



FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

# INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LAS SUPERFICIES MÍNIMAS

Memoria realizada por Juan José Ortega Ureña

---

VºBº y dirigido por:

Dr. Alfonso Carriazo Rubio



# Resumen

En el presente documento se llevará a cabo una introducción a la teoría de superficies mínimas. Nuestro objetivo es triple: definir qué es una superficie mínima, obtener un método para crear y caracterizarlas e intentar usar la teoría de superficies de Bézier para poder dibujarlas de una manera simple. A lo largo de este trabajo, se introducirán nuevas formas de ver las superficies mínimas, desde su definición, hasta la representación de Weierstrass, finalizando con un estudio acerca de cuándo una superficie de Bézier es mínima.

# Abstract

In this paper, we shall do an introduction to minimal surfaces theory. Our target is triple: define what is a minimal surface, obtain a method to create and characterise them and try to use Bézier surfaces theory to draw them as simple as we could. All along this work, we will discover new ways of seeing minimal surfaces, from their first definition to the Weierstrass representation of them and at the very end, we shall study when a Bézier surface is minimal.

A lo largo del presente trabajo se han usado hiperenlaces internos. Esto significa que puede pulsarse en toda referencia para acceder al lugar donde se encuentra dicho dato



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>9</b>
1.1. Curvas y superficies . . . . .	9
1.1.1. Curvas . . . . .	9
1.1.2. Superficies . . . . .	11
1.2. Funciones holomorfas . . . . .	14
<b>2. Superficies mínimas</b>	<b>19</b>
2.1. Definiciones equivalentes de minimalidad . . . . .	19
<b>3. Representación de Weierstrass</b>	<b>25</b>
3.1. Construcción de superficies mínimas . . . . .	25
3.1.1. Parámetros isotermos y funciones armónicas . . . . .	25
3.1.2. Representación de Weierstrass de superficies mínimas . . . . .	27
3.2. Ejemplos . . . . .	30
3.2.1. Código de Maxima utilizado . . . . .	33
<b>4. Superficies mínimas de Bézier</b>	<b>37</b>
4.1. Superficies de Bézier . . . . .	37
4.2. Superficies de Bézier armónicas . . . . .	42
4.2.1. Superficies de Bézier bicuadráticas armónicas . . . . .	44
4.2.2. Superficies de Bézier bicúbicas armónicas . . . . .	44
4.3. Superficies de Bézier bicúbicas mínimas . . . . .	45
<b>Bibliografía</b>	<b>49</b>



# Introducción

Las superficies mínimas, nombradas primero por Lagrange en 1760, han sido estudiadas a lo largo de los siglos por diversos autores como Euler, Enneper, Bernstein, Weierstrass, Osserman, Plateau, Douglas, Morse o Radó entre otros, cuya teoría debe su actual desarrollo a dichas personalidades. Como bien explican Joaquín Pérez y William Meeks en [4]:

*"La teoría de superficies mínimas en espacios euclídeos tridimensionales, tienen su origen en el cálculo de variaciones desarrollado por Euler y Lagrange en el siglo XVIII y en investigaciones posteriores de Enneper, Scherk, Schawrz, Riemann y Weierstrass en el siglo XIX."*

Posteriormente, cabe mencionar el trabajo realizado en la primera mitad del siglo XX alrededor del Problema de Plateau (el cual consiste en hallar la superficie con área mínima que tiene como frontera una curva de Jordan dada en  $\mathbf{R}^3$ ) resuelto por Douglas y Radó como bien menciona Osserman en la introducción de su libro (ver [5]).

*"Durante la primera mitad del presente siglo, la atención ha sido casi exclusivamente dirigida a la solución del problema de Plateau. La inmensidad de resultados obtenidos pueden ser consultados en los trabajos de Douglas y en los libros de Radó y Courant\*."*

La motivación de este trabajo, así como el objetivo a cumplir, es conseguir ver de manera sencilla a la vez que eficiente si, dada una superficie, cumple la propiedad de ser mínima, la cual definiremos a lo largo del presente documento tanto en la Definición 1.1.5 como a lo largo de la Sección 2. Así mismo, el resultado dado en el Teorema 3.1.5, nos permitirá, ade-

---

\*Ver las referencias citadas en [5].

más, construir superficies de curvatura media idénticamente nula a partir de tres funciones analíticas que cumplan unas condiciones bastante asequibles. Dicha caracterización, la **representación de Weierstrass**, supuso un hito muy importante en su momento (y a día de hoy sigue siendo lo suficientemente interesante) ya que, como se ha comentado, casi trivializa el encontrar superficies de estas características.

Se ha comentado previamente que las superficies mínimas deben su origen al cálculo variacional por lo que no podría haber menos que una referencia a tales desarrollos en el capítulo de definiciones equivalentes (2) gracias a Do Carmo (ver [3]).

Así mismo, se darán diversos ejemplos de superficies mínimas en la sección dedicada (3.2) en los cuales se puede ver la evolución histórica en la búsqueda de éstas. También se ha incluido el código utilizado para la representación de dichas superficies.

Posteriormente, tras la introducción de las superficies de Bézier en el siglo XX, se ha intentado usar el potencial de dicha teoría para el estudio y construcción de superficies mínimas. A lo largo del capítulo 4 se dará una introducción a cómo puede usarse en la búsqueda de superficies de curvatura media nula.

Aún quedan más resultados de superficies mínimas que escapan a los objetivos del presente trabajo, por lo que se insta al lector interesado a consultar el Problema de Plateau así como la aplicación de las superficies de Bézier a dicho problema.

Por último, no podría finalizar la introducción del presente Trabajo Fin de Grado sin agradecer su estimable ayuda al tutor del presente, por darme las herramientas para poder realizarlo y haberme guiado tan sabiamente en el desarrollo del mismo. También dar las gracias a mi familia y amigos por haberme dado el apoyo moral necesario para poder finalizar el trabajo.



# Capítulo 1

## Preliminares

En el presente capítulo, se pretende dar noción de los conceptos básicos que se utilizarán para la consecución de los objetivos de este trabajo aunque no se dará demostración de los mismos por ser preliminares al contenido desarrollado en dicho trabajo. Se ha dividido en secciones acorde con la temática de los conceptos aunque, a veces, esta diferencia es difícil de establecer en las matemáticas. Se han seguido los resultados dados en [3] y [8] para superficies. Para consultar resultados de análisis complejo en más profundidad puede verse [1].

### 1.1. Curvas y superficies

En esta primera sección se pretende dar una aproximación a los elementos geométricos que utilizaremos durante el presente trabajo. Empezaremos con las inmersiones de la recta real en el espacio (curvas) y continuaremos con la inmersión del plano en éste (superficies).

#### 1.1.1. Curvas

Empezaremos presentando el primer elemento geométrico decisivo en nuestro estudio: las curvas (regulares) en el espacio tridimensional.

**Definición 1.1.1.** *Sea  $\alpha : (a, b) = I \rightarrow \mathbf{R}^3$  una aplicación diferenciable de un intervalo abierto de  $\mathbf{R}$  en  $\mathbf{R}^3$ . Se dirá que  $\alpha$  es **una curva parametrizada diferenciable**. Si además se cumple (la condición de regularidad)*

$\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ , se dirá que  $\alpha$  es una **curva regular**.

Dado  $t_0$  en el intervalo de definición de la curva, se puede considerar la longitud de arco de la curva como

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt.$$

Puede darse que la curva ya esté parametrizada por su longitud de arco, de tal manera que  $ds/dt = |\alpha'(t)| = 1$ , con lo que quedaría

$$s = \int_{t_0}^t dt = t - t_0.$$

Obsérvese que toda curva regular puede parametrizarse por su longitud de arco (**parámetro natural**) por lo que, a partir de ahora, consideraremos las curvas regulares parametrizadas naturalmente, ya que esto facilitará el desarrollo de los cálculos. Así mismo, nos resulta más sencillo definir algunos conceptos como el que sigue.

**Definición 1.1.2.** Sea  $\alpha$  una curva regular parametrizada por su longitud de arco  $s \in I$ , se define la **curvatura** de  $\alpha$  como  $k(s) = |\ddot{\alpha}(s)|$ , donde el punto representa la derivada con respecto al parámetro natural..

La explicación geométrica de la definición anterior es sencilla, pues si  $\alpha$  es una curva regular, el módulo del vector  $\alpha''(s)$  indica la variación del vector tangente  $\alpha'(s)$  en cada punto  $s \in I$  del intervalo de definición de la curva.

Para cada punto de una curva regular se define el *Triedro de Frenet* (el cual es ortonormal directo) como sigue:

**Definición 1.1.3.** (*Triedro de Frenet*) Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  una curva regular de parámetro natural  $s$ . Se denominará *Triedro o Referencia de Frenet* al triedro

$$\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\} \tag{1.1.1}$$

definido, en los puntos donde la curvatura no es nula, por

$$\begin{cases} \mathbf{t}(s) = \dot{\alpha}(s), \\ \mathbf{n}(s) = \frac{\ddot{\alpha}(s)}{k(s)}, \\ \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s). \end{cases} \tag{1.1.2}$$

### 1.1.2. Superficies

Pasamos ahora a definir las unidades básicas en las que vamos a desarrollar nuestra teoría, en este caso, las superficies.

**Definición 1.1.4.** *Un subconjunto  $S \subset \mathbf{R}^3$  es una **superficie regular** si, para cada  $p \in S$ , existen un entorno de dicho punto  $V$  de  $\mathbf{R}^3$  y una aplicación  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$  de un conjunto abierto  $U \subset \mathbf{R}^2$  en  $V \cap S \subset \mathbf{R}^3$  tal que:*

1.  $\mathbf{x}$  es diferenciable. Es decir, sus componentes tienen derivadas parciales, de cualquier orden, continuas.
2.  $\mathbf{x}$  es un homeomorfismo. Como  $\mathbf{x}$  es continua por la condición 1, esto significa que  $\mathbf{x}$  tiene una inversa continua  $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ .
3. (**Condición de regularidad.**) Si  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, u_2)$ , para cada  $(u_1, u_2) \in U$  se cumple que

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1}(u_1, u_2) \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2}(u_1, u_2) \neq 0.$$

Cualquier aplicación verificando las condiciones anteriores se llama **parametrización local** o **parametrización regular** de  $S$  en  $p$ . La aplicación inversa  $\mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) = V \cap S \rightarrow U$  se denomina **carta local** en  $p$ . Así mismo, las coordenadas  $(u_1(p), u_2(p)) = \mathbf{x}^{-1}(p)$  se denominan **coordenadas locales** de  $p$ .

