{n}, 1 \right] \text{ tal que } \forall h \in (0, x), |f(x-h) - f(x)| \leq nh \right\}$$

¹Las derivadas de Dini se definen como límites laterales superior e inferior de los cocientes incrementales.

se puede demostrar que el subconjunto de $C([0, 1])$ que tiene una derivada finita a la izquierda en algún punto $x \in (0, 1]$ también es de la primera categoría². Por lo tanto, el subconjunto de $C([0, 1])$ que consiste en funciones con una derivada lateral finita en algún punto también es de primera categoría.

De la segunda observación anterior, surge la siguiente pregunta: ¿qué pasa con el conjunto de funciones continuas sin derivada lateral finita o infinita en todas partes? Saks resolvió esta cuestión en un artículo publicado en 1932. Probó que el conjunto de funciones continuas que tienen una derivada lateral a la derecha finita o infinita en algún punto es de segunda categoría. Este es el complemento del conjunto anterior por lo que ese conjunto es de primera categoría. El primer ejemplo de tal función no se construyó hasta 1922 cuando Besicovitch logró la hazaña (y publicó la función en 1924). Estos tipos de funciones generalmente se denominan funciones del tipo Besicovitch.

²Puede deducirse también de lo que hemos hecho anteriormente, teniendo en cuenta la isometría de $C([0, 1])$ que induce la sustitución de $1 - x$ por x .

Bibliografía

- [1] Abbott, S. *Understanding analysis*. Springer, 2010.
- [2] Allaart, C.; Kawamura, K. *The Takagi function: a survey*. *Real Anal. Exchange* **37** no. 1, 1–54 (2011/12).
- [3] Billingsley, P. *Van der Waerden's continuous nowhere differentiable function*. *Amer. Math. Monthly* **89**, 691. (1982).
- [4] Cater, F. S. *On van der Waerden's nowhere differentiable function*. *Amer. Math. Monthly* **91** no. 5, 307–308. (1984).
- [5] Delange, H. *Sur la fonction sommatoire de la fonction "somme des chiffres"*. *Enseignement Math.* **21**, 31–47 (1975).
- [6] Gaitan, A.; Sáenz, R. *La función de Takagi*. *Miscelánea Mat.* **61**, 43–55 (2015/16).
- [7] Hernández, L. *La función de Takagi*. Disponible en <http://saber.ucv.ve/bitstream/123456789/14606/1/Trabajo%20Especial%20de%20Grado%20Luis%20Hern%C3%A1ndez.pdf>
- [8] Hildebrandt, T.H. *A simple continuous function with a finite derivative at no point*. *Amer. Math. Monthly* **40**, 547-548 (1933).
- [9] Kahane, J.P. *Sur l'exemple, donné par m. de Rham, d'une foction continue sans dérivée*. *Enseignement Math.*, **5**, 53–57 (1959).
- [10] Knopp, K. *Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen*. *Math. Z.* **2**, 1–26 (1918).
- [11] Lagarias, J.; Maddock, Z. *Level Sets of the Takagi Function: Local Level Sets*. *Monatsh. Math.* **166**, 201-238 (2012).
- [12] Lipinski, J.S. *On zeros of a continuous nowhere differentiable function*. *Amer. Math. Monthly* **73** no. 2, 166–168 (1966).
- [13] Luque, B. *Monstruos no derivables. La función de Takagi y otros ejemplos poco habituales en nuestra educación matemática*. *Investigación y Ciencia* **508**, 90-92, enero 2019.
- [14] Maddock, Z. *Properties of the Takagi Function*. Disponible en <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.324.6728&rep=rep1&type=pdf>
- [15] Oxtoby, J.C. *Measure and Category*, Springer-Verlag, New York 1971.

- [16] de Rham, G. *Sur un exemple de fonction continue sans dérivée*. Enseign. Math. **3**, 71–72 (1957).
- [17] Schubert, S. R. *On A Function of Van Der Waerden*. Amer. Math. Monthly **70**, no. 4, 402 (1963).
- [18] Shidfar, A.; Sabetfakhri, K. *On the Continuity of Van Der Waerden's Function in the Holder Sense*. Amer. Math. Monthly **93** no. 5, 375–376. (1986).
- [19] Takagi, T. *A simple example of the continuous function without derivative*. Phys.-Math. Soc. Japan **1**, 176-177 (1903).
- [20] Tall, D.O. *The Blancmange Function, Continuous Everywhere but Differentiable Nowhere*. Math. Gaz. **66**, 11-22 (1982).
- [21] Tall, D.O.; Di Giacomo, S. *What do we “see” in geometric pictures? (the case of the blancmange function)*. Progetto Alice **1**, 321-336, 2000. Disponibile en [https://www.semanticscholar.org/paper/What-do-we-%22see%22-in-geometric-pictures-\(the-case-of-Tall-Giacomo/4e459b8b9133606162d4200b2851e7b5007faa14](https://www.semanticscholar.org/paper/What-do-we-%22see%22-in-geometric-pictures-(the-case-of-Tall-Giacomo/4e459b8b9133606162d4200b2851e7b5007faa14)
- [22] Tambs-Lyche, R. *Une fonction continue sans dérivée*. Enseign. Math. **8**, 208–211 (1939/40).
- [23] Trollope, J.R. *An explicit expression for binary digital sums*. Math. Mag. **41**, 21–25 (1968).
- [24] de Vito, L. *Su un esempio di funzione continua senza derivata*. Enseign. Math. **4**, 53–57 (1958).
- [25] van der Waerden, B.L. *Ein einfaches Beispiel einer nichtdifferenzierbaren stetigen Funktion*. Math. Z. **32**, 474–475 (1930).