Para mayor comodidad, introduciremos la siguiente notación.

**Notación 1.1.5.** *Sean una superficie regular  $S$  y una parametrización local de ella  $\mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbf{R}^3$ . Si  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, u_2)$ , se notarán sus correspondientes derivadas parciales como*

$$\mathbf{x}_i := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}, \quad \mathbf{x}_{ij} := \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_i \partial u_j}, \quad \text{para } i, j = 1, 2.$$

Las superficies admiten varias parametrizaciones diferentes. Los coeficientes métricos nos ayudan a distinguir una parametrización de otra.

**Definición 1.1.6.** *Se denominan **coeficientes métricos** de una parametrización local de una superficie regular  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ , a las funciones  $g_{ij} = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$  para  $i, j = 1, 2$ .*

Obsérvese que estos coeficientes dependen de la parametrización local escogida y definen una matriz simétrica y definida positiva ( $G = (g_{ij})$ ). En efecto, la matriz es definida positiva pues basta observar (por el criterio de Sylvester) que  $|G| = |\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|^2$  y  $g_{11} > 0$ . Veamos qué forma define esta matriz.

**Definición 1.1.7.** *La forma bilineal definida por la matriz de coeficientes métricos  $G$  se denomina **Primera Forma Fundamental** de la parametrización  $\mathbf{x}(U)$  en el punto  $p \in \mathbf{x}(U)$*

Nótese que esta forma se corresponde con el producto escalar en el plano tangente a la superficie en dicho punto  $p \in \mathbf{x}(U)$  notado  $T_p(\mathbf{x})$ .

**Observación 1.1.8.** *La Primera Forma Fundamental es la aplicación que asigna a cada par de vectores de  $T_p(\mathbf{x})$  su producto escalar. Esta aplicación está definida para cada punto  $p \in \mathbf{x}(U)$ , siendo  $\mathbf{x}(U)$  una parametrización local de una superficie regular.*

El plano tangente de una superficie en un punto está caracterizado por su vector normal. Este se define como sigue.

**Definición 1.1.9.** *Se define el **vector normal**  $\mathbf{N}$  a una superficie regular  $S$  con parametrización local  $\mathbf{x}(U)$  como*

$$\mathbf{N}(u_0, v_0) = \frac{\mathbf{x}_1(p) \times \mathbf{x}_2(p)}{|\mathbf{x}_1(p) \times \mathbf{x}_2(p)|} \equiv \mathbf{N}(p), \quad (1.1.3)$$

donde  $\mathbf{x}_i$  es la derivada de  $\mathbf{x}$  con respecto a la componente  $i$ -ésima. A la aplicación que a cada punto  $p \in \mathbf{x}(U)$  le hace corresponder su vector normal se le denomina **aplicación de Gauss**, cuyo signo dependerá de la parametrización local tomada.

Introduciremos ahora la siguiente notación que nos será de utilidad más adelante.

**Notación 1.1.10.** *En las condiciones anteriores, se notará como  $b_{ij}$  a los coeficientes de la **Segunda Forma Fundamental**, esto es, a la derivada cruzada de  $\mathbf{x}$  por el vector  $\mathbf{N}$ :*

$$b_{ij} := \mathbf{x}_{ij} \mathbf{N}.$$

**Observación 1.1.11.** *Nótese que la definición anterior depende de la parametrización local escogida, ya que el signo del vector  $\mathbf{N}$  puede cambiar por una reparametrización que cambie la orientación.*

Pasamos a definir ahora el concepto de curvatura normal, que nos servirá para definir la curvatura media de una superficie, concepto que será de gran importancia en el desarrollo de nuestra teoría.

**Definición 1.1.12.** *Sean  $S$  una superficie regular y  $\mathbf{x}(U)$  una parametrización local de  $S$ . Sean  $\alpha = \alpha(s)$  una curva regular parametrizada naturalmente en  $S$  pasando por  $p \in S$ ,  $k$  la curvatura de  $\alpha$  en  $p$ ,  $\mathbf{N}$  el vector normal a la superficie en el punto  $p$  y  $\mathbf{n}$ , el vector normal a la curva en  $p$ . Se define la **curvatura normal** como*

$$k_n(s) = \ddot{\alpha}(s) \cdot \mathbf{N}(s) = k \cdot \mathbf{n}(s)\mathbf{N}(s).$$

**Definición 1.1.13.** *En las condiciones anteriores, definiremos como  $k_1$  y  $k_2$  a la curvatura normal mínima y máxima, respectivamente, a las cuales nos referiremos como **curvaturas principales en  $p$** .*

Estamos en condiciones de definir la curvatura media.

**Definición 1.1.14.** *Sea  $S$  una superficie regular y sea  $p \in S$  un punto de ésta. La **curvatura media**  $H$  de  $S$  en  $p$  se define como la media aritmética de las curvaturas principales en dicho punto:*

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}. \quad (1.1.4)$$

Veamos una fórmula que se deduce directamente de la definición anterior y será muy útil.

**Observación 1.1.15.** *Nótese que la curvatura media puede expresarse de manera explícita a partir de los coeficientes de la Primera y Segunda Formas Fundamentales como*

$$H = \frac{g_{22} b_{11} + g_{11} b_{22} - 2g_{12} b_{12}}{2 \cdot \det(G)}. \quad (1.1.5)$$

Con lo anterior, estamos en disposición de definir qué es una superficie mínima.

**Definición 1.1.16.** Sea  $S$  una superficie regular en  $\mathbf{R}^3$ . Se dirá que es una *superficie mínima* si su curvatura media es idénticamente nula.

Cuando hablamos de superficies regulares, una representación muy útil puede darse usando **parámetros isotermos**.

**Definición 1.1.17.** Sea una superficie regular  $S$  y sea  $\mathbf{x}(U)$  una parametrización local de  $S$  con parámetros  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, u_2)$ . Se dirá que  $u$  y  $v$  son *parámetros isotermos* si cumplen

$$g_{11} = g_{22} = \lambda > 0, \quad g_{12} = g_{21} = 0 \quad (1.1.6)$$

o lo que es lo mismo

$$g_{ij} = \lambda \delta_{ij}, \quad \lambda = \lambda(u_1, u_2) > 0, \quad (1.1.7)$$

donde  $g_{ij}$ , ( $i, j = 1, 2$ ) son los coeficientes métricos de  $\mathbf{x}$ .

**Observación 1.1.18.** Se tiene que de toda superficie regular puede obtenerse una parametrización local dada por parámetros isotermos (ver [3] y también L. Bers, Riemann Surfaces, New York University, Institute of Mathematical Sciences, New York, 1957-1958, págs. 15-35).

Además, el uso de parámetros isotermos nos ayuda a dar una fórmula más breve de la curvatura media ya que así, el determinante de la Primera Forma Fundamental quedaría

$$\det(G) = \lambda^2 \quad (1.1.8)$$

y por tanto, la curvatura media, expresada en (1.1.5), queda

$$H = \frac{b_{11} + b_{22}}{2\lambda}. \quad (1.1.9)$$

## 1.2. Funciones holomorfas

Ahora, pasamos a ver algunos resultados de análisis complejo que nos serán de utilidad más adelante. Las definiciones y resultados se han obtenido de [1].

Empezaremos por una de las definiciones centrales.

**Definición 1.2.1.** Sea  $nO \subset \Omega$  siendo  $O$  un abierto y  $\Omega$  una región. Sea ahora  $f : O \subset \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ . Se dirá que  $f$  es **holomorfa** en  $O$  si es derivable (compleja) en todo punto  $a \in O$  y se notará  $f \in \mathcal{H}(O)$ .

Aunque la definición anterior se haya formulado para abiertos, también puede extenderse a conjuntos en general como sigue.

**Definición 1.2.2.** Sea  $A \subset \mathbf{C}$ . Se dirá que  $f$  es **holomorfa** en  $A$  si existe un conjunto  $O \subset \mathbf{C}$  abierto tal que  $A \subset O$  y  $f$  es holomorfa en dicho conjunto  $O$ .

Las diferenciabilidad en  $\mathbf{C}$  requiere más que la diferenciabilidad Fréchet (o diferenciabilidad en  $\mathbf{R}^2$ ). De hecho, se tiene el siguiente lema.

**Lema 1.2.3.** (Condiciones de Cauchy-Riemann):

Sea  $f : O \subset \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ , con  $O$  un abierto de  $\mathbf{C}$  y sea  $a = (x_0, y_0) \in O$ . Notemos  $f$  por  $f = u + iv$ , donde  $u$  es la parte real de  $f$  y  $v$  es su parte imaginaria. En estas condiciones, son equivalentes:

1. La función  $f$  es derivable (compleja) en  $a \in O$
2. Las funciones  $u, v : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  son diferenciables Fréchet en  $a \in O$  y cumplen las llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a). \end{cases} \quad (1.2.1)$$

El anterior es un lema fundamental a la hora de decidir si una función es holomorfa usando simplemente el análisis real. A continuación se darán condiciones para la analiticidad de funciones.

**Teorema 1.2.4.** Sea  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  donde  $\Omega$  es una región de  $\mathbf{C}$ . Entonces  $f$  es analítica en  $\Omega$ . Además, se verifica que para todo  $a \in \Omega$  la función  $f$  está representada por su serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n, \quad (1.2.2)$$

en un disco de centro  $a$  y radio  $d(a, \partial\Omega)$ .

El anterior teorema es de gran importancia en el análisis complejo pues nos da una equivalencia entre holomorfía y analiticidad lo cual supone un gran avance.

Un caso algo más generalizado de funciones lo representan aquellas que son holomorfas salvo, a lo más, en un conjunto finito de puntos, esto es, las funciones meromorfas. Pero antes de introducir este concepto, debemos dar dos definiciones básicas en el análisis complejo.

**Definición 1.2.5.** Sean  $\Omega \subset \mathbf{C}$  una región del plano complejo,  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$  y  $a \in \Omega$ . Se dirá que  $a$  es un **cero de orden  $m$  de  $f$**  si se tiene que  $f(a) = 0$  y

$$\lim_{z \rightarrow a} z^m f(z) \in \mathbf{C} \setminus \{0\}.$$

Análogamente, se dirá que  $a$  es un **polo de orden  $m$  de  $f$**  si  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$  y además

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{z^m} \in \mathbf{C} \setminus \{0\}.$$

Pasamos ahora a la definición de función meromorfa.

**Definición 1.2.6.** Sea  $\Omega \subset \mathbf{C}$  una región del plano complejo y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ . Se dirá que la función  $f$  es **meromorfa** si es holomorfa en  $D$  salvo en un conjunto de puntos aislados (polos de la función).

A continuación se presentarán una serie de resultados utilizados para el cálculo de los ejemplos de superficies mínimas.

**Definición 1.2.7.** Sea  $\gamma : [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  una curva o camino en el plano complejo. Sea  $f : \Omega \subset \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  una función donde  $\Omega$  es una región del plano complejo. Se define la integral de línea de  $f$  a lo largo de  $\gamma$  como

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

En cualquier curso general de análisis complejo se llega al siguiente resultado importante, que nos da la independencia del camino seguido en la integral de línea para ciertas funciones que cumplen unas determinadas características. En particular, se cumplirá para funciones holomorfas.



**Proposición 1.2.8.** (Ver [1]). Sea  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  una función holomorfa en  $\Omega \subset \mathbf{C}$  una región simplemente conexa. Sea  $\Gamma$  una curva cerrada en  $\Omega$ . Por el **teorema de Cauchy**, tenemos que

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Ahora bien, al ser  $\Gamma$  arbitrario, por el **teorema de la primitiva**, tenemos que existe  $F \in \mathcal{H}(\Omega)$  una primitiva de  $f$ . Entonces, se cumple la **regla de Barrow** y tenemos que, para cualquier  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$  se cumple

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

o lo que es lo mismo, la integral sólo depende de los puntos inicial y final que tome la curva  $\gamma$ .

Con todo lo anterior, ya estamos en condiciones de ver la teoría propia del trabajo.



# Capítulo 2

## Superficies mínimas

En este capítulo, daremos algunas definiciones equivalentes de superficie mínima que hemos de incluir a la ya presentada Definición 1.1.16. Para la redacción de este capítulo nos hemos ayudado de [4] y lo expuesto en el apéndice sobre superficies mínimas de [3].

### 2.1. Definiciones equivalentes de minimalidad

Empezamos ya con una serie de definiciones que nos ayudarán a entender de maneras distintas las **superficies mínimas**. La primera corresponde a Mesnieur quien, en 1776, descubrió que la curvatura media era constantemente cero si y sólo si se cumplía la siguiente ecuación diferencial descubierta por Lagrange:

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0. \quad (2.1.1)$$

Tenemos por tanto que:

**Definición 2.1.1.** *Sea  $S$  una superficie regular. Se dirá que  $S$  es una **superficie mínima** si y sólo si admite una representación local en forma de grafo de una función  $z = u(x, y)$  que sea solución de (2.1.1).*

La parametrización local referida a la definición anterior es una **carta de Monge**, esto es, una función  $\mathbf{x} : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  de manera que a cada  $(x, y)$  de  $U$  le asocia el punto  $(x, y, u(x, y))$  de  $\mathbf{R}^3$ .

Veamos que la anterior definición es equivalente a la Definición 1.1.16. Sea  $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, u(x, y))$  con  $u(x, y)$  solución de (2.1.1). Calculando los coeficientes de la Primera Forma Fundamental, obtenemos

$$g_{11} = 1 + u_x, \quad g_{12} = u_x u_y, \quad g_{22} = 1 + u_y. \quad (2.1.2)$$

Si ahora calculamos el vector normal, vemos que  $N = \frac{1}{u_x^2 + u_y^2 + 1}(-u_x, -u_y, 1)$ . Los coeficientes de la Segunda Forma Fundamental, por su parte, quedan

$$b_{11} = \frac{u_{xx}}{u_x^2 + u_y^2 + 1}, \quad b_{12} = \frac{u_{xy}}{u_x^2 + u_y^2 + 1}, \quad b_{22} = \frac{u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2 + 1}. \quad (2.1.3)$$

Sustituyendo en la ecuación (1.1.5) los coeficientes obtenidos en (2.1.2) y en (2.1.3), obtenemos que  $H \equiv 0$  si y sólo si se cumple la ecuación (2.1.1).

A continuación, daremos una definición clave para entender el calificativo mínima en las superficies estudiadas. Para ello, introduciremos la siguiente notación que nos permitirá trabajar brevemente con variaciones funcionales.

**Notación 2.1.2.** Sea  $\mathbf{x} : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  una parametrización local de una superficie regular  $S$ . Si tomamos un conjunto  $D$  cuya clausura  $\bar{D}$  esté contenida en  $U$  y una función diferenciable  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}$ . Se notará la **variación normal** de  $\mathbf{x}(\bar{D})$ , determinada por  $h$ , a la aplicación  $\varphi : \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida por

$$\varphi(u_1, u_2, t) = \mathbf{x}(u_1, u_2) + th(u_1, u_2)N(u_1, u_2), \quad (2.1.4)$$

para valores  $(u_1, u_2) \in \bar{D}$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . (Ver Figura 2.1).

Obsérvese que para cada  $t$ , la superficie  $\mathbf{x}^t : D \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida como

$$\mathbf{x}(u_1, u_2) = \varphi(u_1, u_2, t)$$

es una parametrización local de una superficie regular con

$$\frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial u_1} = \mathbf{x}_1 + thN_1 + th_1N, \quad (2.1.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial u_2} = \mathbf{x}_2 + thN_2 + th_2N, \quad (2.1.6)$$

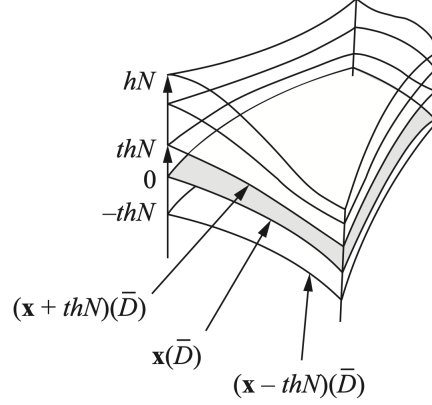


Figura 2.1: Variación normal de una superficie. Imagen obtenida de [3].

donde el subíndice  $i$  indica la derivada con respecto a la variable  $u_i$  para  $i = 1, 2$ . Los coeficientes de la Primera Forma Fundamental para  $\mathbf{x}^t$  quedarían

$$g_{11}^t = g_{11} + th(\mathbf{x}_1 \cdot N_1 + \mathbf{x}_1 \cdot N_1) + t^2 h^2 N_1 \cdot N_1 + t^2 h_1 h_1, \quad (2.1.7)$$

$$g_{12}^t = g_{12} + th(\mathbf{x}_1 \cdot N_2 + \mathbf{x}_2 \cdot N_1) + t^2 h^2 N_1 \cdot N_2 + t^2 h_1 h_2, \quad (2.1.8)$$

$$g_{22}^t = g_{22} + th(\mathbf{x}_2 \cdot N_2 + \mathbf{x}_2 \cdot N_2) + t^2 h^2 N_2 \cdot N_2 + t^2 h_2 h_2, \quad (2.1.9)$$

donde  $(\cdot)$  representa el producto escalar. Usando que, por definición  $N$  es perpendicular a  $\mathbf{x}_i$  para  $i = 1, 2$  (i.e. el producto escalar es nulo) y, más concretamente, la derivada con respecto a  $u_i$  de dicha condición, en cada caso, obsérvese que

$$\mathbf{x}_1 \cdot N_1 = -b_{11}, \quad \mathbf{x}_1 \cdot N_2 + \mathbf{x}_2 \cdot N_1 = -2b_{12}, \quad \mathbf{x}_2 \cdot N_2 = -b_{22}, \quad (2.1.10)$$

con ello, las ecuaciones anteriores (2.1.7), (2.1.8) y (2.1.9) quedan

$$g_{11}^t = g_{11} - 2thb_{11} + t^2 h^2 N_1 \cdot N_1 + t^2 h_1 h_1, \quad (2.1.11)$$

$$g_{12}^t = g_{12} - 2thb_{12} + t^2 h^2 N_1 \cdot N_2 + t^2 h_1 h_2, \quad (2.1.12)$$

$$g_{22}^t = g_{22} - 2thb_{22} + t^2 h^2 N_2 \cdot N_2 + t^2 h_2 h_2, \quad (2.1.13)$$

Además, junto con la ecuación (1.1.5), tenemos que

$$\begin{aligned} \det(G^t) &= g_{11}^t g_{22}^t - (g_{12}^t)^2 = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 - 2th(g_{11} b_{22} - 2g_{12} b_{12} + g_{22} b_{11}) + R \\ &= (g_{11} g_{22} - g_{12}^2)(1 - 4thH) + B, \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

con  $\lim_{t \rightarrow 0}(B/t) = 0$ . Por tanto, tenemos que si  $\varepsilon$  es lo suficientemente pequeño,  $\mathbf{x}^t$  es una superficie regular. Además, el área de  $\mathbf{x}(\bar{D})$  notada  $A(t)$  es

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{\bar{D}} \sqrt{g_{11}^t g_{22}^t - (g_{12}^t)^2} du_1 du_2 \\ &= \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{B}} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du_1 du_2, \end{aligned}$$

donde  $\bar{B} = B/\det G$ . Si  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño,  $A$  es una función diferenciable con

$$A'(0) = -2 \int_{\bar{D}} 2hH \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du_1 du_2 \quad (2.1.15)$$

Con lo anterior, estamos en condiciones de explicar el hecho de haber llamado *mínimas* a las superficies con las cuales estamos trabajando.

**Proposición 2.1.3.** *Sea  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  una parametrización local de una superficie regular  $S$  y sea  $D$  un abierto cuya clausura  $\bar{D}$  esté contenida en  $U$ . Entonces,  $\mathbf{x}(U)$  es una superficie mínima si y sólo si  $A'(0) = 0$  para tanto  $D$  como toda variación normal de  $\mathbf{x}(\bar{D})$ .*

**Demostración:** Si  $\mathbf{x}(U)$  es una superficie mínima,  $H$  es idénticamente cero, por lo que se tiene trivialmente  $A'(0) = 0$  a partir de la ecuación (2.1.15). Recíprocamente, supongamos que se satisface que la derivada del área se anula en cero y que  $H(p) \neq 0$  para algún  $p$  contenido en  $D$ . Podemos elegir entonces la función  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}$  definida como  $h(q) = H(q)$  para todo  $q \in \bar{D}$ , entonces  $hH > 0$  y  $h$  es idénticamente nula fuera de un entorno de  $p$  (por continuidad). Por lo tanto,  $A'(0) < 0$  por (2.1.15) para la variación determinada por  $h \equiv H$ , lo que supone una contradicción. ■

Vemos, por tanto, que toda parametrización  $\mathbf{x}(\bar{D})$  de una superficie mínima es un punto crítico del área de cualquier variación normal de ella. Podemos encontrar, no obstante, que dicho punto crítico no sea un mínimo (lo cual puede parecer contradictorio), pero se toma este nombre en honor a la terminología introducida por Lagrange en 1760 ya que fue quien definió por primera vez el concepto de superficie mínima.

La última definición, algo más relacionada con la física experimental, es la que motivó el problema de Plateau (encontrar una superficie mínima con

borde una curva de Jordan cerrada de  $\mathbf{R}^3$  arbitraria) cuya existencia fue demostrada de manera simultánea por Douglas y Radó en 1930. Gracias a la ecuación de Laplace-Young sabemos que la curvatura de una membrana que separa dos medios es constante y depende de la presión de los medios que separe dicha membrana. En el caso concreto en que la presión sea la misma a ambos lados de la membrana, tenemos que la curvatura media es cero. Por tanto, si sumergimos un alambre en una solución jabonosa y conseguimos que quede adherida una película, ésta formará (en su forma idealizada) una superficie mínima.

**Definición 2.1.4.** *Una superficie  $S$  se dirá **mínima** si y solo si cada punto  $p$  de dicha superficie, tenga un entorno que sea igual a la idealización de una membrana jabonosa formada a partir del borde de dicho entorno.*

Con esta curiosa definición, realizable en casa, de superficie mínima concluimos este capítulo, dando ya una muestra considerable de definiciones alternativas.





# Capítulo 3

## Representación de Weierstrass

El objetivo de este capítulo es brindar una herramienta muy útil para la construcción de superficies mínimas, así como dar las condiciones bajo las cuales una superficie mínima admite la representación local por funciones holomorfas. Posteriormente, se verán ejemplos de estos procesos. Para este capítulo, se ha seguido principalmente el desarrollo de [5] y [6] ayudándonos de los ejemplos de superficies dados en [4].

### 3.1. Construcción de superficies mínimas

Empezaremos la sección dando las herramientas necesarias para la consecución de nuestro objetivo principal: encontrar superficies de curvatura media nula.

#### 3.1.1. Parámetros isotermos y funciones armónicas

Vamos a introducir conceptos y resultados necesarios para la caracterización de nuestras superficies de curvatura media cero. Comenzamos con la definición de función armónica.

**Definición 3.1.1.** Sea  $f = f(u, v)$  una función dos veces diferenciable. Se dice que  $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  es una **función armónica** en  $U$  si su Laplaciano es cero (en dicho dominio). Esto es:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0, \quad \text{para todo } (u, v) \in U. \quad (3.1.1)$$

A continuación, rescataremos el tan importante concepto de **parámetros isotermos** que vimos en la Definición y daremos una fórmula que nos será de gran utilidad en nuestro desarrollo.

**Lema 3.1.2.** *Sea  $S$  una superficie regular con parametrización local  $\mathbf{x}(U) \subset \mathbf{R}^3$  de parámetros isotermos. Entonces se cumple que*

$$\Delta \mathbf{x} = 2\lambda^2 H N, \quad (3.1.2)$$

donde  $\lambda^2$  es el determinante de la Primera Forma Fundamental,  $H$  es la curvatura media y  $N$  es el vector normal a la superficie (que le hace corresponder la Aplicación de Gauss).

**Demostración:** Al tener  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, u_2)$  parámetros isotermos, podemos expresar la ecuación (1.1.6) como

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2} = 0.$$

Derivando la primera expresión respecto a  $u_1$  y la segunda respecto a  $u_2$  obtenemos

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_1^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_2 \partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2} = -\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_2^2},$$

de donde, usando el teorema de las derivadas cruzadas de Schwarz

$$\Delta \mathbf{x} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} = \left( \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_2^2} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} = 0.$$

Análogamente, derivando la primera ecuación respecto a  $u_2$  y la segunda respecto a  $u_1$ , tenemos

$$\Delta \mathbf{x} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2} = 0.$$

Por tanto,  $\Delta \mathbf{x}$  es un vector perpendicular al plano tangente a la superficie  $S$ . Pero, como  $N$  es el vector normal a  $S$ , resulta

$$\Delta \mathbf{x} \cdot N = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_1^2} \cdot N + \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_2^2} \cdot N = b_{11} + b_{22} = 2\lambda^2 H$$

por (1.1.9), por lo que concluye la prueba. ■

A partir del lema anterior, observamos que, si conseguimos una parametrización local isoterma que sea armónica, entonces su curvatura mínima será cero (pues tanto  $N$  como  $\lambda$  no pueden anularse al ser  $S$  una superficie regular).

**Lema 3.1.3.** *Sea  $\mathbf{x}(U)$  una parametrización local, con parámetros isotermos  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, u_2)$ , de una superficie regular  $S$ . La condición necesaria y suficiente para que  $S$  sea una superficie mínima es que las funciones coordenadas  $\mathbf{x}_k(u_1, u_2)$  sean armónicas.*

El anterior lema nos da una definición equivalente a la Definición 1.1.16 de superficie mínima, la cual resulta de especial utilidad si nuestra superficie está expresada con parámetros isotermos. Podemos incluir esta definición a las ya dadas en el Capítulo 2. A continuación, pasaremos a presentar la representación de Weierstrass para superficies mínimas.

### 3.1.2. Representación de Weierstrass de superficies mínimas

Dadas ya las herramientas necesarias, podemos obtener grandes resultados que nos permitirán caracterizar las superficies mínimas a partir de funciones analíticas. Para esta parte se han seguido las demostraciones de [5].

**Lema 3.1.4.** *Sea  $\mathbf{x}(U)$  una parametrización local de una superficie  $S$ . Consideremos las funciones*

$$\phi_k(z) := \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial u_2}; \quad z = u_1 + iu_2, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.1.3)$$

*Entonces, tenemos las siguientes propiedades:*

- a) *La función  $\phi_k(z)$  es analítica en  $z_0$  si y sólo si  $\mathbf{x}_k$  es armónica en  $u_1, u_2$ .*
- b) *Los parámetros  $u_1, u_2$  son isotermos si y sólo si  $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ .*
- c) *Si  $u_1$  y  $u_2$  son parámetros isotermos, entonces  $S$  es regular si y sólo si  $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 \neq 0$ .*

**Demostación:** Para demostrar a), veamos que las ecuaciones de Cauchy-Riemann (1.2.1) para cada  $\phi_k$  quedan:

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial u_1} \right) = -\frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial u_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial u_1} \right) = \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial u_2} \right).$$

Por tanto, la primera se cumplirá si y sólo si cada  $\mathbf{x}_k$  es armónica y la segunda la tenemos trivialmente por el teorema de Schwarz.

Ahora observemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \Phi_k^2(z) &= \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial u_1} \right)^2 - \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial u_2} \right)^2 - 2i \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial u_1} \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial u_2} \\ &= \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} \right|^2 - \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2} \right|^2 - 2i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2} = g_{11} - g_{22} - 2ig_{12} \end{aligned}$$

y por tanto, tenemos b).

Por último, para probar c), basta ver que

$$\sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 = \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial u_1} \right)^2 + \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial u_2} \right)^2 = g_{11} + g_{22},$$

con lo que concluye la demostración. ■

Podemos enunciar, entonces, el siguiente resultado fundamental para nuestro objetivo.

**Teorema 3.1.5.** *Sea  $\mathbf{x}(U)$  una parametrización local de una superficie mínima, con parámetros isotermos  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, u_2)$ . Entonces, las funciones  $\phi_k(z)$  definidas por (3.1.3) son analíticas y satisfacen (b) y (c). Recíprocamente, sean  $\phi_1(z), \phi_2(z), \phi_3(z)$  funciones analíticas en  $z$  satisfaciendo (b) y (c) en un dominio simplemente conexo  $D$ . Entonces existe una superficie mínima con parametrización local  $\mathbf{x}(U)$  definida sobre  $D$  tal que las ecuaciones (3.1.3) son válidas.*

**Demostación:** Para la primera parte, basta aplicar el lema anterior y se tiene de manera inmediata. Para el recíproco, definamos las componentes

$$\mathbf{x}_k = \operatorname{Re} \int \phi_k(z) dz \quad \text{para } k = 1, 2, 3. \quad (3.1.4)$$

Así definidas,  $\mathbf{x}_k$  son funciones armónicas satisfaciendo (3.1.3). Luego, por el lema anterior (a), (b) y (c) en sentido contrario, tenemos el resultado. ■

A la terna  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  se le llama representación de Weierstrass de la superficie mínima.

Gracias al teorema anterior, tenemos caracterizadas las superficies mínimas usando tres funciones analíticas cumpliendo unas ciertas propiedades. De hecho, esto se puede simplificar aún más, usando dos únicas funciones (una holomorfa y otra meromorfa, que se denominarán datos de Weierstrass).

**Lema 3.1.6.** *Sea  $D \subset \mathbf{C}$  una región y sean  $g : D \rightarrow \mathbf{C}$  una función meromorfa y  $f : D \rightarrow \mathbf{C}$  una función holomorfa tales que si  $a$  es un polo de  $g$  de orden  $m$ , entonces,  $a$  es un cero de orden, al menos,  $2m$  de  $f$ . Entonces las funciones definidas por*

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \quad \phi_3 = fg \quad (3.1.5)$$

en  $D$  son holomorfas y cumplen (b) y (c). Recíprocamente, cualesquiera tres funciones holomorfas  $\phi_i : D \rightarrow \mathbf{C}$  para  $i = 1, 2, 3$ , cumpliendo (b) y (c) se pueden escribir como (3.1.5) para ciertas  $g$  meromorfa y  $f$  holomorfa, definidas de  $D$  en  $\mathbf{C}$ .

**Demostración:** Para cualquier punto que sea polo de  $g$  se tiene que éste es cero de  $f$  de orden el doble, luego las funciones  $\phi_i$  son claramente holomorfas para  $i = 1, 2, 3$ . Basta ver que

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = \frac{1}{4}f^2(1 - g^2)^2 - \frac{1}{4}f^2(1 + g^2)^2 + f^2g^2 = -f^2g^2 + f^2g^2 = 0.$$

Así mismo, vemos que

$$|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 = \frac{1}{4}|f(1 - g^2)|^2 + \frac{1}{4}|f(1 + g^2)|^2 + |f|^2|g|^2 \neq 0 \text{ si } f \neq 0.$$

Para el recíproco, considérense

$$f = \phi_1 - i\phi_2, \quad g = \frac{\phi_3}{f}. \quad (3.1.6)$$

Es claro, con esta definición, que se cumple la igualdad  $\phi_3 = fg$ ; veamos el resto de igualdades. Téngase en cuenta que  $-\phi_3^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2 = (\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2)$  por lo que  $\phi_1 + i\phi_2 = -fg^2$ .

$$\begin{cases} \phi_1 - i\phi_2 = f \\ \phi_1 + i\phi_2 = -fg^2, \end{cases}$$

sumando y restando, respectivamente, ambas ecuaciones, tenemos

$$\begin{cases} 2\phi_1 = f(1 - g^2) \\ -2i\phi_2 = f(1 + g^2), \end{cases}$$

con lo que queda demostrado el recíproco. ■

A partir del resultado anterior, hemos simplificado el Teorema 3.1.5, ya que ahora nos basta con encontrar una función holomorfa y otra meromorfa (que en esencia cumplirán  $f = \frac{1}{g^2}$  si  $g \neq 0$ ).

## 3.2. Ejemplos

Para esta sección nos hemos basado en el trabajo de Meeks y Pérez [4], adaptando los datos usados a la definición dada en el presente escrito sobre los **datos de Weierstrass**. Así, presentamos las siguientes superficies mínimas clásicas ya conocidas:

1. **El plano.** Los datos de Weierstrass asociados son  $(f, g) = (1, 1)$ . Es la única superficie completa, plana y mínima del espacio real.
2. **Catenoide.** Los datos de Weierstrass que dan lugar a esta superficie son  $(f, g) = (\frac{1}{z^2}, z)$ . Es la superficie obtenida al rotar una catenaria alrededor de un eje perpendicular al eje de simetría con el cual no tenga intersección (en concreto, su directriz). Es la primera superficie mínima descubierta. Se puede generar con dos aros de alambre y una superficie jabonosa entre ambos. Fue descubierta por Euler en 1741 aunque se la conoce por el nombre actual tras el trabajo de Plateau. Es una superficie de género cero y la única superficie mínima (además del plano) que es de revolución.

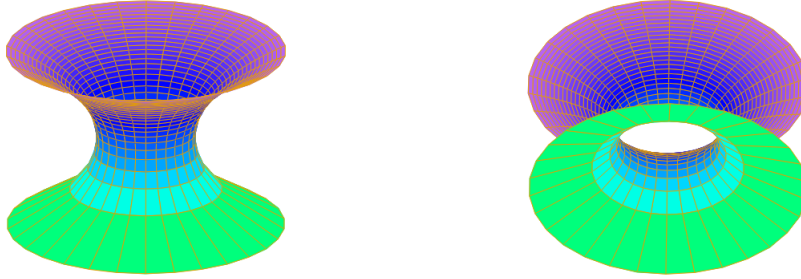


Figura 3.1: Diferentes vistas del catenoide.

3. **Helicoide.** Para el helicoide, los datos usados son  $(f, g) = (ie^{-z}, e^z)$ . Mesnieur fue el primero en demostrar que es una superficie mínima. También tiene género cero en su inmersión en  $\mathbf{R}^3$ . A parte del plano es la única superficie mínima reglada (contiene rectas). El helicoide y el catenoide son superficies conjugadas en el sentido de sus funciones coordenadas locales (las cuales son armónicas conjugadas).



Figura 3.2: Diferentes vistas del helicoide.

4. **Superficie de Enneper.** Para esta superficie, los datos de Weierstrass se corresponden con  $(f, g) = (1, z)$ . Fue descubierta por Enneper en 1864. Es una superficie de género cero que tiene dos planos de simetría y puede expresarse como una ecuación explícita (ver [4]).



Figura 3.3: Diferentes vistas de la superficie de Enneper

5. **Superficie de nuestra invención.** Superficie que ha sido obtenida usando los datos de Weierstrass  $(f, g) = (z^{-2}, \sqrt{z})$ .

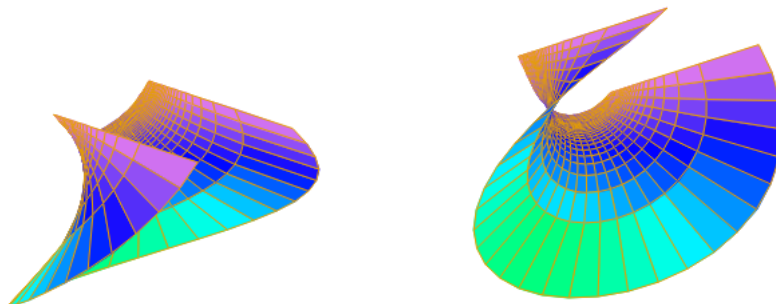


Figura 3.4: Diferentes vistas de la superficie mencionada.

Además de estos ejemplos clásicos hay otra clase de superficies, en la que no entraremos en detalle, llamadas superficies mínimas periódicas, entre las que cabe mencionar la superficie de Costa o la superficie de Karcher (ver [6] y [4]).



### 3.2.1. Código de Maxima utilizado

En esta sección, expondremos el código utilizado para la representación de las superficies ejemplo en el apartado anterior. Se ha utilizado el software libre Maxima en el entorno wxMaxima.

Así, comenzamos con el código que se ha usado para la representación del catenoide.

```
kill(all)$

g(z):=z$
f(z):= 1/z^2$

phi1(z) := 1/2*f(z)*(1-g(z)^2)$
phi2(z) := %i/2*f(z)*(1+g(z)^2)$
phi3(z) := f(z)*g(z)$

r(u,v,t):= '(1-t+u*t+%i*v*t)$
dr(u,v,t):= '(diff(r(u,v,t),t,1))$

x1(u,v):= '(ratsimp(realpart(integrate(
    phi1(r(u,v,t))*dr(u,v,t),t,0,1))))$

x2(u,v):= '(ratsimp(realpart(integrate(
    phi2(r(u,v,t))*dr(u,v,t),t,0,1))))$

x3(u,v):= '(ratsimp(realpart(integrate(
    phi3(r(u,v,t))*dr(u,v,t),t,0,1))))$

plot3d([x1(r*cos(a),r*sin(a)),
        x2(r*cos(a),r*sin(a)),
        x3(r*cos(a),r*sin(a))],
        [r,0,5.5],[a,-%pi,%pi],
        [legend,false],[box,false]);
```

Código 3.1: Código usado para la representación del Catenoide.

A continuación y de manera similar, el código usado para representar el helicoides.

```

kill(all)$

g(z):= z$
f(z):= %a/z^2$

phi1(z) := 1/2*f(z)*(1-g(z)^2)$
phi2(z) := %a/2*f(z)*(1+g(z)^2)$
phi3(z) := f(z)*g(z)$

r(u,v,t):= '(1-t+u*t+%a*v*t)$
dr(u,v,t):= '(diff(r(u,v,t),t,1))$

x1(u,v):= '(ratsimp(realpart(integrate(
    phi1(r(u,v,t))*dr(u,v,t),t,0,1))))$

x2(u,v):= '(ratsimp(realpart(integrate(
    phi2(r(u,v,t))*dr(u,v,t),t,0,1))))$

x3(u,v):= '(ratsimp(realpart(integrate(
    phi3(r(u,v,t))*dr(u,v,t),t,0,1))))$

plot3d([x1(r*cos(a),r*sin(a)),x2(r*cos(a),r*sin(a)),
    x3(r*cos(a),r*sin(a))],[r,0,5],[a,-%pi,%pi],
    [axes,false],[legend,""],[same_xyz,true],
    [box,false]);

```

Código 3.2: Código usado para la representación del Helicoide.

Posteriormente, presentamos el código usado para la representación de la superficie de Enneper.

```

kill(all)$

g(z):= z$
f(z):= 1$

phi1(z) := 1/2*f(z)*(1-g(z)^2)$
phi2(z) := %a/2*f(z)*(1+g(z)^2)$

```

```

phi3(z) := f(z)*g(z)$

r(u,v,t):= '(1-t+u*t+%i*v*t)$
dr(u,v,t):= '(diff(r(u,v,t),t,1))$

x1(u,v):= '(ratsimp(realpart(integrate(
    phi1(r(u,v,t))*dr(u,v,t),t,0,1))))$

x2(u,v):= '(ratsimp(realpart(integrate(
    phi2(r(u,v,t))*dr(u,v,t),t,0,1))))$

x3(u,v):= '(ratsimp(realpart(integrate(
    phi3(r(u,v,t))*dr(u,v,t),t,0,1))))$

wxdraw3d(proportional_axes=xyz,
    enhanced3d=true, surface_hide=true,
    axis_3d=false, colorbox=false,
    parametric_surface(x1(r*cos(a),r*sin(a)),
    x2(r*cos(a),r*sin(a)),x3(r*cos(a),r*sin(a)),
    r,0,3,a,-%pi,%pi))$

plot3d([x1(r*cos(a/2),r*sin(a/2)),x2(r*cos(a/2),r*sin(a/2)),
    x3(r*cos(a/2),r*sin(a/2))],[r,0,3],[a,-2*%pi,2*%pi],
    [axes,false],[legend,""],[box,false]);

```

Código 3.3: Código usado para la representación de la superficie de Enneper.

Por último, se expone el código usado para representar la superficie obtenida de dos funciones arbitrarias (Figura 5).

```

kill(all)$

g(z):=z^(1/2)$
f(z):=1/z^2$

phi1(z) := 1/2*f(z)*(1-g(z)^2)$
phi2(z) := %i/2*f(z)*(1+g(z)^2)$
phi3(z) := f(z)*g(z)$

```

```

r(u,v,t):= '(1-t+u*t+%i*v*t)$
dr(u,v,t):= '(diff(r(u,v,t),t,1))$

x1(u,v):= '(ratsimp(realpart(integrate(
    phi1(r(u,v,t))*dr(u,v,t),t,0,1))))$

x2(u,v):= '(ratsimp(realpart(integrate(
    phi2(r(u,v,t))*dr(u,v,t),t,0,1))))$

x3(u,v):= '(ratsimp(realpart(integrate(
    phi3(r(u,v,t))*dr(u,v,t),t,0,1))))$

plot3d([x1(r*cos(a),r*sin(a)),x2(r*cos(a),r*sin(a)),
    x3(r*cos(a),r*sin(a))],[r,0.5,5],
    [a,-%pi,%pi],[axes,false],[axes,solid],
    [legend,""],[same_xyz,true],[box,false]);

```

Código 3.4: Código usado para la representación de la superficie de nuestra invención.

Con esto, concluimos el presente capítulo sobre la representación de Weierstrass para superficies mínimas.

# Capítulo 4

## Superficies mínimas de Bézier

En el presente capítulo daremos a conocer las superficies de Bézier e intentaremos ver cómo conseguir superficies mínimas a partir de la técnica introducida. Se han seguido los resultados de [7] para la introducción a las superficies de Bézier y [2] para su aplicación a la búsqueda de superficies mínimas.

### 4.1. Superficies de Bézier

En esta primera sección introduciremos los conceptos necesarios para entender las superficies de Bézier. Empezamos con los polinomios utilizados.

**Definición 4.1.1.** *Sea  $n$  un número natural. Se definen los **polinomios de Bernstein** de grado  $n$  como los  $n + 1$  polinomios dados por*

$$B_k^n(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n$$

*definidos para valores de  $x$  en el intervalo  $[0, 1]$ .*

Estos polinomios serán de gran importancia en el desarrollo de la teoría. Por ello vamos a introducir un lema en el que comentaremos algunas propiedades básicas de ellos, las cuales nos facilitarán los cálculos en las pruebas de los resultados que perseguiremos a lo largo de este capítulo.

**Lema 4.1.2.** *Sea  $n$  un número natural y considérese  $B_k^n(x)$  el  $k$ -ésimo polinomio de Bernstein de grado  $n$  definido en el intervalo  $[0, 1]$ . Se tiene lo siguiente:*

1. *El polinomio  $B_k^n$  es no negativo para todos los valores de  $x$  en el intervalo de definición y  $k$  desde 0 hasta  $n$ .*
2. *La suma de todos los polinomios de Bernstein de orden  $n$  es 1 para cualquier  $x$  en el intervalo de definición.*
3. *Se da la siguiente igualdad recursiva*

$$B_k^n(x) = (1 - x)B_k^{n-1}(x) + xB_{k-1}^{n-1}(x),$$

*para  $n$  mayor o igual que 2 y  $k$  entre 1 y  $n$ .*

4. *La derivada del polinomio cumple:*

$$\frac{d}{dx}(B_k^n(x)) = n(B_{k-1}^{n-1} - B_k^{n-1}(x)),$$

*para  $x$  en el intervalo de definición,  $n$  mayor que 1 y  $k$  entre 1 y  $n$ .*

**Demostración:** La primera propiedad es trivial por la definición de los polinomios de Bernstein, ya que es un producto de coeficientes positivos. Para ver la segunda propiedad, obsérvese que la suma de los polinomios de Bernstein de grado  $n$  corresponde al desarrollo del binomio de Newton para  $(x + (1 - x))^n$ . La tercera propiedad es una simple aplicación de la definición y propiedades de los números combinatorios. Así mismo, para la última propiedad basta con derivar y usar la definición para observar de manera trivial el resultado. ■

A partir de los polinomios de Bernstein pueden definirse tanto curvas como superficies de Bézier. Enfocaremos nuestra atención en las segundas. Ambas se definen a partir de una serie de puntos en el plano o en el espacio a los que nos referiremos como **puntos de control**. Pasamos, entonces, a definir las superficies de Bézier.

**Definición 4.1.3.** Sea  $\{P_{ij}\}_{i,j=0}^{n,m}$  una malla de puntos de control en  $\mathbf{R}^3$ . La superficie de Bézier asociada  $\mathbf{x} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$ , viene dada por

$$\mathbf{x}(u_1, u_2) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u_1) B_j^m(u_2) P_{ij}. \quad (4.1.1)$$

Es ampliamente conocido que, en efecto, las superficies de Bézier son superficies regulares que interpolan los vértices de la malla de puntos de control. Es decir, de manera geométrica, la superficie de Bézier asociada a una malla de puntos pasa por los puntos exteriores (vértices) mientras que el resto de puntos define la forma que tendrá la superficie. En particular, podemos pedir que dichas superficies sean mínimas y, recíprocamente, podemos intentar construir las superficies mínimas ya conocidas usando superficies de Bézier. Un ejemplo de esto mismo vamos a verlo con la superficie de Enneper (ver Ejemplo 4). Una parametrización de la superficie de Enneper viene dada por  $\mathbf{x} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida como

$$\mathbf{x}(u_1, u_2) = \left( u_1 - \frac{u_1^2}{3} + u_1 u_2^3, u_2 - \frac{u_2^3}{3} + u_2 u_1^2, u_1^2 - u_2^2 \right).$$

La malla de puntos de control de dicha superficie para  $u_1, u_2 \in [-1, 1]$  viene dada por

$$\begin{array}{cccc} \left(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 0\right) & \left(-1, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) & \left(1, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) & \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 0\right) \\ \left(-\frac{1}{3}, -1, \frac{4}{3}\right) & \left(-\frac{5}{9}, -\frac{5}{9}, 0\right) & \left(\frac{5}{9}, -\frac{5}{9}, 0\right) & \left(\frac{1}{3}, -1, \frac{4}{3}\right) \\ \left(-\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3}\right) & \left(-\frac{5}{9}, \frac{5}{9}, 0\right) & \left(\frac{5}{9}, \frac{5}{9}, 0\right) & \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3}\right) \\ \left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0\right) & \left(-1, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) & \left(1, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) & \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0\right). \end{array}$$

Veamos una representación de la misma.

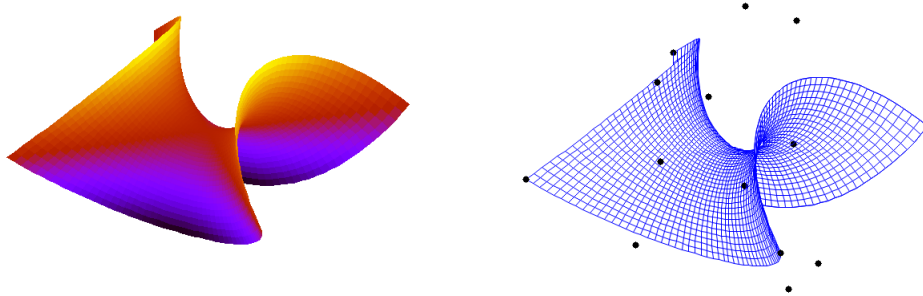


Figura 4.1: A la izquierda, la superficie de Enneper como superficie paramétrica. A la derecha, la misma obtenida a partir de la malla de puntos de control.

También presentamos el código utilizado para su representación.

```

kill(all)$

/* Superficie de Enneper como superficie paramétrica
(usando representación de Weierstrass) */

g(z):= z$
f(z):= 1$

phi1(z) := 1/2*f(z)*(1-g(z)^2)$
phi2(z) := %i/2*f(z)*(1+g(z)^2)$
phi3(z) := f(z)*g(z)$

r(u,v,t):= '(1-t+u*t+%i*v*t)$
dr(u,v,t):= '(diff(r(u,v,t),t,1))$

x1(u,v):= '(ratsimp(realpart(integrate(
    phi1(r(u,v,t))*dr(u,v,t),t,0,1))))$

x2(u,v):= '(ratsimp(realpart(integrate(
    phi2(r(u,v,t))*dr(u,v,t),t,0,1))))$

```



```

x3(u,v):= ''(ratsimp(realpart(integrate(
    phi3(r(u,v,t))*dr(u,v,t),t,0,1))))$

wxdraw3d(proportional_axes=xyz,enhanced3d=true,
    surface_hide=true,axis_3d=false,colorbox=false,
    color=black,parametric_surface(x1(u,v),x2(u,v),
    x3(u,v),u,-1,1,v,-1,1))$

/* Superficie de Enneper usando superficies de Bézier */

B(x) := [binomial(3,0)*(1-x)^3, binomial(3,1)*x*(1-x)^2),
    binomial(3,2)*x^2*(1-x), binomial(3,3)*x^3]$

P :
[[[-5/3,-5/3,0], [-1,-1/3,-4/3],[1,-1/3,-4/3],[5/3,-5/3,0]],
[[-1/3,-1,4/3],[-5/9,-5/9,0], [5/9,-5/9,0], [1/3,-1,4/3]],
[[-1/3,1,4/3], [-5/9,5/9,0], [5/9,5/9,0], [1/3,1,4/3]],
[[-5/3,5/3,0], [-1,1/3,-4/3], [1,1/3,-4/3], [5/3,5/3,0]]]$

x(u,v) := sum(sum(B(u)[i]*B(v)[j]*P[i][j],j,1,4),i,1,4)$

Q:
[[[-5/3,-5/3,0], [-1,-1/3,-4/3],[1,-1/3,-4/3],[5/3,-5/3,0],
[-1/3,-1,4/3],[-5/9,-5/9,0], [5/9,-5/9,0], [1/3,-1,4/3],
[-1/3,1,4/3], [-5/9,5/9,0], [5/9,5/9,0], [1/3,1,4/3],
[-5/3,5/3,0], [-1,1/3,-4/3], [1,1/3,-4/3], [5/3,5/3,0]]$

wxdraw3d(proportional_axes=xyz,
    enhanced3d=false,surface_hide=true,
    axis_3d=false,colorbox=false,
    parametric_surface(x(u,v)[1],x(u,v)[2],x(u,v)[3],
    u,0,1,v,0,1),
    color=black,point_type=filled_circle,
    point_size=1.2,points(Q));

```

Código 4.1: Código usado para la representación de la superficie de Enneper como superficie paramétrica y como superficie de Bézier.

Podemos pasar ahora a la siguiente sección donde aplicaremos los resultados

de superficies mínimas a las recién definidas superficies de Bézier.

## 4.2. Superficies de Bézier armónicas

En esta sección trataremos de dar unas condiciones sobre los puntos de la malla de control para intentar que la superficie de Bézier que se le asocia a dichos puntos, dada por (4.1.1), sea mínima. Para ello, usaremos el Lema 3.1.3 así como la Definición 4.1.1 de los polinomios de Bernstein. Vamos a ver las condiciones que hay que imponer a la superficie para que sea armónica. Para que ésta sea mínima, además de lo anterior, debe estar expresada en parámetros isotermos, de acuerdo con el Lema 3.1.3.

**Teorema 4.2.1.** *Sea  $\{P_{i,j}\}_{i,j=0}^n$  una malla de puntos de  $\mathbf{R}^3$ . La superficie de Bézier asociada,  $\mathbf{x} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$  dada por la Definición 4.1.3, es armónica si y sólo si*

$$\begin{aligned}
0 = & P_{i+2,j}a_{i,n} + P_{i+1,j}(b_{i-1,n} - 2a_{i,n}) + P_{i-1,j}(b_{i-1,n} - 2c_{i-2,n}) \\
& + P_{i-2,j}c_{i-2,n} + P_{i,j+2}a_{j,m} + P_{i,j+1}(b_{j-1,m} - 2a_{j,m}) \\
& + P_{i,j-1}(b_{j-1,m} - 2c_{j-2,m}) + P_{i,j-2}c_{j-2,m} \\
& + P_{i,j}(a_{i,n} - 2b_{i-1,n} + c_{i-2,n} + a_{j,m} - 2b_{j-1,m} + c_{j-2,m}).
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

donde  $a_{i,n} = (n-i)(n-i-1)$ ,  $b_{i,n} = 2(i+1)(n-i-1)$  y  $c_{i,n} = (i+1)(i+2)$  para  $i$  desde 0 hasta  $n-2$  y  $a_{i,n} = b_{i,n} = c_{i,n} = 0$  para cualquier otro caso.

**Demostración:** Vamos a calcular el Laplaciano de la superficie de Bézier  $\mathbf{x}(u_1, u_2) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u_1)B_j^m(u_2)P_{i,j}$ . Usando la regla 4 del lema anterior y reordenando términos, queda

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{x}(u_1, u_2) = & n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^m B_i^{n-2} B_j^m(u_2) \Delta^{2,0} P_{i,j} \\
& + m(m-1) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-2} B_i^n(u_1) B_j^{m-2}(u_2) \Delta^{0,2} P_{i,j},
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

donde  $\Delta^{2,0} P_{i,j} = P_{i+2,j} - 2P_{i+1,j} + P_{i,j}$  y  $\Delta^{0,2} P_{i,j} = P_{i,j+2} - 2P_{i,j+1} + P_{i,j}$ . Nuestro objetivo es expresar la ecuación anterior como una superficie de

grados  $n$  y  $m$  por lo que necesitamos la siguiente igualdad.

$$B_i^{n-2}(t) = \frac{1}{n(n-1)} \left( (n-i)(n-i-1)B_i^n(t) + 2(i+1)(n-i-1)B_{i+1}^n(t) + (i+1)(i+2)B_{i+2}^n(t) \right).$$

Ahora, usando los coeficientes definidos en el enunciado del teorema, la ecuación (4.2.2) queda

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}(u_1, u_2) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u_1) B_j^m(u_2) \\ &\quad \left( n(n-1) (a_{i,n} \Delta^{2,0} P_{i,j} + b_{i-1,n} \Delta^{2,0} P_{i-1,j} + c_{i-2,n} \Delta^{2,0} P_{i-2,j}) \right. \\ &\quad \left. + m(m-1) (a_{j,m} \Delta^{0,2} P_{i,j} + b_{j-1,m} \Delta^{0,2} P_{i,j-1} + c_{j-2,m} \Delta^{0,2} P_{i,j-2}) \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u_1) B_j^m(u_2) Q_{i,j}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos ver la condición anterior como una superficie de Bézier de grados  $n$  y  $m$  asociada a una malla de puntos de control  $\{Q_{i,j}\}_{i,j=0}^{n,m}$ . Dado que los polinomios de Bernstein forman una base, tenemos que  $\mathbf{x}$  es armónica si y sólo si  $Q_{i,j} = 0$  para todo  $i, j$ . Llevando esta condición a la fórmula anterior y deshaciendo las contracciones notacionales, nos queda que

$$\begin{aligned} 0 = n(n-1) & [ P_{i+2,j} a_{i,n} + P_{i+1,j} (b_{i-1,n} - 2a_{i,n}) \\ & + P_{i-1,j} (b_{i-1,n} - 2c_{i-2,n}) + P_{i-2,j} c_{i-2,n} ] \\ + m(m-1) & [ P_{i,j+2} a_{j,m} + P_{i,j+1} (b_{j-1,m} - 2a_{j,m}) \\ & + P_{i,j-1} (b_{j-1,m} - 2c_{j-2,m}) + P_{i,j-2} c_{j-2,m} ] \\ + P_{i,j} & [ (a_{i,n} - 2b_{i-1,n} + c_{i-2,n}) n(n-1) \\ & + (a_{j,m} - 2b_{j-1,m} + c_{j-2,m}) m(m-1) ]. \end{aligned}$$

Por lo que para el caso  $n = m$  nos da la caracterización expresada en el enunciado. ■

El resultado anterior nos caracteriza los puntos de control para conseguir que la superficie de Bézier sea mínima. A continuación, vamos a comprobar qué ocurre en un par de ejemplos relativamente sencillos, para superficies bicuadráticas ( $n = m = 2$ ) y para superficies bicúbicas ( $n = m = 3$ ).

### 4.2.1. Superficies de Bézier bicuadráticas armónicas

En este caso, en el que  $n = m = 2$ , tenemos la siguiente condición para que la superficie sea armónica, que resulta ser un corolario inmediato del teorema anterior.

**Corolario 4.2.2.** *Una superficie de Bézier bicuadrática, asociada a la malla de puntos de control  $\{P_{i,j}\}_{i,j=0}^{2,2}$  es armónica si y sólo si*

$$\begin{aligned} P_{01} &= \frac{1}{2}(2P_{00} + P_{02} - 2P_{10} + P_{20}), \\ P_{11} &= \frac{1}{4}(P_{00} + P_{02} + P_{20} + P_{22}), \\ P_{21} &= \frac{1}{2}(P_{00} + -2P_{10} + 2P_{20} + P_{22}), \\ P_{12} &= \frac{1}{2}(-P_{00} + P_{02} + 2P_{10} - P_{20} + P_{22}). \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

El corolario anterior supone unas condiciones, necesarias y suficientes, a satisfacer por la superficie para que esta sea armónica. En concreto, para que la superficie sea mínima, tenemos por el lema 3.1.3 que los parámetros en los que se exprese la superficie han de ser isoterms además de darse la armonicidad. Es una cuestión de cálculo y computación demostrar que cualquier superficie de Bézier satisfaciendo las ecuaciones 4.2.3 y con parámetros isoterms es un trozo de plano (ver [2]).

### 4.2.2. Superficies de Bézier bicúbicas armónicas

En este caso, en el cual  $n = m = 3$ , la ecuación (4.2.1) nos permite expresar la mitad de los puntos de control en función del resto. Tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 4.2.3.** *Una superficie de Bézier bicúbica asociada a una malla de*

puntos de control  $\{P_{i,j}\}_{i,j=0}^{3,3}$  es armónica si y solo si se satisface

$$\begin{aligned}
P_{11} &= \frac{1}{9} (4P_{00} + 2P_{03} + 2P_{30} + P_{33}), \\
P_{21} &= \frac{1}{9} (2P_{00} + P_{03} + 4P_{30} + 2P_{33}), \\
P_{12} &= \frac{1}{9} (2P_{00} + 4P_{03} + P_{30} + 2P_{33}), \\
P_{22} &= \frac{1}{9} (P_{00} + 2P_{03} + 2P_{30} + 4P_{33}), \\
P_{10} &= \frac{1}{3} (4P_{00} - 4P_{01} + 2P_{02} + 2P_{30} - 2P_{31} + P_{32}), \\
P_{20} &= \frac{1}{3} (2P_{00} - 2P_{01} + P_{02} + 4P_{30} - 4P_{31} + 2P_{32}), \\
P_{13} &= \frac{1}{3} (2P_{01} - 4P_{02} + 4P_{03} + P_{31} - 2P_{32} + 2P_{33}), \\
P_{23} &= \frac{1}{3} (P_{01} - 2P_{02} + 2P_{03} + 2P_{31} - 4P_{32} + 4P_{33}).
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

El corolario anterior nos indica que dadas la primera y última columna de la malla de puntos de control, la superficie queda completamente determinada. Es decir, dados los bordes opuestos de una superficie de Bézier armónica, los puntos de control y, por tanto, la superficie, queda inequívocamente definida. Por tanto, podemos dividir los puntos de control en dos subconjuntos, los puntos internos  $\{P_{i,j}\}_{i,j=1}^{n-1,m-1}$  y los puntos externos. Debemos insistir en que la condición dada por el corolario nos caracteriza las superficies de Bézier armónicas, que no son necesariamente mínimas ya que, para esto, debemos exigir que los parámetros sean isoterms. A continuación, vamos a ver qué superficies de Bézier armónicas bicúbicas son mínimas.

### 4.3. Superficies de Bézier bicúbicas mínimas

En la sección anterior hemos visto que las superficies armónicas bicuadradas sólo pueden ser mínimas si son trozos de un plano. Ahora veremos qué ocurre en las bicúbicas. En este caso, es posible obtener la superficie de Enneper (ver un ejemplo en [2]). Más aún, en esta sección vamos a ver que toda superficie mínima expresada con polinomios bicúbicos es, salvo una

transformación afín, una reparametrización de la superficie de Enneper. El caso del plano se excluye si suponemos que no se puede simplificar la expresión.

Para esta sección nos van a ser necesarios los resultados vistos para la Representación de Weierstras (sección 3.1.2). Recordemos que una superficie mínima está caracterizada por dos funciones complejas  $f$  y  $g$  como vimos en el Teorema 3.1.5 y en el Lema 3.1.6. Nuestra intención es determinar todas las superficies mínimas expresadas por polinomios bicúbicos, lo cual no supone un problema sencillo dadas las distintas posibilidades de escoger  $f$  y  $g$  de manera que se cumpla dicho objetivo. Trataremos, no obstante, de probar el siguiente teorema.

**Teorema 4.3.1.** *Sea  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  una superficie mínima con coordenadas polinómicas bicúbicas. Se tiene que  $\mathbf{x}$  es, salvo transformación afín en  $\mathbf{R}^3$ , una reparametrización afín de la superficie general de Enneper de grado 3.*

**Demostración:** Sea  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, u_2)$  la superficie indicada en parámetros isotermos (si no lo está inicialmente, sabemos que existe una reparametrización tal que obtengamos dichos parámetros; ver la Observación 1.1.18). En la prueba se va a usar la base de polinomios usuales en lugar de la base de polinomios de Bernstein para facilitar la comprensión de ésta, pues es equivalente probarlo en una u otra base.

Consideremos una superficie polinómica bicúbica, en parámetros isotermos y que sea armónica

$$\mathbf{x}(u_1, u_2) = \left( \sum_{i,j=0}^3 a_{ij} u_1^i u_2^j, \sum_{i,j=0}^3 b_{ij} u_1^i u_2^j, \sum_{i,j=0}^3 c_{ij} u_1^i u_2^j \right),$$

donde  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$  son números reales.

Denotemos  $\mathbf{v}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$ . Obsérvese que podemos considerar  $\mathbf{v}_{00} = \mathbf{0}$ , ya que, en caso de no serlo, bastaría aplicar una traslación. Por estar la superficie en parámetros isotermos, tenemos que  $g_{12} = 0$ , esto es,

$$\sum_{i,j=0}^3 a_{ij}^2 u_1^{2i-1} u_2^{2j-1} + \sum_{i,j=0}^3 b_{ij}^2 u_1^{2i-1} u_2^{2j-1} + \sum_{i,j=0}^3 c_{ij}^2 u_1^{2i-1} u_2^{2j-1} = 0.$$

Imponiendo ahora que todos los coeficientes sean cero, obtenemos que

$$\mathbf{v}_{33} = \mathbf{v}_{32} = \mathbf{v}_{23} = \mathbf{v}_{31} = \mathbf{v}_{13} = \mathbf{v}_{22} = 0.$$

Si ahora aplicamos la condición de ser armónica,  $\Delta \mathbf{x} = 0$  si y sólo si

$$\mathbf{v}_{20} = -\mathbf{v}_{02}, \quad \mathbf{v}_{21} = -3\mathbf{v}_{03}, \quad \mathbf{v}_{12} = -3\mathbf{v}_{30}.$$

Además, por ser los parámetros isotermos, tenemos que  $g_{11} = g_{22}$  y  $g_{12} = 0$  lo cual implica, respectivamente, que

$$\|\mathbf{v}_{30}\| = \|\mathbf{v}_{03}\|, \quad \mathbf{v}_{30} \cdot \mathbf{v}_{03} = 0.$$

Esto nos lleva a dos opciones: que los vectores sean perpendiculares o que sean iguales al vector nulo. En este último caso, después de algunos cálculos (ver [2]), se ve que es un trozo de plano pero, como este puede expresarse con polinomios de grado 1, no es una solución propia.

Pasamos a analizar el caso en que los vectores sean perpendiculares y no nulos. A partir de una rotación y un reescalado si fuera necesario, podemos suponer que son los vectores  $e_1$  y  $e_2$ , respectivamente. Más aún, puede verse (usando de nuevo que los parámetros son isotermos) que  $a_{11} = -2b_{02}$  y  $b_{11} = 2a_{02}$ . Puede probarse que la condición de tener parámetros isotermos puede reducirse a cuatro condiciones sobre los vectores  $\mathbf{v}_{ij}$ . No obstante, vamos a introducir el uso de números complejos, a través de las funciones  $\phi_i$  definidas en el Lema 3.1.5, para facilitar la prueba. Consideremos las funciones

$$\begin{aligned} \phi_1 &= a_{10} - 2a_{02}u_1 + 3u_1^2 - 2b_{02}u_2 - 3u_2^2 - i(a_{01} - 2b_{02}u_1 + 2(a_{02} - 3u_1)u_2) \\ \phi_2 &= b_{10} - 2b_{02}u_1 + (2a_{02} - 6u_1)u_2 - i(b_{01} + 2a_{02}u_1 - 3u_1^2 + 2b_{02}u_2 + 3u_2^2) \\ \phi_3 &= c_{10} - 2c_{02}u_1 + c_{11}u_2 - i(c_{01} + c_{11}u_1 + 2c_{02}u_2) \end{aligned}$$

La parametrización es isoterma si se verifica que  $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$  (ver el Lema 3.1.4). De estas funciones, podemos extraer las funciones  $f$  y  $g$  tal y como se vió en la demostración del Lema 3.1.6. Obtenemos que

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{x}}(z) &= a_{10} + b_{01} + i(-a_{01} + b_{10}) \\ g_{\mathbf{x}}(z) &= \frac{c_{10} - ic_{01} + -(2c_{02} + ic_{11})z}{a_{10} + b_{01} + i(-a_{01} + b_{10})} = mz + n \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Si tomamos la expresión del coeficiente  $m$  en coordenadas polares como  $\rho e^{it}$  en  $\mathbf{C}$ , donde  $\rho > 0$  y  $t \in [0, 2\pi]$ . Consideremos la reparametrización isoterma de  $\mathbf{x}$  en coordenadas polares

$$\mathbf{y}(u_1, u_2) = \mathbf{x} \left( \frac{1}{\rho}(\cos(t)u_1 + \sin(t)u_2), \frac{1}{\rho}(-\sin(t)u_1 + \cos(t)u_2) \right).$$

Ahora las funciones  $f$  y  $g$  asociadas a  $\mathbf{y}$  quedan

$$f_{\mathbf{y}}(z) = a \in \mathbf{C}, \quad g_{\mathbf{y}}(z) = z.$$

Si expresamos ahora  $a$  en su forma polar como  $\mu e^{is}$  y tomamos  $T$  la transformación lineal de  $\mathbf{R}^3$  definida por el reescalado de factor  $\frac{1}{\mu}$  compuesto con la rotación de eje  $z$  y ángulo  $s$ , una propiedad conocida de la superficie de Enneper nos dice que la superficie definida por  $f_{\mathbf{y}}$  y  $g_{\mathbf{y}}$  es la imagen por  $T$  de la superficie de Enneper considerada en el Ejemplo 4. ■

Por tanto, tenemos caracterizadas las superficies bicúbicas mínimas de Bézier. Es más, todas son, salvo transformación afín, la superficie de Enneper. Cabe recordar que sólo hemos estudiado qué ocurre en dos casos concretos de superficies de Bézier ya que las condiciones que genera la minimalidad de estas superficies son difíciles de estudiar en general y escapan a los objetivos del presente documento. Así mismo se insta al lector interesado a consultar las referencias bibliográficas. Es más, las superficies de Bézier tienen sus aplicaciones correspondientes al, anteriormente mencionado, Problema de Plateau pues, bajo algunas circunstancias, son los puntos exteriores de la malla de puntos de control los que determinan los demás puntos al exigir que la superficie sea mínima.



# Bibliografía

- [1] L. Bernal González, G. López Acedo. *Análisis de Variable Compleja*. Editorial Universidad de Sevilla. Sevilla, 2015.
- [2] C. Cosín, J. Monterde. Bézier surfaces of minimal area. *Sloot P.M.A., Hoekstra A.G., Tan C.J.K., Dongarra J.J. Computational Science Lecture Notes in Computer Science*, vol. **2330**, 72-81. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002.
- [3] M. P. Do Carmo. *Differential Geometry of curves and surfaces*. Dover Publications. Mineola, Nueva York, 2017.
- [4] W. H. Meeks III, J. Pérez. The classical theory of minimal surfaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **48** (2011), 325-407.
- [5] R. Osserman. *A survey of minimal surfaces*. Dover Publications. Mineola, Nueva York, 1986.
- [6] M. M. Rodríguez. *Introducción a la Teoría de Superficies. Representación de Weierstrass*. Seminario de Geometría y Topología. Universidad de Granada.
- [7] I. Ruiz Donaire, M. Prado Rodríguez, J. Rebollo Bueno. *Resumen de la asignatura Geometría Aplicada*. Departamento de Geometría y Topología. Universidad de Sevilla.
- [8] *Resumen de la asignatura Geometría Local de Curvas y Superficies*. Departamento de Geometría y Topología. Universidad de Sevilla.